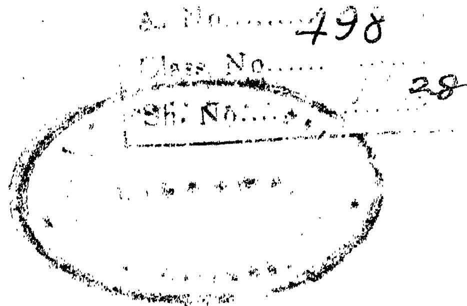

A. No. 498
Class No.
28
Sh. No.

# ENCYKLOPÆDIE

DER

# NATURWISSENSCHAFTEN

HERAUSGEGEBEN

VON

PROF. DR. W. FÖRSTER, PROF. DR. A. KENNGOTT, PROF. DR. A. LADENBURG, KUSTOS P. MATSCHIE, PROF. DR. A. SCHENK, GEH. SCHULRATH DR. O. SCHLÖMILCH, PROF. DR. W. VALENTINER, PROF. DR. A. WINKELMANN, PROF. DR. G. C. WITTSTEIN.

III. ABTHEILUNG

II. THEIL:

## HANDWÖRTERBUCH DER ASTRONOMIE

HERAUSGEGEBEN

VON

PROFESSOR DR. W. VALENTINER.

BRESLAU
VERLAG VON EDUARD TREWENDT
1898.

# HANDWÖRTERBUCH

DER

# ASTRONOMIE

UNTER MITWIRKUNG

VON

PROF. DR. E. BECKER-STRASSBURG, PROF. DR. E. GERLAND-KLAUSTHAL, PROF. DR. M. HAID-KARLSRUHE, DR. N. HERZ-HEIDELBERG, DR. H. KOBOLD-STRASSBURG, DR. N. v. KONKOLY-BUDAPEST, PROF. DR. C. W. PETERS (†), DR. E. v. REBEUR-PASCHWITZ (†), DR. FR. RISTENPART-HEIDELBERG, PROF. DR. W. SCHUR-GÖTTINGEN, PROF. DR. H. SEELIGER-MÜNCHEN, DR. C. STECHERT-HAMBURG, PROF. DR. W. WISLICENUS-STRASSBURG, DR. K. ZELBR-BRÜNN

HERAUSGEGEBEN

VON



Dr. W. VALENTINER

Ordentl. Professor der Astronomie an der Universität und Direktor der Astrometrischen Abtheilung der Grossherzoglichen Sternwarte zu Heidelberg

ZWEITER BAND

MIT 39 ABBILDUNGEN IM TEXTE UND 4 TAFELN

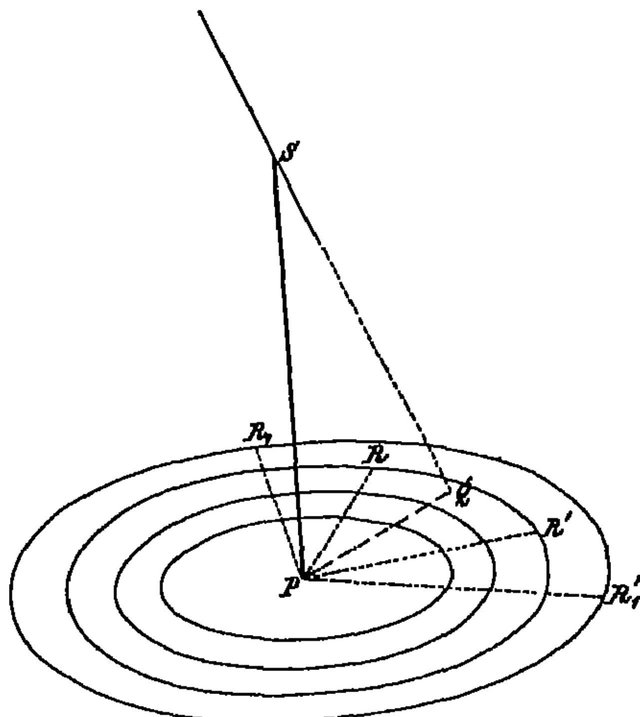



BRESLAU
VERLAG VON EDUARD TREWENDT
1898.

# Inhaltsverzeichniss.

Gnomon bis Mechanische Quadratur.

**Gnomon** ist das älteste und einfachste astronomische Instrument, welches bei allen alten Völkern zur Bestimmung der geographischen Breite (Polhöhe), der Schiefe der Ekliptik, der Richtung des Meridians und der Zeit verwendet wurde, und welches noch heute in einer etwas veränderten Aufstellung zur Bestimmung der Zeit bei den Sonnenuhren dient (Fig. 242). Es besteht aus einem auf einer ebenen horizontalen Fläche senkrecht befestigten Stabe von entsprechender Höhe. Die Anwendung ist sehr einfach. Der Schatten, den der Stab $SP$ wirft, wird sich im Laufe eines Tages drehen und dabei seine Länge ändern, der kürzeste Schatten fällt natürlich zur Zeit des *wahren Mittags*, zur Zeit des Durchganges der Sonne durch den Meridian (wenigstens sehr nahe, da auf die Mittagsverbesserung hierbei keine Rücksicht genommen zu werden braucht). Sei also der



(A. 242.)

kürzeste Schatten $PQ$, so ist $PQ$ die Richtung des Meridians, $SQP$ die Mittagshöhe der Sonne, und die Zeit, zu welcher der kürzeste Schatten beobachtet wurde, der wahre Mittag. Für einen gegebenen Gnomon wird natürlich jeder Schattenlänge eine gewisse Sonnenhöhe entsprechen und man kann leicht eine Tafel anlegen, aus welcher mittels der gemessenen Schattenlänge die Sonnenhöhe entnommen werden kann.

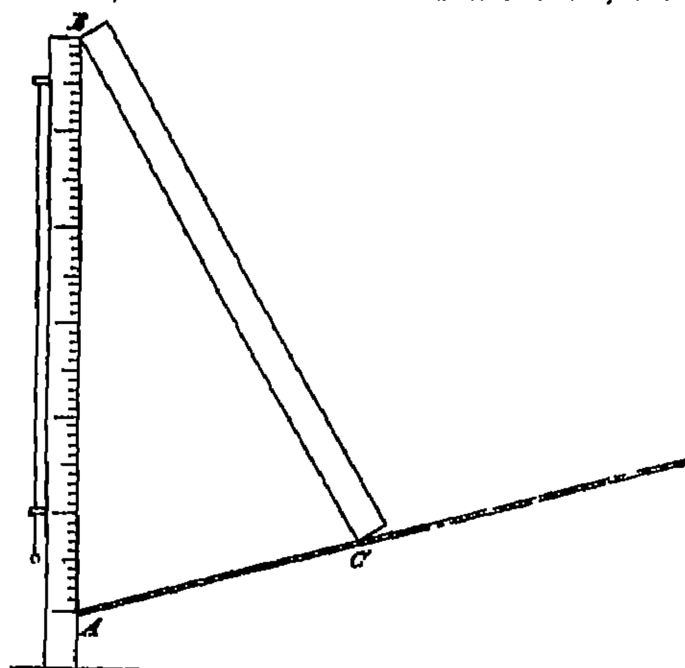
Zu gleichen Zeiten Vor- und Nachmittag wird die Schattenlänge dieselbe sein, und man kann daher zur Bestimmung des Meridians und des wahren

Mittags gleiche vor- und nachmittägige Schatten beobachten, was mittels einer Reihe concentrischer Kreise wesentlich erleichtert wird. Sind $PR$ und $PR'$ zwei gleich lange an demselben Tage beobachtete Schatten, so wird die Richtung des Meridians den Winkel $RPR'$ halbiren und die Zeit des wahren Mittags wird ebenfalls die Zwischenzeit, welche zwischen den beiden Beobachtungen liegt, halbiren (s. a. Zeitbestimmung aus correspondirenden Höhen). Zur Erhöhung der Genauigkeit kann man eine Reihe von gleichen Vor- und Nachmittagsschatten $R_1P$, $R_1'P$ u. s. w. beobachten.

In Folge des den Schatten umgebenden Halbschattens entsteht eine gewisse Ungenauigkeit der Beobachtung, welche dadurch verkleinert werden kann, dass der Stab an dem oberen Ende mit einem Loche versehen wird. Höhe des Gnomon und Länge der Schatten werden dann vom Fusspunkte desselben bis zur Mitte des Loches bezw. bis zur Mitte des in dem Schatten entstehenden lichten Fleckes gemessen.

Die mittäglichen Schatten werden natürlich je nach dem Stande der Sonne verschieden sein; im Sommer sind dieselben kürzer, im Winter länger, der längste mittägliche Schatten findet zur Zeit des Wintersolstitiums statt, der kürzeste zur Zeit des Sommersolstitiums. Man kann demnach hieraus die kleinste und grösste Meridianhöhe der Sonne ermitteln und aus denselben die geographische Breite des Beobachtungsortes und die Schiefe der Ekliptik; es ist nämlich die geographische Breite $\varphi = 90° - \frac{1}{2}(h_1 + h_2)$ und die Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = \frac{1}{2}(h_2 - h_1)$, wo mit $h_1$ und $h_2$ die beiden betreffenden Meridianhöhen bezeichnet worden.

Die Höhe des Gnomon war sehr verschieden; man findet Berichte von Obelisken, welche als Gnomone verwendet wurden, von 700 und mehr Fuss Höhe; noch 1467 wurde in Florenz ein Gnomon von 270 Fuss Höhe errichtet. Nach der Meinung einiger Egyptologen waren die grossen Pyramiden, wenn auch gerade nicht zu dem Zwecke errichtet, so doch als Gnomon verwendet.




(A. 348)

Zur Messung von Höhen anderer Gestirne als der Sonne ist der Gnomon nicht verwendbar, da sich sein Gebrauch auf die Messung der Schattenlänge stützt. Schon für den Mond bediente sich PTOLEMÄUS eines anderen Instrumentes, welches er *Regula parallactica* nannte, da er es zur Bestimmung der Mondparallaxe (aus den gemessenen Höhen in verschiedenen Deklinationen desselben) verwendete.

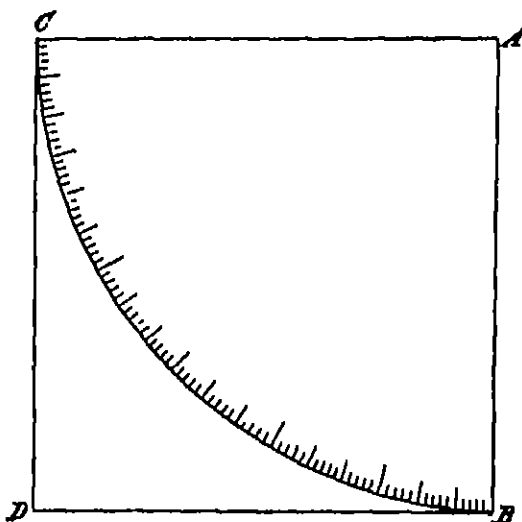
Später wurde dasselbe auch *Regula Ptolemaica* oder auch *Triquetrum* genannt (Fig. 243). Ein nach Ptolemäus »mindestens vier Ellen langer« Stab $AB$, welcher mit Hilfe eines Bleilotes vertical aufgestellt werden kann, ist in 60 Theile, und jeder derselben »in so viele Untertheile als möglich« getheilt. An dem oberen Ende $B$ dreht sich ein anderer ebenso langer, unbiegsamer Stab $BC$, dessen zweites Ende $C$ längs eines dritten, bei $A$ ebenfalls drehbaren Stabes $AC$ geführt wird. Da die Drehung von $BC$, sowohl in der Verticalebene, als auch um den Stab $AB$ herum (in verschiedenen Verticalebenen) erfolgen kann, so kann man längs $BC$ hinweg auf einen beliebigen Ort des Himmels visiren, und erhält dann in dem zur Sehne $AC$ gehörigen Centriwinkel $CBA$ die Zenithdistanz des Gestirnes. Es ist nämlich

$$AC = chord\ CBA$$

oder in unserer Schreibweise

$$AC = 2 \sin \tfrac{1}{2} CBA,$$

Die Länge von $AC$ kann dann an der Theilung von $AB$ ermittelt werden, indem man den Stab $AC$ durch Drehung um $A$ längs $AB$ anlegt. Da Ptolemäus eine Sehnentafel construirt hatte, in welcher die Länge der Sehnen in Theilen ausgedrückt ist, von denen 60 auf den Halbmesser gehen, so erklärt sich daraus die Theilung von $AB$ in 60 Theilen und deren Untertheile. Copernicus vereinfachte die Ablesung dadurch, dass er die Theilung direkt auf dem Stabe $AC$ auftrug.



(Fig. 244.)

Bei dem Gnomon und der Regula parallactica wurden die zu bestimmenden Zenithdistanzen aus einer trigonometrischen Linie derselben (bei dem ersten aus der Tangente, bei dem zweiten aus der Sehne) ermittelt. Nebst diesen hatte aber Ptolemäus auch an Instrumenten beobachtet, welche direkt die Zenithdistanzen abzulesen gestatteten. Eins — das einfachste — bestand aus einem behauenen prismatischen Steine (Fig. 244), dessen eine Seite $ABDC$ in die Ebene des Meridians gebracht und dessen eine Kante $AB$ durch ein Bleiloth vertical gestellt wurde. Um den Punkt $A$, in welchem ein Stift senkrecht zur Fläche $ABDC$ befestigt war, als Mittelpunkt, war eine Kreistheilung $BC$ angebracht. Zur Beobachtung des mittäglichen Schattens wurde ein zweiter Stift längs der Theilung $BC$ so lange verschoben, bis der Schatten des Stiftes $A$ auf denselben fiel; der abgelesene Theilstrich gab, wenn die Theilung von $B$ ausging, sofort die Zenithdistanz der Sonne. Peurbach, welcher dieses Instrument *Gnomon geometricus* oder *Quadratum geometricum* nannte, ersetzte jedoch die Kreistheilung wieder durch die viel leichter herzustellende Theilung der Seiten $BD$, $CD$, sodass die Zenithdistanz bezw. Höhe der Sonne durch ihre Tangente gegeben wird. Peurbach gab auch eine Tafel, welche aus der Ablesung (jede der beiden Seiten ist bei ihm in 1200 Thle. getheilt) die Winkel gab (Tafel von Antitangenten).

N. Herz.

**Heliometer.** Erste Vorschläge zur Herstellung von Heliometern. Ehe das mit dem Namen Heliometer bezeichnete Instrument sich Eingang in die astronomische Beobachtungskunst verschafft hatte, war man bei der Bestimmung des gegenseitigen Abstandes zweier Gestirne hauptsächlich auf das Fadenmikrometer angewiesen. Bei diesem Apparat wurden die festen Fäden senkrecht zur täglichen Bewegung der Gestirne gestellt und daran zur Bestimmung des Rectascensions-Unterschiedes die Durchgangszeiten wahrgenommen, ferner wurden die Deklinations-Unterschiede dadurch bestimmt, dass man den vorangehenden Stern auf einem festen Faden entlang laufen liess und dann auf den nachfolgenden durch eine Mikrometerschraube einen beweglichen Faden einstellte, so dass man aus der Ablesung der Schraubentrommel in Verbindung mit einer zweiten Ablesung, die der Coincidenz des beweglichen und des festen Fadens entsprach, den Deklinations-Unterschied in Einheiten der Schraubenumdrehung ausgedrückt bestimmen konnte. Nach demselben Verfahren war auch der Durchmesser eines Himmelskörpers, z. B. der Sonne, in zwei auf einander folgenden Richtungen, nämlich parallel und senkrecht zum Himmelsäquator zu bestimmen. Dagegen versagte die Anwendung des Fadenmikrometers bei der Bestimmung des Durchmessers in einer beliebigen Richtung gegen die tägliche Bewegung so lange man die zu Anfang dieses Jahrhunderts durch FRAUNHOFER eingeführte Uhrbewegung der Aequatoreale noch nicht kannte.

Aus dem Bedürfniss, den Durchmesser eines Himmelskörpers in jeder beliebigen Richtung zu bestimmen, entstand bei dem französischen Astronomen und Geodäten BOUGUER in Paris der Gedanke, durch Anwendung zweier in demselben Rohre befindlicher Objective von demselben Himmelskörper ein Doppelbild herzustellen, welches durch eine messbare Verschiebung eines der Objective so angeordnet werden konnte, dass sich die Ränder der beiden Scheiben berührten. War diese Berührung einmal hergestellt, so musste sie auch erhalten bleiben, wenn durch die tägliche Bewegung das Gestirn über das Gesichtsfeld des Fernrohres vorüberzog. Die erste Nachricht über diesen Vorschlag von BOUGUER findet sich in der »Histoire de l'academie royale des sciences«, Année 1748, pag. 87, und in den »Mémoires de l'academie«, pag. 11, und nach der hier gegebenen Beschreibung bestand die vorgeschlagene Einrichtung darin, zwei volle Objective anzuwenden, die so standen, dass die Ränder der neben einander sichtbaren Sonnenbilder sich berührten. Bei der scheinbaren Vergrösserung der Sonnenscheibe im Winter mussten die Bilder dann übereinander treten, im Sommer dagegen einen freien Raum zwischen sich lassen und diese kleinen Segmente oder Zwischenräume sollten mit einem Fadenmikrometer gemessen werden, um additiv oder subtractiv zu dem festen Abstande der beiden Objectivmittelpunkte hinzugefügt, auf diese Weise den veränderlichen Sonnendurchmesser zu geben. Würde man die Objective noch weiter gegen einander verschiebbar machen, so könnte man auf diese Weise Abstände von 3—4° messen.

Einige Jahre später machte SHORT in den »Philosophical Transactions« der Royal Society in London, Vol. 48, pag. 165, darauf aufmerksam, dass eine solche Erfindung von SAVERY in Exeter schon im Jahre 1743 angezeigt worden sei und zwar hat SAVERY in einem hier wörtlich mitgetheilten Vortrage den Vorschlag gemacht, ein Objectiv durch drei einander parallele Schnitte in vier Segmente zu zerlegen und entweder die beiden äusseren oder die beiden inneren Segmente in der Weise aneinander zu befestigen, dass die von ihnen entworfenen Sonnenbilder sich mit ihren Rändern nahezu berühren.

In den »Phil. Tr. for 1753« Vol. 48, part. I, pag. 178, wird ferner von John Dollond der Vorschlag gemacht, ein zur Messung beliebiger Abstände verwendbares Heliometer dadurch herzustellen, dass übereinstimmend mit der jetzt gebräuchlichen Form dieses Instrumentes ein Objectiv durch einen Schnitt durch den Mittelpunkt und in der optischen Axe in zwei Hälften von der Form einer halben Kreisfläche zerlegt und den einzelnen Theilen eine messbare Bewegung in der Richtung des gemeinschaftlichen Halbmessers gegeben wird. Danach könnte man Dollond als den Erfinder der gegenwärtigen Form des Heliometers ansehen (man vergl. noch seine nähere Auseinandersetzung »Phil. Tr. for 1753«, Vol. 48 part. II, pag. 551), wenn nicht La Gournerie in den »Comptes rendus« der Pariser Akademie, Band 88, pag. 215, darauf aufmerksam gemacht hätte, dass auch diese endgültige Form des Instrumentes schon von Bouguer im Jahre 1748 in der »Bibliothèque impartiale« Vol. III, pag 214, in Vorschlag gebracht worden sei.

In diesen Schriften ist auch mehrfach die Rede von der Verbindung eines Heliometerobjectivs mit einem Spiegelteleskop, jedoch hat, soweit bekannt, eine solche Einrichtung keine praktische Bedeutung erlangt.

Die Beobachtungen von Triesnecker an einem Heliometer. Wenn auch Bouguer als der eigentliche Erfinder des Heliometers in seiner jetzigen Gestalt anzusehen ist und er dem Instrument mit Rücksicht auf die Anwendung auf die Sonne diesen Namen gegeben hat, so wird doch Dollond als derjenige zu bezeichnen sein, der ein solches Instrument zum ersten Male zum Gebrauch für die Astronomen hergestellt hat, und fernerhin muss man das Verdienst, zum ersten Male eine grossere Reihe von werthvollen Beobachtungen mit solchem Instrumente angestellt zu haben, unzweifelhaft dem Wiener Astronomen Franz von Paula Triesnecker zuschreiben. Das von ihm angewandte Dollond'sche Objectivmikrometer ist in den »Wiener Ephemeriden« für 1796, pag. 314, näher beschrieben. Dasselbe war an einem Fernrohr von 3½ Fuss Länge und 2½ Zoll Oeffnung angebracht, und die Scala zur Messung der Stellung der Objectivhälften war in englische Zoll und deren Unterabtheilungen eingetheilt. Die beiden Objectivhälften bewegten sich von der optischen Axe aus gleichzeitig nach entgegengesetzten Seiten, und während einer der Objectivschieber eine Scala trug, war an dem anderen Schieber ein Index angebracht, der auf den Nullpunkt der Scala zeigte, wenn die optischen Axen der beiden Objectivhälften zusammenfielen und das Fernrohr nur ein einfaches Bild des Gestirnes gab. Eine Zeichnung eines Instrumentes dieser Construction findet sich in Pearson's »Practical Astronomy« und auch Lalande's »Astronomie« Vol. II enthält Beschreibungen und Zeichnungen alterer Heliometer. Die von Triesnecker an diesem Instrument angestellten Beobachtungen, namentlich über die Stellung des Jupiterstrabanten gegen den Planeten würden ihres Alters wegen einen hohen Werth besitzen, wenn zuverlässige Daten zur Verwandlung der Scalenablesungen in Bogenmaass vorhanden wären; aber es lässt sich nachträglich Nichts darüber ermitteln, da wohl der Dollond'sche Refractor, aber nicht mehr der Mikrometer-Apparat auf der Wiener Sternwarte vorhanden ist.

Die kleineren Fraunhofer'schen Heliometer. Der nächste Schritt auf diesem Wege war die Herstellung einer Anzahl von kleineren Heliometern durch Fraunhofer in den ersten Jahrzehnten dieses Jahrhunderts für die Sternwarten in Berlin, Breslau, Göttingen, Gotha und anderen Orten, aber abgesehen von einigen Beobachtungen an den Instrumenten in Breslau und Berlin durch Brandes und Winnecke in den Zwanziger und Fünfziger Jahren und einigen Kometen

beobachtungen in Gotha von HANSEN haben diese Instrumente erst später Bedeutung erhalten als sie von REPSOLD in Hamburg mit neuen Einrichtungen versehen auf den Venusdurchgangs-Expeditionen in den Jahren 1874 und 1882 verwandt wurden. Die kleineren FRAUNHOFER'schen Heliometer haben eine Brennweite von 1·16 *m* und eine Objectivöffnung von 76 *mm*. Die beiden Objectivhälften lassen sich mit Hilfe von Stangen bewegen, die neben dem Rohre hin zum Ocular gehen, und durch Uebertragung ihrer Drehung werden feine Mikrometerschrauben in Thätigkeit gesetzt, die einerseits die Bewegung der Objectivschlitten in einer zur optischen Axe senkrechten Ebene ausführen und andererseits durch die Zahl ihrer Umdrehungen und der an einer Trommel abgelesenen Unterabtheilungen ein Maass für die Grösse der Bewegung geben. Um den Spalt zwischen den beiden Objectivhälften in die Richtung der beiden gegen einander zu bestimmenden Gestirne zu bringen, ist der ganze Objectivkopf um die optische Axe mit Hilfe einer ebenfalls am Rohre entlang führenden Stange drehbar und die Grosse der Drehung wird mit Hilfe zweier Nonien an einem Kreise abgelesen, der sich nahe dem Objectiv am Umfange des Fernrohres befindet. Das Material der Rohre war, wie überhaupt bei den meisten Fernröhren aus älterer Zeit, Holz und erst in Veranlassung der Expeditionen wurde dafür Eisenblech gewählt. Schon diese alteren Instrumente hatten parallactische Aufstellungen, und mit den später eingeführten Verbesserungen haben sie in Bezug auf Abstandsmessungen Resultate geliefert, welche denen der vollkommensten und besten Apparate der Neuzeit durchaus nicht sehr nachstehen, und nur die Kleinheit der Objective legte eine Beschränkung in der Wahl der zu beobachtenden Gegenstände auf.

Es wird hier die Bemerkung am Platze sein, dass bei dem Gebrauche eines Heliometers unter allen Umständen ein Verzicht auf die Helligkeit geleistet werden muss, denn so wie das Heliometer als solches in Thätigkeit tritt und die beiden Hälften des Objectivs gegen einander verschoben werden, muss die Helligkeit des von einer einzelnen entworfenen Bildes auf ein Halb reducirt werden; beispielsweise wirkt die einzelne Hälfte eines sechszölligen Heliometers nur noch wie ein Fernrohr mit der Oeffnung $\sqrt{\frac{6\times 6}{2}} = 4{\cdot}24$ Zoll, also etwa wie ein vierzölliges Objectiv, von Deformationen der Bilder abgesehen, von denen später die Rede sein wird.

Das Königsberger Heliometer. Das grösste Ereigniss auf dem Gebiete der Anwendung des Heliometers in der astronomischen Beobachtungskunst war die Lieferung des Heliometers von 6 Zoll Oeffnung für die Königsberger Sternwarte durch FRAUNHOFER im Jahre 1829, von wann ab es dann in den Händen BESSEL's in den folgenden Jahrzehnten zu einer Reihe der wichtigsten Untersuchungen gedient hat. Die Beschreibung desselben findet sich theils in den »Astronomischen Nachrichten«, theils in den »Astronomischen Beobachtungen der Königsberger Sternwarte«, zu einer Besprechung wird es sich jedoch empfehlen, die Stellen nach dem Werke anzugeben: »Abhandlungen von FRIEDRICH WILHELM BESSEL«, herausgegeben von RUDOLF ENGELMANN. 3 Bde. Leipzig 1875. Abbildungen des Königsberger Heliometers findet man u. A. in den »Astronomischen Nachrichten« Bd. 8 und in Bd. 2 der soeben genannten Abhandlungen.

Im 2. Bde. des Werkes, pag. 95, findet sich zunächst ein Aufsatz von BESSEL betitelt: »Vorläufige Nachricht von einem auf der Königsberger Sternwarte be-

findlichen grossen Heliometers. Hiernach begann FRAUNHOFER mit der Herstellung des Instrumentes im Jahre 1824 und von ihm rührt das Objectiv und die Einrichtung des Heliometer-Apparates her; da sein Tod aber schon 1826 erfolgte, so war das Durchschneiden des Objectivs und die Vollendung der parallactischen Aufstellung seinem Nachfolger UTZSCHNEIDER vorbehalten.

Es mag an dieser Stelle erwähnt werden, auf welche Weise ein Heliometerobjectiv hergestellt wird. Der erste Schritt besteht natürlich darin, ein gewöhnliches achromatisches Objectiv, welches aus einer Crown- und einer Flintglaslinse besteht, herzustellen und es dann durch einen Schnitt in zwei halbe Objective zu zerlegen. So lange man noch mit kleineren Linsen zu thun hatte, mag wohl der meistens eingeschlagene Weg derjenige gewesen sein, jede der beiden Linsen rund herum mit einem Diamant zu ritzen und durch einen Schlag mit einem hölzernen Hammer die beiden Hälften von einander zu trennen. Bei den in den letzten Jahrzehnten hergestellten grösseren Heliometerobjectiven, deren Werth mehr als 2000 Mark beträgt, dürfte diese Trennungsweise aber wohl mit Gefahren für die Linsen verbunden sein, und es ist daher das nachfolgend beschriebene Verfahren an die Stelle getreten. In eine eiserne Kapsel von demselben Durchmesser wie der des Objectivs wird zunächst eine gewöhnliche Glasplatte gelegt, deren untere Fläche eben und deren obere entsprechend der Krümmung einer der äusseren Flächen des darüber zu legenden Objectivs ausgehöhlt ist, und den Abschluss nach oben bildet eine zweite plan-concave Glasplatte. Durch den Mantel des eisernen Cylinders gehen nun senkrecht zur Grundfläche zwei schmale, diametral gegenüber stehende Schlitze hindurch, und durch diese wird die Schneide einer feinen mit Fett und Diamantstaub behafteten Stahlsäge hin und her geführt, bis beide Linsen des Objectivs und die werthlosen, zur Befestigung dienenden, darüber und darunter liegenden Glasscheiben durch einen feinen Schnitt zerlegt sind. Werden nun die einzelnen Objectivhälften in halbkreisförmige Fassungen gebracht und diese mit den Objectivschiebern verbunden, so ist noch die Einrichtung zu treffen, dass durch kleine, zur Schnittlinie senkrecht wirkende Schrauben die optischen Mittelpunkte der beiden Hälften genau mit einander zum Zusammenfallen gebracht werden können. Es mag hier ferner noch die allgemein gültige Bemerkung hinzugefügt werden, dass eine etwa mit der Zeit oder bei verschiedener Neigung des Fernrohres und Richtung des Spaltes wieder auftretende seitliche Entfernung der Objectivmittelpunkte bei grossen Sternabständen einen nahezu verschwindenden Einfluss hat, bei sehr kleinen Abständen, wie z. B. Doppelsternen einen Fehler von erheblichem Betrage gegenüber der zu messenden Grösse selbst hervorbringen kann, dass aber durch Messung von Positionswinkeln engerer Doppelsterne in zwei symmetrischen Stellungen der Objectivhälften, oder wie der übliche Ausdruck lautet, vor und nach dem Durchschrauben aus dem halben Unterschiede der gemessenen Richtungen in Verbindung mit den Distanzmessungen der Abstand der beiden Sterne berechnet werden kann.

Nunmehr wieder zu dem augenblicklichen Gegenstande, nämlich der Einrichtung des Königsberger Heliometers zurückkehrend, ist zu bemerken, dass das Instrument im October 1829 aufgestellt werden konnte. Das Fernrohr hat 8 Par. Fuss oder 2·6 *m* Brennweite und 70 Linien oder 158 *mm* Oeffnung. Die beiden Objectivhälften können jede für sich durch Schrauben bewegt werden, die zugleich auch zur Messung der Grösse der Bewegung dienen, indem sie am Ende mit Zähltrommeln versehen sind, an denen Hundertel-Umdrehungen direkt abgelesen und Tausendtel geschätzt werden, so dass die Ablesungen bis auf

$\frac{1}{10}$ Secunde in Bogenmaass gehen. Eine andere Vorrichtung, mit welcher man die Verschiebung der Objectivschlitten durch Scalen und Mikroskope messen kann, ist bei den Beobachtungen nicht zur Verwendung gekommen. Die Verschiebung der Objectivhälften geht in einer vollkommenen, auf der Axe des Rohres senkrecht stehenden Ebene vor sich und erstreckt sich auf 56 Bogenminuten nach jeder Seite, so dass man einen Raum von 1° 52′ übersehen kann. BESSEL hat schon damals FRAUNHOFER den Vorschlag gemacht, die Objectivhälften auf einer Cylinderfläche beweglich zu machen, deren Axe durch den Brennpunkt des Objectivs geht, wodurch die später zu erwähnenden Untersuchungen über optische Ungleichheit unnöthig geworden wären, und bei den neuen Heliometern ist diese damals mit constructiven Schwierigkeiten verbundene Einrichtung überall eingeführt worden. Das Ocular des Fernrohres kann ebenso wie eine Objectivhälfte senkrecht zur optischen Axe verschoben werden und die Richtung der Verschiebung wird durch einen eingetheilten Kreis angegeben. Die 5 Oculare haben die Vergrösserungen 45, 91, 115, 170 und 290. Gegenüber den ausserordentlichen Vortheilen, welche die Einrichtungen der neueren Heliometer gewähren, die Ablesung der Objectivstellung und des Positionskreises vom Oculare aus besorgen zu können, musste das Königsberger Heliometer für jede Ablesung um die Deklinationsaxe gedreht werden, bis das Objectivende dem Auge des Beobachters nahe war. Dadurch entstand nicht nur eine grosse Unbequemlichkeit, sondern noch das Bedenken, dass durch die Veränderung der Schwerewirkung auch eine Veränderung der Stellung der Objectivschlitten eintrat. Bei dem ähnlich construirten Bonner Heliometer ist eine Einrichtung angebracht, die Ablesung mit Hilfe eines kleinen Fernrohres vom Ocular aus zu besorgen.

Die von einem halben Objectiv entworfenen Bilder eines Sterns sind bekanntlich nicht kreisförmig, sondern haben eine etwas birnförmige Gestalt, deren Längsrichtung zur Richtung des Spaltes senkrecht steht. Diese Eigenschaft muss sich besonders stark bei hellen Sternen zeigen und bei dem neuen Göttinger Heliometer verschwindet dieser Eindruck erst bei Sternen von der siebenten Grösse ab, aber BESSEL hat gezeigt, dass die dadurch entstehenden kleinen Verschiebungen in der Lage der Sternbilder bei symmetrischer Anordnung der Beobachtungen vor und nach dem Durchschrauben eliminirt werden.

Die Art und Weise, wie an einem Heliometer Distanzen und Positionswinkel gemessen werden, ist von der Beschaffenheit des zu beobachtenden Gegenstandes abhängig. Bei engen Doppelsternen, die nur einen kleinen Theil des Gesichtsfeldes einnehmen, bringt man die vier von beiden Objectivhälften gebildeten Lichtpunkte durch Drehung in Distanz und Positionswinkel zu gleichen Abständen in eine gerade Linie, liest beide Coordinaten ab und wiederholt dann die Messung in umgekehrter Richtung, um die jedem erfahrenen Beobachter bekannten systematischen Unterschiede in den Einstellungen zu vermeiden; darauf werden die beiden Objectivhälften, wie in Zukunft immer kurz gesagt werden wird, durchgeschraubt und nun diese beiden Beobachtungen wiederholt, so dass man in jeder Coordinate vier Ablesungen erhält und bei der Einrichtung der Ablesevorrichtungen am Königsberger Heliometer maass BESSEL auf diese Weise den vierfachen Abstand.

Handelt es sich dagegen um die Messung des Durchmessers eines Planeten, so bringt man die Bilder der Scheiben mit abwechselnder Drehungsrichtung in Berührung mit einander und erhält daher für eine Messung ebenfalls vier Ab-

lesungen. Soll die Lage des Trabanten eines Planeten gegen den letzteren bestimmt werden, so würde es am einfachsten sein, das Bild des Trabanten nach dem Augenmaass in die Mitte des von der anderen Hälfte herrührenden Bildes des Planeten zu stellen, jedoch ist man dabei zu sehr auf das Augenmaass angewiesen und man wird daher in den meisten Fällen besser thun, mit Bessel den Trabanten nach einander auf zwei einander gegenüber stehende Punkte des Randes zu bringen, indem man ihn vorher nach dem Augenmaass in die Mitte des Planeten einstellt und ihn dann durch Drehung in Position oder in Distanz je nach dem Zweck der Messung auf den Rand bringt. Ist das Licht des Planeten zu hell gegenüber dem des Trabanten, so dass letzterer überstrahlt wird, so kann man die den Planeten abbildende Objectivhälfte mit einem feinen Drahtgitter überdecken. Bei der Bestimmung der gegenseitigen Lage zweier, weit entfernter Sterne kann das für Doppelsterne beschriebene Verfahren nicht mehr zur Anwendung kommen, da man nicht mehr alle vier Lichtpunkte im Gesichtsfelde übersieht, sondern nur zwei, nämlich bei einem Sternpaare *a b* etwa das vom Objectiv I entworfene Bild von *a* und das von II entworfene Bild von *b*. Das einfachste Verfahren wäre nun offenbar, diese beiden Bilder unmittelbar mit einander zusammenfallen zu lassen und bei verschiedener Richtung der Schraubendrehung und mit Durchschrauben zusammen vier Einstellungen zu machen. In Wirklichkeit ist dieses Verfahren aber nicht zulässig, denn bringt man etwa eine kleinere Sternscheibe auf eine grössere, so fehlt jedes Urtheil darüber, ob die Bedeckung der Bilder eine centrale ist. Es tritt deshalb nachfolgendes Beobachtungsverfahren an die Stelle. Man nähert die beiden Sternbilder einander und führt bei Distanzmessungen mit der Positionsschraube kleine Schwankungen aus, so dass die Sternbilder bald nach der einen, bald nach der anderen Seite ein wenig von einander abweichen, und wird dann bemerken, dass der Weg, den ein Lichtpunkt gegen den anderen beschreibt, als gerade Linie erscheint, wenn die Punkte in der Ruhelage sich genau bedecken würden. Nach Vollendung einer Messung bringt man die Bilder zuerst absichtlich nach der entgegengesetzten Seite etwas aus einander, und bei der Messung der Positionswinkel verfährt man ganz ähnlich, indem man dann die Einstellungen durch Schwingungen mit der Distanzschraube prüft.

Dieses Beobachtungsverfahren führt bei Messungen entfernter Sternpaare erfahrungsgemäss zu sehr genauen Resultaten, dagegen unterliegt es einer Beschränkung bei kleineren Sternabständen. Sieht man nämlich beide von einer Hälfte entworfenen Sternbilder im Gesichtsfelde, so ist es vorzuziehen, die Sternbilder in der Ruhelage des Instrumentes mit einander zu vergleichen, indem man z. B. das Bild des Sternes *a* der Hälfte II so neben das Bild des Sternes *b* in der Hälfte I setzt, dass ein rechtwinkliges Dreieck mit einer so kurzen Cathete entsteht, dass man gerade im Stande ist, ihre rechtwinklige Stellung zur längeren Cathete *ab* beurtheilen zu können und zwar so, dass man etwa bei der ersten Messung *a* über *b* und bei der zweiten *a* unter *b* setzt. Mit Hilfe der am Positionskreise abgelesenen Amplituden kann man dann die kleine Reduction, die aus der Ausweichung im Positionswinkel entsteht, berechnen (siehe darüber Schur, »Astronomische Nachrichten«, Bd. 94). Etwas anders hat J. Franz bei seinen Messungen weiterer Doppelsterne am Königsberger Heliometer verfahren, indem er die vier Sternbilder zu einem Trapez mit einer sehr kurzen Diagonale vereinigt, und es lässt sich zeigen, dass in diesem Falle eine Reduction wegen der Grösse der Amplitude in Positionswinkel nicht erforderlich ist (»Astronom. Nachr.«, Bd. 111).

Das wichtigste Erforderniss bei der Anwendung eines Heliometers ist die Verwandlung der in Schraubenumdrehungen oder in Scalentheilen abgelesenen Distanzmessungen in Bogenmaass, und es stehen dazu mehrere Wege offen. Eines dieser Verfahren besteht darin, sowohl die Höhe eines Schraubenganges oder eines Scalentheiles als auch die Brennweite des Objectivs in derselben Maasseinheit auszudrücken. Die Kenntniss der Brennweite gewinnt man durch die bekannte Methode der Bestimmung der vierfachen Brennweite. Diese Methode wandte BESSEL auf das Königsberger Heliometer an und fand nach wiederholten Versuchen für die Brennweite des Objectivs 1134·134 Par. Linien bei + 12°·8 C. mit einem wahrscheinlichen Fehler von ± 0$^L$·015 oder einem 75000tel der ganzen Brennweite. Ferner bestimmte er die Höhe eines Schraubenganges durch Vergleichung mit einem auf dem Objectivschieber II befestigten Stahlblatt, worauf eine Länge von 24 P. L. verzeichnet war, für verschiedene Stellen der Schraube und fand danach 82·5212 Windungen eines Schraubenganges = 24·00006 P. L. und aus beiden Zahlen für die Normaltemperatur von 16°·25 C. den Winkelwerth einer Umdrehung $R$ = 52''·89820.

Die Kenntniss dieser wichtigen Constanten verschaffte sich BESSEL ferner noch auf folgende Weise:

1. Beobachtung der Stellung eines Fadens im Brennpunkte durch das Objectiv hindurch. Zu diesem Zwecke wurde das Heliometerfernrohr mit dem Objectiv nach unten vertical gestellt und darunter ein REICHENBACH'scher Theodolit mit Höhenkreis gebracht. Die Objectivhälfte I wurde in die Axe des Heliometers gebracht und die Hälfte II der Reihe nach um — 5 und + 5, — 10 und + 10 u. s. w. bis — 60 und + 60 Schraubenwindungen verschoben und mit dem Theodoliten die entsprechende Entfernung der beiden Bilder des Fadens gemessen. Das Resultat war $R$ = 52''·90209 m. F. ± 0''·00275.

2. BESSEL hatte hauptsächlich in den Jahren 1838—40 in der Plejadengruppe die Abstände einer grossen Zahl von Sternen gegen Alcyone gemessen und hiervon wurden zehn besonders häufig beobachtete Sterne ausgewählt, deren Oerter durch Durchgangsbeobachtungen am Meridiankreise festgelegt waren. Die Vergleichung ergab für den Schraubenwerth $R$ = 52''·88127 ± 0''·00880.

3. Es wurden sechs Sterne gewählt, die nahezu in einem durch die Plejaden hindurchgehenden grössten Kreise liegen und mit $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ bezeichnet. Von diesen sind die Sterne $a$, $c$, $f$ von BUSCH zu wiederholten Malen in den Jahren 1839 und 1840 am Meridiankreise bestimmt, und SCHLÜTER hatte zwischen je zwei auf einander folgenden Sternen Abstände und Positionswinkel ebenfalls in den Jahren 1839 und 1840 am Heliometer gemessen. Die Vergleichung der Bogenlängen $ac$, $cf$ und $af$, nach den Beobachtungen an beiden Instrumenten berechnet, ergab das Resultat: $R$ = 52''·89036 ± 0''·00314.

Das Resultat der Bestimmung eines Schraubenwerthes nach verschiedenen Methoden ist also das folgende:

| | | |
|---|---|---|
| 1. Beobachtungen mit dem Theodolithen | 52''·90209 m. F. | ±0''·00275 |
| 2. Beobachtungen von Plejadensternen | 52 ·88127 | ±0 ·00880 |
| 3. Beobachtungen von 6 Sternen im grössten Kreise | 52 ·89036 | ±0 ·00314 |
| 4. Messung der Brennweite und einer Schraubenwindung | 52 ·89329. | |

Die Uebereinstimmung ist eine befriedigende. BESSEL entschied sich aber doch dafür, das Ergebniss der Messung der Brennweite und der Schraubenhöhe allein anzunehmen, nämlich $R$ = 52''·89329 in der Wärme 50° F. Die Reduction der bei einer anderen Temperatur $\tau$ gemessenen Abstände wird mit einem Coëfficienten bestimmt, der sich aus der Beobachtung von zehn Plejadensternen

gegen Alcyone zwischen den Temperaturen — 1°·5 und 74° F. oder — 18° und + 23° C. ergeben hat. Demnach ist der Ausdruck für die Verwandlung der Schraubenumdrehungen in Kreisbogen $\frac{52''\cdot89820}{1 + (\tau - 50)\,0\cdot0000087765}$.

Indessen drückt schon BESSEL über die Richtigkeit des hier angewandten Temperatur-Coefficienten einen Zweifel aus, indem er über das bei sehr niedrigen Temperaturen entstehende Zittern der Sternbilder klagt und das Verharten des Oeles an den Schrauben befürchtet. Beobachtungen von SCHLÜTER allein, bei denen die sehr tiefen Temperaturen vermieden sind, ergeben für die Temperaturcoëfficienten anstatt des von BESSEL angewandten, nämlich rund 878 Einheiten der achten Decimale, einen solchen von 1243 Einheiten und spätere Untersuchungen von AUWERS haben dafür 854 ergeben, welche Zahl wohl die zuverlässigste und auch rückwärts für die Beobachtungen zu BESSEL's Zeit anzuwenden ist. Mit diesem Temperatur-Coefficienten berechnet ist der berichtigte Schraubenwerth nach der Brennweiten-Bestimmung $R = 52''\cdot89456$. Es ist bei der Vergleichung neuerer Resultate aus Heliometer-Beobachtungen mit den BESSEL'schen mehrfach die Rede davon gewesen, ob es nicht zweckmässiger sei, anstatt des nur einmal aus physikalischen Experimenten hervorgehenden Schraubenwerthes den auf Sternbeobachtungen in der Nähe der Plejaden beruhenden Werth anzunehmen, (vergl. SCHUR, »Bestimmung der Masse des Planeten Jupiter«, 1882, und ELKIN, »Triangulation der Plejaden«. New Haven 1887), jedoch hat sich keine Veranlassung ergeben, davon abzuweichen. In den letzten Jahren hat J. FRANZ den Winkelwerth aus Beobachtungen der für die Venusdurchgangs-Expeditionen und auch an den neueren Heliometern für diesen Zweck verwandten Sterne im grössten Kreise im Cygnus und in der Hydra beobachtet, und es hat sich der Werth $R = 52''\cdot87567$ ergeben, der von der BESSEL'schen Annahme nicht unerheblich abweicht, dagegen wieder ziemlich nahe einer Neuberechnung älterer Bestimmungen kommt, nämlich

aus SCHLÜTER's Plejadenbeobachtungen 52''·88460
SCHLÜTER's Taurusbogen 52·87584.

Diese Unterschiede zwischen den verschiedenen Bestimmungen des Schraubenwerthes des Königsberger Heliometers sind von grossem Interesse für diejenigen Astronomen, die sich mit der Vergleichung dieser älteren Beobachtungen mit solchen an neueren Heliometern beschäftigen, aber man wird wohl bei dem von BESSEL selbst angenommenen und von AUWERS verbesserten Werthe, nämlich 52''·89456 stehen bleiben müssen, weil man nicht wissen kann, ob die Brennweite eines Objectivs auf so lange Zeit constant bleibt und sich nicht durch allmählich eintretende kleine Veränderungen des Druckes, mit welchem das Objectiv in seiner Fassung gehalten wird, um Grössen, wie sie hier in Frage kommen, verändern kann. Da die grösste am Königsberger Heliometer messbare Distanz etwa 60 Umdrehungen beträgt, so bringt der Unterschied der Annahmen 52''·89456 nach AUWERS und 52''·87567 nach FRANZ oder 0''·01889 im äussersten Falle den Unterschied von etwa 1'' hervor. Man wird daher bei Beobachtungen aus der älteren Zeit den BESSEL'schen Werth mit der Verbesserung von AUWERS anwenden und bei der gegenwärtigen und ferneren Benutzung den Schraubenwerth mit FRANZ aus Sternbeobachtungen bestimmen.

Es erübrigt noch einige Worte über den Einfluss der Ocularstellung auf die Distanzmessungen zu sagen. BESSEL hat das Ocular so gestellt, dass er von den zu beobachtenden Gegenständen deutliche Bilder erhielt und die bei verschiedenen Temperaturen beobachteten Distanzmessungen mit Hilfe eines später von AUWERS

verbesserten Temperatur-Coefficienten auf eine Normaltemperatur von 50° F. reducirt. Späterhin ist dann am Ocular eine Scala angebracht, und dasselbe ist bei den auf den Venus-Expeditionen benutzten FRAUNHOFER'schen und bei allen später construirten grösseren REPSOLD'schen Heliometern geschehen. Es wird jetzt von jedem einzelnen Beobachter bei möglichst verschiedenen Temperaturen das Ocular mit einem an dem Rohre angebrachten Triebwerke so eingestellt, dass man von einem Gestirn, am Besten einem engen Doppelstern ein deutliches Bild erhält und dabei die Temperatur des Instrumentes an den Thermometern abgelesen; aus der Ausgleichung dieser Beobachtungen erhält man dann die dem Beobachter zukommende Ablesung für 0° und die Veränderung mit der Temperatur, und bei dem Gebrauche des Instrumentes hat man dann dem Ocularrohre die der Temperatur entsprechende Stellung zu geben und darüber eine Bemerkung im Beobachtungsbuch zu machen. Ist das Ocular für sich allein noch gegen das Ocularrohr beweglich, was bei einem Heliometer eigentlich überflüssig ist, soweit man nicht etwa Fäden im Ocularkopf genau sehen will, so hat man es bei diesen Untersuchungen und bei den Beobachtungen selbst, natürlich fest in seine Fassung hineinzudrücken. Da man die richtige Ocularstellung schon in Folge der allmählichen Temperaturabnahme während eines Abends nicht völlig genau treffen wird, so wird immer ein kleiner Unterschied zwischen der berechneten und der abgelesenen Einstellung übrig bleiben und die gemessene Distanz dafür verbessert werden müssen. Der nächstliegende Gedanke ist nun der, die Abweichung der Ocularstellung durch die Brennweite zu dividiren und die gemessene Distanz mit diesem Quotienten zu multipliciren, um die Reduction der Distanzmessung auf die normale Ocularstellung zu erhalten.

Auf Veranlassung von AUWERS sind jedoch an den Expeditions-Heliometern und ausserdem auch an einigen der neueren REPSOLD'schen Heliometer, an denen Beobachtungen zum Zwecke ihrer Verwerthung für die Reduction der Expeditions-Beobachtungen, z. B. Beobachtungen der Sterne im Cygnus- und Hydrakreise ausgeführt worden waren, besondere Untersuchungen darüber angestellt und grössere Sternabstände gemessen worden, wobei die Stellung des Oculars um kleine Quantitäten, z. B. 1 *mm* nach der einen und der anderen Seite von der der Temperatur und dem Beobachter entsprechenden Normalstellung abwichen. Dabei hat sich nun herausgestellt, dass die Reductionen meistens ein wenig kleiner als nach der Rechnung sind. Einen Ueberblick darüber gewährt eine Zusammenstellung in dem grossen Werke: »Die Venusdurchgänge 1874 und 1882. Bericht über die deutschen Beobachtungen. Im Auftrage der Commission für die Beobachtung des Venusdurchganges, herausgegeben von AUWERS, Vorsitzender der Commission«, 5. Bd., pag. 172. Danach ist der Mittelwerth für die Expeditions-Heliometer, sowie für die älteren Instrumente in Königsberg und Bonn und das neue Göttinger Heliometer etwa 0·05 des berechneten Werthes. Die Ursache dieser Abweichung ist noch nicht aufgeklärt, aber wenn man sich bemüht, dem Ocular möglichst genau die dem Auge und der Temperatur entsprechende Stellung zu geben, so wird eine kleine in dem Coëfficienten für einen Beobachter steckende Unsicherheit nahezu verschwinden. Nimmt man ein Heliometer in Gebrauch, so wird man jedoch in erster Linie bemüht sein müssen, seine Normal-Ocularstellung und die Veränderlichkeit mit der Temperatur zu bestimmen, und so lange man diese noch nicht kennt, womöglich an jedem Abende auf Doppelsterne zu focussiren.

Im Früheren ist schon kurz von der optischen Verbesserung die Rede gewesen, die die Distanzmessungen an den Heliometern mit ebener Objectivführung

betrifft. Zur genauen Verfolgung dieser Frage dient die BESSEL'sche Originalabhandlung in den Astronom. Untersuchungen, Bd. I, pag. 104, oder nach ENGELMANN's Ausgabe Bd. 2, pag. 148, ferner in seiner Anwendung auf das Bonner Heliometer durch WINNECKE ist auf die »Astronom. Mittheilungen von der Kgl. Sternwarte zu Göttingen«, 4. Thl., pag. 198, enthaltend die Abhandlung von SCHUR über die Triangulation der Praesepe, hinzuweisen, und in Bezug auf die Expeditions-Heliometer auf A. AUWERS »Venusdurchgänge 1874 und 1882«, 5. Bd., pag. 204. An dieser Stelle soll eine kurze Erläuterung dieser Angelegenheit gegeben werden.

Stehen eine Objectivhälfte und das bei den älteren Heliometern seitlich verschiebbare Ocular in der Axe des Fernrohres und richtet man das Letztere auf einen Stern, so werden die davon herkommenden Lichtstrahlen in axialer Richtung durch die beiden Linsen hindurchgehen, wenn der Stern in der Mitte des Gesichtsfeldes erscheint. Bringt man dagegen das von der anderen Objectivhälfte entworfene Bild eines zweiten Sternes dahin, dass es mit dem Bilde des ersten Sternes zusammenfällt, so gehen die von ihm kommenden Lichtstrahlen in einer schiefen Richtung durch das Objectiv entsprechend dem Winkel zwischen den beiden Sternen.

BESSEL hat nun auf Grund seiner Kenntniss der Krümmungsradien und der Brechungsverhältnisse der beiden Linsen berechnet, dass bei einer Neigung des Strahlencylinders zur Fernrohraxe von 24' das von einem Punkte ausgehende Licht sich über einen Raum von 1''·7 und bei einer Neigung von 48' sich über 5''·1 ausbreitet. In Folge dieser Erscheinung ist an die an der Messvorrichtung abgelesene Distanz zweier Sterne eine Verbesserung anzubringen, die im Verhältniss des Cubus der Distanz wächst und wobei eine Constante $\alpha$ zu ermitteln ist, welche man dadurch erhält, dass man eine Reihe von Abstandsmessungen zwischen zwei weit entfernten Sternen ausführt und dabei dem Ocular mit Hilfe der an den älteren Heliometern angebrachten Bewegungsvorrichtung senkrecht zur optischen Axe eine Verschiebung in der Richtung der Verbindungslinie der beiden Sterne ertheilt. Diese Messungen werden dann unter sich Unterschiede zeigen, welche von dem schiefen Durchgange der Lichtstrahlen durch die Objectivhälften herrühren, und dazu benutzt werden, um durch Rechnung die an die Distanzmessungen anzubringende Verbesserung zu ermitteln. Bei dem Königsberger Heliometer, bei dem die Messungen in der Weise angestellt werden, dass eine Objectivhälfte immer in der Axe des Rohres stehen bleibt und die andere Hälfte sich bald auf der einen, bald auf der anderen Seite der Axe befindet, ist der grösste Werth der optischen Verbesserung nahe 1'' und bei dem Bonner Heliometer etwas weniger. Bei den auf den deutschen Venusexpeditionen angewandten kleineren FRAUNHOFER'schen Heliometern, bei denen nach der neuen Einrichtung das Ocular beständig in der Mitte stehen bleibt und die beiden Objectivhälften sich gleichzeitig nach entgegengesetzten Seiten bewegen, wo also die Bewegung jeder von ihnen auf die Hälfte reducirt wird, ist bei einer Distanzmessung von 3500'' die optische Verbesserung nach den Untersuchungen von AUWERS auf höchstens 0''·1 zu veranschlagen.

Die Frage, wie bei den älteren Heliometern auch ohne Untersuchung über die Gestalt der Sternbilder auf diesen Umstand Rücksicht zu nehmen ist, hat AMBRONN an dem kleinen, auf den Auckland-Inseln und in Punta Arenas benutzten Heliometer der Göttinger Sternwarte dadurch behandelt, dass er eine Reihe von 13 Sternpaaren zwischen 877'' und 8100'' Abstand, deren Oerter nach Meridiankreis-Beobachtungen bekannt sind, gemessen hat. Der daraus folgende Ausdruck

für die Berechnung einer Distanz von $r$ Scalentheilen hat die Form $\Delta = 17''\cdot91129\, r - 0''\cdot000000058\, r^2$. (»Mittheilungen von der Kgl. Sternwarte zu Göttingen. 3. Thl. Triangulation der Plejadengruppe.«) Nach diesem Ausdruck ist an die mit einem constanten Scalenwerth berechnete Messung des Sonnendurchmessers noch eine Verbesserung von 0''·06 und an die an der äussersten Grenze der Messbarkeit liegenden Abstande von einem Grade etwa 0''·4 anzubringen. Wenn aber, wie es jetzt durchweg geschieht, die Verwandlung der Distanzmessungen in Bogenmaass auf Messungen anderweitig bekannter Sternabstände beruht, so fallt eine etwaige Unsicherheit in der Bestimmung des Coëfficienten zum grossten Theil wieder weg.

Nach eingehender Besprechung der Abstandmessungen ist jetzt noch eines Umstandes zu erwähnen, der die Messung der Positionswinkel betrifft. Dabei wird namlich vorausgesetzt, dass der Positionskreis richtig am Instrument angebracht ist, so dass sich für zwei in einem Stundenkreise liegende Sterne die Ablesung 0 oder 180 Grad ergeben würde; andernfalls sind die Messungen noch um den Indexfehler des Positionskreises zu verbessern. Zur Ermittelung dieser Correction brachte BESSEL bald nördlich, bald südlich vom Heliometer im Spalt der Drehkuppel in der Höhe des in die Meridianebene und nahe horizontal gestellten Fernrohres ein Collimatorfernrohr an, dessen Objectiv gegen das des Heliometers gerichtet war und in dessen Brennpunkt sich ein Fadenkreuz befand. Bringt man namlich die beiden Objectivhalften auseinander, so wird man vom Fadenkreuz des Collimators zwei getrennte Bilder erhalten, und stellt man den Spalt des Heliometerobjectivs vertical, so kann man es nach einer Reihe von feinen Drehungen mit dem Positionswinkel und der Rectascensionsschraube dahin bringen, dass bei dem Auf- und Abbewegen des Heliometerfernrohres sein Fadenkreuz bald mit dem einen, bald mit dem anderen Bilde des Fadenkreuzes des Collimators zusammenfällt, und bei dieser Stellung des Spalts müsste die Ablesung am Positionskreise entweder 0 oder 180 Grad sein und die Abweichung davon ist der Indexfehler des Positionskreises. In gleicher Weise kann man den Indexfehler auch bestimmen, wenn man den Spalt horizontal stellt und das Heliometer im Stundenwinkel hin- und herschwingt, nur ist in letzterem Falle noch auf die Aufstellungsfehler des Heliometers als Aequatoreal Rücksicht zu nehmen, die bei der vorausgehenden Methode nicht in Betracht kommen. Im Jahre 1833 machten C. A. F. PETERS und SELANDER, die sich damals in Königsberg aufhielten, die Bemerkung, dass sich für den Indexfehler verschiedene Werthe ergaben, je nachdem sich bei der Einstellung des Fernrohres auf den Collimator die Deklinationsaxe, an deren Ende das Fernrohr befestigt ist, zur Linken oder zur Rechten befand, oder wenn der Collimator im Süden war, die Axe dem Fernrohr bei der täglichen Bewegung folgte oder voranging. Der Grund dieser Erscheinung liegt darin, dass das am Ende der Axe befestigte Fernrohr durch die Wirkung der Schwere eine kleine Torsion erleidet, in Folge deren bei horizontal oder vertical gestelltem Objectivspalt die Ablesung des Positionskreises in der einen Lage etwas zu gross und in der anderen Lage ebenso viel zu klein ausfällt. Es ergiebt sich dann, wenn diese Drehungsconstante ermittelt ist, der Einfluss bei der Richtung des Fernrohres auf einen bestimmten Punkt des Himmels durch Multiplikation des horizontalen Maximalwerthes mit einem vom Stundenwinkel und der Deklination abhängenden Coefficienten.

Nachdem die Besprechung der Einrichtung des Königsberger Heliometers und der im Wesentlichen von BESSEL aufgestellten Beobachtungsmethoden der Hauptsache nach erledigt ist, sind jetzt noch einige Worte den anderen Helio-

metern aus älterer Zeit zu widmen. Ein Heliometer, welches dem Königsberger in seinen wesentlichsten Theilen gleicht und mit dem von WINNECKE und KRUGER eine Reihe von wichtigen Untersuchungen ausgeführt sind, ist das im Jahre 1840 von MERZ in München hergestellte Heliometer der Bonner Sternwarte, worin WINNECKE Ende der fünfziger Jahre eine Vermessung der Praesepe ausführte, die mit einer ähnlichen Untersuchung von SCHUR am Göttinger Heliometer im Jahre 1895 nachträglich herausgegeben ist. Nahezu gleichzeitig mit dem Bonner Heliometer wurde ein anderes für die Sternwarte in Pulkowa gebaut. Eine Beschreibung davon nebst Zeichnung findet sich in W. STRUVE, »Description de l'observatoire astronomique central de Poulkova«, St. Petersburg 1845. Das Objectiv hat 7·4 Pariser Zoll Oeffnung und 123 Zoll Brennweite und übertrifft daher die Heliometer in Königsberg und Bonn, welche 6 Zoll Oeffnung und 95 Zoll, also nicht ganz 8 Fuss Brennweite haben. Bei der Beschreibung dieses wohl hauptsächlich der starken Winterkälte wegen wenig benutzten Instrumentes stellte W. STRUVE einige Forderungen auf, die bei den neueren Instrumenten von REPSOLD zur Ausführung gekommen sind, nämlich die unveränderliche Stellung des Oculars in der Axe des Rohres, die Bewegung der beiden Objectivhälften symmetrisch nach entgegengesetzten Richtungen, Herstellung des Rohres aus Metall anstatt Holz, feste Verbindung des Objectivträgers mit dem Rohre, so dass sich nicht wie bisher der Objectivkopf allein gegen das feste Rohr dreht, sondern das ganze Fernrohr mit allem Zubehör, wodurch sich auch eine bequemere Ablesung des Positionskreises ermöglichen lässt, der sich dann nicht mehr am Objectivende des Fernrohres zu befinden braucht, sondern dem Ocularende näher gebracht werden kann, und ausserdem wünschte STRUVE noch ein Metallthermometer im Innern des Rohres, welches vom Ocularende abgelesen werden kann.

Ein Heliometer, bei dessen Herstellung schon mehrere der von BESSEL und STRUVE aufgestellten Forderungen berücksichtigt worden sind, befindet sich auf dem Radcliffe Observatory in Oxford und eine Beschreibung und Zeichnung dieses von A. REPSOLD in Hamburg hergestellten Instrumentes ist in »Astronomical observations made at the Radcliffe Observatory, Oxford, in the year 1850«, Vol. XI, Oxford 1852. Das Objectiv von MERZ & SÖHNE in München hat 7·5 inches = 7·2 Pariser Zoll Oeffnung und $10\frac{1}{2}$ engl. = 10·0 Pariser Fuss Brennweite und die Objectivhälften bewegen sich auf Kreisflächen, deren Mittelpunkte mit dem Brennpunkte des Objectivs zusammenfallen. Jede Objectivhälfte hat eine Bewegung von $1\frac{1}{8}$ Grad nach jeder Seite, so dass sie um $2\frac{1}{4}$ Grad von einander entfernt werden können. Die Bewegung der Objectivhälften kann auf zweierlei Weise gemessen werden, nämlich entweder durch die Umdrehungen der Mikrometerschrauben, wie am Königsberger Heliometer oder an Scalen an der inneren Seite der Objectivschieber, die durch glühend gemachte Platindrähte beleuchtet und durch ein bis zum Ocularende gehendes Mikroskop abgelesen werden. Bei den Messungen wurde die letztere Einrichtung benutzt und der Winkelwerth eines Scalentheiles dadurch bestimmt, dass man das Heliometer mit vertical gestelltem Spalt auf einen Collimator richtete und den Deklinationskreis ablas, dann eine Objectivhälfte bis zu 260 Theilen der Scala verschob, das Fadenkreuz des Heliometers auf das des Collimators einstellte und wieder den Deklinationskreis ablas. Auf diese Weise erhielt man einen Theil der auf Theilungsfehler untersuchten Scala zu 20''·4. An den auf diese Weise gefundenen Scalenwerth wurde später noch eine kleine Verbesserung angebracht, die sich aus der Vergleichung der Heliometerbeobachtungen zwischen Plejadensternen und Sternen in der Nachbarschaft von 1830 Groombridge mit Meridianbeobachtungen

und Beobachtungen am Königsberger Heliometer ergab. Der Indexfehler des Positionskreises wurde durch Messungen von Sternpaaren bestimmt, deren gegenseitige Lage aus Beobachtungen am Königsberger Heliometer bekannt waren; dabei ergab sich die Drehungs-Constante zu 17 Minuten, also viel grösser als in Königsberg, wo sie nur etwa 2 Minuten betrug. Die Einstellungsweise der Sterne am Oxforder Heliometer war bei JOHNSON verschieden von derjenigen, der sich BESSEL und alle übrigen Heliometerbeobachter bedient haben; es wurden dort nämlich die Bilder der Sterne in symmetrischen Stellungen nebeneinandergebracht und die Scalen und der Positionskreis abgelesen, und wenn die Sterne ungleich hell waren, so blendete JOHNSON den helleren nicht durch ein Gitter, sondern in der Weise ab, dass nur ein kreisförmiger Ausschnitt der Objectivhälfte zur Geltung kam. Bei den Messungen blieb eine Objectivhälfte unveränderlich stehen und die andere wurde bald nach der einen und bald nach der anderen Seite bewegt. JOHNSON beobachtete vorzugsweise Sternparallaxen und Doppelsterne und Planetendurchmesser, und nach seinem Tode war MAIN 1861 bis 1879 mit Messungen von Doppelsternen beschäftigt, aber unter STONE wurde das Heliometer nur bis 1881 als solches benutzt.

In Deutschland begann sich zu Anfang der siebziger Jahre wieder eine neue Epoche der Beschäftigung mit dem Heliometer anzubahnen, indem die für die Beobachtung der Venusdurchgänge von 1874 und 1882 eingesetzte Reichscommission den Beschluss fasste, dazu Heliometer zu verwenden, und zu diesem Zwecke wurden die schon erwähnten FRAUNHOFER'schen Heliometer der Sternwarten in Berlin, Breslau, Gotha und Göttingen durch A. REPSOLD & SÖHNE in Hamburg mit verschiedenen neuen Einrichtungen versehen. Die älteren Holzrohre wurden durch eiserne ersetzt, die Stellung der Objectivschieber wurden nicht mehr an den Schraubentrommeln, sondern an zwei silbernen Scalen mit Hilfe eines Mikroskops vom Objectivende abgelesen, und die Objectivschieber wurden so eingerichtet, dass sie sich gleichzeitig in entgegengesetzten Richtungen bewegten. Die Oculare, wenn auch die ältere Einrichtung zur seitlichen Verschiebung zum Zwecke von Beobachtungen für die optische Verbesserung noch beibehalten war, wurden für die Beobachtungen selbst stets in die Axe des Fernrohres gebracht, am Ocularrohr wurden ferner Scalen angebracht, und die kurzen für die Aufstellung auf einen Tisch eingerichteten Säulen mit Dreifuss wurden durch lange eiserne Säulen und starkem Dreifuss zur Aufstellung in Fussbodenhöhe ersetzt. Auch mit diesen Instrumenten wurden vor den Expeditionen in Strassburg Beobachtungen zur Bestimmung der Brennweite nach der BESSEL'schen Methode angestellt, aber zur Reduction der Distanzmessungen wurden ausschliesslich die Resultate der Messungen von Sternen im Bogen grössten Kreises benutzt, deren Oerter durch Meridianbeobachtungen auf einer grossen Zahl von Sternwarten festgelegt waren. Die Resultate aller Beobachtungen an diesen Instrumenten von einer grossen Anzahl von Astronomen, sowohl auf den Venusdurchgangs-Stationen selbst als auch zur Vorbereitung auf diese Erscheinungen und zur nachträglichen Untersuchung, sind in dem schon erwähnten fünfbändigen Werke enthalten, welches AUWERS im Namen der Reichscommission verfasst hat, und welches als eine der bedeutendsten literarischen Erscheinungen auf dem Gebiete der Astronomie zu betrachten ist. Die in diesem Werke niedergelegten Vorschriften und Methoden haben auch vielfach zur Richtschnur bei der Anwendung der neueren grösseren Heliometer gedient.

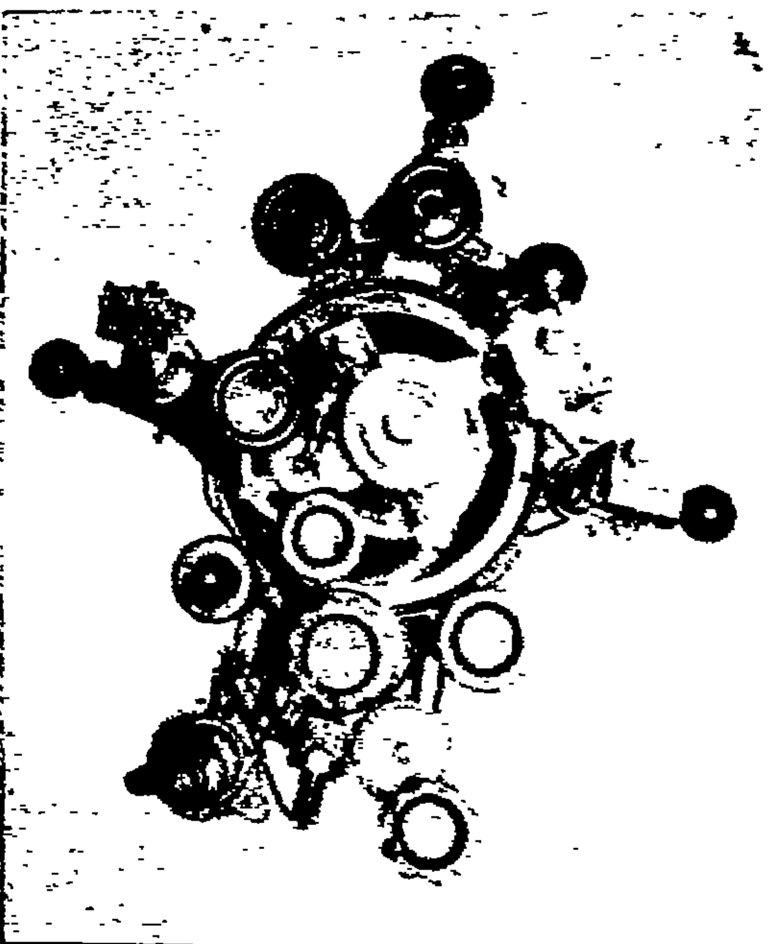
Während also die deutschen Expeditionen sich älterer Instrumente bedienten, wurden für andere Nationen durch REPSOLD's Reiseinstrumente dieser Art von

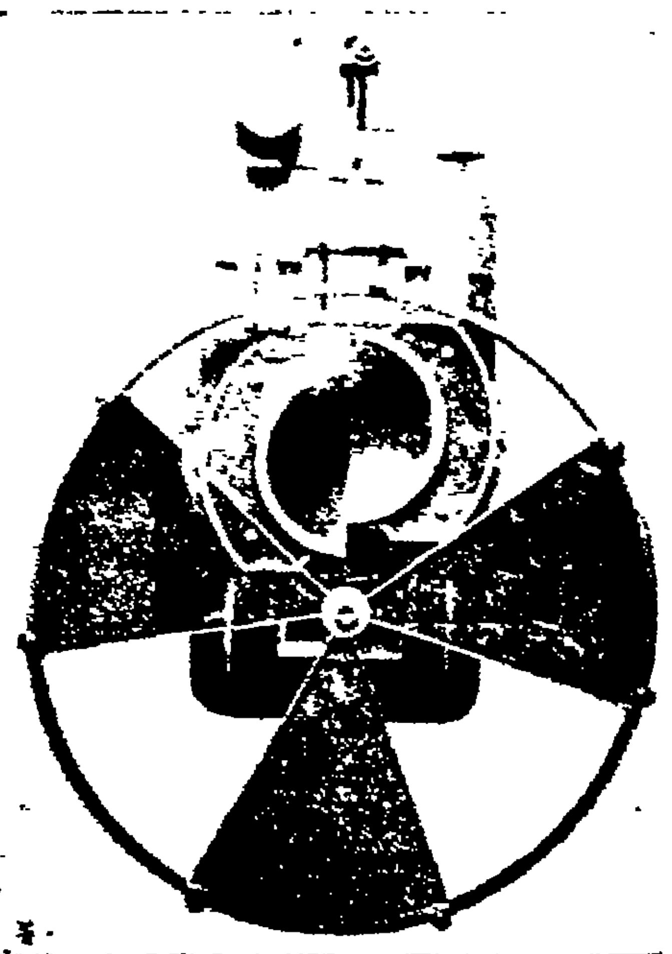
Tafel I.





# Tafel II.





neuerer Einrichtung hergestellt, darunter zwei Heliometer auf Bestellung der russischen Regierung, von denen jetzt eins in Dorpat und eins in Kasan aufgestellt ist, von deren Leistungen für die Expeditionen aber bis jetzt noch nichts bekannt geworden ist, abgesehen davon, dass später BACKLUND und nach ihm HARTWIG das Heliometer in Dorpat fleissig benutzt haben.

Ein von OUDEMANS zur Beobachtung des Venusdurchganges 1874 benutztes Instrument dieser Art befindet sich auf der Sternwarte in Leiden, und ein Heliometer von 107 *mm* Oeffnung und 1·68 *m* Focallange ist im Jahre 1873 für Lord LINDSAY hergestellt worden, welches von GILL auf MAURITIUS zur Beobachtung des Venusdurchganges, zur Bestimmung der Sonnenparallaxe aus Beobachtungen der Juno und später zu demselben Zwecke zu Beobachtungen des Planeten Mars auf der Insel Ascension benutzt worden ist, und schliesslich durch GILL und ELKIN in der Capstadt zur Bestimmung von Fixsternparallaxen Verwendung gefunden hat. Eine Beschreibung dieses früher dem Lord LINDSAY gehörenden Heliometers findet man in »Dun Echt Observations«, Vol. 2.

Der nächste Schritt war dann die Lieferung eines Heliometers neuester Construction durch REPSOLDS an die Sternwarte der Yale University in Newhaven in Nordamerika, welches von ELKIN in den »Transactions« dieser Sternwarte Bd. 1 beschrieben und zunächst auf eine Triangulation der Plejaden angewandt worden ist. Das Objectiv hat 151 *mm* Oeffnung und 2·5 *m* Brennweite. Noch etwas grössere Instrumente dieser Art sind Ende der achtziger Jahre für die Sternwarten in Leipzig, Capstadt, Göttingen, Bamberg und neuerdings für die von KUFFNER'sche Sternwarte in Wien von REPSOLDS hergestellt worden. Da von dem Göttinger Heliometer eine grössere Untersuchung vorliegt (»Astronomische Mittheilungen von der Kgl. Sternwarte zu Göttingen«, vierter Theil), so soll als Beispiel für die Art und Weise, wie Instrumente dieser Art jetzt benutzt werden, und welche Resultate sie liefern, eine nähere Beschreibung dieses Instrumentes im Vergleich zu den älteren Einrichtungen hier gegeben werden.

Das neue REPSOLD'sche Heliometer der Göttinger Sternwarte hat ein Objectiv von 6 Pariser Zoll oder 162 *mm* Oeffnung und 2·6 *m* Brennweite von REINFELDER & HERTEL in München. Eine Abbildung des ganzen Instrumentes und einzelner Theile (S. die hier beigefügten Copien), sowie eine ausführliche Beschreibung und Darstellung aller Untersuchungen findet sich an soeben genannter Stelle, wo sich zugleich eine Abhandlung über die Oerter der Präsepesterne von SCHUR befindet. Die Bewegung der Objectivschlitten geht wie bei allen neuen Heliometern auf einer Cylinderfläche mit der Brennweite als Radius vor sich, und die auf der Rückseite der Schieber befindlichen Scalen werden durch ein neben dem Ocular endigendes Fernrohr abgelesen. Jede der beiden Objectivscalen ist in 200 Thle. getheilt, und um Verwechselungen zu vermeiden, geht auf Scala I die Bezeichnung von 0 bis 200 und auf Scala II von 200 bis 400; die Ablesung der Stellung der Scalen geschieht in Göttingen derart, dass zuerst durch Verschiebung des ganzen Ablesemikrometers mit Hilfe einer Schraube ohne Trommel ein Fadenpaar auf einen Theilstrich der Scala I und darauf mit Hilfe einer mit Trommel versehenen Mikrometerschraube ein anderes Fadenpaar auf einen benachbarten Strich der Scala II gebracht wird. Die Stellung der Trommel kann wohl abgelesen werden, aber dies geschieht nicht, sondern es sind die Unterabtheilungen und die Bezifferung der einzelnen Hundertel erhaben aufgetragen, und daneben befindet sich eine bewegliche Bezifferung der ganzen Umdrehungen, und mit Hilfe einer Druckvorrichtung werden die ganzen und die hundertel Umdrehungen in einen vorüber gezogenen Papierstreifen abgedrückt, und nachträglich, z. B. am folgen-

den Tage, werden dann nach dem Augenmaass noch die tausendtel Umdrehungen abgelesen. Da bei einer Distanzmessung vier einzelne Einstellungen gemacht werden, nämlich je zwei vor und nach dem Durchschrauben der Objectivhälften, so wird bei der vierten Einstellung der Abdruck noch zweimal wiederholt, um mit Leichtigkeit die Einstellungen für die folgende Distanzmessung unterscheiden zu können. Die Bestimmung der periodischen Fehler einer Mikrometerschraube nach den BESSEL'schen Vorschriften ist bekanntlich insofern etwas umständlich, als man bei jedem Eingriff in den Mechanismus des Mikrometers auf eine Aenderung gefasst sein muss; es ist deshalb dem Mikrometer die bekannte Einrichtung gegeben, dass zwei Fadenpaare zur Ablesung der Scala II verwandt werden, deren gegenseitiger Abstand ein ungrades Vielfache einer halben Schraubenumdrehung beträgt, so dass bei abwechselnder Benutzung der beiden Paare die Hauptglieder des Ausdruckes für die periodischen Fehler sofort eliminirt werden. Die Ablesung des Positionskreises, der bei den neuen Heliometern nicht mehr am Objectivende, sondern mitten auf dem Fernrohr, nahezu in der Verlängerung der Deklinationsaxe angebracht ist, geschieht mit Hilfe zweier um 180° abstehender Mikroskope, die an einem das bewegliche Fernrohr umschliessenden und an der Deklinationsaxe befestigten eisernen Cylinder angebracht sind, und deren Trommeln den Raum von 10 Minuten in 60 Theile theilen, so dass man 10 Secunden direkt ablesen und einzelne Secunden schätzen kann.

Zur Ablesung des Positionskreises wird nur eine Hälfte des Gesichtsfeldes der beiden Mikroskope verwandt, und in der anderen Hälfte erblickt man durch ein die Hälfte des Rohres einnehmendes Prisma hindurch ein Bild des Deklinationskreises, der ebenso wie der Positionskreis eingerichtet ist, und um Verwechselungen zu vermeiden, sind beide Kreise durch verschiedenartige Diaphragmen im Brennpunkt des Ablesefernrohres bezeichnet. Zur Drehung des ganzen Rohres in Positionswinkel dienen drei verschiedene Triebe, mit welchen man den Uebergang von sehr schneller Bewegung bis zur feinsten Mikrometerbewegung machen kann. Um Sterne von verschiedener Helligkeit neben einander einstellen zu können, ist vor dem Objectiv senkrecht zur Axe ein in sieben Sectoren eingetheiltes Blendrad angebracht und drei dieser Sectoren sind mit Drahtgittern von verschiedener Dichte ausgefüllt, so dass man nach Bedürfniss eine der Objectivhälften damit bedecken und einen Stern um 1·4, 2·2 oder 2·5 Grössenklassen abblenden kann, und mit Hilfe von zwei dichten Zusatzgittern kann man einen Stern erster Grösse als von achter Grösse erscheinen lassen, ohne den Eindruck des Bildes zu stören, und wenn bei sehr hellen Objecten, z. B. dem Planeten Jupiter, Beugungserscheinungen auftreten, so befinden sie sich in solcher Entfernung, dass bei der Messung keine Störung entsteht.

Die Temperatur des Heliometers wird durch zwei Thermometer bestimmt, von denen sich eines im Objectivkasten und das andere am Ocularende in einer Kapsel befindet, so dass die Erwärmung durch die Nähe des Beobachters stark abgeschwächt wird. Ein Metallthermometer neben dem Objectivende sollte im Ablesefernrohr für die Objectivscalen sichtbar sein, aber durch die Erschütterungen auf der Reise von Hamburg nach Göttingen war diese Einrichtung in Unordnung gerathen und es gelang auch nicht, es ohne Störung für die Objectivscalen sichtbar zu machen, als die Messungen am Instrument schon im vollen Gange waren. Es ist deshalb auf den Gebrauch verzichtet worden, da man durch die beiden Quecksilberthermometer die Temperatur des Instrumentes genügend kennen lernt.

Bei den Messungen mit einem Heliometer wird vorausgesetzt, dass bei zusammengeschraubtem Objectiv die beiden Bilder eines Sternes sich völlig decken,

dass also keine seitliche Verschiebung der Objectivhälften senkrecht zum Spalt vorhanden ist, weil man sonst keine engen Doppelsterne messen kann und auch bei grösseren Abständen nur eine Projection davon zu Stande kommt. Um die Mittelpunkte möglichst nahe zusammenzubringen, lässt sich eine der Objectivhälften durch Correctionsschrauben parallel mit der Spaltrichtung verschieben, aber auch nach erfolgter Correction kann sich im Laufe der Zeit wieder ein kleiner Abstand einstellen und dieser kann sogar sofort auftreten, wenn man in Positionswinkel bewegt. Bei Messungen von Doppelsternen geben die Ablesungen des Positionskreises vor und nach dem Durchschrauben immer ein Mittel, die Abstandsmessungen für diesen Fehler zu verbessern, misst man dagegen Durchmesser von Planetenscheiben, und sucht die Abweichung der Objectivhälften durch Messungen an einem vielleicht weiter abstehenden Doppelstern mit wesentlich anderem Positionswinkel zu bestimmen, so sind die daraus erhaltenen Resultate auf die Messung der Planetenscheibe nicht anwendbar. Bedient man sich dagegen eines doppeltbrechenden Ocularprismas, welches einen einfachen Stern in einen Doppelstern verwandelt, und am Heliometer vier Bilder von einem Stern hervorbringt, so kann man die Abweichung der beiden Objectivmittelpunkte mit Hilfe eines am Ocularende angebrachten Positionskreises ermitteln, und in Göttingen wird dazu der kleine, eigentlich für die Oculareinstellung bestimmte Kreis benutzt.

Zur Untersuchung der Theilungsfehler der Objectivscalen dient ein Mikroskop in der Nähe der Scalen und parallel dazu, und ein an seinem Objectivende angebrachtes reflektirendes Prisma lenkt das Bild der Scalen um 90° ab, so dass sie im Ocular des Mikroskops sichtbar werden. Mit Hilfe eines groben Triebwerkes lässt sich dem Mikroskop eine Bewegung in einer Längsrichtung geben, so dass es über die verschiedenen Theilstriche geführt werden kann.

Die Beleuchtung der Scalen, Kreise und Mikrometertrommeln geschieht durch acht Glühlampen, die ihr Licht von vier Accumulatoren erhalten.

Sowohl für die Bestimmung des Indexfehlers des Positionskreises, als auch zur Prüfung der Abhängigkeit der Brennweite des Heliometers von der Temperatur und zur Herstellung von künstlichen Doppelsternen und Planetenscheiben, befindet sich in einem Aufbau des neben dem Heliometerthurme stehenden Treppenhauses ein horizontales Collimatorfernrohr von 1·8 *m* Focallänge. Diese Einrichtung ist in den ersten Jahren benutzt, aber aus nachfolgenden Gründen später aufgegeben worden:

1) Der Indexfehler des Positionskreises wird mit Hilfe eines Collimators nur in einer Lage des Fernrohres, nämlich ausschliesslich im Horizont bestimmt; da nun die Ableitung des Scalenwerthes für die Objectivscalen schon auf Sternbeobachtungen beruht, die an Meridiankreisen gemacht sind, so ist es consequenter, dasselbe auch in Bezug auf die Positionswinkel zu thun. 2) Die Prüfung der Abhängigkeit der Brennweite des Objectivs von der Temperatur geschieht viel genauer durch Einstellungen auf einen Doppelstern und nach den Erfahrungen in Göttingen am Tage durch Einstellung auf das Bild des stets sichtbaren Polarsternes, als durch einen Collimator, der wohl meistens eine kürzere Brennweite als das Heliometer haben wird und dessen Focallänge, wenn auch bei geschützter Aufstellung in geringerem Maasse, von der Temperatur abhängig ist. 3) Untersuchungen über den Einfluss des Positionswinkels auf Messungen von Doppelsternen und Planetendurchmesser lassen sich viel einfacher mit Anwendung des Ocularprisma ausführen, und Untersuchungen über die absoluten Fehler von

Durchmesserbestimmungen erhält man mit einem solchen Collimator auch nur in ungenügender Weise.

Die vorhin schon erwähnte Untersuchung der Theilungsfehler der Objectivscalen hat in folgender Weise stattgefunden. Die Beweglichkeit des Untersuchungsmikroskops geht nicht so weit, dass man die ganzen Längen beider Scalen unmittelbar mit einander vergleichen kann, auch ist nicht die ganze Länge von 200 Theilen auf jeder Scala zu untersuchen, sondern nur eine Länge von 180 Theilen kommt bei den grössten Ausweichungen der Objectivhälften zur Geltung, und ferner bildeten, so lange noch die Ablesung des Metallthermometers in Frage kam, nicht die Striche 100 und 300 die sichtbaren Mitten der beiden Scalen bei zusammengeschraubten Hälften, sondern 104 und 304, weshalb sich die Untersuchung auf den Raum 14 bis 194 auf Scala I und 214 bis 394 auf Scala II zu erstrecken hat. Es wurden nun zunächst die beiden Hälften einer Scala mit Hilfe einer Hälfte der anderen Scala miteinander verglichen, wodurch die Fehler des Striches 104 gegen die Mitte von 14 und 194, und 304 gegen die Mitte von 214 und 394 bekannt wurde. Nachdem auf diese Weise beide Scalen halbirt waren, wurden in verschiedener Weise Räume von 30 Theilen einer Scala mit den aufeinanderfolgenden Räumen der anderen Scala verglichen, wodurch die Theilungsfehler der Striche 44, 74, 104 . . . . 134, 164 auf Scala I und 244, 274 . . . 334, 364 auf Scala II bekannt wurden, indem man die Fehler der vier Endstriche 14, 194, 214, 394 als Null annehmen konnte. Durch eine zweite Dreitheilung, nämlich durch Abtragen des Raumes zwischen 10 Theilstrichen, wurden dann die Fehler von 24, 34, 54, 64 u. s. w. bekannt, dann durch eine Reihe von Fünftheilungen die Fehler aller mit graden Zahlen bezeichneten Striche, und schliesslich durch Halbirung dieser Räume ergaben sich die Theilungsfehler auch für alle einzelnen Striche. Diese Untersuchung wurde in den Sommermonaten von 1889 und 1890 von Schur und Ambronn ausgeführt, und jeder von ihnen hat darauf an 90 Tagen je eine Stunde verwandt, im Ganzen hat also die Untersuchung von der Berechnung abgesehen, 180 Stunden in Anspruch genommen. Ohne auf Einzelheiten einzugehen, hat die Rechnung gezeigt, dass durch Vernachlässigung der Theilungsfehler eine Distanzmessung um 0''·3 unrichtig werden kann, während die Unsicherheit der Messung des Abstandes zweier um 4000 Secunden von einander entfernter Sterne etwa 0''·17 beträgt und durch Wiederholung natürlich erheblich geringer wird.

Am Positionskreise sind Untersuchungen über Theilungsfehler nicht angestellt, da nur zwei nicht verschiebbare Mikroskope vorhanden sind. Da aber dieser Kreis von Repsold auf derselben Theilmaschine getheilt ist, wie der Kreis am Meridianintrument der Strassburger Sternwarte, bei dem nach den Untersuchungen von Schur der Fehler eines Durchmessers nur ausnahmsweise eine Secunde beträgt, so werden wohl auch bei dem Gottinger Heliometer nur ausnahmsweise Fehler entstehen können, die bei Messungen zwischen um 2° voneinander entfernten Sternen den Betrag von 0''·03 im Bogen grössten Kreises erreichen, auch zeigt es sich bei den Messungen, dass die zufälligen Beobachtungsfehler den möglichen Betrag der Theilungsfehler bei Weitem überragen.

Die Abhängigkeit der Ocularstellung von der Temperatur des Instrumentes ist durch häufiges Einstellen auf Doppelsterne bei Nacht und auf den Polarstern vor Beginn von Sonnenbeobachtungen bestimmt worden. Aus Gründen, welche hier nicht näher auseinandergesetzt werden können, wird die Temperatur des Instrumentes aus den berichtigten Angaben des Objectivthermometers $O$ und des Ocularthermometers $o$ durch den Ausdruck $t = O + \frac{1}{4}(o - O)$ berechnet, und

für die jetzigen beiden Beobachter haben die Ablesungen der in Millimeter getheilten Ocularscala bei verschiedenen Temperaturen ergeben:

| | |
|---|---|
| SCHUR | $N = 21{\cdot}18 + 0{\cdot}019\ t^{\circ}$ Celsius |
| AMBRONN | $21{\cdot}40 + 0{\cdot}025$, |

also nicht nur für den Eispunkt zwei um $\frac{1}{4}$ *mm* verschiedene Zahlen, entsprechend der ungleichen deutlichen Schweite, sondern auch etwas verschiedene Werthe der Temperatur-Coefficienten aus Untersuchungen zwischen + 28 und — 12° Celsius.

Von der Reduction der Distanzmessungen auf die normale Stellung des Auges ist schon früher die Rede gewesen; dieselbe beträgt für SCHUR 0·96 und für AMBRONN 0·90 des aus der Rechnung folgenden Werthes. Zur Bestimmung der Abhängigkeit der Distanzmessungen von der Temperatur des Instrumentes sind vorzugsweise die Abstände zwischen zwei unweit des Pols gelegenen Sternen im Winter und Sommer gemessen worden. Der Ort des Mittelpunktes zwischen den beiden Sternen, der Positionswinkel und die Länge der Verbindungslinie sind für 1900

$$\alpha = 12^{h}\,1^{m} \qquad \delta = +\,86^{\circ}\,18' \qquad p = 82^{\circ}\,54' \quad \text{und} \quad s = 6780'',$$

der Abstand ist also nur um einige Minuten kleiner als die grösste am Heliometer messbare Distanz von 2°.

Aus zahlreichen Messungen zwischen + 27 und — 17° C. hat sich ergeben, dass eine Distanz von 100 Scalentheilen oder 4000 Secunden bei einer Temperaturänderung von einem Grad Celsius verschieden gemessen wird,

| | | | |
|---|---|---|---|
| von SCHUR | um 0·00079 Skalentheile | oder | 0″·032 |
| „ AMBRONN | „ 0·00091 „ | „ | 0″·036. |

Auch hier zeigt sich wieder eine durch die Einzelwerthe viel zu sehr begründete Verschiedenheit, um mit einem Mittelwerthe rechnen zu dürfen.

Vereinigt man die Einwirkung der Ocularstellung und der Temperatur auf die Grösse der Distanzmessungen mit ihrem richtigen Zeichen, so zeigt sich, dass sie sich, wenn auch einzeln nicht unbedeutend, in der Gesammtwirkung nahezu compensiren. Bei der augenblicklichen Kenntnis der Zahlenwerthe stellt sich heraus, dass bei den grossten am Heliometer messbaren Distanzen und Temperaturextremen von 40° C. nur folgende Aenderungen hervorgebracht werden, bei SCHUR — 0″·25, bei AMBRONN — 0″·14, so dass die vollständig reducirten Messungen eigentlich von der Temperatur so gut wie unabhängig sind, umsomehr als auch die Bestimmung der Scalenwerthe auf Messungen bei verschiedenen Temperaturen beruhen.

Zur Bestimmung des Scalenwerthes sind in Göttingen keine Experimente wie früher in Königsberg vorgenommen worden, deren durchaus nothwendige Wiederholung bei verschiedenen Temperaturen die sehr störende Abnahme des schweren Fernrohres erfordert haben würde, sondern wie schon bemerkt, beruht der Scalenwerth wie bei den Heliometern der Venusexpeditionen auf Beobachtungen einer Reihe aufeinanderfolgender Sterne, deren Oerter durch zahlreiche Meridianbeobachtungen auf Veranlassung von AUWERS festgelegt sind. Diese Beobachtungen haben folgende Resultate für den Scalenwerth bei 0° C. ergeben.

| | SCHUR | AMBRONN |
|---|---|---|
| Cygnuskreis . . . . . . . . . . . . | 40″·01601 | 40″·01915 |
| Hydrakreis . . . . . . . . . . . | 01506 | 01610 |
| Polbogen . . . . . . . . . . . . | 01486 | 01599 |
| GILL's Standard stars für Victoria . . | 01750 | 01710 |
| und die einfachen Mittelwerthe sind . | 40″·01586 | 40″·01710. |

Der zwischen beiden Beobachtern auch hier bestehende Unterschied hat auf die grössten am Heliometer messbaren Abstande von 2° einen Einfluss von nur 0″·21. Da sich schon bei den anderen Constantenbestimmungen zwischen beiden Beobachtern Unterschiede von offenbar individueller Natur gezeigt haben, so rechnet auch jeder mit dem von ihm bestimmten, durch spätere Beobachtungen noch weiter zu bestätigenden Scalenwerth, und nur die Tabelle für die Theilungsfehler der Objectivscalen ist bis jetzt gemeinschaftlich benutzt worden.

Wie für die Distanzen, so sind auch für die Positionswinkel Untersuchungen über die innere Uebereinstimmung angestellt und worden die Ergebnisse für letztere auf den grössten Kreis reducirt, so hat man zur Vergleichung für einen Bogen von 4000 Secunden

den wahrscheinlichen Fehler einer Distanzmessung ± 0″·176
„ „ „ eines Positionswinkels ± 0″·359.

Die Fehler verhalten sich nahe wie 1 zu 2 und das Gewicht einer Distanzmessung ist daher viermal so gross als das einer Positionswinkel-Messung. Wenn man also eine grössere Zahl von Sternen miteinander durch Messungen verbinden will, so ist es für die Bestimmung der gegenseitigen Lage am zweckmässigsten, ein Dreiecksnetz über die Gruppe zu legen und darin die Seitenlinien zu messen und ausserdem die Orientirung der Gruppe durch Messung einiger möglichst langen Linien am Positionskreise auszuführen.

Nachdem nun bei den neuen Heliometern, gegenüber der früheren geradlinigen Bewegung, den Objectivhälften eine Kreisbewegung mit der Brennweite als Radius gegeben ist, hätte man erwarten sollen, dass die an diesen Instrumenten erhaltenen Distanzmessungen zwischen zwei Sternen vollständig einwandsfrei seien, dass also der Abstand zwischen zwei Sternen einfach durch Multiplikation der an den Scalen bestimmten Objectivbewegungen und eines constanten Scalenwerthes erhalten werde, und zwar ist man zu dieser Annahme deshalb berechtigt, weil Focussirungen auf enge Doppelsterne bei zusammengeschraubten sowohl wie bei möglichst weit von einander getrennten Objectivhälften in der Ocularstellung keinerlei Unterschiede zeigten, die Bewegung der Schieber also als vollkommen kreisförmig zu betrachten ist.

Nichts desto weniger zeigte sich bei der Ausgleichung der am Göttinger Heliometer angestellten Distanzmessungen in der Praesepe (siehe »Astronom. Mitthlg., vierter Theil«), dass die aus den Messungen einer grossen Zahl von kleinen Dreiecksseiten hervorgehenden Entfernungen zwischen vier an den Grenzen der Gruppe liegenden Sternen weder mit den Meridianbeobachtungen noch mit den darauf angestellten Heliometermessungen zwischen denselben übereinstimmten. Nahezu gleichzeitig machte auch GILL (Astr. Nachr., Bd. 130, pag. 163 und 188) darauf aufmerksam, dass sich bei Gelegenheit der Bestimmung der Sonnenparallaxe aus Beobachtungen des Planeten Victoria im Jahre 1889 bei der Vergleichung der an den Heliometern in Capstadt, Newhaven und Göttingen erhaltenen Distanzmessungen im Vergleich mit den Resultaten von Beobachtungen

an zahlreichen Meridiankreisen Unterschiede herausgestellt haben, über die er folgende Uebersicht giebt:

| Mittlerer Abstand | Capstadt | | | Newhaven | Göttingen | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | GILL | FINLAY | JACOBY | CHASE | SCHUR | AMBRONN |
| 1000″ | + 0″·03 | + 0″·07 | + 0″·18 | + 0″·14 | + 0″·20 | + 0″·14 |
| 2000 | + 0·01 | 0·00 | + 0·13 | + 0·08 | + 0·08 | + 0·02 |
| 3000 | + 0·01 | − 0·01 | + 0·18 | + 0·08 | + 0·09 | − 0·11 |
| 4000 | + 0·01 | 0·00 | 0·00 | − 0·01 | − 0·06 | − 0·11 |
| 5000 | − 0·06 | − 0·05 | − 0·15 | − 0·10 | − 0·01 | − 0·15 |
| 6000 | − 0·04 | − 0·18 | − 0·21 | − 0·18 | − 0·12 | − 0·22 |
| 7000 | 0·00 | − 0·12 | − 0·12 | − 0·08 | − 0·07 | − 0·21 |

Auf noch grössere Correctionen dieser Art ist ELKIN bei der Triangulation zwischen Polsternen gekommen, wo sie bei 684 Secunden Abstand ein Maximum von + 0″·50 erreichen.

GILL glaubte diese Eigenthümlichkeiten, die besonders die Distanzen von etwa 1000 Secunden betreffen, dadurch erklären zu können, dass man sich bei den neueren Heliometern bei der Beurtheilung des Durcheinanderschwingens der Sternbilder nach einem im Gesichtsfelde des Fernrohres befindlichen Quadrat aus Metallfaden richte; da aber diese Art der Messung am Göttinger Heliometer gänzlich ungebräuchlich ist, indem man sich dort des Quadrats nur vorübergehend bedient, um bei sehr genauen Positionswinkelmessungen die Mitte des Gesichtsfeldes zu bezeichnen und es dann wieder bei Seite schiebt, bei den Distanzmessungen aber in der Weise verfahren wird, dass mit Hilfe des Prismas am Ocular das Durchschwingen der Sternbilder nach dem Augenmaass in genau verticaler Richtung vor sich geht, so ist die GILL'sche Erklärungsweise auf die Göttinger Beobachtungen nicht anwendbar. (Siehe SCHUR, Astr. Nachr., Bd. 131, pag. 381). In Göttingen ist deshalb eine grössere Reihe von Versuchen angestellt, die auch in Zukunft noch weiter fortgesetzt werden, zwischen einer Reihe von Sternen in der Praesepe und in der Vulpecula, die nahezu in einer geraden Linie erscheinen und deren Abstände durch Rechnung mit den aus Meridianbeobachtungen folgenden Oertern auf den die beiden äussersten Sterne verbindenden grössten Kreis reducirt werden können, alle möglichen Abstände zu messen, um auf empirischem Wege die Gestalt einer Curve zu bestimmen, welche die an die Distanzmessungen anzubringenden Verbesserungen ergiebt. (Siehe Astr. Nachr., Bd. 134, pag. 65 und Astr. Mitthlg. Göttingen. Vierter Theil, pag. 153.) Danach wachsen diese Correctionen für Distanzen von 0 bis 1500 Secunden schnell bis zu einem Maximum von + 0″·27 an und verschwinden dann wieder für grössere Distanzen. Es wird dort ferner gezeigt, dass diese Correctionen viel zu gross sind, um durch Constructionsfehler des Heliometers erklärt zu werden. Diese Correctionen sind also in ihrem Verhalten einigermaassen bekannt, aber die Ursache liegt noch nicht klar vor Augen, jedoch ist zu hoffen, dass die Fortsetzung der darauf gerichteten Untersuchungen über diesen höchst wichtigen Umstand noch die nöthigen Aufklärungen geben wird, so dass man den Betrag nicht nur auf empirischem Wege ermitteln kann, sondern der Grund, sei es in der Constructionsweise des Instrumentes, sei es durch Einwirkungen physiologischer Natur, klar vor Augen liegt.

Bei der Behandlung der Präsepebeobachtungen ist auf Grund des empirisch bestimmten Verlaufs der Correctionen eine Uebereinstimmung mit den Heliometermessungen des erwähnten grossen Vierecks erzielt worden, die durch fortgesetzte

Untersuchungen über diesen Gegenstand vermuthlich nicht erheblich abgeändert werden wird.

Es erübrigt nun noch, in Kürze darzustellen, wie die Messungen von Positionswinkeln am Heliometer von den Instrumentalfehlern zu befreien sind und zu diesem Zwecke soll der Gang angedeutet werden, wie nach den Vorschriften von BESSEL zu verfahren ist. Ausser BESSEL's Schriften sind übrigens für die Theorie des Heliometers noch zu erwähnen:

P. A. HANSEN, Ausführliche Methode mit dem FRAUNHOFER'schen Heliometer Beobachtungen anzustellen u. s. w. Gotha 1827.

H. SEELIGER, Theorie des Heliometers. Leipzig 1877.

H. BATTERMANN. Untersuchungen über die Gestalt der Bilder u. s. w. Astr. Nachr. Bd. 120.

Es seien

- $t$ und $\delta$ berechnete Werthe des Stundenwinkels und der Deklination eines Sternes mit Einschluss der Refraction,
- $T$ und $D$ die an den Kreisen abgelesenen Werthe von Stundenwinkel und Deklination,
- $x$ und $y$ die Abweichung des Pols des Instrumentes (der Richtung der Stundenaxe) vom Himmelspole und zwar $x$ in der Richtung des Meridians gezählt,
- $\gamma$ Indexfehler des Stundenkreises,
- $C$ Collimationsfehler des Fernrohres bezogen auf das Ende der Deklinationsaxe,
- $i$ die Neigung der Deklinationsaxe gegen die Stundenaxe bezogen auf das Ende der Deklinationsaxe,
- $\beta$ die horizontale Biegung des Fernrohres,
- $\alpha$ die Biegung der Deklinationsaxe,
- $k$ Indexfehler des Positionskreises,
- $\mu$ Drehungs-Constante bei demselben,
- $\varphi$ die geographische Breite des Beobachtungsortes,

dann hat man aus den Beobachtungen von Sternen verschiedener Deklination zur Bestimmung von $x$ und $y$ die Gleichungen

$$\delta - D + x \cos t + y \sin t - \beta \sin(\varphi - \delta) = 0$$
$$t - 15T - 15\gamma + (x \sin t - y \cos t) \tan \delta = 0$$

und wenn $T_f$ und $T_v$ die auf das Mittel der Uhrzeiten bezogenen Ablesungen des Stundenkreises bei Axe folgend und Axe vorangehend sind und man die Ausdrücke $\Delta T = \frac{1}{2}(T_f - T_v)$ bildet, so erhält man Gleichungen für $C$, $i_1$ und $\alpha$ von der Form

$$15 \Delta T \cos \delta = C - i_1 \sin \delta - \alpha \cos \varphi \cos t \cos \delta.$$

Die beste Bestimmung von $C$, $i_1$ und $\alpha$ ergiebt sich aus Durchgangsbeobachtungen im Meridian und in $\pm 6^h$ Stundenwinkel, und nachdem $i_1$ gefunden ist, folgt die Neigung der Axen $i = i_1 - \alpha \sin \varphi$.

Zur Reduction der Positionswinkel-Messungen ist dann zu rechnen

$$\lambda = (x \sin t - y \cos t) \sec \delta + \beta \cos \varphi \tan \delta \sin t$$
$$J = i_1 \sec \delta - C \tan \delta + \mu (\sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos t),$$

oder wenn man setzt

$$\sin t \sec \delta = X$$
$$-\cos t \sec \delta = Y$$
$$\cos \varphi \tan \delta \sin t = B$$
$$\sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos t = M,$$

so hat man

$$x = \lambda \; X + y Y + \beta B$$
$$J = i_1 \sec \delta - C \tan \delta + \mu M.$$

Der Positionswinkel $p$ zwischen zwei Sternen gezählt am Mittelpunkt zwischen denselben ergiebt sich aus der Ablesung $P$ des Positionskreises nach den Ausdrücken

$$\text{Axe folgend} \quad p = P + k + \lambda + J$$
$$\text{„ vorangehend} \quad = P + k + \lambda - J.$$

Um eine Abweichung des Fadenkreuzes von der optischen Axe des Fernrohres zu eliminiren, werden die Beobachtungen an derselben Seite der Säule nacheinander immer in zwei verschiedenen Lagen angestellt, zwischen denen das Fernrohr um seine Axe um 180 Grad gedreht ist, und um alle in obigen Ausdrücken enthaltenen Instrumental-Constanten zu bestimmen sind sowohl Beobachtungen im Meridian an Sternen in der Nähe des Pols und nach Süden hin als auch zu beiden Seiten des Meridians in 6 Uhr Stundenwinkel anzustellen.

Auf die Bestimmung des Index-Fehlers des Positionskreises mit Anwendung des Collimators ist, wie schon bemerkt, im Laufe der Zeit verzichtet worden und es sind später Beobachtungen weit entfernter Sterne, deren Oerter aus Meridianbeobachtungen bekannt sind, an die Stelle getreten. Um sich ein Urtheil über die dabei erreichbare Genauigkeit zu bilden, soll hier eine Uebersicht über die Resultate gegeben werden.

a) Collimatorbeobachtungen.

| | | | Index-Fehler | Drehungs-Constante |
|---|---|---|---|---|
| 1889 | Juni | 13 | + 0′·27 | — |
| | Aug. | 16 | + 0 ·92 | — 0′·25 |
| | Sept. | 30 | + 0 ·60 | — 0 ·18 |
| 1890 | Febr. | 12 | + 0 ·18 | — 0 ·14 |
| | Nov. | 12 | + 0 ·17 | + 0 ·09 |
| 1891 | Apr. | 16, 22 | — 0 ·22 | — 0 ·32 |
| | Oct. | 23 | + 0 ·37 | — 0 ·60 |
| 1892 | Apr. | 14, 16 | + 0 ·64 | — 0 ·58 |
| | | Mittel | + 0 ·36 | — 0 ·28 |

b) Sternbeobachtungen.

| | | | Abstand |
|---|---|---|---|
| 1892 Hydrakreis Sternpaar *cf* | + 0·30 | + 0·192 | 118′·8 |
| *ad* | + 0·89 | + 0·179 | 111 ·8 |
| 1889, 90 Stand. stars. Victoria | + 1·12 | — | 58 ·8 |
| Mittel mit Gewichten | + 0·69 | + 0· 18 | |

und die abgerundete Annahme ist

$$k = + 0'{\cdot}6 \qquad \mu = + 0'{\cdot}18.$$

Die Besprechung des Heliometers kann nicht abgeschlossen werden, ohne noch einer ganz besonderen Form zu erwähnen, welche von belgischen Astronomen bei der Beobachtung des Venusdurchganges im Jahre 1882 benutzt worden ist, und wovon man eine Beschreibung in den »Annales de l'observatoire royal de Bruxelles, Tome V 1884« mit Abbildungen findet. Man hat nämlich auf Veranlassung von HOUZEAU eine achromatische Linse von 4·84 *m* Brennweite und 0·22 *m* Oeffnung, wie bei den Heliometerobjectiven in zwei halbe Objective zerlegt und jede der beiden Hälften an den Enden zweier verschiedener Fernröhre angebracht und an jedem Fernrohr die Hälfte eines anderen, viel kürzeren Objectivs so eingeführt, dass die Brennpunkte der ungleichen Linsen mit einander zusammenfielen und zwar wählte man die Brennweite des kleinen Objectivs so, dass sie sich zu der Brennweite des grossen Objectivs nahe so verhielt, wie

der Durchmesser der Venus zum Durchmesser der Sonne, so dass, wenn man die Sonne durch das kleine und die Venus durch das grosse Objectiv durch ein gemeinschaftliches Ocular beobachtete, bei geeigneter Einstellung des Abstandes der beiden optischen Axen in Positionswinkel und Distanz das Bild der Sonne dasjenige der Venus mit einem schmalen Ringe umgab. Auf die allmähliche Veränderung der Lage der Mittelpunkte der beiden Himmelskörper wurde dadurch Rücksicht genommen, dass das kleine Objectiv mit Hilfe einer Mikrometerschraube verschoben und das ganze Fernrohr im Positionswinkel gedreht werden konnte. Die centrische Einstellung des Venusbildes auf das wie bemerkt etwas grössere Sonnenbild wurde nicht direkt durch das Ocular, sondern durch Projection auf einen davor angebrachten Schirm beobachtet und da bei einem solchen Instrument die Objective natürlich nicht durchgeschraubt worden, so waren noch besondere, hier nicht näher zu erörternde Untersuchungen nothwendig, um aus den jedesmaligen Ablesungen der Mikrometerschraube den Abstand der Mittelpunkte von Sonne und Venus zu bestimmen. Diese beiden gleichgestalteten Heliometer wurden bei dem Venusdurchgang 1882 in Amerika unter — 33½ und + 29½ Grad Breite benutzt.

Zum Schluss dürften wohl noch einige Betrachtungen darüber anzustellen sein, welche Stellung das Heliometer in Zukunft gegenüber der sich immer weiter ausbildenden Anwendung der Photographie auf die Astronomie einnehmen wird.

Unter den astronomischen Instrumenten nimmt in Bezug auf die Genauigkeit das Heliometer entschieden die erste Stelle ein; während man aber den gewöhnlichen Refractoren, wie der Erfolg lehrt, immer grössere Dimensionen geben und dadurch immer schwächere Sterne beobachten und auch photographiren kann, sofern bei genügend langer Exposition die an sich schwache Lichtwirkung sich immer mehr steigert, was bei Beobachtungen mit dem Auge natürlich nicht stattfindet, so ist diese Aussicht dem Heliometer mit seiner complicirten mechanischen Construction wohl nicht beschieden und selbst bei den grössten erreichbaren Dimensionen fällt immer der Nachtheil ins Gewicht, dass man bei dem Gebrauche des Heliometers zuerst damit beginnt, die beiden Hälften auseinander zu schrauben und dadurch die Lichtstärke des Apparates sofort auf die Hälfte zu reduciren.

Nachdem man bei den Venusdurchgängen in diesem Jahrhundert neben den Heliometern auch photographische Apparate angewandt hatte, zeigte es sich bei der Bearbeitung, dass die aus den Heliometerbeobachtungen der deutschen Expeditionen erhaltenen Resultate, wenn auch die Erwartungen wohl etwas weiter gegangen waren, doch vollkommen auf der Höhe der Zeit standen und dass die photographischen Aufnahmen der Nordamerikaner Dank der ausserordentlichen sorgsamen Vorkehrungen damit nahezu gleichwerthig waren, dass dagegen die photographischen Aufnahmen auf den deutschen Expeditionen schon viel zu wünschen übrig liessen, weshalb sie bei dem zweiten Venusdurchgang im Jahre 1882 nicht wiederholt wurden, während anderweitige Versuche, soweit darüber etwas in die Oeffentlichkeit gedrungen ist, als vollständig verunglückt anzusehen sind.

Im folgenden Jahrzehnt hat die Anwendung der Photographie auf die Astronomie freilich sehr bedeutende Fortschritte gemacht und bei der Schnelligkeit, mit der man heutigen Tages einen Sternhaufen photographisch aufnehmen kann, dessen Bestandtheile an Helligkeit weit jenseits der mit dem Heliometer zu erreichenden Grenzen liegen, hat die photographische Methode

auch mit Rücksicht auf den Zeitaufwand gegenüber den mühsamen heliometrischen Vermessungen einen sehr grossen Vorsprung gewonnen, natürlich unter der Voraussetzung, dass die Genauigkeit der aus photographischen Aufnahmen abgeleiteten Sternpositionen an die der heliometrischen Vermessungen heranreicht. In letzterer Hinsicht würde man schon viel früher sich eine Vorstellung haben verschaffen können, wenn nicht die RUTHERFURD'schen photographischen Aufnahmen von Sternhaufen aus den sechziger Jahren so lange Zeit so gut wie vollständig unbeachtet und unbearbeitet liegen geblieben wären. Nach dem, was darüber aber aus den letzten Jahren von der Sternwarte in New-York bekannt geworden ist, in deren Besitz diese älteren Photographien übergegangen sind und wo sie von HAROLD JACOBY vermessen werden, hat man schon vor zwanzig Jahren eine recht befriedigende Genauigkeit erreicht. In noch höherem Maasse wird dies wohl bei den neueren Aufnahmen der Fall sein, wie man sie in Potsdam, Paris und an anderen Orten anstellt, und eine sehr günstige Gelegenheit zu Vergleichungen wird das Erscheinen der auf der Göttinger Sternwarte in den letzten Jahren vorgenommenen Triangulation der Praesepe liefern. Es ist zu vermuthen, dass auch dem Heliometer in Zukunft immer noch eine sehr bedeutende Rolle vorbehalten bleibt, wenn es sich in Händen von Astronomen befindet, die der mühsamen und schwierigen Behandlung eines Präcisionsinstrumentes gewachsen sind, aber in Bezug auf die Schnelligkeit der Aufnahmen und der raumdurchdringenden Kraft wird es hinter den photographischen Refractoren zurückbleiben. Man wird sich in Zukunft wohl nicht mehr darauf einlassen, am Heliometer Oerter von Sternen bestimmen, die nahe an der Grenze der Sichtbarkeit liegen, aber ohne Zweifel wird es auch in Zukunft bei der Aufnahme von Sternhaufen durch die Photographie von unschätzbarem Werthe sein, die Abstände der helleren und von einander entfernteren Sterne eines photographisch aufgenommenen Sternhaufens durch heliometrische Beobachtungen festzulegen, um die Dimensionen der Gruppe durch ein sicher bestimmtes Winkelmaass ausdrücken zu können. Wenn die Heliometerbeobachter durch den Vorsprung der Photographie entmuthigt, die Hände in den Schooss legen und Alles der Photographie überlassen wollten, zu deren Ausführung am Fernrohre selbst vielleicht nicht einmal wissenschaftlich ausgebildete Astronomen erforderlich sind, so könnte vielleicht eines Tages ein ganz unheilvoller Rückschlag erfolgen. Auch kann wohl kein Zweifel darüber bestehen, dass man die Bestimmung der Grösse des Sonnendurchmessers und dessen von einigen Astronomen vermuthete, aber keineswegs erwiesene Veränderlichkeit mit der Sonnenfleckenthätigkeit wohl noch auf lange Zeit und vielleicht mit Ausschliessung der Photographie für immer dem Heliometer überlassen muss. Dieses Instrument wird also, ausser seiner grossen Leistungsfähigkeit auf anderen Gebieten, eine Rolle spielen und einen Namen verdienen, der ihm mit Rücksicht auf seine erste Anwendung von seinem Erfinder zuertheilt worden ist. Schreiber dieser Zeilen erfüllt es mit einer gewissen Befriedigung, dass die Göttinger Sternwarte die Verfolgung solcher Untersuchungen zu einer ihrer Hauptaufgaben gemacht hat.

SCHUR.

**Heliotrop** ist ein ursprünglich von GAUSS angegebener kleiner Apparat, welcher bei geodätischen Messungen dazu dient, einen anvisirten Punkt durch reflektirtes Sonnenlicht als sternartiges Object erscheinen zu lassen. Es besteht aus einem kleinen, um zwei Axen (horizontal und vertical) drehbaren Spiegel, der in der Mitte eine kleine, kreisförmige Oeffnung hat, und einer etwa ½ Meter

davon entfernten Röhre mit einem Fadenkreuz. Spiegel und Röhre sind auf einem Brett befestigt, welches auf einem Pfeiler genau über dem anvisirten Fixpunkt aufgestellt wird. Durch die Oeffnung des Spiegels und das Fadenkreuz visirt man nach der Beobachtungsstation, dreht hierauf am Spiegel so lange, bis das Sonnenlicht das Fadenkreuz erhellt. Dann geht das Sonnenlicht nach dem Stationspunkt hin und erscheint dort als sternartiger Punkt je nach der Entfernung von grösserer oder geringerer Helligkeit. Um die Einstellung des Spiegels gut kenntlich zu machen, ist die Röhre am vorderen Ende durch einen Deckel verschliessbar, es erscheint dann bei richtiger Einstellung ein kreisrunder, von der Oeffnung im Spiegel herrührender dunkler Fleck in der Mitte des Fadenkreuzes. Man hat natürlich den Spiegel dem Lauf der Sonne entsprechend nachzudrehen um das Centrum des dunklen Flecks stets in Coincidenz mit der Mitte des Fadenkreuzes zu erhalten. Mit einem kleinen Spiegel kann man in dieser Weise sehr entfernte, sonst nicht mehr mit einem Theodolitfernrohre erkennbare Punkte zur scharfen Einstellung sichtbar machen. VALENTINER.

**Horizontalpendel**, ein Instrument von äusserster Empfindlichkeit, welches ursprünglich bestimmt war, die Massen und Entfernungen von Sonne und Mond durch die von letzteren geübten anziehenden Wirkungen zu ermitteln. Es beruht auf der Idee, ein Pendel um eine nahezu verticale Axe schwingen zu lassen. Schon GRUITHUISEN sprach in seinen »Analecten für Erd- und Himmelskunde, München 1828« den Gedanken aus, dass es möglich sein müsse, die anziehenden Wirkungen der genannten Körper direkt zu bestimmen. Er wollte dazu lange und feine Bleilothe verwenden, die er tief im Erdinnern aufzustellen vorschlug. Bei Vorversuchen, die er mit einem solchen Instrument machte, das er Elkysmometer nannte, glaubte er deutlich die »Wirkungen der Schwere und Bewegung der Erde und die der zunehmenden Nähe anderer grosser Weltkörper« zu erkennen. Wenngleich es keinem Zweifel unterliegt, dass GRUITHUISEN in seinen Resultaten irregeleitet wurde und diese nur durch äussere zufällige Störungen veranlasst sind, da die kleinen Grössen, um die es sich hier handelt, durch so rohe Hilfsmittel, wie er sie beschreibt, nicht zu erkennen sind, so verdient sein Name hier doch Erwähnung, weil ein Schüler von ihm, L. HENGLER, in der That bald nachher das später von FR. ZÖLLNER und E. v. REBEUR-PASCHWITZ construirte Horizontalpendel im Princip angegeben hat.

L. HENGLER, damals Student der Astronomie in München, später katholischer Geistlicher in Württemberg und astronomisch nicht mehr thätig, schreibt in DINGLER's Polytechn.-Journal 1832, Bd. 32 folgendes:

(Da in seiner Abhandlung, die lange in Vergessenheit gekommen war, und erst viele Jahre nachher, als ZÖLLNER ganz unabhängig die Idee des Horizontalpendels erfasst und das Instrument zur Ausführung gebracht hatte, wieder bekannt wurde, das Princip deutlich ausgesprochen ist, mögen hier die betreffenden Stellen wiedergegeben werden.)

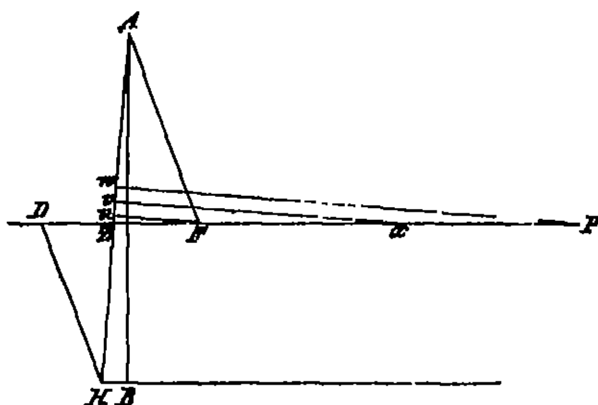
»Das so verschiedentlich angewandte und für so viele Zwecke wichtige Pendel ist nach einer Richtung hin noch nicht gehörig benutzt, nämlich als Instrument, diejenigen bewegenden Kräfte zu messen, welche nicht in paralleler Richtung mit der Schwere wirken. Es ist nämlich bekannt, dass das Pendel, wenn es von der Schwere allein afficirt wird, nur in verticaler Lage ruht, und dass eine gewisse Kraft, die aber nicht parallel mit der Schwere wirken darf, erfordert wird, dasselbe aus der senkrechten Lage zu bringen, welche Kraft dem Sinus des Elevationswinkels proportional ist; daher liesse sich durch das Pendel

jede solche einwirkende Kraft genau bestimmen. Allein, da es viele Kräfte giebt, die im Verhältniss zur Schwere so gering sind, dass wir den Sinus des durch sie erzeugten Elevationswinkels bei einem Pendel von der Länge, die wir ihm zu geben im Stande sind, unmöglich wahrnehmen können, so sind wir auch nicht im Stande, solche Kräfte durch ein gewöhnliches Pendel zu messen. So wissen wir wohl, dass z. B. jeder Körper auf der Oberfläche der Erde gegen den Mond, gegen die Sonne u. s. w. zu einer Zeit stärker gravitiren müsse, als zu einer anderen, je nachdem er auf der diesem Körper zu- oder abgewandten Seite sich befindet, und das Pendel müsste diese Differenz seiner Natur nach genau anzeigen; allein hierzu wäre schon ein Pendel von mehreren tausend Fuss Länge nöthig, um nur eine Spur von dieser Differenz wahrnehmen zu können. Ebenso verhält es sich mit vielen anderen Kräften, welche alle ganz genau durch das Pendel bestimmt werden könnten, wenn wir im Stande wären, ihm jede beliebige Länge zu geben. Diese Schwierigkeit nun glaube ich durch eine Vorrichtung überwunden zu haben, sodass man im Stande ist, ein Pendel, oder eigentlich eine Pendelwage zu verfertigen, die an Empfindlichkeit einem gewöhnlichen Pendel von jeder, selbst von unendlicher Länge gleichkommt, und man daher ein Instrument hat, jede auch noch so geringe Kraft, welche nicht in paralleler Richtung mit der Schwere wirkt, zu messen. Diese Pendelwage beruht auf dem Princip, dass man ein Pendel in einer gegen den Horizont geneigten Ebene schwingen lässt, anstatt in einer senkrechten, wie es bei gewöhnlichen Pendeln der Fall ist, und hier gilt folgender Lehrsatz: Bei einem in schiefer Ebene schwingenden Pendel verhält sich die Elevationskraft zur Schwere, wie das Product aus dem Sinus des in dieser Ebene beschriebenen Elevationswinkels in den Sinus des Neigungswinkels der schiefen Ebene zu dem Produkte aus der Länge des Pendels in die Länge der schiefen Ebene. Oder wenn $\gamma$ die genannte Kraft, $G$ die Schwere, $a$ der Sinus des Elevationswinkels, $L$ die Länge der schiefen Ebene, $l$ die Länge des Pendels, und $\alpha$ der Sinus des Neigungswinkels ist, so ist

$$\gamma : G = a\alpha : lL$$

oder

$$\gamma = \frac{a\alpha}{lL} G.$$



(A. 245.)

Nach Beweis dieses Satzes beschreibt HENGLER sein Instrument wie folgt:

»Um einen Körper in einer gegen den Horizont geneigten Ebene schwingen zu lassen, wobei die Reibung fast gänzlich aufgehoben ist, mache man folgende Einrichtung:

Es seien $A$ und $B$ senkrecht über einander stehende feste Punkte; $DH$ und $AF$ zwei Fäden, welche in $A$ und $H$ befestigt sind und den Hebelarm $DP$, dessen Schwerpunkt nach $P$ fällt, in horizontaler Lage halten; so wird dieser Hebelarm nur in einer mit der Linie $MN$ (welche durch $H$ und $B$ gezogen ist) parallelen Lage ruhen, und jedes Mal wieder dahin zurückkehren, wenn er durch irgend eine Kraft aus dieser Lage gebracht worden ist, oder eigentlich nach Art

eines Pendels hin- und herschwingen, und zwar in einer schiefen Ebene, deren Neigungswinkel $= \angle HAB$ ist. Man mag daher ein Gewicht oder eigentlich den Schwerpunkt des Hebelarmes auf jeden beliebigen Punkt desselben übertragen, so beschreibt er Schwingungen in einer unter dem Neigungswinkel $HAB$ gelegten Ebene, wobei die Länge des Pendels dem Abstand von dem Punkte $Z$ (wenn dieser der Punkt ist, wo die Linie $HA$ den Hebelarm schneidet) proportional ist. Denn man wähle sich den Punkt $F$, ziehe $Fu$ senkrecht auf $AH$ und drehe den Hebelarm um die Linie $AH$ als Axe (denn diese ganze Linie ist unbeweglich, weil die Punkte $A$ und $H$ unbeweglich sind), so beschreibt die Linie $Fu$ eine Kreisfläche und $F$ einen Kreis in einer Ebene, welche gegen den Horizont unter dem Winkel $uFs = HAB$ geneigt ist, was sogleich einleuchtet, wenn man sich das Dreieck $AFu$ als festen Körper denkt, welcher alsdann einen Kegel beschreibt, dessen Axe $Au$ ist und dessen Grundfläche $uF$ zum Radius hat. Aus dem nämlichen Grunde beschreiben die Punkte $x, P$ Kreise in einer schiefen Ebene, deren Neigungswinkel $vxs = wPs = uFs = HAB$ sind und deren Radien dem Abstande von $s$ proportional sind, d. h. für den Punkt $P$ ist $Pw$, für $x$ ist $xv$ der Radius.

Will man nun obige Gleichung hier anwenden, so ist $HB$ der Sinus des Neigungswinkels der schiefen Ebene $= a, AH$ die Länge derselben $= L$, $wP$ die Länge des Pendels $= l$, daher

$$\gamma = \frac{a \cdot HB}{AH \cdot wP} G$$

oder da man, wenn der Winkel $HAB = wPs$ sehr klein ist (wie hier gewöhnlich) ohne merklichen Fehler $AB$ statt $AH$ und $Ps$ statt $Pw$ setzen kann, so ist auch

$$\gamma = \frac{a \cdot HB}{AB \cdot Ps} G.«$$

Es müssen nun, worauf HENGLER besonders aufmerksam macht, die Punkte $A$ und $D$ unbeweglich fest sein; es dürfen die Faden $AF$ und $DH$ keine drehende Kraft haben, auch keine bekommen durch barometrische, hygrometrische, thermometrische Veränderungen; sie dürfen daher nicht aus geflochtenen Stoffen oder dergl. sein; es müssen auch alle fremden Kräfte, Luftzug, Magnetismus u. s. w. abgehalten werden, endlich muss eine Vorrichtung vorhanden sein, den Hebelarm in Ruhe zu bringen.

Mit einem solchen Instrumente stellte HENGLER verschiedene Versuche an, die ihm die ungemeine Empfindlichkeit desselben zu zeigen, aber jedenfalls auch in ihren Resultaten durch Zufälligkeiten weit mehr zu liefern schienen, als thatsachlich der Fall gewesen sein kann, da der Apparat erst in ungleich verfeinerter Ausführung die Bedeutung erlangen konnte, die er gegenwärtig thatsächlich hat.

Ebenso wie die HENGLER'sche Abhandlung übrigens keine Beachtung fand, erging es auch einer Mittheilung PERROTS in den »Comptes Rendus Bd. 54« (1862) über einen nach gleichen Principien construirten Apparat. Selbst die verschiedenen Abhandlungen ZÖLLNER's haben längere Zeit zu keinen neuen Versuchen in der Richtung, für welche das Horizontalpendel eigentlich bestimmt war, angeregt, und doch waren die Ergebnisse der ersten Beobachtungen ZÖLLNER's der Art, dass eine verbesserte Construction des Apparats wichtige Folgerungen hätte erwarten lassen. Andererseits hatte aber schon ZÖLLNER darauf hingewiesen, dass, wenn das Pendel nicht zu den von ihm erwarteten Resultaten bezüglich der Constatirung der Anziehungswirkungen von Sonne und Mond

führen sollte, es jedenfalls ein sehr empfindliches Seismometer abgeben müsse. Und nach dieser Richtung hin fand es zahlreiche Anwendungen, die zu allmählichen Verbesserungen in der Construction des Horizontalpendels und zu seiner letzten Vollkommenheit geführt haben. Zöllner beschreibt seinen ursprünglichen Apparat in folgender Weise:

An einer eisernen Säule mit Dreifuss, dessen Füsse möglichst lang sind, um durch feine Bewegungen der Fussschrauben möglichst kleine Aenderungen in der Lage der Aufhängepunkte zur Richtung der Schwerkraft nach Belieben herstellen zu können, befinden sich oben und unten Klemmringe mit Ansatzstücken zur Befestigung zweier Uhrfedern (an Stelle derselben hatte Zöllner ursprünglich feine Drähte genommen, die sich aber bald als unbrauchbar erwiesen) die mittelst eines 8 *kg* schweren Bleigewichtes mit einem vorn befindlichen Spiegel in Spannung gehalten wurden. Das Gewicht stellte mit einer Glasstange, die durch Ringe gelegt wurde, welche ihrerseits mit dem einen Ende der Uhrfedern verbunden waren, das eigentliche Pendel dar. Auf der gegenüberliegenden Seite der Säule war ein Gegengewicht angebracht. Eine Fussschraube, welche möglichst in der durch die beiden Aufhängepunkte gelegten Verticalebene stehen muss, gestattet ganz nach Bedürfniss die Empfindlichkeit des Instrumentes zu verändern, indem durch die relative Lage der Aufhängepunkte die Schwingungsdauer des Horizontalpendels bedingt ist. Eine Schwingungsdauer von 30 Secunden (halbe Periode) war leicht zu erreichen. Bevor das Pendel in die Ringe gelegt wurde, welche in kleine, auf der Axe angebrachte Einschnitte eingreifen, wurde es unter dem direkten Einfluss der Schwere vermittelst einer im Drehpunkt provisorisch angebrachten Schneide in Schwingungen versetzt und ergab als Schwingungsdauer sehr nahe 0″·250. Der Spiegel am Pendelgewicht diente zur Ablesung der Ablenkung an einer Scala. Die Beobachtungen, welche Zöllner mit diesem Instrument im Jahre 1870, anfangs in einem Kellerraume der Leipziger Universität, dann im Garten der Leipziger Sternwarte unter Berücksichtigung aller denkbaren Einflüsse anstellte, führten beiläufig zu folgenden Resultaten und Ergebnissen. Da der Abstand der Scala vom Spiegel 3186 *mm* betrug, die Dauer einer Schwingung 14″·444, ergab sich unter Berücksichtigung der Schwingungsdauer bei verticaler Aufhängung von 0″·25, dass 1 *mm* Scalentheil am Horizontalpendel einer Ablenkung von 0·0097068 Bogensecunde eines gewöhnlichen Pendels entsprach. Da der 10. Theil eines Scalentheils leicht zu schätzen war, so war eine Ablenkung von der Lothlinie von nur 0·001 Bogensecunde auch leicht zu constatiren.

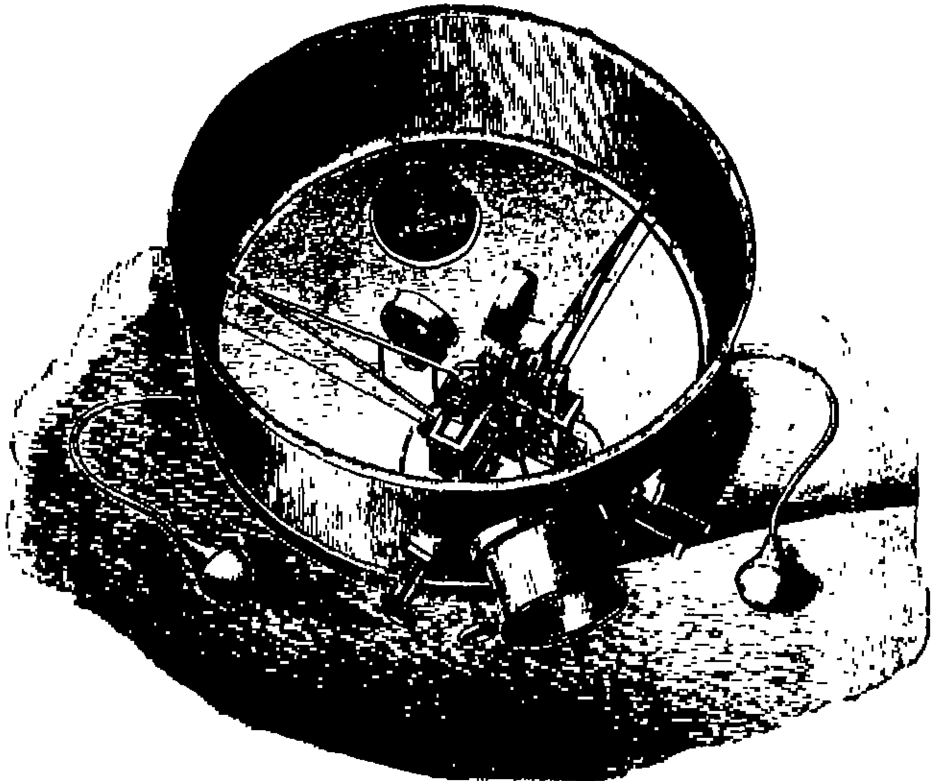
Nun hat C. A. F. Peters in seiner Schrift »Von den kleinen Ablenkungen der Lothlinie und des Niveaus, welche durch die Anziehungen der Sonne, des Mondes und einiger terrestrischer Gegenstände hervorgebracht werden« (Bull. de la classe physico-math. de l'Acad. Imp. d. sc. de St. Pétersbourg, t. III, 14, 1844) nachgewiesen, dass die mittlere Ablenkung, welche der Mond in günstiger Lage hervorbringen kann, 0″·0174 beträgt, diejenige, welche unter gleichen Verhältnissen durch die Sonne hervorgerufen wird 0″·0080. Wird nun das Horizontalpendel so aufgestellt, dass die Gleichgewichtslage mit der Ebene des Meridians zusammenfällt, so werden jene Maximalablenkungen entgegengesetzte Zeichen annehmen, je nachdem das Gestirn sich im Osten oder Westen befindet, man würde darnach also die doppelten Wirkungen, nämlich 0″·0348 bezw. 0″·0160 erhalten. Es müssten sich also in der That nach jenen Vorversuchen diese Grössen erkennen lassen.

Zöllner selbst gelang dieser Nachweis nicht, er hat einestheils keine

genügend ausgedehnten Beobachtungsreihen angestellt, anderentheils musste der Apparat erst weiterer Vervollkommnung entgegengeführt werden, bevor man wirklich so feine Resultate zu erzielen hoffen konnte. Nach ihm sind verschiedene Verbesserungen vorgeschlagen, alle zu dem Zweck, das Horizontalpendel zur Constatirung der leichtesten Erschütterungen der Erdkruste zu verwenden. Sie richteten sich auf den empfindlichsten Punkt des Apparats, die Aufhängevorrichtung, sowie auf die Einführung einer Dämpfung, welche das Pendel nach wenigen Schwingungen zur Ruhe kommen liess. Beobachtungen sind aber mit den zuletzt genannten Vorrichtungen, die darin beruhten, dass ein am Pendel befestigter Draht in ein mit einer Flüssigkeit gefülltes Gefäss tauchte, nicht angestellt. In ersterer Beziehung sind EWING und GRAY zu nennen, von denen letzterer die Aufhängung nach der aus Fig. 246 ersichtlichen Weise durchführte. Hier ruht das Gewicht $C$ in einer Gabel der Stange $b$, die sich mit der Spitze auf ein Stahllager am Stativ stützt, während der Faden $a$ vertical über diesem Stützpunkt befestigt ist.

(A. 246.)

E. v. REBEUR-PASCHWITZ nahm 1887 die Arbeiten zuerst an einem ganz primitiven Apparat in höchst ungünstiger Aufstellung in Karlsruhe auf, wo er

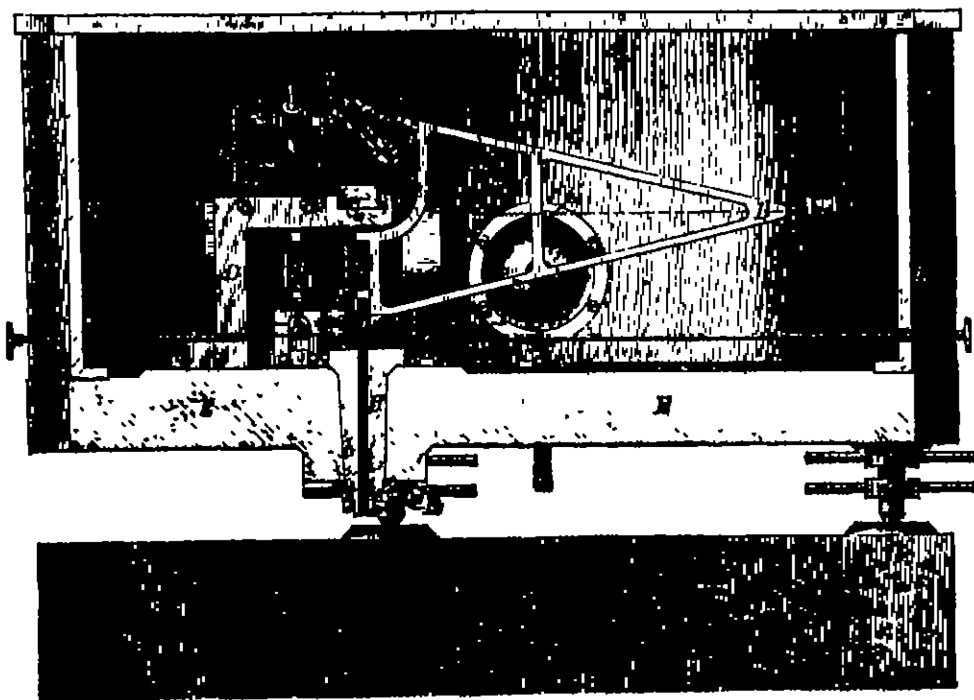


(A. 247.)

damals Assistent der Sternwarte war. Dann, als die Möglichkeit genauer Resultate bei Construction eines verbesserten Apparats unzweifelhaft wurde, lieferte REPSOLD mehrere Pendel, die, an verschiedenen Orten aufgestellt, in Potsdam, Wilhelmshaven, Strassburg, Puerto Orotava (Teneriffa), zum Theil sehr überraschende

Ergebnisse hatten. Endlich hat Stückrath in Berlin-Friedenau das Horizontalpendel auf v. Rebeur's Anregung noch weiter vervollkommnet und namentlich zwei senkrecht zu einander aufgestellte Pendel an demselben Apparat vereinigt, um mit dem gleichen Instrument die Ablenkungen und Schwankungen zu untersuchen, welche genau in die Ebene eines Pendels fallen und daher hier unvermerkt bleiben. Obwohl mit letzterem Instrument auch noch keine Beobachtungen angestellt werden konnten, da der Tod den jungen Gelehrten ereilte, so mag doch jetzt hier die Beschreibung gerade dieses Instrumentes, welche der genannte Mechaniker in der »Zeitschrift für Instrumentenkunde Bd. XVI«, pag. 10 ff. (Berlin 1896) veröffentlichte, wenigstens im Wesentlichen wiedergegeben werden, da wohl kaum auf frühere Constructionen zurückgegriffen werden dürfte.

»Das Instrument ist im Ganzen in der Fig. 247 abgebildet. Die Haupttheile sind ein leichter, als durchbrochenes, gleichschenkliges Dreieck aus Aluminium

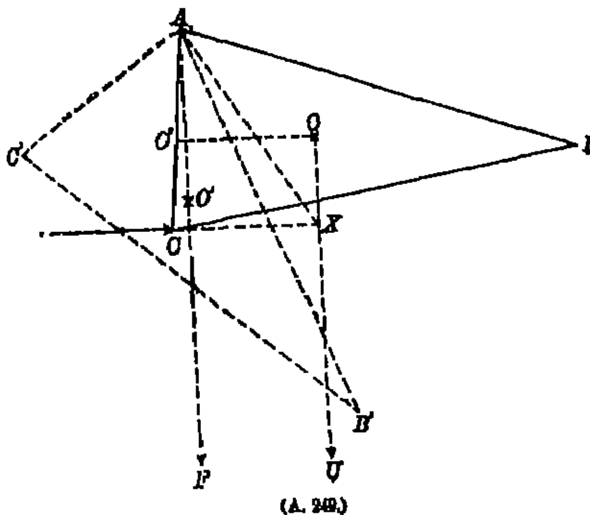


(A. 248)

gefertigter Körper, das Pendel *ABC* (Fig. 248) (wie es ähnlich vorher von Repsold gemacht war) und die beiden am Gestell angebrachten feinen Spitzen $S$ und $S'$, um welche die Drehung des Pendelkörpers stattfindet. Bedingungen für die Empfindlichkeit und Brauchbarkeit des Instrumentes sind 1) möglichst feine Spitzen aus möglichst widerstandsfähigem Material, 2) die Erzielung einer, soweit irgend thunlich, reibungsfreien Bewegung des Pendels, 3) die Möglichkeit der feinsten Justirbarkeit der Lage der Spitzen gegen einander bei stabiler Lagerung derselben im Gestell. Als vierter Punkt kommt dann noch in practischer Hinsicht hinzu, dass dafür Sorge getragen ist, das Aufhängen des Pendels auf die Spitzen bewirken zu können, ohne Gefahr zu laufen, die feinen Spitzen durch Gleiten der Pfannen auf denselben zu beschädigen.«

Bei der noch mangelnden Erfahrung über das für einen solchen Apparat zweckmässigste Material zu den Spitzen nahm Stückrath Stahl und Achat, und

es gelang ihm der Schliff mit beiden Sorten der Art, dass der Krümmungsradius der äussersten Spitzenabrundung nicht mehr als 0·005 *mm* betrug. Um ein möglichst freies Spiel des Pendels auf den Spitzen zu erreichen, verfuhr der Verfertiger folgendermaassen: »Sei (Fig. 249) das Dreieck $AB'C'$ in $A$ um eine horizontale Axe drehbar aufgehängt. Sein Schwerpunkt $O'$ liegt dann selbstverständlich senkrecht unter $A$. Um dies Dreieck in der gewünschten Lage $ABC$ zu erhalten, muss bei $C$ ein horizontal gerichteter Gegendruck angreifen. Auf das System wirken nun folgende Kräfte: in $O$ die Schwerkraft in senkrechter Richtung $OU$, in $C$ der Gegendruck horizontal, dessen Richtung sich mit $OU$ in $X$ schneidet. Soll im System Gleichgewicht herrschen, so muss die Druckrichtung in $A$ durch $X$



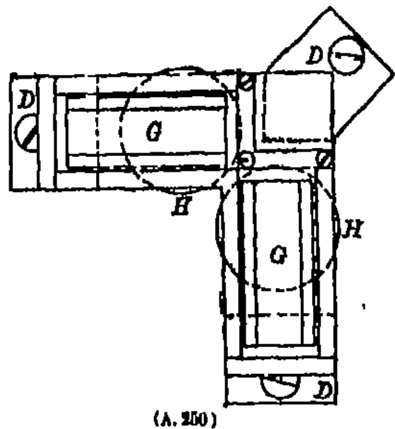
(A. 249.)

gehen. Werden nun die Axe $A$ und der Punkt $C$ durch Planflächen ersetzt, welche senkrecht zu $AX$ bezw. $CX$ stehen, und stützen sich diese Planflächen auf Spitzen, deren Axen in $AX$ und $CX$ liegen, so kann das System, ohne Neigung abzurutschen, auf diesen beiden Spitzen schweben, mit der denkbar leichtesten Drehbarkeit um die Verbindungslinie der beiden Spitzen als Axe. Analog einem Wagebalken kann das System im stabilen, indifferenten, und labilen Gleichgewicht sein. Es ist stabil, solange die Projection $O''$ des Schwerpunktes $O$ auf die Verbindungslinie der Spitzen auf der entgegengesetzten Seite der Verticalen $AP$ bleibt wie $O$, und labil, wenn $O''$ auf dieselbe Seite von $AP$ fällt wie $O$. Die Empfindlichkeit des Instrumentes wird, ähnlich der Wage, um so grösser, je näher $O''$ an $AP$ herankommt. Im Gleichgewicht, also in Ruhe, kann das Pendel nur hängen, wenn die Ebene, welche durch die Punkte $A$, $O$, $C$ gegeben ist, zugleich die Richtung der Schwerlinie enthält. Verschiebt man also den Punkt $C$ in der Richtung senkrecht zur Ebene der Zeichnung, so muss nothwendig eine Drehung um die Axe $AC$ eintreten, bis sich die neue Ebene $ACO$ wieder in der Richtung der Schwerlinie befindet. Da das Instrument ausserordentlich empfindlich ist, so kam alles darauf an, die Justirbarkeit der Spitze $C$ so fein und sicher als möglich zu machen.«

Es genügt nun bei der weiteren Beschreibung des Apparats, nur ein Pendel zu berücksichtigen, da das zweite genau gleich construirt ist und in genau derselben Weise wie das erste, nur in der dazu senkrechten Ebene zu functioniren hat.

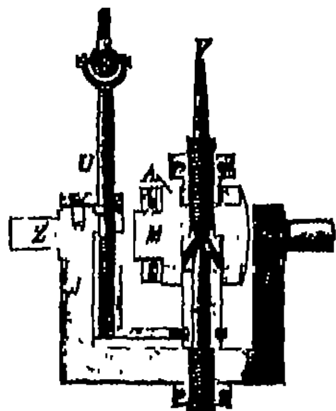
»Eine starke runde gusseiserne Platte $EE$ (Fig. 248), welche auf 3 kräftigen Fussschrauben *ss* ruht, dient dem Instrument als Grundplatte und kann durch die Fussschrauben soweit horizontal gestellt werden, als es mittels der in Fig. 247 sichtbaren Röhrenlibellen möglich ist. Auf dieser Platte steht als Umhüllung des Instrumentes ein kupferner Cylinder, der durch eine oben aufgelegte starke Spiegelglasplatte geschlossen wird. Durch die Grundplatte geht für jedes Pendel

ein zahnartiger Conus $H$ derart, dass seine Axe nahezu senkrecht unter der oberen Spitze $S$ liegt, welche das Pendel trägt. Jeder Conus trägt unten ein Schneckenrad $R$, welches durch eine Schraube ohne Ende sehr langsam gedreht werden kann. Auf der oberen Conusfläche ist das Lager für die untere Spitze $S'$ befestigt. Die Spitze $S'$ geht als Mikrometerschraube durch ihr Lager und kann ebenfalls durch Schraube ohne Ende und Schneckenrad $r$ sehr fein vorwärts bewegt werden. Da es sich für die Feinstellung der Spitze höchstens um eine Umdrehung der Mikrometerschraube handeln kann, so ist die Bewegung durch Schneckenrad und Schraube ohne Ende sehr gut möglich, wenn das Rad nicht dem Durchmesser der Schraube entsprechend am Rand ausgedreht ist, sondern seine Zähne der Neigung der Schraube entsprechend schräg auf den Umfang aufgeschnitten sind. Unter einem Mikroskop wird nun die Spitze $S'$ so eingestellt, dass sie etwas, sagen wir 0·5 *mm* ausserhalb der Axe des Conus $H$ steht; sie wird also bei der Drehung von $H$ einen Kreis von 0·5 *mm* Radius beschreiben. Nur durch diese Einrichtung ist es möglich, die Pendel, während sie schwingen, in eine bestimmte Gleichgewichtslage zu bringen. Ueber den beiden Conis $H$ steht ein dreibeiniger Bock $DDD$, dessen Grundriss und Stellung zu $HH$ aus Fig. 250 ersichtlich ist. Auf den beiden winklig zu einander stehenden Oberflächen dieses Bockes sind 2 Schlitten $G$ durch Schrauben verstellbar. Auf diesen Schlitten sind die Lagerböcke $L$ befestigt, welche ihrerseits die Lager $I$ für die oberen Spitzen $S$ (Fig. 251) tragen. Analog den unteren Spitzen $S'$ gehen die Spitzen $S$ als Mikrometerschrauben durch die Lager $I$ hindurch, durch Gegenmuttern gesichert. Die Spitzen $S$ werden unter dem Mikroskop so eingestellt, dass sie in die Axe der Zapfen $Z$ des Lagers $J$ fallen. Es tritt dann durch Drehung von $I$ in den Lagerböcken $L$ keine Verschiebung der Spitzen $S$ im Raum ein.



(A. 250)

In den Kopf $A$ des Pendels ist ein Messingzapfen $M$ drehbar eingepasst, und durch eine Mutter mit demselben verschraubt. Dieser Zapfen ist senkrecht zu seiner Axe durchbohrt und in ihm die Schraube $V$ durch Gegenmuttern befestigt. Die Schraube $V$ trägt an ihrem einen Ende einen eingekitteten Achatstift $a$, der als Pfanne, auf der das Pendel schwingen soll, gut plangeschliffen ist. Der Kopf $A$ ist soweit ausgefrast, dass man $M$ mit $V$ ca. 30° drehen kann, um der Schraube $V$ die richtige Lage $Sx$ geben zu können. Die plane Fläche von $a$ soll möglichst genau in die Axe von $M$ fallen. Die untere Hälfte von $M$ ist weiter ausgedreht als das Gewinde $V$, um Raum für die Arretirung des Pendels zu bekommen. Im untern Kopf $C$ des Pendels ist die Achatpfanne ebenfalls in eine Schraube $V'$ eingesetzt und die Schraube im Kopf $C$ durch Gegenmutter gesichert.«



(A. 251.)

Die Arretirung des Pendels geschicht mittels Schlüssel, die nach aussen laufen und durch welche Stahlhülsen auf den cylindrisch gedrehten Theilen der Spitzen $S$ und $S'$ verschoben werden. Zur Bestimmung der Schwingungsdauer der Pendel in verticaler Lage dienen noch die kleinen Stahlspitzen $hh'$. Es ist nun nicht schwer, den Apparat zum Gebrauch fertig zu machen. Mit dem beweglichen Schlitten $G$ wird die obere Spitze $S$ möglichst genau senkrecht über die untere $S'$ gebracht; die Arretirungshülsen werden soweit vorgeschraubt, dass die Spitzen in ihnen verschwinden, das Pendel auf erstere aufgesetzt, diese dann zurückgeschraubt, womit das Pendel frei ist. Der Schlitten $G$ wird dann soweit verstellt, dass das Pendel schwingt, und die einer Schwingungsdauer von 25—30 Secunden entsprechende Empfindlichkeit erreicht ist. Die Feinstellung geschieht dabei an der unteren Spitze $S'$. Um die Pendel ohne Berührung des Instrumentes in kleine Schwingungen versetzen zu können, sind noch im Innern 2 kleine Luftkammern $l$ angebracht, und kann man durch Gummischlauch und Ball Luft gegen die Pendel blasen, welche die Pendel in Bewegung setzt.

Was nun noch von wesentlicher Bedeutung bei den Rebeur'schen Apparaten ist, ist die Einführung der photographischen Registrirung der Beobachtung, sodass der Apparat sich selbst überlassen ohne Unterbrechung (abgesehen von der Erneuerung des photographischen Papiers u. dergl.) alle in Betracht kommenden Erscheinungen aufzeichnet. Diese Registrirung wird durch ein etwa 3 $m$ vor dem Apparat aufgestelltes Benzinlämpchen, dessen Licht durch einen feinen Spalt auf den Pendelapparat fällt, und geeignete Spiegelvorkehrungen bewirkt. Auf einer durch ein Uhrwerk gleichmässig fortbewegten Trommel befindet sich das photographische Papier und auf diesem zeichnen sich dann die Pendelschwankungen mit genügender Deutlichkeit auf.

Was nun die Anstellung der Beobachtungen anbetrifft, so handelt es sich darum, die Schwingungsdauer des Pendels zu ermitteln, denn wenn man den Neigungswinkel der Drehungsaxe des Pendels gegen die Lothlinie mit $i$ bezeichnet, $T_0$ die Schwingungsdauer bei horizontaler Lage der Axe, so hat man für die Schwingungsdauer $T$ bei sehr kleinen Schwingungen

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{\sin i}} \qquad \text{oder} \qquad \sin i = \frac{T_0^2}{T^2}.$$

Man kann also durch Beobachtung der Schwingungsdauer in gewöhnlicher und beliebiger Lage der Drehungsaxe die Neigung der letzteren leicht ermitteln. Bei einer Veränderung der Lage der Drehungsaxe gegen die Lothlinie wird sich das Azimuth $a$ der ersteren verändern und die Art dieser Veränderung ist zu ermitteln. Solche Veränderungen können in sehr verschiedener Weise verursacht werden, es können lokale Ursachen auftreten, Temperaturschwankungen, Veränderungen des Instrumentpfeilers u. dergl., sie können durch Anziehung von Sonne und Mond bewirkt werden, durch irgend welche Vorgänge im Erdinnern, Schwankungen in der Richtung der Lothlinie oder durch Aenderungen des Horizonts in Folge von Schiebungen in der Erdkruste. Man kann in jedem Fall die Azimuthveränderung sowie die Aenderung in der Neigung der Drehungsaxe gegen die Lothlinie in folgender Weise erhalten. Es treffe eine mit dem Pfeiler fest verbundene nahe verticale Gerade die Himmelskugel in einem Punkte $S$, die ebenfalls mit dem Pfeiler fest verbundene Drehungsaxe des Pendels treffe in ihrer Verlängerung die Sphäre in einem Punkte $D$, es sei $Z$ das Zenith, und nennen wir nun ferner in dem so gebildeten sphärischen Dreieck $SDZ$ die

Seite $SD$ $\omega$, den Winkel $ZSD$ $\pi$, die Seite $SZ$ $I$, $ZD$ $i$, das Azimuth von $S$ $\alpha$, das von $D$ $a$, so ergeben sich die folgenden Gleichungen

$$\cos\omega = \cos i \cos I + \sin i \sin I \cos(\alpha - a)$$
$$\sin\omega \cos\pi = \cos i \sin I - \sin i \cos I \cos(\alpha - a)$$
$$\sin\omega \sin\pi = \sin i \sin(\alpha - a).$$

Da nun $\omega$ constant ist, kann eine Aenderung der Richtung von $D$ als zusammengesetzt gedacht werden aus einer Aenderung in der Lage von $S$ und einer Aenderung des Winkels $\pi$. Differenzirt man daher obige Gleichungen, um die Abhängigkeit von $i$ und $a$ von $\alpha$, $I$, $\pi$ zu erhalten, und lasst man dabei die wegen der Kleinheit von $i$, $I$, $\omega$ gestatteten Abkürzungen eintreten, so ist

$$0 = di[\sin I \cos(\alpha - a) - \sin i] + dI[\sin i \cos(\alpha - a) - \sin I] - d(\alpha - a)\sin i \sin I \sin(\alpha - a)$$
$$0 = d\pi \sin i \sin(\alpha - a) - di \cos(\alpha - a) + dI + d(\alpha - a)\sin i \sin(\alpha - a)$$
$$0 = d\pi[\sin i \cos(\alpha - a) - \sin I] + di \sin(\alpha - a) + d(\alpha - a)\sin i \cos(\alpha - a).$$

Daraus folgt also

$$di = dI \cos(\alpha - a) + d\pi \sin I \sin(\alpha - a)$$

und

$$da = d\alpha + \frac{d\pi}{\sin i}[\sin i - \sin I \cos(\alpha - a)] + \frac{dI}{\sin i}\sin(\alpha - a)$$

und man sieht, dass die Beobachtung der Azimuthänderungen in zwei zu einander senkrechten Verticalkreisen die Niveauänderung des Pfeilers sowohl nach Richtung als Grösse um so genauer ergiebt, je kleiner $i$ ist. Man erhält die betreffenden Ausdrücke für $da$, wenn man einfach $a$ der Reihe nach 0°, 90°, 180°, 270° setzt, und kann annehmen, dass die mit $d\alpha$ und $d\pi$ bezeichneten Bewegungen des Pfeilers gegenüber denen $dI$ verschwindend sind, wenn man sie nicht durch Anwendung von Miren in geeigneter Weise bestimmt.

Da sich nun aber von vornherein nicht entscheiden lässt, welche der obengenannten Ursachen eine Ablenkung des Pendels hervorrufen, so wird man dahin zu trachten haben, das Beobachtungsmaterial in der Art zu sammeln und zu ordnen, dass sich eine Trennung lokaler, kurz- oder langperiodischer Einflüsse ermöglichen lässt. Hinsichtlich der Entwickelung der Ausdrücke für die Kraftcomponenten, die aus dem Unterschied der Anziehung eines Himmelskörpers auf einen Punkt der Erdoberfläche und den Erdmittelpunkt resultiren, kann auf die verschiedenen Abhandlungen verwiesen werden, z. B. auf die genannte von Peters oder auf eine solche von Hagen (A. N. 2568) »on the deflection of the Level due to solar and lunar attraction« oder auf die Rebeur'schen Arbeiten, welchen letzteren dieser ganze Artikel im Wesentlichen entnommen ist, da der frühzeitige Tod ihres Verfassers die Lieferung eines zugesagten selbständigen Aufsatzes für das Handwörterbuch vereitelte. In Kürze ergiebt sich, wenn mit $a$, $z$ Azimuth und Zenithdistanz eines Himmelkörpers $P$, mit $m$ seine Masse in Theilen der Erdmasse, mit $r$, $\Delta$ seine Entfernung vom Erdcentrum und einem Punkt der Erdoberfläche, auf den sich $a$ und $z$ beziehen, mit $g$ die Schwere, $\rho$ der Erdradius bezeichnet wird, der Unterschied der Anziehung von $P$ im Erdmittelpunkt und dem Punkt der Erdoberfläche

$$gm\frac{\rho^2}{r^2}\left(\frac{r^2}{\Delta^2} - 1\right)$$

und mit Vernachlässigung von $\rho^2$ im Ausdruck für $\Delta^2$ und der Parallaxe in $z$

$$\Delta^2 = r^2 - 2r\rho\cos z,$$

sodass auf den Punkt der Erdoberfläche die nach $P$ gerichtete Kraft

$$\gamma = 2mg\frac{\rho^2}{\Delta^3 r}\cos z$$

wirkt. Wird nun diese in drei senkrechte Componenten $X$, $Y$, $Z$ zerlegt, von denen $X$, $Y$ dem Horizonte parallel und bezw. nach Süd und West, $Z$ der Lothlinie parallel und nach dem Nadir gerichtet ist, so hat man

$$X = \gamma \sin z \cos a$$
$$Y = \gamma \sin z \sin a$$
$$Z = -\gamma \cos z.$$

Setzt man nun in dem Ausdruck für $\gamma$ $r = \Delta$ und $\frac{\rho}{r} = \sin\pi$, wo $\pi$ die Horizontalparallaxe von $P$ bedeutet, so erhält man für die horizontalen, bei der Bewegung des Pendels in Betracht kommenden Componenten

$$X = mg \sin^2\pi \sin 2z \cos a$$
$$Y = mg \sin^2\pi \sin 2z \sin a.$$

Hieraus folgen dann leicht die Bewegungen eines Pendels, das in specieller Ebene aufgehangt ist, z. B. für die Aufhängung im Meridian ergiebt sich, da $Y = 0$ wird, für $z = 0°$, $z = 90°$, $a = 0°$, $a = 180°$, dass sich das Pendel zur Zeit der Culmination und des Auf- und Untergangs des Gestirns im Meridian befindet, dagegen wird es nach Westen abgelenkt zwischen oberer Culmination und Untergang, unterer Culmination und Aufgang, nach Osten in den übrigen Zeiten; die stärksten Ablenkungen treten ein, wenn das Gestirn im ersten Vertical eine Zenithdistanz von 45° hat.

Hieraus ergeben sich dann auch die numerischen Beträge für die Ablenkungen, welche z. B. durch Sonne und Mond bewirkt werden müssen, und auf die bereits oben hingewiesen wurde.

Die seitherigen Beobachtungen, welche mit den neuen Apparaten, wie erwähnt, an verschiedenen Orten angestellt wurden, können nun, was den eigentlichen Zweck des Horizontalpendels betrifft, nur als vorläufige angesehen werden, die zu sicheren Ergebnissen noch nicht führten. Wohl ist auf allen Stationen die Einwirkung des Mondes auf das Pendel klar zu Tage getreten, aber da sich in den photographischen Aufzeichnungen periodische Aenderungen der verschiedensten Art gezeigt haben, die in täglichen und jährlichen Oscillationen zum Ausdruck kommen, so ist es noch nicht leicht, die Ursachen und Wirkungen genügend von einander zu trennen. Bei einer kurzen Beobachtungsreihe in Wilhelmshaven trat eine Mondwelle sehr deutlich zu Tage, und die Coëfficienten der einzelnen Glieder unterlagen Aenderungen, die als Functionen der Deklination des Mondes zu erklären waren; in Potsdam und in Puerto Orotava waren solche Aenderungen angedeutet, aber die Sicherheit war keine grosse. In Strassburg, wo die ausgedehnteste Untersuchung angestellt und in den »Beiträgen zur Geophysik, Bd. II«, veröffentlicht ist, ergab sich die Mondwelle im Jahresmittel zu $0''\cdot00551 \cos(\tau - 251°\cdot4) + 0''\cdot00522 \cos(2\tau - 195°\cdot5)$, sodass die halbtägige und eintägige Welle nahe dieselben Coefficienten haben, die aber dem Mittel aller möglichen Deklinationsstellungen des Mondes entsprechen. Werden nach dieser Formel für stündliche Werthe von $T$ die Oscillationen berechnet, so ergeben sich die Abweichungen

| | | | |
|---|---|---|---|
| $0^h - 0''\cdot0069$ | $6^h - 0''\cdot0002$ | $12^h - 0''\cdot0032$ | $18^h + 0''\cdot0102$ |
| 1 − 0·0082 | 7 + 0·0005 | 13 − 0·0019 | 19 + 0·0096 |
| 2 − 0·0079 | 8 + 0·0002 | 14 + 0·0005 | 20 + 0·0078 |
| 3 − 0·0064 | 9 − 0·0010 | 15 + 0·0036 | 21 + 0·0038 |
| 4 − 0·0041 | 10 − 0·0023 | 16 + 0·0067 | 22 − 0·0003 |
| 5 − 0·0018 | 11 − 0·0032 | 17 + 0·0091 | 23 − 0·0041. |

Es beträgt darnach die ganze Oscillation 0''·018. Vergleicht man nun diese Werthe mit der theoretisch geforderten Ablenkung

$$\varepsilon_1 = -0{\cdot}0174 \sin 2z \cos a = -\varepsilon_0 \sin 2z \cos a,$$

wo $z$ und $a$ die Zenithdistanz und das Azimuth des Mondes (nördliche Ablenkungen als positiv gezählt) sind, welchen Ausdruck man unter Einführung der Polhöhe $\varphi$ und Deklination $\delta$, Stundenwinkel $\tau$ transformiren kann in

$$\varepsilon_1 = (\varepsilon_0 \sin 2\varphi - \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 \sin 2\varphi \cos^2\delta) + \varepsilon_0 \cos 2\varphi \sin 2\delta \cos\tau + \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 \sin 2\varphi \cos^2\delta \cos(2\tau - 180^\circ),$$

so ist zuerst der erste Theil als constant mit dem Nullpunkt des Pendels zu vereinigen. Das zweite Glied erhält für die Breite von Strassburg ($\varphi = 48^\circ\, 35'$) den Faktor $-0''{\cdot}00218 \sin 2\delta$ und variirt daher zwischen den Grenzen $\mp 0''{\cdot}00181$. Das eintägige Glied bleibt daher immer sehr klein und verschwindet bei Beobachtungen eines Monats. Die Theorie erklärt also hier noch nicht die beobachtete Variation. Das halbtägige Glied ergiebt den mittleren Ausdruck für $\delta_0 = 23^\circ$ zu $+0''{\cdot}00798 \cos(2\tau - 180^\circ)$, es ist also etwas grösser als das beobachtete, und letzteres weicht auch in der Phase in dem Sinne etwas ab, dass das Maximum der Ablenkung um etwa eine halbe Stunde später eintritt, als es die Theorie fordert. Nimmt man aber an, dass die Erdoberfläche elastisch deformirt wird, sei es durch die direkte Einwirkung des Mondes auf die Erde, sei es durch indirekte Wirkungen, in Folge des Drucks der vom Mond bewegten Wassermassen, so würde sich eine solche Verzögerung erklären, während die Uebereinstimmung des numerischen Coefficienten in diesem Falle zunächst als genügend angesehen werden dürfte[1]. In Betreff der Elasticität der Erdoberfläche sind die Beobachtungen in Wilhelmshaven sehr interessant und lehrreich. Dort, wo die obere bis auf einige Meter hinabgehende Erdschicht aus schwerem Thonboden bestand, der bei anhaltenden Regengüssen gänzlich durchweicht, zeigte sich, dass wenn der Luftdruck um 1 *mm* stieg, die Lothlinie um den Betrag von 0''·29 nach Osten wanderte, mithin das Niveau des Ortes sich um diesen Betrag nach Osten senkte. Da Barometerschwankungen bis zu 35 *mm* beobachtet wurden, so entsprach dies Aenderungen im Niveau von mehr als 10''. Die Bewegungen des Pendels entsprechen so genau den Barometerschwankungen, dass man das Pendel geradezu als sehr empfindliches Barometer ansehen konnte. Einflüsse der Temperatur sind, wie zu erwarten, auch deutlich wahrgenommen, indessen bei der jeweils sorgfältig beobachteten Aufstellung des Apparates nicht in direkter Art, sondern als eine Abhängigkeit der Sonnenstrahlung auf das Gebäude oder den dasselbe umgebenden Erdboden.

Wie schon an anderer Stelle erwähnt, hat sich das Instrument sehr empfindlich gegen seismische Erscheinungen gezeigt. Die photographische Registrirung giebt hier im Gegensatz zu vereinzelten Beobachtungen über Erdschwankungen eine fortlaufende Controlle über den Grad der Ruhe oder Unruhe des Erdbodens. Es lassen sich hier aus dem gewonnenen Material bereits drei verschiedenartige Phänomene unterscheiden. v. Rebeur sagt über dieselben: »Eine regelmässige Erscheinung in den aufgezeichneten Curven ist die mikroseismische Bewegung. Dieselbe entsteht vermuthlich durch kleine Schwingungen

[1]) Spätere Beobachtungen in Strassburg, welche R. Ehlert angestellt und discutirt hat, ergänzen diese Angaben nach verschiedenen Richtungen hin. Es wird dabei die Differenz in Verbindung mit dem eintägigen Glied zur Berechnung einer Deformationswelle verwandt. Man würde darnach für Strassburg für die durch Deformation entstehende Mondwelle den Ausdruck

$$0''{\cdot}00551 \cos(\tau - 251^\circ{\cdot}4) + 0''{\cdot}00836 \cos(2\tau - 334^\circ{\cdot}7)$$

erhalten.

des Pendels, die durch horizontal gerichtete Oscillationen des Bodens erzeugt werden, ohne dass dabei eine Veränderung der Gleichgewichtslage eintritt. Man muss dies daraus schliessen, dass wie bei den Erdbebenstörungen symmetrische Figuren entstehen. Wenn Erdwellen, wie die sogleich zu erwähnenden, im Spiele wären, so müsste diese Symmetrie zuweilen gestört sein, oder die Amplitude der Wellen müsste so klein sein, dass sie gegenüber den Ausschlägen des schwingenden Pendels nicht in Betracht käme. Die mikroseismische Bewegung ist in Strassburg im Winter häufiger als im Sommer, erreicht aber niemals die Grösse wie auf den früheren Stationen Wilhelmshaven und Potsdam«.

»Eine zweite, sehr eigenartige und bisher in dieser Weise wohl noch nirgends wahrgenommene Erscheinung bilden die Erdpulsationen, welche wir nach dem Aussehen der Curven und auch aus anderen Gründen als etwas von der mikroseismischen Bewegung durchaus Verschiedenes anzusehen berechtigt sind. Sie haben mit ihr nur das gemeinsam, dass das Maximum ihrer Entwickelung etwa in dieselbe Jahreszeit fällt. Als dritte auffällige Erscheinung sind die zahlreichen Störungen anzuführen, die wohl alle von entfernten Erdbeben herrühren.« »Diese Störungen dauern meistens nur einige Stunden, und ihr Zusammentreffen mit gleichzeitigen Erdbeben ist in sehr zahlreichen Fällen nachgewiesen, wobei solche aus den grössten Entfernungen, Japan, Persien u. s. w. deutlich zur Registrirung kamen. Bei 869 correspondirenden Beobachtungen in Strassburg und Nicolajew in der Zeit von 1892 Februar bis 1893 August wurden 114 correspondirende Störungen verzeichnet, und wenn bei diesen Registrirungen nicht für jede Störung am Pendel eine entsprechende Ursache aufzufinden war, so ist zu bedenken, dass fast $\frac{3}{4}$ der Erdoberfläche vom Ocean bedeckt sind, dass es andererseits noch weite Strecken auf der Erde giebt, die noch kaum oder nur sehr selten von Kulturmenschen betreten, daher direkter Beobachtung oder Vergleichung unzugänglich sind«.

Auf weitere Einzelheiten einzugehen, ist hier nicht der Ort, es muss dafür auf die in grösseren Abhandlungen niedergelegten Untersuchungen verwiesen werden; insbesondere sind zu erwähnen:

I. Fr. Zöllner. 1) Ueber eine neue Methode zur Messung anziehender und abstossender Kräfte. 2) Ueber die Construction und Anwendung des Horizontalpendels. 3) Zur Geschichte des Horizontalpendels (sämmtlich in den »Berichten der K. Sach. Ges. d. W.«; abgedruckt im 4. Band von Zöllner's »wissenschaftlichen Abhandlungen«, in denen auch eine ursprünglich in Poggendorff's »Ann. d. Physik« veröffentlichte Schrift Safarik's »Beitrag zur Geschichte des Horizontalpendels« wiedergegeben ist).

II. E. v. Rebeur-Paschwitz. 1) Ueber das Zöllner'sche Horizontalpendel und neue Versuche mit demselben (»Verhandl. d. Naturw. Vereins in Karlsruhe, 10. Bd.«, 1888). 2) Das Horizontalpendel und seine Anwendung zur Beobachtung der absoluten und relativen Richtungsänderungen der Lothlinie (»Nova acta der Kaiserl. Leop. Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher, 60. Bd. No. 1«, Halle 1892). In diesem Werke ist am Schluss ein ausführlicher Literaturnachweis mit Inhaltsangabe gegeben, wo auch die verwandten Arbeiten von Russell, d'Abbadie, Plantamour, G. H. Darwin, Milne u. A. besprochen werden. 3) Horizontalpendelbeobachtungen auf der kaiserlichen Universitäts-Sternwarte zu Strassburg 1892—1894 (»Beiträge zur Geophysik, herausgegeben von G. Gerland, II. Bd., 2. Heft, No. 7«, Stuttgart 1895). 4) Verschiedene Aufsätze und Mittheilungen in

den »Astron. Nachr.«, dem »Seismological Journal of Japan«, und verwandten Zeitschriften.

III. HECKER, das Horizontalpendel (»Zeitschrift für Instrumentenkunde, 16. Bd., 1. Heft«), Berlin 1896.

IV. A. SCHMIDT, die Aberration der Lothlinie (»Beiträge zur Geophysik, 3. Bd., 1. Heft No. 1«).

V. R. EHLERT, Horizontalpendelbeobachtungen im Meridian zu Strassburg i. E. (ebendas. »No. 6«). VALENTINER.

**Interpolation.** In den astronomischen Hilfstafeln und Ephemeriden, wie solche in verschiedenen Jahrbüchern und in zahllosen speciellen Fällen gegeben sind, finden wir die numerischen Werthe für regelmässig fortlaufende Tafelargumente berechnet. Mag dieses Argument nun die Zeit oder ein anderes Element sein, welches als unabhängige Variable für die entsprechenden Functionswerthe zu betrachten ist, so wird es häufig vorkommen, dass man letztere für einen Werth des Argumentes gebraucht, der zwischen zwei Tafelargumenten liegt. Man muss dann den verlangten Werth interpoliren. Zur Ableitung bequemer Formelausdrücke für diese Rechnung sollen hier die von ENCKE in seiner ersten Abhandlung über Mechanische Quadratur (»Berliner Astron. Jahrbuch 1837«) eingeführten Bezeichnungen angewandt werden.

Nennen wir zunächst die Werthe des Arguments, für welche die numerischen Werthe der Function gegeben sind

$$a, \quad a+\omega, \quad a+2\omega, \quad a+3\omega \ldots .$$

und die entsprechenden Functionswerthe

$$f(a), \quad f(a+1), \quad f(a+2), \quad f(a+3) \ldots .$$

sodass also die gewählte Intervalleinheit $\omega$ unter dem Functionszeichen fortgelassen wird. Ein beliebiger unbestimmter Functionswerth wird dann durch $f(a+n\omega)$ für das Argument $(a+n\omega)$ ausgedrückt werden können, wo dann $n$ eine positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl sein kann. Die ersten Differenzen von $f(a)$, $f(a+1)$, $f(a+2)$ u. s. w. werden dann durch das Functionszeichen $f'$ ausgedrückt, und um den Ort der Differenz anzudeuten, wird unter $f'$ das arithmetische Mittel der Argumente derjenigen beiden Functionswerthe hinzugefügt, welche zur Bildung der Differenz dienten. Darnach ist

$$\begin{aligned} f(a+1)-f(a) &= f'(a+\tfrac{1}{2}) \\ f(a+2)-f(a+1) &= f'(a+\tfrac{3}{2}) \\ f(a+3)-f(a+2) &= f'(a+\tfrac{5}{2}) \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Aehnlich geht man weiter zur nächsten Differenz, welche nämlich durch Abziehen zweier auf einander folgender Differenzen gebildet wird. Man bezeichnet diese zweite Differenz mit $f''$ und giebt ihren Ort dadurch an, dass man wieder das arithmetische Mittel aus den Argumenten hinzufügt, welche bei den beiden vorhergehenden Hauptfunctionen lagen, deren Differenz die neue Function ist. Ebenso wird mit $f'''$ die dritte Differenzenreihe bezeichnet, mit $f''''$ die vierte u. s. f. Z. B. wird

$$\begin{aligned} f'(a+\tfrac{1}{2})-f'(a-\tfrac{1}{2}) &= f''(a) \\ f'(a+\tfrac{3}{2})-f'(a+\tfrac{1}{2}) &= f''(a+1) \text{ u. s. f.} \\ f''(a+1)-f''(a) &= f'''(a+\tfrac{1}{2}) \\ f''(a+2)-f''(a+1) &= f'''(a+\tfrac{3}{2}) \text{ u. s. f.} \end{aligned}$$

So entsteht folgende Uebersicht:

| Argument | Hauptfunction | I. Differenz | II. Differenz | III. Differenz | IV. Differenz |
|---|---|---|---|---|---|
| $a-3\omega$ | $f(a-3)$ | | | | |
| | | $f'(a-\frac{5}{2})$ | | | |
| $a-2\omega$ | $f(a-2)$ | | $f''(a-2)$ | | |
| | | $f'(a-\frac{3}{2})$ | | $f'''(a-\frac{3}{2})$ | |
| $a-\omega$ | $f(a-1)$ | | $f''(a-1)$ | | $f''''(a-1)$ |
| | | $f'(a-\frac{1}{2})$ | | $f'''(a-\frac{1}{2})$ | |
| $a$ | $f(a)$ | | $f''(a)$ | | $f''''(a)$ |
| | | $f'(a+\frac{1}{2})$ | | $f'''(a+\frac{1}{2})$ | |
| $a+\omega$ | $f(a+1)$ | | $f''(a+1)$ | | $f''''(a+1)$ |
| | | $f'(a+\frac{3}{2})$ | | $f'''(a+\frac{3}{2})$ | |
| $a+2\omega$ | $f(a+2)$ | | $f''(a+2)$ | | |
| | | $f'(a+\frac{5}{2})$ | | | |
| $a+3\omega$ | $f(a+3)$ | | | | |

Es stehen also hier immer die geraden Differenzen mit gleichen Ausdrücken im Functionszeichen auf gleichen Linien, die ungeraden Differenzen mit gleichen Ausdrücken im Functionszeichen zwischen den Zeilen der Functionswerthe.

Nach dem TAYLOR'schen Lehrsatz ist

$$f(a+n\omega)=f(a)+\alpha n\omega+\beta n^2\omega^2+\gamma n^3\omega^3+\dots$$

Nun sind uns aber die Differentialquotienten nicht bekannt, sondern nur die Differenzen der Functionswerthe, wonach wir haben

$$f(a+n\omega)=f(a)+Af'(a+\tfrac{1}{2})+Bf''(a+1)+\dots$$

Setzen wir nun aber für $n$ die verschiedenen Werthe, 0, 1, 2, 3 . . . ein, so haben wir in der TAYLOR'schen Reihe

$$f(a)=f(a)$$
$$f(a+\omega)=f(a)+\alpha\omega+\beta\omega^2+\gamma\omega^3+\dots$$
$$f(a+2\omega)=f(a)+2\alpha\omega+4\beta\omega^2+8\gamma\omega^3+\dots$$
$$f(a+3\omega)=f(a)+3\alpha\omega+9\beta\omega^2+27\gamma\omega^3+\dots$$

u. s. w., andererseits ist

für Argument $(a+\omega)$ $\quad f(a+\omega)=f(a)+f'(a+\frac{1}{2})$

$(a+2\omega)$ $\quad f(a+2\omega)=f(a)+f'(a+\frac{1}{2})+f'(a+\frac{3}{2})$
$\qquad =f(a)+2f'(a+\frac{1}{2})+f''(a+1)$

$(a+3\omega)$ $\quad f(a+3\omega)=f(a)+3f'(a+\frac{1}{2})+3f''(a+1)+f'''(a+\frac{3}{2})$

u. s. w.

Hieraus findet sich

1) $f'(a+\frac{1}{2})=\alpha\omega+\beta\omega^2+\gamma\omega^3$

2) $2f'(a+\frac{1}{2})+f''(a+1)=2\alpha\omega+4\beta\omega^2+8\gamma\omega^3$

3) $3f'(a+\frac{1}{2})+3f''(a+1)+f'''(a+\frac{3}{2})=3\alpha\omega+9\beta\omega^2+27\gamma\omega^3.$

Multipliciren wir Gleichung 1 mit 3, Gl. 2 mit $-3$, Gl. 3 mit 1 und addiren, so kommt

$$\gamma\omega^3=\tfrac{1}{6}f'''(a+\tfrac{3}{2})$$

ebenso, wenn wir Gl. 1 mit 5, Gl. 2 mit $-4$, Gl. 3 mit 1 multipliciren und addiren

$$\beta\omega^2=\tfrac{1}{2}f''(a+1)-\tfrac{1}{2}f'''(a+\tfrac{3}{2})$$

und, wenn wir Gl. 1 mit 9, Gl. 3 mit $-4\frac{1}{2}$, Gl. 3 mit 1 multipliciren und addiren

$$\alpha\omega=f'(a+\tfrac{1}{2})-\tfrac{1}{2}f''(a+1)+\tfrac{1}{3}f'''(a+\tfrac{3}{2}).$$

Setzen wir diese Werthe von $\alpha\omega$, $\beta\omega^2$, $\gamma\omega^3$ in die TAYLOR'sche Reihe ein, so kommt

$$f(a+n\omega)=f(a)+nf'(a+\tfrac{1}{2})+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}f''(a+1)+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(a+\tfrac{3}{2})+\dots \qquad (1)$$

welche Formel die NEWTON'sche Interpolationsformel ist, und aus der sich andere Formeln, die zur Berechnung besonders in speciellen Fällen bequemer sind, ohne Mühe herleiten.

Zunächst ist

$$f''(a+1) = f''(a) + f'''(a+\tfrac{1}{2})$$
$$f'''(a+\tfrac{3}{2}) = f'''(a+\tfrac{1}{2}) + f''''(a+1) \text{ u. s. w.}$$

Daraus wird

$$f(a+n\omega) = f(a) + nf'(a+\tfrac{1}{2}) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}f''(a) + \frac{n(n-1)(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(a+\tfrac{1}{2}) + \frac{n(n-1)(n+1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}f''''(a), \tag{2}$$

wozu wir gleich hinzufügen, indem wir $n$ negativ nehmen, und beachten, dass

$$f'(a+\tfrac{1}{2}) = f'(a-\tfrac{1}{2}) + f''(a)$$
$$f'''(a+\tfrac{1}{2}) = f'''(a-\tfrac{1}{2}) + f''''(a)$$

u. s. w. ist

$$f(a-n\omega) = f(a) - nf'(a-\tfrac{1}{2}) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}f''(a) - \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(a-\tfrac{1}{2}) + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}f''''(a). \tag{3}$$

Während also die NEWTON'sche Formel (1) die Differenzen benutzt, die fortlaufend eine halbe Zeile tiefer stehen, verwendet die zweite Formel für die ungeraden Differenzen, welche zwischen der Ausgangsfunction und der nächstfolgenden, also eine halbe Zeile tiefer, liegen, für die geraden Differenzen dagegen, die auf gleicher Zeile mit der Ausgangsfunction liegen. Wie die Formel (2) die vorwärtsschreitende, nach unten gehende (ungerade) Differenz verwendet, so die Formel (3) die rückwärts, nach oben gehende. Bei beiden Formeln kommen also die Functionswerthe zur Verwendung, welche dem, von dem man ausgeht, voraufgehen und folgen, während in der NEWTON'schen nur die folgenden gebraucht werden. Was den Vortheil der Benutzung von (2) und (3) betrifft, so wird man (2) annehmen, wenn der gesuchte Werth näher an $a$ als an $a+\omega$ liegt, (3) im entgegengesetzten Fall, da dann beide Male $n < \frac{1}{2}$ ist.

Die Formel (3) lässt sich auch so schreiben

$$f(a+n\omega) = f(a) + nf'(a-\tfrac{1}{2}) + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}f''(a) + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(a-\tfrac{1}{2}) + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}f''''(a) \text{ u. s. w.} \tag{4}$$

Nehmen wir aus (2) und (4) das arithmetische Mittel und setzen

$$f^{n+1}(a) = \tfrac{1}{2}[f^{n+1}(a+\tfrac{1}{2}\omega) + f^{n+1}(a-\tfrac{1}{2}\omega)],$$

so kommt

$$f(a+n\omega) = f(a) + nf'(a) + \frac{n^2}{1\cdot 2}f''(a) + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(a) + \frac{(n+1)n^2(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}f''''(a). \tag{5}$$

Setzen wir in (2) $n = \frac{1}{2}$, so kommt

$$f(a+\tfrac{1}{2}\omega) = f(a) + \tfrac{1}{2}f'(a+\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{8}f''(a) - \tfrac{1}{16}f'''(a+\tfrac{1}{2}) + \tfrac{3}{128}f''''(a) + \ldots.$$

und ebenso in (3), wenn man von $(a+\omega)$ ausgeht

$$f(a+\tfrac{1}{2}\omega) = f(a) - \tfrac{1}{2}f'(a+\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{8}f''(a+1) + \tfrac{1}{16}f'''(a+\tfrac{1}{2}) + \tfrac{3}{128}f''''(a+1) + \ldots$$

und das Mittel aus diesen beiden Gleichungen giebt

$$f(a+\tfrac{1}{2}\omega) = f(a+\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{8}f''(a+\tfrac{1}{2}) + \tfrac{3}{128}f''''(a+\tfrac{1}{2}) - \tfrac{5}{1024}f^{VI}(a+\tfrac{1}{2}), \tag{6}$$

welche Formel ein sehr bequemer Ausdruck für das Interpoliren in die Mitte ist. Die Bedeutung ist so auszusprechen, dass man das Mittel der den gesuchten Werth einschliessenden beiden Functionswerthe nimmt, von diesem $\frac{1}{8}$ des Mittels der beiden zweiten Differenzen, die auf gleichen Zeilen mit den Functionswerthen stehen, abzieht, hierzu $\frac{3}{128}$ ($\frac{1}{43}$) des Mittels der entsprechenden beiden vierten Differenzen addirt u. s. w.

Die vorigen Formeln (bis zu 5) lassen sich auch in der Weise schreiben, dass man nicht die einzelnen Differenzen mit den entsprechenden Coefficienten multiplicirt und darnach die Summe der einzelnen Glieder bildet, sondern dass man die Glieder so anordnet, dass das folgende jeweils als eine Correction des vorhergehenden erscheint. Es ist dieses Verfahren für die numerische Rechnung oftmals bequemer. Darnach gestaltet sich z. B. Formel (2)

$$f(a + n w) = f(a) + n\left[f'(a + \tfrac{1}{2}) + \frac{n-1}{2}\left[f''(a) + \frac{n+1}{3}\left[f'''(a + \tfrac{1}{2}) + \frac{n-2}{4}\left[f''''(a) + \ldots\right]\right]\right]\right] \tag{7}$$

Für die Coëfficienten $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$, $\frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ u. s. w. sind mehrfach Tafeln mit dem Argument $n$ gerechnet, die aber in den allermeisten Fällen dem geübten Rechner keine Erleichterung gewähren, da er in jedem speciellen Fall durch Kürzungen in den Brüchen und Differenzen rasch zum Ziel kommen wird.

Beispiel: Die Rectascension des Mondes werde nach dem Berliner Astr. Jahrbuch gesucht für 1897 April $2 \cdot 15^h$. Wir finden daselbst folgende Angaben der Rectascensionen und ersten Differenzen, womit die nebenstehenden höheren Differenzen gebildet sind.

| | | I. Diff. | II. Diff. | III. Diff. | IV. Diff. | V. Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| April 1 $0^h$ | $0^h\ 8^m\ 23^s.94$ | | | | | |
| | | $+ 21^m 47^s.83$ | | | | |
| 12 | 0 30 11·77 | | $+ 10^s.17$ | | | |
| | | + 21 58·00 | | $+ 5^s.55$ | | |
| 2 0 | 0 52 9·77 | | + 15·72 | | $- 0^s.45$ | |
| | | + 22 13·72 | | + 5·10 | | $- 0^s.24$ |
| 12 | 1 14 23·49 | | + 20·82 | | − 0·69 | |
| | | + 22 34·54 | | + 4·41 | | − 0·16 |
| 3 0 | 1 36 58·03 | | + 25·23 | | − 0·85 | |
| | | + 22 59·77 | | + 3·56 | | |
| 12 | 1 59 57·80 | | + 28·79 | | | |
| | | + 23 28·56 | | | | |
| 4 0 | 2 23 26·36 | | | | | |

Wenden wir zuerst Formel (2) an, so haben wir, da die Functionswerthe in 12stündigen Intervallen gegeben sind, für April $2 \cdot 15^h$ zu interpoliren zwischen April 2 $12^h$ und April 3 $0^h$ und es ist $n = \frac{1}{4}$ zu setzen. Ferner ist hier

$$n f'(a + \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{4}(+ 22^m 34^s.54) = + 5^m 38^s.635$$

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} f''(a) = -\frac{3}{32}(+ 20^s.82) = - \quad 1.957$$

$$\frac{n(n-1)(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a + \tfrac{1}{2}) = -\frac{5}{128}(+ 4^s.41) = - \quad 0.169$$

$$\frac{n(n-1)(n+1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f''''(a) = +\frac{35}{2048}(- 0^s.69) = - \quad 0.012$$

$$\overline{+ 5^m 36^s.497}$$

Also die gesuchte Rectascension $= 1^h 14^m 23^s.49 + 5^m 36^s.497 = 1^h 19^m 59^s.99$.

Wählen wir die Form (7), so gestaltet sich die Rechnung in folgender Weise:

$$\frac{n-2}{4} f''''(a) = -\tfrac{7}{16}(-0^s.69) = +0^s.31$$
$$\frac{n+1}{3}\left[f'''(a+\tfrac{1}{2}) + 0^s.31\right] = \tfrac{5}{12}(+4^s.41 + 0^s.31) = +1^s.98$$
$$\frac{n-1}{2}\left[f''(a) + 1^s.98\right] = -\tfrac{3}{8}(+20^s.82 + 1^s.98) = -8^s.55$$
$$n\left[f'(a+\tfrac{1}{2}) - 8^s.55\right] = \tfrac{1}{4}(+22^m 34^s.54 - 8^s.55) = 5^m 36^s.50$$

wie vorher.

Endlich wollen wir die Interpolationsformel (6) in die Mitte anwenden und erhalten darnach für April 2 $6^h$ und $18^h$ folgendes:

$$-\tfrac{1}{8} f''(a+\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{8}(18^s.27) = -2^s.28$$
$$+\tfrac{3}{128} f''''(a+\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{43}(-0^s.57) = -0^s.01$$

also $1^h 3^m 16^s.63 - 2^s.29 = 1^h 3^m 14^s.34$ für April 2 $6^h$. Ebenso

$$-\tfrac{1}{8} f''(a+\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{8}(+23^s.02) = -2^s.88$$
$$+\tfrac{3}{128} f''''(a+\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{43}(-0^s.77) = -0^s.02$$

also $1^h 25^m 40^s.76 - 2^s.90 = 1^h 25^m 37^s.86$ für April 2 $18^h$. Darnach finden sich folgende in 6stündigen Intervallen fortlaufende Rectascensionen nebst den beistehenden Differenzen:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| April 2 $0^h$ | $0^h 52^m 9^s.77$ | | | |
| | | $+11^m 4^s.57$ | | |
| 6 | 1 3 14.34 | | $+4^s.58$ | |
| | | +11 9.15 | | $+0^s.64$ |
| 12 | 1 14 23.49 | | +5.22 | |
| | | +11 14.37 | | +0.58 |
| 18 | 1 25 37.86 | | +5.80 | |
| | | +11 20.17 | | |
| 3 0 | 1 36 58.03 | | | |

Wenn wir hier wieder zwischen $12^h$ und $18^h$ in die Mitte interpolirten, würden wir für April 2 $15^h$ finden: $1^h 19^m 59^s.99$ wie vorher. Es mag an dieser Stelle bemerkt werden, dass es sich bei der sehr bequemen Interpolation in die Mitte oft empfiehlt, die ursprünglich in grösseren Intervallen gegebenen Reihen, bei denen die Differenzen sehr beträchtlich sind und daher hohe Differenzen berücksichtigt werden müssen, die Reihe durch fortgesetztes Interpoliren in die Mitte so umzuformen, dass schliesslich nur kleine Differenzen bleiben, sodass es dann genügt, die erste oder allenfalls noch zweite Differenz mit in Rechnung zu ziehen.

Es ist nun noch kurz der Fall zu behandeln, wo man die numerischen Werthe der Differentialquotienten der nach gleichen Intervallen fortschreitenden Werthe der Function gebraucht.

Die NEWTON'sche Interpolationsformel (1) können wir auch wie folgt schreiben:

$$f(a+n\omega) = f(a) + n\left[f'(a+\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2}f''(a+1) + \tfrac{1}{3}f'''(a+\tfrac{3}{2}) - \ldots\right]$$
$$+ \frac{n^2}{1\cdot 2}\left[f''(a+1) - f'''(a+\tfrac{3}{2}) + \ldots\right]$$
$$+ \frac{n^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left[f'''(a+\tfrac{3}{2}) - \ldots\right].$$

Nach dem TAYLOR'schen Lehrsatz haben wir aber

$$f(a+n\omega) = f(a) + n\omega\frac{df(a)}{da} + \frac{n^2\omega^2}{1\cdot 2}\frac{d^2 f(a)}{da^2} + \frac{n^3\omega^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3 f(a)}{da^3} + \ldots,$$

woraus dann

$$\omega \frac{df(a)}{da} = f'(a+\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2} f''(a+1) + \tfrac{1}{3} f'''(a+\tfrac{3}{2}) - \dots$$

$$\omega^2 \frac{d^2 f(a)}{da^2} = f''(a+1) - f'''(a+\tfrac{3}{2}) + \dots$$

$$\omega^3 \frac{d^3 f(a)}{da^3} = f'''(a+\tfrac{3}{2}) + \dots.$$

Bequemer ist die Anwendung der Formel (5), die sich dafür nach den steigenden Potenzen von $n$ geordnet in folgender Form schreibt:

$$\begin{aligned} f(a+n\omega) = f(a) &+ n\left[f'(a) - \frac{1}{6}f'''(a) + \frac{1}{30}f^{V}(a) - \frac{1}{140}f^{VII}(a) + \dots\right] \\ &+ \frac{n^2}{1\cdot 2}\left[f''(a) - \frac{1}{12}f''''(a) + \frac{1}{90}f^{VI}(a) - \dots\right] \\ &+ \frac{n^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left[f'''(a) - \frac{1}{4}f^{V}(a) + \frac{7}{120}f^{VII}(a) - \dots\right] \\ &+ \frac{n^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left[f''''(a) - \frac{1}{6}f^{VI}(a) + \dots\right] \\ &+ \frac{n^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\left[f^{V}(a) - \frac{1}{3}f^{VII}(a) + \dots\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Hier kommen nun die Werthe $f''(a)$, $f''''(a)$ u. s. w. wirklich in den Differenzenreihen vor, dagegen sind $f'(a)$, $f'''(a)$, $f^{V}(a)$ die arithmetischen Mittel, welche in dem allgemeinen Schema auf einer Horizontallinie stehend gedacht werden können, die durch die $f(a)$, $f''(a)$ u. s. w. gelegt ist. Durch Vergleichung kommt dann:

$$\omega \frac{df(a)}{da} = f'(a) - \frac{1}{6}f'''(a) + \frac{1}{30}f^{V}(a) - \frac{1}{140}f^{VII}(a) \dots$$

$$\omega^2 \frac{d^2 f(a)}{da^2} = f''(a) - \frac{1}{12}f''''(a) + \frac{1}{90}f^{VI}(a) - \frac{1}{560}f^{VIII}(a) \dots$$

$$\omega^3 \frac{d^3 f(a)}{da^3} = f'''(a) - \frac{1}{4}f^{V}(a) + \frac{7}{120}f^{VII}(a) \dots$$

$$\omega^4 \frac{d^4 f(a)}{da^4} = f''''(a) - \frac{1}{6}f^{VI}(a) + \frac{7}{240}f^{VIII}(a) \dots$$

$$\omega^5 \frac{d^5 f(a)}{da^5} = f^{V}(a) - \frac{1}{3}f^{VII}(a).$$

Wir erhalten hiermit die Werthe der Differentialquotienten für den gegebenen Functionswerth, von dem man ausgeht. Will man dieselben für eine Function, die nicht unter den gegebenen vorkommt, so hat man die Differenzen erst für diese zu berechnen. Wenn man die Taylor'sche Reihe differenzirt, so kommt

$$\frac{df(a+n\omega)}{da} = \frac{df(a)}{da} + n\omega\frac{d^2 f(a)}{da^2} + \frac{n^2\omega^2}{1\cdot 2}\frac{d^3 f(a)}{da^3} + \dots$$

$$\frac{d^2 f(a+n\omega)}{da^2} = \frac{d^2 f(a)}{da} + n\omega\frac{d^3 f(a)}{da} + \dots$$

In diese Ausdrücke sind darnach die vorher berechneten Werthe für

$$\frac{df(a)}{da},\quad \frac{d^2 f(a)}{da^2} \dots.$$

einzusetzen. Man erhält

$$\begin{aligned} \frac{df(a+n\omega)}{da} &= \frac{1}{\omega}\left[f'(a) + nf''(a) + \left(\frac{n^2}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3}\right)f'''(a) + \right. \\ &\qquad \left. + \left(\frac{n^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{n}{3\cdot 4}\right)f''''(a) + \dots\right] \\ \frac{d^2 f(a+n\omega)}{da^2} &= \frac{1}{\omega^2}\left[f''(a) + nf'''(a) + \left(\frac{n^2}{1\cdot 2} - \frac{1}{3\cdot 4}\right)f''''(a) + \dots\right] \end{aligned} \tag{8a}$$

Wollen wir aber die Differentiale von $f(a + \frac{1}{2}\omega)$ suchen, so kann man folgende Interpolationsformel, die sich leicht aus den obigen ableiten lässt, indem man $n$ mit $n + \frac{1}{2}$ vertauscht, benutzen; wonach

$$f(a + (n + \tfrac{1}{2})\omega) = f(a + \tfrac{1}{2}) + nf'(a + \tfrac{1}{2}) + \frac{(n + \frac{1}{2})(n - \frac{1}{2})}{1 \cdot 2} f''(a + \tfrac{1}{2})$$
$$+ \frac{(n + \frac{1}{2})n(n - \frac{1}{2})}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a + \tfrac{1}{2}) + \frac{(n + \frac{3}{2})(n + \frac{1}{2})(n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f''''(a + \tfrac{1}{2}) + .$$

und wo $f(a + \frac{1}{2})$, $f''(a + \frac{1}{2})$ .... die arithmetischen Mittel der einschliessenden Differenzen sind. Nach der Formel (6) (Mitte) ist aber

$$f(a + \tfrac{1}{2}\omega) = f(a + \tfrac{1}{2}) - \frac{1}{8} f''(a + \tfrac{1}{2}) + \frac{3}{128} f''''(a + \tfrac{1}{2}) - \frac{5}{1024} f^{VI}(a + \tfrac{1}{2}) + .$$

das sind also die von $n$ unabhängigen Glieder, und wenn wir nun nach steigenden Potenzen von $n$ ordnen, kommt:

$$\begin{aligned} f(a + (n + \tfrac{1}{2})\omega) = f(a + \tfrac{1}{2}\omega) &+ n\,[f'(a + \tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{24} f'''(a + \tfrac{1}{2}) + \tfrac{3}{640} f^{V}(a + \tfrac{1}{2}) \\ &\qquad - \tfrac{5}{7168} f^{VII}(a + \tfrac{1}{2})] \\ &+ \tfrac{1}{2} n^2 [f''(a + \tfrac{1}{2}) - \tfrac{5}{24} f''''(a + \tfrac{1}{2}) + \tfrac{259}{5760} f^{VI}(a + \tfrac{1}{2}) + \ldots] \\ &+ \tfrac{1}{6} n^3 [f'''(a + \tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{8} f^{V}(a + \tfrac{1}{2}) + \tfrac{37}{1920} f^{VII}(a + \tfrac{1}{2}) + \ldots] \\ &+ \tfrac{1}{24} n^4 [f''''(a + \tfrac{1}{2}) - \tfrac{7}{24} f^{VI}(a + \tfrac{1}{2}) - ] \\ &+ \tfrac{1}{120} n^5 [f^{V}(a + \tfrac{1}{2}) - \tfrac{5}{12} f^{VII}(a + \tfrac{1}{2}) + ]. \end{aligned} \tag{9}$$

Nach dem TAYLOR'schen Lehrsatz ist wieder

$$f(a + \tfrac{1}{2}\omega + n\omega) = f(a + \tfrac{1}{2}\omega) + n\omega \frac{df(a + \frac{1}{2}\omega)}{da} + \frac{n^2\omega^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2 f(a + \frac{1}{2}\omega)}{da^2} + \ldots$$

und daher

$$\frac{\omega\, df(a + \frac{1}{2}\omega)}{da} = f'(a + \tfrac{1}{2}) - \frac{1}{24} f'''(a + \tfrac{1}{2}) + \frac{3}{640} f^{V}(a + \tfrac{1}{2}) - \ldots$$
$$\frac{\omega^2 d^2 f(a + \frac{1}{2}\omega)}{da^2} = f''(a + \tfrac{1}{2}) - \frac{5}{24} f''''(a + \tfrac{1}{2}) + \frac{259}{5760} f^{VI}(a + \tfrac{1}{2}) + \ldots$$

u. s. w.

Beispiel. Es sind zu berechnen die ersten Differentialquotienten für die Mondrectascension im obigen Beispiel und zwar für April 2, $19^h$, $20^h$, $21^h$.

Wir haben nach obigen Zahlen zunächst für

$$f'(a) = \tfrac{1}{2}(+ 22^m\, 13^s{\cdot}72 + 22^m\, 34^s{\cdot}54) = + 22^m\, 24^s{\cdot}13$$
$$f''(a) = + 20^s{\cdot}82$$
$$f'''(a) = \tfrac{1}{2}(+ 5^s{\cdot}10 + 4^s{\cdot}41) = + 4^s{\cdot}75$$
$$f''''(a) = - 0^s{\cdot}60$$
$$f^{V}(a) = \tfrac{1}{2}(- 0^s{\cdot}24 - 0^s{\cdot}16) = - 0^s{\cdot}20.$$

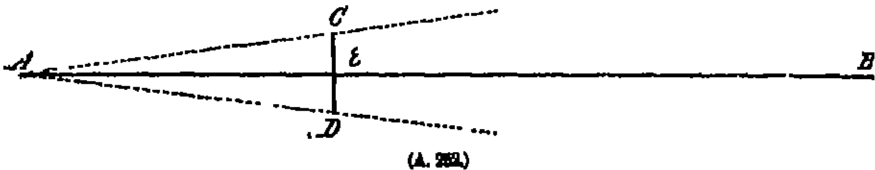
Diese Werthe gelten nun für April 2 $12^h$, für $19^h$, $20^h$, $21^h$ haben wir, bei dem 12stündigen Argument $n$ der Reihe nach zu setzen $= \frac{7}{12}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ und erhalten nach (8a)

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f'(a) =$ | $+ 22^m\, 24^s{\cdot}13$ | $+ 22^m\, 24^s{\cdot}13$ | $+ 22^m\, 24^s{\cdot}13$ |
| $nf''(a) =$ | $+ 12{\cdot}14$ | $+ 13{\cdot}88$ | $+ 15{\cdot}61$ |
| $\left(\frac{n^2}{2} - \frac{1}{6}\right) f'''(a) =$ | $+ 0{\cdot}01$ | $+ 0{\cdot}26$ | $+ 0{\cdot}54$ |
| $\left(\frac{n^3}{6} - \frac{n}{12}\right) f''''(a) =$ | $+ 0{\cdot}01$ | $+ 0{\cdot}00$ | $- 0{\cdot}01$ |
| | $+ 22^m\, 36^s{\cdot}29$ | $+ 22^m\, 38^s{\cdot}27$ | $+ 22^m\, 40^s{\cdot}27$ |

Will man den ersten Differentialquotienten für eine Stunde haben, so hat man obige Zahlen noch durch 12 zu dividiren und erhält der Reihe nach $1^m\, 53^s{\cdot}02$, $1^m\, 53^s{\cdot}19$, $1^m\, 53^s{\cdot}36$.

VALENTINER.

**Jacobsstab** ist ein früher gebrauchtes Instrument zur Bestimmung der Winkeldistanz zweier Objecte. Die Oerter der Planeten wurden in den ältesten Zeiten meist nicht durch direkte Bestimmung der sphärischen Coordinaten ermittelt, sondern durch sogen. Alignements mit anderen, bereits bekannten Sternen verbunden. Man suchte zwei Sterne, mit welchen das zu bestimmende Object in derselben geraden Linie (in einem grössten Kreise) stand und schätzte die Entfernung derselben von dem einen der beiden Sterne im Verhältniss zur Entfernung der beiden bekannten Sterne; oder aber man bestimmte den Ort des zu bestimmenden Gestirns als den Durchschnittspunkt der beiden Verbindungslinien je zweier bekannter Sternpaare u. s. w. Diese Schätzungen waren nur sehr roh, und REGIOMONTAN führte statt derselben die direkte Messung der Entfernung des zu bestimmenden Objectes von zwei oder mehreren bekannten Sternen




(A. 252.)

ein. Zu diesem Zwecke bediente er sich des schon früher bei den Feldmessern verwendeten Jacobsstabes, den er *Radius astronomicus* nannte. Derselbe bestand aus einem ziemlich langen Stabe $AB$ (Fig. 252), welcher in gleichen Entfernungen mit Löchern versehen war, in welche ein kurzer Querstab $CD$ eingesteckt wurde. Man legte das Auge in $A$ an, und visirte über $C$ und $D$ nach den beiden Objecten, deren Distanz zu bestimmen war. Für kleine Winkel ist

$$\sphericalangle CAD = \frac{CD}{AE},$$

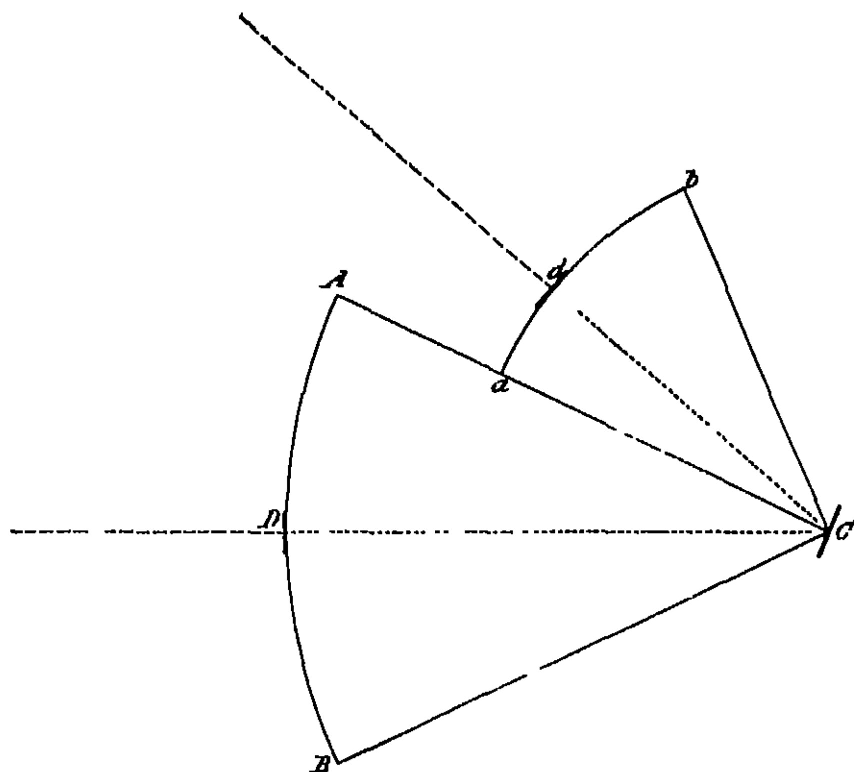
daher der Winkel umgekehrt proportional der Entfernung $AE$, in welcher der Stab $CD$ von unveränderlicher Länge eingestellt wurde. Für grössere Winkel (kleinere Entfernungen $AE$) konnte

$$\tang \tfrac{1}{2} CAD = \tfrac{1}{2} CD$$

genommen werden, wenn der Stab $CD$ stets bis zu seiner Mitte eingesteckt wurde. Wurde diese Vorsicht nicht gebraucht, so konnte daraus ein kleiner Fehler der Winkelmessung entstehen, der aber damals keinesfalls in Betracht zu ziehen war, und jedesfalls z. B. von dem Fehler übertroffen wurde, der in der nicht ganz sicheren Stellung des Auges in $A$ begangen wurde. Statt der Rechnung nach der Tangentenformel bediente sich dann REGIOMONTAN einer Tafel, die mit dem Argumente $AE$ direkt den Winkel $CAD$ gab.

Das Princip, durch einmaliges gleichzeitiges Visiren nach zwei Objecten den Winkel zweier Objecte zu bestimmen, wurde seither auch beibehalten; eine Vervollkommnung der Idee findet sich in dem später zur Bestimmung von Sonnenhöhen auf dem Meere verwendeten Davisquadranten. Zwei Bogen $AB$ und $ab$ (Fig. 253), welche sich zu 90° ergänzen, sind von $A$, bezw. $a$ aus getheilt. Die Diopter $D$ und $d$ können längs der beiden Bögen verschoben werden, während in dem Mittelpunkte $C$ sich ein drittes Diopter befindet. Zur Beobachtung wurde $d$ auf einen gewissen Theilstrich gestellt, so dass der Winkel $dCa = m$ bekannt war. Sollte dann z. B. die Sonne beobachtet werden, so stellte man sich so, dass man die Sonne im Rücken hatte, und drehte das Instrument so lange, bis die Sonnenstrahlen durch das Diopter $d$ auf die Oeffnung von $C$ fielen, was an dem entstehenden Sonnenbildchen leicht zu erkennen war.

Wurde nun noch das Diopter $D$ so gestellt, dass man, durch dasselbe auf $C$ visirend, den Meereshorizont sah, so gab der Winkel $dCD$ die Höhe der Sonne in dem Augenblicke der Beobachtung, und da man den Winkel $ACD = n$ an der Theilung ablesen konnte, so war $h = m + n$.




(A. 258.)

Später wurde zur Erhöhung der Genauigkeit statt des Diopters in $d$ eine Linse von der Brennweite $dC$ angebracht, und im weiteren Verlaufe entwickelte sich mit Zuziehung von Spiegel und Fernrohr aus diesem Instrumente der HADLEY'sche oder Spiegelsextant und der Prismenkreis (s. Sextant.) N. HERZ.

**Kometen und Meteore.** Zu den Meteoren (griech. τὰ μετέωρα = die Lufterscheinungen, vergl. auch das aus ἀήρ = Luft und λίθος = Stein zusammengesetzte »Aerolith«) wurden in den ältesten Zeiten auch die Kometen (griech. κομήτης = Haar- oder Schwanzstern, von κόμη, latein. *coma* = Haupthaar, Haar gezählt. Die durch die Luftfeuchtigkeit bedingten Erscheinungen: Regen, Schnee Hagel; die von der Lufttemperatur und dem Luftdruck abhängen: Wind und Sturm; die elektrischen Lufterscheinungen: Blitz und Donner, u. s. w.; Feuerkugeln, Sternschnuppen, aus den Wolkenregionen zur Erde gefallene Steine, ja selbst viel später noch mitunter neue Sterne, endlich auch die Kometen bildeten zusammen die Erscheinungen des Luftmeeres: τὰ μετέωρα. Aber alle diese Erscheinungen hatten nach der verbreitetsten Ansicht nicht nur ihren Sitz, sondern auch ihren Ursprung in der irdischen Atmosphäre; sie wurden in dieser erzeugt, entstanden und verschwanden in ihr. Insbesondere mag bemerkt werden, dass ARISTOTELES die Kometen für eine aus trockenen Ausdünstungen entstandene und entzündete Masse hält; HERACLIDES aus Pontus erklärt sie für hochstehende, erleuchtete Wolken.

Wenn aber diese Ansichten auch die verbreitetsten waren, so findet man doch auch schon im Alterthume abweichende Meinungen. ANAXAGORAS und DEMOKRIT erklärten die Kometen für eine Conjunction zweier oder mehrerer Sterne, die ihre Strahlen vereinigen, eine Ansicht, durch welche allerdings die Kometen von irdischen Luftgebilden ausgeschieden, dafür aber zu den Phantasiegebilden verwiesen wurden. Nach PLUTARCH (»De placitis philosophorum«, III. Buch, 2. Kap.) hatte DIOGENES die Kometen für wirkliche Sterne gehalten. SENECA erwähnt in seinen »Naturales quaestiones« (VII. Buch, 3. u. 4. Kap.), dass sich diese Annahme nach der Meinung des APOLLONIUS bereits bei den Chaldäern findet, während EPIGENES gerade das Gegentheil hiervon, dass nämlich die Chaldäer die Kometen für Ausdünstungen der irdischen Atmosphäre hielten, berichtet. Dieser Widerspruch löst sich, wenn man, was ja ganz wohl möglich ist, annimmt, dass beide ihre Kenntnisse aus verschiedenen Quellen schöpften, d. h. dass einzelne unter den gelehrten Chaldäern der ersteren, andere der letzteren Meinung waren.

Selbst die Meteoriten sollen bereits von DIOGENES im 5. Jahrhundert vor Christi Geburt für Weltkörper erklärt worden sein. Er hält den berühmten bei Aegos-Potamos gefallenen Meteorstein für einen aus dem Weltraume zur Erde gelangten Stein, und spricht dabei die Meinung aus, dass es unsichtbare Sterne giebt, die nur dann sichtbar werden, wenn sie auf die Erde herabfallen.

SENECA selbst hält die Kometen nicht für vergängliches Feuer, sondern für ewige Werke der Natur, wofür er als Beweis anführt, dass sie einen bestimmten Lauf haben, nicht schnell entstehen und vergehen, und ihre Stellung am Himmel nicht nach der Windrichtung ändern. (»Quaestiones naturales«, Kap. 23). Den Einwand, dass sie als Wandelsterne nicht im Thierkreise stehen, erklärt er für belanglos, »denn wer hat den Sternen Grenzen vorgeschrieben?« Dass man ihre Wiederkehr noch nicht beobachtet, und ihre Bahnen noch nicht berechnet hat, ist kein Grund, ihnen die Beständigkeit abzusprechen, denn man sieht einen Kometen, wie schon APOLLONIUS hervorgehoben hat, nur, wenn er aus den oberen, entfernteren Regionen des Himmels in den unteren, »der Erde nahen Theil seiner Bahn kommt«.

Diese vollständig richtige Ansicht theilte das Schicksal anderer, ähnlicher, z. B. der Ansicht von der Bewegung der Erde: sie wurde im Mittelalter vollständig verlassen, vielleicht nicht einmal gekannt, weil — nichts davon im ARISTOTELES stand.

Mit den Meteoriten befasste man sich im Mittelalter gar nicht. Vereinzelte Erscheinungen wurden nicht beachtet, und auffallende Objekte am Himmel waren in dem abergläubischen Mittelalter immer nur Vorboten, göttliche Zeichen, genau so wie die Kometen. Soll man annehmen, dass weniger Erscheinungen dieser Art auftraten? Sternschnuppenfälle, Feuerkugeln, Meteoritenfälle bieten sich ja gerade in einer Form dar, welche mit blossem Auge beobachtet werden kann, sodass auf ihre Beobachtung die astronomischen Hilfsmittel der späteren Zeit (Fernrohr) keinen Einfluss haben konnten. Nichts desto weniger ist es viel wahrscheinlicher, dass man weniger beobachtete oder vielmehr weniger beachtete, wie dieses an dem Beispiele der Sonnenflecken ersichtlich ist.

Namentlich seit REGIOMONTAN waren die Kometenerscheinungen Gegenstand der Beobachtungen von Astronomen; und jeder bedeutendere Astronom zog dieselben in den Kreis seiner Betrachtungen, und versuchte die Gesetze ihrer Bewegung zu erforschen; in der That machte die Kometenastronomie auch relativ bedeutende Fortschritte nicht ohne dass sich nebenbei im grossen Publikum die Meinung von der astrologischen Bedeutung der Kometen als göttliche Warnungs-

zeichen zur Verkündigung von Strafen u. s. w., erhalten hätte. Ja selbst im 18. Jahrhundert war die Kometenfurcht nicht völlig geschwunden, und selbst noch im Anfang unseres Jahrhunderts fanden die Untersuchungen der Astronomen über mögliche Zusammenstosse eines Kometen mit der Erde ein verzerrtes Echo bei der grossen Menge, welche in diesen Untersuchungen nichts weiter zu finden glaubte, als die genaue astronomische Festsetzung der Zeit des bevorstehenden Weltunterganges.

Anders verhielt es sich mit den Meteoren. Der Volksglaube mass den Feuererscheinungen in der Luft, wenn sie nicht massenhaft auftraten, keine besondere Bedeutung bei, was wohl seine Ursache darin haben konnte, dass sie allzu vergänglich sind; wenn auch jemand ein bedeutenderes Meteor sah, so war dasselbe eben nur für ihn vorhanden, nicht aber für andere, die sich von der Erscheinung desselben nicht wie bei den Kometen überzeugen konnten. Der astronomischen Untersuchung der Steinschnuppenfälle hingegen stellte sich als Haupthinderniss die scheinbare Unregelmässigkeit im Auftreten derselben und in deren Bewegung entgegen.

Auffällig waren nur die Meteorsteinfälle; allein diese wurden angestaunt, wohl auch als vom Himmel gefallene Steine verehrt; aber die Bedeutung der Kometen legte man ihnen nicht bei. Man dürfte wohl nicht fehl gehen, wenn man den Grund dafür darin sucht, dass diese zur Erde gefallenen Steine sich von den Kometen wesentlich dadurch unterschieden, dass man ihre Natur kannte, während man von der Beschaffenheit der Kometen so gar nichts wusste.

Seit Regiomontan hatte man nun aber die Erscheinungen der Kometen und der Meteore wenigstens von wissenschaftlicher Seite vollständig getrennt. Die Kometen waren Objecte der Astronomie geworden; Meteore irgend welcher Art mussten aus dem Bereiche derselben gewiesen werden. Dieses blieb so bis zum Ende des vorigen Jahrhunderts. 1794 erschien die für die Meteorastronomie epochemachende Schrift Chladni's: »Ueber den Ursprung der von Pallas gefundenen und anderer, ihr ähnlicher Eisenmassen und über einige, damit in Verbindung stehende Naturerscheinungen«; 1799 fand der grosse, von Alex. v. Humboldt in Cumana beobachtete Steinschnuppenfall statt, und 1803 wurde durch die im Auftrage der Pariser Academie von Biot vorgenommene Untersuchung des Meteorsteinfalles von l'Aigle die immer wiederkehrende, und damals von wissenschaftlicher Seite immer wieder geläugnete Thatsache von Steinfällen wissenschaftlich ausser Zweifel gestellt, und damit waren auch die Meteore in den Kreis der astronomischen Forschung gerückt.

Im Jahre 1866 wurde Schiaparelli durch seine Untersuchungen über periodische Steinschnuppen auf die Identität der Bahnen grosser Schwärme mit einzelnen Kometenbahnen geführt, und damit eröffnete sich der astronomischen Forschung ein neues Feld. Wieder traten Kometen und Meteore als zusammenhängende Glieder in dem Reiche der Naturerscheinungen auf, aber sie sind nicht mehr Erscheinungen unseres Luftkreises, nicht Gebilde tellurischen Ursprungs, welche Gegenstand der Meteorologie sind, sondern zusammenhängende Objecte kosmischen Charakters, Glieder des Sonnensystems, welchem sie seit Zeiträumen angehören, die sich selbst der astronomischen Forschung entziehen, oder denen sie sich erst in späteren Zeiten einverleibt haben, um demselben längere oder kürzere Zeit anzugehören.

## A. Kometen.

Die ältesten beobachteten Kometen waren selbstverständlich besonders auffallende Himmelserscheinungen. Sie hatten mächtige, sich über weite Himmels-

striche hin ausdehnende Schweife, woher auch der Name derselben rührt. Ihrer Ortsveränderung am Himmel wendete man keine Aufmerksamkeit zu, denn sie wurden als der terrestrischen Atmosphäre angehörige Objecte angesehen, die, ähnlich, wie die Morgen- und Abendröthe jeden Tag neu entstehen und verschwinden. Merkwürdig ist, dass ARISTOTELES, der derselben Meinung huldigte, für den Kometen (1)[1], 372 v. Chr. Geb. rohe Ortsbestimmungen gab (Auftreten in der Gegend des Frühlingspunktes, Bewegung gegen den Gürtel des Orion zu, wo er verschwand), so dass PINGRÉ sogar seine genäherte Bahn berechnen konnte.

Von wirklich systematischen Kometenbeobachtungen, d. h. von Bestimmungen der Positionen der Kometen nach ihren Coordinaten an der Himmelskugel kann erst seit REGIOMONTAN, welcher in dieser Art im Jahre 1472 den Kometen (28)

---

[1]) Es wäre der Kürze wegen gut, wenn man die Kometen, deren Bahnen bestimmt sind, ähnlich den Planeten consequent durch Nummern bezeichnen würde. Daraus ergiebt sich allerdings die Schwierigkeit, dass in dem Maasse, als die Bahnen von älteren Kometen bestimmt werden, neue Zahlen einzuschalten sind, während andererseits durch Identifikation älterer Kometen mit später beobachteten, andere Zahlen ausfallen. Dieser Wechsel der Bezifferung erstreckt sich jedoch nur auf die relativ unsicheren, namentlich aus chinesischen Beobachtungen abgeleiteten Bahnen der älteren Kometen. Da diese aber keineswegs mehr als eine Direktive für die späteren Untersuchungen über die Identität dieser Kometen mit den in unserer Zeit beobachteten geben, so kann hieraus kaum ein Uebelstand erwachsen, und kann die Numerirung des ersten GALLE'schen Kometenverzeichnisses (aus dem Jahre 1847), welches seither manchen späteren Werken zu Grunde gelegt wurde, beibehalten werden. Dies geschah in dem diesem Handwörterbuche zum Schlusse beigegebenen Verzeichnisse der Kometenbahnen. Hierzu ist nur das Folgende zu bemerken: Die älteren Erscheinungen des HALLEY'schen Kometen aus den Jahren 12 vor Chr. Geb., ferner 66, 141, 837, 989, 1066, 1301, 1378, 1456, 1531 erhielten die Nummer 19 des GALLE'schen Verzeichnisses; die von CELORIA aus den TOSCANELLI'schen Beobachtungen ermittelten Bahnen der Kometen 1449 und 1457 I erhielten die Nummern 18 bez. 20, während die höchst unsicheren Bahnen der Kometen aus den Jahren 240, 539, 565, 1351 und 1533 des älteren GALLE'schen Kometenverzeichnisses die Bezeichnungen *a, b, c, e* und *i* die Kometen aus den Jahren 1006, 1402, 1499, 1500 des zweiten GALLE'schen Verzeichnisses die Bezeichnungen *d, f, g, h,* und die wegen mangelhafter und der Zahl nach ungenügender Beobachtungen ebenfalls nur unsicheren Bahnen der Kometen 1816 und 1818 I die Bezeichnungen *k, l* erhielten. Hierdurch correspondiren die Nummern von 22 angefangen durchweg mit der GALLE'schen Bezeichnung.

Gewöhnlich bezeichnet man die Kometen nach dem Jahre ihres Erscheinens, und fügt, um sie von einander zu unterscheiden, römische Ziffern, nach der Zeit ihres Perihelndurchganges bei. So ist der Komet 1892 I, der am 6. März 1892 von SWIFT in Rochester N. Y. entdeckte Komet, welcher sein Perihel April 6·7 M. Z. Berlin passirte; der Komet 1892 II ist der am 18. März von DENNING in Bristol entdeckte Komet, der Mai 11·2 durch das Perihel ging; Komet 1892 III der am 6. November von HOLMES in London entdeckte Komet, dessen Durchgang durch das Perihel auf Juni 13·2 fiel. 1892 IV ist der am 18. März (also vor dem Kometen 1892 III) von SPITALER in Wien nach der Ephemeride von v. HAERDTL wieder aufgefundene WINNECKE'sche Komet, dessen Perihelzeit Juni 30·9 fiel. 1892 V ist der October 12 (also ebenfalls vor dem Kometen 1892 III) von BARNARD auf dem Mount Hamilton auf photographischem Wege entdeckte Komet, der Dec. 11·1 durch das Perihel ging; 1892 VI der von BROOKS in Geneva N. Y. am 28. August (also vor den Kometen III u. V) entdeckte Komet, welcher Dec. 28·1 durch sein Perihel ging; während der ebenfalls von BROOKS in Geneva N. Y. am 19. November 1892 entdeckte Komet bereits mit 1893 I bezeichnet werden muss, da seine Perihelzeit 1893 Januar 6·5 fällt. Diese Bezeichnung muss hier zur leichteren Orientirung beibehalten werden. Die nach der Jahreszahl beigefügte Bezeichnung *a, b, c, d* . . . nach der Zeitfolge der Entdeckungen ist jetzt fast allgemein aufgegeben worden.

beobachtete, gesprochen worden. Die Zahl der beobachteten Kometen beträgt in den Jahren

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | vor | 500 | vor Chr. | Geb. | | 8 | 700 | bis | 799 | nach | Chr. | Geb. | 18 |
| 499 | bis | 400 | „ | „ | „ | 6 | 800 | „ | 899 | „ | „ | „ | 81 |
| 399 | „ | 300 | „ | „ | „ | 7 | 900 | „ | 999 | „ | „ | „ | 20 |
| 299 | „ | 200 | „ | „ | „ | 5 | 1000 | „ | 1099 | „ | „ | „ | 28 |
| 199 | „ | 100 | „ | „ | „ | 18 | 1100 | „ | 1199 | „ | „ | „ | 22 |
| 99 | „ | 0 | „ | „ | „ | 14 | 1200 | „ | 1299 | „ | „ | „ | 25 |
| 0 | „ | 99 | nach | „ | „ | 21 | 1300 | „ | 1399 | „ | „ | „ | 31 |
| 100 | „ | 199 | „ | „ | „ | 18 | 1400 | „ | 1499 | „ | „ | „ | 35 |
| 200 | „ | 299 | „ | „ | „ | 85 | 1500 | „ | 1599 | „ | „ | „ | 38 |
| 300 | „ | 399 | „ | „ | „ | 21 | 1600 | „ | 1699 | „ | „ | „ | 27 |
| 400 | „ | 499 | „ | „ | „ | 19 | 1700 | „ | 1799 | „ | „ | „ | 96 |
| 500 | „ | 599 | „ | „ | „ | 24 | 1800 | „ | 1895 | „ | „ | „ | 284 |
| 600 | „ | 699 | „ | „ | „ | 21 | | | | | | | |

wobei aber, was namentlich für das letzte Jahrhundert zu beachten ist, die periodischen Kometen in jeder Erscheinung wiedergezählt, hingegen für die Zeit von 1800 bis 1895 24 Kometen, die nur ein- oder zweimal gesehen und dann nicht mehr wiedergefunden wurden, nicht mitgerechnet sind.

Aus dieser Tabelle ist zu ersehen, dass bis 200 vor Chr. Geb. die Zahl der Kometen noch merklich durch die Zahl der auffälligen Kometen gegeben ist; erst seit 200, d. i. seit HIPPARCH wurde diesen Himmelskorpern — wie überhaupt der Astronomie — eine grössere Aufmerksamkeit zugewendet, woraus sich die plötzliche Zunahme der gesehenen Kometen leicht erklärt: dass thatsächlich mehr Kometen erschienen sein sollten, kann nicht wohl angenommen werden. Merkwürdigerweise erhält sich die Zahl der beobachteten Kometen bis 1700 ziemlich constant; selbst die Anwendung des Fernrohres bringt hierin keine Aenderung hervor. Dieses scheint auf den ersten Augenblick sonderbar; das Befremden verschwindet aber, wenn man berücksichtigt, dass das Fernrohr nicht zur Aufsuchung von Kometen, sondern anfänglich nur zur Betrachtung, später (seit GASCOIGNE 1640) zu Ortsbestimmungen verwendet wurde. Der erste teleskopisch entdeckte Komet war der von SARABAT 1729 entdeckte Komet (60), was eigentlich sehr merkwürdig ist, da er in relativ sehr grosser Entfernung von der Erde und Sonne entdeckt wurde, indem seine Periheldistanz vier Erdbahnhalbaxen (die grösste überhaupt bisher bei einem Kometen gefundene Periheldistanz) ist, also nahe der Jupiterbahn fällt.

Aber erst in unserem Jahrhundert nahm die Zahl der teleskopisch entdeckten Kometen besonders zu, und unter den bis Ende 1895 entdeckten 284 Kometen ist die weitaus grösste Mehrzahl teleskopisch.

Die Kometen unterscheiden sich von den Planeten durch ihr nebelartiges Aussehen. Während die Planeten im Fernrohre das Bild von gut bestimmten, von scharfen Contouren begrenzten Scheiben (grosse Planeten) oder feineren, fixsternartigen Lichtpünktchen (kleine Planeten) bieten, haben die Kometen das Aussehen von dunstartigen, den Nebelflecken ähnlichen, kleinen, meist kreisrunden Wölkchen von mehreren Bogenminuten Durchmesser, deren mattes Licht allmählich, fast continuirlich gegen den dunklen Himmelshintergrund abnimmt, so dass der Komet meist mit verwaschenen, sich von dem dunklen Hintergrunde nur unscharf abhebenden Contouren erscheint. Von dieser den teleskopischen fast ausschliesslich eigenen Form unterscheidet sich diejenige der mit freiem

Auge sichtbaren Kometen durch eine oft nur kurze, oft ziemlich ausgedehnte, bei manchen besonders auffälligen Kometen sich über einen grossen Theil des Himmels ausdehnende mächtige »Ausstrahlung«, den Schweif, welchem die Kometen ihren Namen verdanken. Man nennt den Kometennebel, welcher das eigentliche Objekt des Kometen bildet, die Coma, mitunter auch den Kopf, doch findet man, namentlich in älteren Werken, den Namen »Kopf« in zweierlei verschiedener Bedeutung gebraucht. SCHROETER nennt die Coma des Kometen die »Kernlichtkugel«, die vordere, der Sonne zugekehrte Begrenzung des Kometenschweifes, welcher sich z. B. bei dem Kometen (122) 1811 I auf einen, anfänglich ca. 18-, später bis zu 7 fachen Durchmesser der Coma erstreckte, den Kopf. Dieses schliesst sich mehr der älteren Bedeutung an, bei welcher unter Coma (Haar) der eigentliche Schweif verstanden war. HEVEL gebraucht in seiner Kometographie den Namen »Kopf des Kometen« *(caput cometae)* in der jetzt üblichen Bedeutung, für den Kometennebel, zählt aber die Nebelhülle (die Coma) bereits zum Schweife, während er als Kometen nur den in der Mitte des Nebels auftretenden Lichtpunkt, den Kern *(nucleus)* erklärt[1]). Lichtpunkte dieser Art, Kerne, sind nicht bei allen Kometen sichtbar. Selbst bei grossen, mit freiem Auge sichtbaren Kometen fehlen dieselben manchmal. So war bei dem Kometen (208) (1887 I) keine Spur eines Kernes zu finden; die Coma, als Begleiterin des Kernes auch »Nebelhülle« genannt, war so verwaschen und diffus, dass der Komet im Fernrohr früher verschwand als dem blossen Auge, und dass mikrometrische Messungen (Ortsbestimmungen) überhaupt nicht gemacht werden konnten; die Positionsbestimmungen dieses Kometen waren, ein in diesem Jahrhundert einzig dastehender Fall, blosse Einstellungen am Aequatoreal und Ablesungen am Kreise.

Mitunter treten bei Kometen mehrere Kerne in dem Kopfe auf; mitunter haben dieselben nur das Aussehen von undeutlichen Lichtansammlungen, Verdichtungen, so dass bei einer grossen Anzahl von Kernen der Kometenkopf ein granulirtes Aussehen erhält. Ein derartiges Aussehen hatten nach den HEVEL'schen Zeichnungen (vergl. in seiner »Cometographie« die Tafeln zwischen pag. 452 und 453 und zwischen pag. 458 und 459) die Kometen von 1590, 1607, 1647 und 1661. Eine ähnliche Erscheinung beobachtete SCHIAPARELLI bei dem Kometen (224) (1862 III)[2]) am 25. August 1862.

Mehrere getrennte Kerne sahen TYCHO und CORNELIUS GEMMA bei dem Kometen von 1577 (No. 29). Spektroskopische Beobachtungen haben gezeigt, dass selbst bei denjenigen Kometen, bei welchen ein deutlicher Kern nicht wahrzunehmen ist, ein solcher vorhanden ist. Das Spectrum des Kometen besteht nämlich[3]) aus einem continuirlichen Spectrum, das von einem festen (oder tropfbarflüssigen) Kern herrührt, und mit der Helligkeitszunahme dieses Kernes auch an Intensität gewinnt[4]) und aus einem Linienspectrum, das den in der Nebelhülle (Coma) auftretenden Stoffen angehört. Das continuirliche Spectrum zeigt sich nun selbst bei denjenigen Kometen, bei denen ein deutlicher Kern nicht constatirbar ist.

---

[1]) *Caput Cometae, nempe nucleus una cum circumfuso jubare* (vergl. z. B. seine »Cometographie«, pag. 341.

[2]) Vergl. »Entwurf einer astronomischen Theorie der Sternschnuppen«, deutsche Ausgabe von BOGUSLAWSKI, pag. 173.

[3]) Vergl. den Artikel »Astrospectroskopie«, pag. 408.

[4]) Ebenda, pag. 409, vergl. auch HAAS, »Bestimmung der Bahn des grossen Kometen von 1811«, pag. 200.

Der Kern des Kometen ist nicht immer in der Mitte des Kopfes. Bei dem Kometen (122) (1811 I) sah HERSCHEL den Kern excentrisch, und zwar »immer weiter von der Sonne entfernt, als die Mitte des glanzendsten Theiles der ihn umgebenden Atmosphäre. Diese excentrische Lage war so beträchtlich, dass bei der Schwierigkeit, mit welcher der Lichtpunkt gesehen war, letzterer sehr leicht dem Beobachter entschlüpfen konnte«[1]). Bei dem Kometen (270) (1880 I), dessen Bahn sehr nahe mit derjenigen des Kometen (161) (1843 I) übereinstimmt, erklärte GOULD die geringen Abweichungen durch die Nichtübereinstimmung des optischen und physischen Schwerpunktes.

Bei den grossen, in den ältesten Zeiten allein auffälligen Kometenerscheinungen bildete eine der merkwürdigsten Erscheinungen der Kometen der Schweif. Bei dem Kometen (161) (1843 I) und bei dem DONATI'schen Kometen (218) (1858 VI) betrug die Schweiflänge nahe 60°; bei dem Kometen (122) (dem grossen Kometen von 1811) nahe 90°; bei dem Kometen (87) (dem grossen Kometen von 1618) über 100°, und bei dem grossen Kometen des Jahres 1861 (221) sogar 120°. Rechnet man hiermit und mit den wahren Entfernungen der Kometen von der Erde mit Rücksicht auf die Richtung der Kometenschweife deren absolute Längen, so ergeben sich ganz ungeheure Werthe; für den Kometen (221) findet sich 85 Millionen Kilometer, für den Kometen (213) 80 Millionen Kilometer, für den Kometen (122) 110 Millionen Kilometer, und für den Kometen (161) 250 Millionen Kilometer.

Schon SENECA bemerkte, dass die Kometenschweife die Sonne fliehen, und dieselbe Regel findet sich in den griechischen Berichten über den Kometen (19) vom Jahre 837. Neuerdings wurde diese Beobachtung von FRACASTOR und von PETRUS APIANUS an dem Kometen von 1531 gemacht. Seither hat sich die Regel, dass die Kometenschweife stets von der Sonne abgewendet sind, bestätigt gezeigt, wenngleich die Kometenschweife nicht mit der Verlängerung des Radiusvectors der Kometen zusammenfallen, sondern von demselben oft nicht unbeträchtlich abweichen.

Die Form der Kometenschweife ist meist schwach gekrümmt, an den Rändern lichtstärker als im Innern, so dass sie das Aussehen einer cylinderförmigen, im innern hohlen Dunströhre gewinnen, sonst aber ausserordentlich mannigfaltig: der Schweif geht als dünne Säule aus dem Kometenkopfe an der der Sonne abgewendeten Seite hervor und wird allmahlich breiter, wie beim Kometen (37); oder er umgiebt den Kometenkopf in einer ziemlichen Entfernung, durch einen dunklen Zwischenraum von demselben getrennt, wie eine kleine Hohlkugel, die auf der von der Sonne abgewendeten Seite in eine machtige, sich allmählich erweiternde Rohre übergeht, so dass man eigentlich zwei Schweife zu sehen glaubt, die nahe parallel, aber von dem Kometen weg schwach divergirend verlaufen und sich gegen die Sonne zu um den Kometen herum durch einen Kreis schliessen (Komet 122); oder der Schweif des Kometen besitzt an der einen Seite eine scharfe Begrenzung (Lichtlinie) und ist nach der anderen Seite verwaschen, federartig geschlitzt (Komet 20). Bei dem Kometen (37) beobachtete HORATIUS CRASSUS am 30. November 1618 in der Mitte des Schweifes von dem Kopfe des Kometen ausgehend, über eine kurze Strecke hinziehend eine schmale, helle Linie, *instar medullae arboris*[2]).

---

[1]) Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde von v. ZACH, Bd. 28, pag. 459.

[2]) HEVEL, Cometographia, pag. 881.

Diese Formen bilden schon mannigfach den Uebergang zu den anomalen Kometenschweifen. Nebst der Hauptform des von der Sonne weggerichteten, nur wenig gekrümmten Schweifes hat man nämlich wiederholt kürzere Nebenschweife beobachtet, die zu den Hauptschweifen geneigt, oft auch gegen den Radiusvector der Kometen senkrecht stehen, oder zur Sonne gerichtet sind, und die deshalb als anomal bezeichnet wurden.

Unter den älteren Kometen, von denen HEVEL in seiner Kometographie berichtet, bietet die merkwürdigsten Erscheinungen in dieser Art der Komet (20), bei welchem CORNELIUS GEMMA nebst dem Hauptschweife noch einen zweiten, kürzeren Schweif von derselben Krümmung in nahe derselben Richtung sah, überdies aber noch drei nahe gleich lange, ziemlich kurze Nebenschweife, von denen der eine nahe 80° gegen den Hauptschweif geneigt, von der Sonne weg gerichtet, der zweite nahe senkrecht auf dem Radiusvector des Kometen und der dritte zur Sonne gerichtet war.

Zunächst wäre dann der grosse Komet von 1680 (No. 40) zu erwähnen, bei welchem GOTTFRIED KIRCH ebenfalls einen gegen die Sonne zu gerichteten Schweif beobachtet hatte, weiter der Komet von 1744, welcher 6 fächerförmig geordnete, 30 bis 40° lange Schweife hatte; der Komet von 1807, der einen längeren, fast geraden und einen kürzeren, stark gekrümmten Schweif hatte. Der Komet von 1823 hatte zwei mehrere Grade lange Schweife, von denen der eine der Sonne zu, der andere von der Sonne weggerichtet war.

Merkwürdige Erscheinungen bot der DONATI'sche Komet (213). Derselbe hatte nebst einem langen, gekrümmten Hauptschweif noch einen zweiten, bedeutend schwächeren, geraden, ebenfalls von der Sonne weg gerichteten; die zur Sonne zugekehrte Schweifhülle, gewöhnlich die Lichtausströmung genannt, welche, wie oben bei dem Kometen (122) erwähnt wurde, eine durch einen dunklen Zwischenraum von der Coma getrennte Dunsthülle bildete, war beim DONATI'schen Kometen geschichtet, gleichsam aus einer Reihe von concentrisch übereinandergelegten Lichthüllen bestehend; eine ähnliche Erscheinung beobachtete WINNECKE auch bei dem Kometen 1862 II.

Anomale Schweife wurden auch beobachtet bei dem Kometen 1844 I und bei dem Kometen 1862 II.

Der WINNECKE'sche Komet (131) hatte im Jahre 1875 zwei kurze, einen Winkel von 60° einschliessende Schweife, zwischen welchen sich mehrere andere fächerförmig ausbreiteten.

Der Komet 1888 I zeigte einen gegen den Haupfschweif unter 60° geneigten Nebenschweif (vergl. die Fig. 1 und 2, Tafel IV).

Besondere Aufschlüsse über die Kometenschweife brachte seit 1892 die Photographie. Bei dem Kometen 1892 I zeigten die auf dem Mount Hamilton und in Sydney aufgenommenen Photographieen eine Theilung des Schweifes in mehrere, bis zu 8 Strahlen, während er direkt (im Fernrohre) nur von BARNARD am 5. April doppelt gesehen wurde. Am 7. April zeigten die Aufnahmen eine in 2° Entfernung vom Kopfe sich zusammenballende Anschwellung, welche das Bild eines zweiten Kometen darstellte, aus dessen Kopf ein neues System von Strahlen hervorbrach. Eine ähnliche Erscheinung zeigte der Komet 1892 III auf einer photographischen Aufnahme, welche BARNARD auf dem Mount Hamilton am 10. November, vier Tage nach seiner Entdeckung, erhielt: eine schwache, diffuse Nebelmasse am Ende des ca. 1° langen Schweifes, welche Anschwellung übrigens auch von CAMPBELL schon am 8. und 9. November beobachtet worden war.

Ebenso zeigten die photographischen Aufnahmen der Kometen 1893 II, 1893 IV, 1894 II Theilungen des Schweifes; bei dem Kometen 1895 IV beobachtete man einen Nebenschweif, der gegen den Hauptschweif um etwa 80° geneigt war, und überdies eine fächerförmige Ausstrahlung gegen die Sonne zu.

Eine besonders bemerkenswerthe Erscheinung bot sich bei dem Kometen 1894 I dar; dieser Komet hatte eine fächerförmige Coma, welche sich nur in der zur Sonne senkrechten Richtung in einen kurzen, schwachen Schweif von etwa 2′ Länge und 1′ Breite fortsetzte.

Dass die Schweiflänge bei den verschiedenen Kometen variirt, wurde schon erwähnt; allein besonders bemerkenswerth sind noch die Veränderungen in der Schweiflänge eines und desselben Kometen. Im allgemeinen hängt dieselbe von der Intensität des Schweifes und von der Vergrösserung des bei der Beobachtung verwendeten Instrumentes ab. Je stärker die Vergrösserung, desto mehr wird das schwache, nebelartige Licht des Kometen zerstreut, geschwächt, desto kürzer erscheint der Schweif, während bei lichtstarken Objekten selbstverständlich starke Vergrösserungen den entgegengesetzten Effekt hervorbringen. Aehnliches gilt natürlich auch von den mit freiem Auge angestellten Beobachtungen; je schärfer das Auge des Beobachters, desto weiter wird er den Schweif verfolgen können, desto länger wird er den Schweif sehen. So erklären sich die untereinander oft so widersprechenden Angaben über die beobachtete Länge der Kometenschweife.

Die Länge der Schweife ist jedoch nicht constant, sondern wechselt von Tag zu Tag; ganz ausserordentliche tägliche Veränderungen zeigte z. B. der Komet 1893 II. Allein viel merkwürdiger sind diejenigen Veränderungen, welche sich innerhalb weniger Secunden an dem Schweife zeigen: Fluctuiren, Schiessen, Spielen. Wohl die älteste Beobachtung dieser Art ist die von CYSATUS an dem Kometen (37) gemacht. HEVEL berichtet über die Beobachtung von CYSATUS am 4. Dezember 1618, dass der ganze Schweif des Kometen fluctuirte, und die Strahlen des Schweifes von dem Kopfe des Kometen wegschossen und sich dann plötzlich zusammenzogen, so dass der ursprünglich an seinem äussersten Ende mehr spitzige Schweif auseinandergezogen und besenartig zerstreut war. »*Coma Cometae tota fluctuabat, quasi vento leviter agitata; radii quoque Comae e capite vibrabantur, subitoque retrahebantur ... ita fiebat haec radiorum e capite Cometae ejaculatio, ut denique Coma alias in extremo acutior multum dilataretur et scoparum instar spargeretur*«[1]). Ein solches Fluctuiren und Schiessen im Kometenschweife hatte SCHRÖTER bei dem Kometen von 1807 und bei demjenigen von 1811 beobachtet. Endlich wurden ähnliche Erscheinungen bei dem Kometen 1893 IV auf photographischem Wege constatirt. Die mannigfachen Photographien weisen Veränderungen auf, welche mit Rauchsäulen verglichen werden konnen, die sich in den umgebenden Raum hinaus zerstreuen[2]).

Zu diesen Fluctuationen im eigentlichen Schweife gesellen sich mitunter Erscheinungen in der Coma, welche als »Ausströmungen« bezeichnet und auch seit BESSEL als Ursache dieser Fluctuationen angesehen wurden. BESSEL beschreibt diese Erscheinung[3]) bei dem HALLEY'schen Kometen in seiner Sonnennähe 1835, am 2. Oktober, als eine »Ausströmung der Lichtmaterie aus dem

---

[1]) Cometographia, pag. 883. Hierzu ist zu bemerken, dass hier das Wort *coma* noch die ältere Bezeichnung »Schweif« hat, indem der Kern mit der Nebelhülle, welche jetzt als Coma bezeichnet werden, immer als *caput* bezeichnet erscheint.

[2]) Vergl. KREUTZ, Bericht über die Kometen; Vierteljahrsschrift der Astron. Gesellschaft, Bd. 29, pag. 64.

[3]) Astron. Nachrichten, Bd. 13, pag 187; gesammelte Werke, I. Bd., pag. 55.

Kerne, welche einen Kreissector von etwa 90° bildete, beiläufig der Sonne zugekehrt war und bis auf 12 bis 15″ Entfernung von dem Mittelpunkte von dem nebligen Grunde, auf welchem sie lag, unterschieden werden konnte . . . Am 8. Oktober heiterte es sich wieder auf . . . Die Ausströmung war stärker geworden als am 2., der Winkel ihrer Ränder kleiner, etwa 45°; ich konnte sie bis zu 15 bis 20″ Entfernung von dem Mittelpunkte von dem hellen Grunde unterscheiden, auf welchem sie lag«. Nach und nach wurde der Winkel an der Spitze des Kegels, nach welchem die Ausströmung scheinbar stattfand, kleiner, d. h. die Ausströmung mehr cylindrisch, jedoch nicht geradlinig begrenzt, sondern etwas seitlich gekrümmt; am 12. Oktober war der Winkel der Begrenzung nahe 80°; »der Kern des Kometen und seine Ausströmung gewährten das Ansehen einer brennenden Rakete, deren Schweif, durch Zugwind seitwärts abgelenkt wird« (vergl. Taf. III, Fig. 1). Am 13. Oktober war das Aussehen, wie Taf. III, Fig. 2 zeigt, völlig verändert; an Stelle der Ausströmung »lag eine unbegrenzte Masse von Lichtmaterie, links von dem Mittelpunkte.« Am folgenden Tage, dem 14. Oktober, hatte sich aber (vergl Taf. III, Fig. 3) die Lichtausströmung wieder hergestellt, und blieb so mit grösseren Veränderungen bis zum 22. Oktober, an welchem Tage sie die durch Taf. III, Fig. 4 dargestellte Form angenommen hatte. Diese war aber am 25. Oktober wieder verschwunden, und an ihre Stelle eine der Lichtanhäufung vom 13. Oktober ähnliche, aber weniger intensive und weniger ausgedehnte Lichtanhäufung getreten. Zu bemerken ist dabei noch, dass der Komet während der Zeit des Ausströmens einen besonderen Glanz entwickelte. Schon am 2. Oktober bemerkte Bessel eine starke Vermehrung des Glanzes; am 12. Oktober erschien der Komet heller als die Sterne zweiter Grösse im grossen Bären; ebenso am 13. Oktober; am 22. Oktober erschien er wie ein Stern dritter Grösse, und am 25. »war der Kern des Kometen so glänzend, dass man ihn, als die Dämmerung den Nebel noch fast unsichtbar machte, mit der schwächsten Vergrösserung des Heliometers für einen Fixstern hätte halten können.«

Ganz ähnliche Ausströmungen wurden von Heinsius bei dem Kometen von 1744 wahrgenommen[1]), und in jüngster Zeit zeigte sich ein auffälliges Beispiel derselben Art bei dem Kometen 1888 I. Am 21. Mai nahm die Helligkeit des Kernes um 1 bis 2 Grössenklassen zu, und aus dem Kopfe des Kometen schossen zwei sehr helle Ausläufer hervor, die sich kreisförmig nach beiden Seiten umbogen (vergl. Taf. IV, Fig. 3) und den eigentlichen Schweif an Helligkeit übertrafen. Bemerkt muss noch werden, dass der Lichtausbruch zwei Monate nach dem Durchgange durch das Perihel stattfand.

Lichtausbrüche, welche sich durch mehr oder weniger schnelle, oft durch plötzliche Vermehrung der Helligkeit des Kernes äussern, ohne das sonstige Aussehen des Kometen wesentlich zu verändern, sind bereits mehrfach beobachtet worden.

Der Komet 1884 I (No. 124) war bis zum 22. September 1883 sternartig, von der 12. Grösse. Am 23. September stieg seine Helligkeit auf die 8. Grössenklasse; der Kern war aber dabei nach Schiaparelli nicht sternartig, sondern hatte einen erkennbaren Durchmesser und verwaschene Conturen. Am 25. September hatte sich der Kern ganz verloren, und der Komet bildete einen sehr hellen Nebel; hierauf folgte rasche Abnahme der Helligkeit; am 1. Januar 1884 bildete der Komet nach Beobachtungen in Potsdam einen feinen Lichtpunkt mit schwacher Ausstrahlung; 1½ Stunden später war an Stelle des Kometen ein

---

[1]) Bessel's Werke, Bd. I, pag. 64.

Stern 7. Grösse getreten; von $7^h 20^m$ bis $8^h 10^m$ M. Z. Potsdam fand eine weitere Zunahme der Helligkeit statt; dabei trat das continuirliche Spectrum ausserordentlich stark hervor, während das Bandenspectrum bedeutend zurücktrat. Auch am 13. und 19. Januar war das continuirliche Spectrum besonders hell (der Komet ging durch sein Perihel am 25. Januar).

Der Komet (821), entdeckt am 6. November 1892 bereits lange nach seinem am 13. Juni erfolgten Periheldurchgange, wurde am 14. Januar 1893 noch als ein mit Schwierigkeit zu erkennendes Object von HOUGH in Evanston gesehen; am 16. Januar wurde er aber von KOBOLD in Strassburg, sodann in Nordamerika wieder als ein fixsternartiges Object 8. Grösse mit einer Nebelhülle von 80″ Durchmesser gesehen, und am 23. Januar war seine Helligkeit noch 8. Grösse.

Obgleich die mächtige Schweifentwickelung der grossen, mit freiem Auge sichtbaren Kometen jedenfalls zu den grossartigsten Naturschauspielen zu zählen ist, so bieten sich für den Astronomen bei gewissen Kometen noch viel merkwürdigere Erscheinungen dar: die Theilungen der Kometen.

Theilungen von Kometen wurden schon in doppelter Art beobachtet: Theilungen des Kernes, wobei die sämmtlichen Kerne in derselben Nebelhülle eingeschlossen waren, sodass der Kopf des Kometen aus einer Coma bestand, in welcher sich mehrere Kerne befanden; und Theilungen des Kometen in mehrere Theile, von denen jeder aus Coma und Kern bestand.

Offenbar können die bereits früher erwähnten Kometen mit mehreren Kernen, sofern diese deutlich begrenzte Lichtpunkte bildeten, ebenfalls zu denjenigen Kometen gerechnet werden, welche vielleicht ursprünglich ebenfalls nur einen Kern hatten, bei denen man aber die Theilung nicht beobachten konnte, weil sie vor dem Sichtbarwerden des Kometen stattfand.

Schon ARISTOTELES berichtet in seiner »Meteorologia« Kap. VI, dass DEMOCRIT von der Erscheinung von in Sternen aufgelösten Kometen spricht. Die Mittheilung ist aber zu unbestimmt und von keiner anderen Seite bestätigt, um derselben grosses Gewicht beizulegen. Ueberdies muss bemerkt werden, dass Theilungen von Kometenkernen in Anbetracht der Kleinheit des Kopfes nicht wohl mit freiem Auge wahrgenommen werden können[1]).

Wohl die erste beobachtete Theilung eines Kernes ist die von HEVEL in seiner Kometographie[2]) berichtete Theilung des Kometen von 1618. Die ausführlichsten Beobachtungen rühren von CYSATUS her, der dieselben folgendermaassen beschreibt:

Am 8. December war der Kern bedeutend grösser geworden und nicht mehr rund, sondern in drei oder vier unregelmässige, kugelförmige Figuren getheilt, die aber mit einander verbunden waren *(quales solent apparere Saturni comites)*.

Am 17. December waren an Stelle des früher festen Kernes einige kleine Sterne getreten, welche am 18. noch deutlich getrennt gesehen wurden.

Am 20. December. Der Kern scheint aus mehreren Sternen zu bestehen, von denen sich drei durch besondere Helligkeit auszeichnen.

Am 24. December. Kern und Schweif wurden grösser, aber weniger hell; von den drei hellen Punkten wurde nur mehr einer gesehen; die übrigen Kernpunkte schienen an Zahl gewachsen, aber mehr zerstreut.

---

[1]) Man beachte nur, dass schon ein ziemlich scharfes Auge dazu gehört, um die Sterne ε und δ Lyrae, welche etwa $3\frac{1}{2}'$ von einander entfernt sind, oder selbst die beiden Sterne $\alpha_1$ und $\alpha_2$ Capricorni, welche ca. $6\frac{1}{4}'$ von einander entfernt sind, getrennt zu sehen.

[2]) pag. 341.

Auch GOTTFRIED WENDELIN hat eine Theilung in 3 oder 4 Theile gesehen[1]).

In der ganzen folgenden Zeit blieben diese Beobachtungen ganz unbeachtet. Erst 1846 trat eine noch viel auffälligere Erscheinung auf: die Theilung eines Kometen in zwei andere, von denen jeder für sich einen vollkommenen Kometen mit Coma und Kern darstellte. Es war der BIELA'sche Komet von 6·7 Jahren Umlaufszeit, welcher nach seiner Erscheinung 1832, in welcher er nichts auffälliges darbot (bei seinem Periheldurchgange im Jahre 1839 wurde er nicht gesehen) bei seinem Wiedererscheinen 1845 (Periheldurchgang 1846 Februar 11.) in zwei Kometen zerfiel. Schon am 19. December 1845 nahm HIND eine Verlängerung des Kometen wahr; ENCKE sah den Kometen am 21. December noch ungetheilt; erst am 29. December wurde er, zuerst in Amerika, bestimmt getheilt gesehen. MAURY in Washington beobachtete noch einige Zeit nach der Theilung eine eine Verbindung zwischen beiden Kometen bildende Strahlenbrücke; die Entfernung der beiden Kometen, von denen der kleinere nördlich voranging, stieg bis zum 20. Februar auf 6' Distanz; Ende März war der kleinere unsichtbar geworden, Mitte April auch der grössere, folgende. Bei der nächsten Wiederkehr 1852 wurde der Komet am 25. August von SECCHI entdeckt, zunächst aber nur einfach; erst am 15. September wurde, ebenfalls von SECCHI, auch der andere Theil in ½° Entfernung gefunden. Die Entfernung war also jetzt, entsprechend seiner geocentrischen Distanz, auf 2½ Millionen Kilometer gestiegen; doch fanden sowohl HUBBARD als D'ARREST bei ihren Berechnungen der Beobachtungen, dass das Maximum der Entfernung sowohl 1846 als 1852 im Perihel stattfand, d. h. dass die Entfernung bis zum Perihel wuchs, und nachher während der Zeit der Beobachtungen wieder etwas abnahm.

Die beiden Theile wechselten wiederholt die Helligkeitsverhältnisse, waren überhaupt ziemlich lichtschwach und schwierig zu sehen, und wurden nur in Rom, Cambridge, Berlin und Pulkowa beobachtet. Am 28. September war der Komet verschwunden, und ist in den folgenden Perihelien nicht wieder gesehen worden.

Ueber die muthmassliche Wiedererscheinung desselben im Jahre 1896 vergl. pag. 73.

Das zweite bestimmte Beispiel eines Doppelkometen bot der Komet (216); derselbe wurde am 26. Februar 1860 von LIAIS zu Olinda in Brasilien entdeckt, konnte aber nur durch 7 Tage beobachtet werden. PECHÜLE hat aus den Beobachtungen die Bahnen der beiden Köpfe gesondert berechnet.

Ein besonders auffälliges Beispiel von Korntheilungen bot der Komet (281); er ging am 17. September 1882 durch sein Perihel in einer Entfernung von 0·00775 Erdbahnhalbaxen, d. i. nahe 1157000 *km* vom Sonnenmittelpunkte, also fast in Berührung mit der Sonnenoberfläche. Er erschien so hell, dass er bei Tage in der Nähe der Sonne gesehen wurde. FINLAY und ELKIN beobachteten am Cap der guten Hoffnung am 17. September seine Berührung mit dem Sonnenrande. Beide beobachteten den Eintritt des Kometen in die Sonnenscheibe wie ein Verschwinden hinter der Sonne; auf dieser war keine Spur

[1]) Hier muss auch der Erscheinung des Kometen von 1652 gedacht werden, von welchem HEVEL berichtet, dass er in Amerika von Pater JOH. KÖNIGK, und auch in Europa bei seinem Erscheinen, aus mehreren Kometen bestehend gesehen wurde, die sich später vereinigten (l. c. pag. 351). Dass der Komet mehrere Kerne hatte, wurde allerdings auch von HEVEL selbst (ibid. pag. 889) und von BULLIALDUS (ibid. pag. 890) beobachtet; allein von einer späteren Vereinigung der Kerne ist dabei keine Rede. Auch sind Erscheinungen dieser Art später nie wieder beobachtet worden, und muss diese Thatsache vorläufig bis auf weitere Bestätigungen mit grosser Reserve aufgenommen werden.

des Kometen zu sehen, während die Rechnung ergab, dass die Beobachtung einem Durchgange des Kometen vor der Sonnenscheibe entsprach. FINLAY verfolgte den Kometen an einem sechszölligen Aequatoreal von $4^h\,40^m$ M. Z. Cap; um $4^h\,50^m\,58^s$ M. Z. Cap war der Komet plötzlich verschwunden; 3 Secunden später glaubte er noch einen Schimmer desselben zu sehen, aber war dessen nicht mehr sicher. ELKIN beobachtete am Heliometer das Verschwinden des Kometen am Sonnenrande um $4^h\,50^m\,52^s$; $4^s$ vorher war der Komet noch deutlich zu sehen er vergleicht die Beobachtung mit der Bedeckung eines Sternes 4. Grösse durch den hellen Mondrand.

Statt der zahlreichen Beobachtungen über die Theilung des Kernes genügt es, die folgende Zusammenfassung der Erscheinungen von KREUTZ anzuführen[1]):

»Bei der Entdeckung des Kometen September 8. war der Kern durchaus rund, 10″—15″ im Durchmesser. Mit der Annäherung an die Sonne nahm derselbe eine stetig sternähnlichere Gestalt an; September 17., ¼ Stunde vor dem Eintritt in die Sonnenscheibe, betrug der Durchmesser nur mehr 4″, desgleichen am nächsten Tage bei Gelegenheit des Durchganges durch den Meridian am Cap der guten Hoffnung; September 21·0 M. Z. Berlin wird der Kern zuerst von DE BERNARDIÈRES als oval notirt. September 22·2 betrug nach den Messungen SCHAEBERLE's die Ausdehnung desselben in der Längsaxe 11″·0, in der Breitenaxe 4″·8.

Gegen Ende des Monats wurde die Verlängerung allgemein bemerkt; Sept. 30·7 entdeckte FINLAY zuerst zwei Lichtballen im Kopfe des Kometen und damit die ersten Anzeichen der vor sich gehenden Trennung des Kerns in einzelne Punkte.

Die weitere Entwickelung in den Monaten October und November wird von den Beobachtern je nach der optischen Kraft ihrer Fernröhre abweichend geschildert. Die Zahl der sichtbaren Kernpunkte varlirt zwischen 2 und 6, stets aber waren die im nachfolgenden mit (2) und (3) bezeichneten[2]) bei Weitem die hellsten, und von beiden wieder (2) der hellere. Die Identificirung der von den verschiedenen Beobachtern gesehenen Punkte unter einander ist nicht immer leicht . . . Von den einzelnen Beschreibungen scheint mir die von EDDIE in Grahamstown am besten die Entwickelung der Kernpunkte wiederzugeben.

Vom Monat Dezember ab waren die einzelnen Kernpunkte, so weit überhaupt das Schwächerwerden der ganzen Nebelmasse ihre Sichtbarkeit noch erlaubte, in Folge der zunehmenden Ausdehnung der ganzen Kernlinie viel leichter von einander zu unterscheiden als früher, und ihre Identification kann von jetzt ab keinen Schwierigkeiten mehr unterliegen. Die relative Helligkeit der einzelnen Punkte erlitt insofern gegen früher eine Aenderung, als jetzt allmahlich der Punkt (3) den Punkt (2) an Helligkeit erreichte und ihn übertraf, sodass derselbe in der späteren Sichtbarkeitsperiode im Gegensatz zu den früheren Beobachtungen fast ausschliesslich den Ortsbestimmungen zu Grunde gelegt wurde. Charakteristisch ist noch die zunehmende Entfernung der Punkte (1) und (2), die nach und nach die relativen Entfernungen der anderen Punkte untereinander bei weitem überwog. Im Laufe des Monats März 1883 wurden auch für die stärksten Fernröhre die Punkte unsichtbar; die wenigen Ortsbestimmungen, welche noch angestellt wurden, beziehen sich meistens auf eine schwache Verdichtung nahe der Mitte der Kernlinie . . . Dass die Länge der Kernlinie bei den verschiedenen

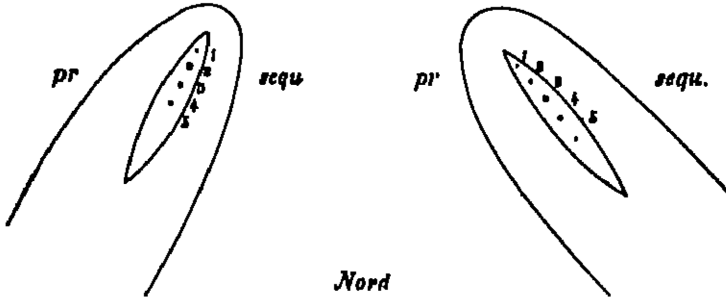
---

[1]) »Untersuchungen über das Kometensystem 1843 I, 1880 I und 1882 II«, I. Theil, pag 93.

[2]) Vergl. die Fig. 254.

Beobachtungen so sehr variirt, darf bei der Unbestimmtheit der Enden derselben nicht weiter befremden«.

Ausser dieser Kerntheilung, welche nur im Fernrohr sichtbar war, traten bei diesem Kometen überdies Nebenkometen auf, die, wenigstens theilweise,




Anblick des Kometen im umkehrenden Fernrohre
für östliche Stundenwinkel (Aufgang vor der Sonne; vor dem Periheldurchgange)
für westliche Stundenwinkel (Untergang nach der Sonne; nach dem Periheldurchgange)
nach KREUTZ (»Untersuchungen über das Kometensystem 1843 I, 1880 I und 1882 II«).
(A. 254.)

sogar mit dem freien Auge gesehen worden. Am 5. Oktober soll sich der Komet angeblich in Escuintla (Guatemala) vor den Augen der Passagiere eines Dampfers in fünf deutliche Körper zertheilt haben. An demselben Tage um $4^h$ Morgens, $7\frac{1}{2}^h$ früher, sah MARKWICK in Pietermaritzburg südlich, dem Kopfe vorangehend, in einer Entfernung von $1\frac{1}{2}°$ zwei nebelartige Gebilde, die er aber an den späteren Tagen nicht mehr finden konnte. Am 10., 11. und 12. Oktober Morgens sah SCHMIDT in Athen einen Nebel, der an der Bewegung des Hauptkometen im Grossen und Ganzen theilnahm, sich aber von diesem täglich um etwa 1° entfernte. Diesen Nebenkometen bemerkte HARTWIG ebenfalls mit einem kleinen Handfernrohre auf der Reise nach Buenos Ayres, an Bord des Dampfers »Petropolis«.

Am 14. Oktober morgens sah BARNARD in Nashville südwestlich von dem Kometen in der Entfernung von etwa 6° sechs teleskopische Nebel mit Anzeichen von Verdichtungen in der Mitte.

Am 21. Oktober bemerkte BROOKS in Phelps 8° östlich vom Kometen einen schwachen Nebel von etwa 2° Lange, mit einer deutlichen Verdichtung an der gegen die Sonne zu gerichteten Seite; diesen Nebel sah er nochmals am 22. Oktober, obzwar bedeutend schwächer und kleiner.

Endlich sah DE OLIVEIRA-LACAILLE am 16. November in Olinda (Pernambuco), 6° südlich vom Kometen eine kleine Nebelmasse von sphärischer Form und schwacher Verdichtung in der Mitte.

Der Komet 1883 I zeigte Anfangs April nach PRITCHETT im Kopfe zwei sehr nahe bei einander liegende Concentrationspunkte.

Der bereits wegen seiner bedeutenden Aenderungen im Schweife erwähnte Komet 1888 I war auch in dieser Richtung merkwürdig. Am 19. März sah CHARLOIS in Nizza nebst dem Hauptkern 8. Grösse einen zweiten Kern 11. Grösse, und am 27. März CRULS in Rio de Janeiro noch einen dritten Kern. Alle drei Kerne waren von einer gemeinschaftlichen Coma umgeben. Bei dem Lichtausbruche

vom 21. Mai blieben die drei Kernpunkte unverändert sichtbar; sie wurden zum letzten Male am 4. Juni, wieder von CHARLOIS in Nizza gesehen.

Auch bei dem Kometen 1889 IV trat nach RICCO in Palermo Anfangs August eine Verdoppelung des Kerns, am 11. August eine Dreitheilung auf.

Auch mag bemerkt werden, dass die bereits erwähnten Lichtanschwellungen, welche die photographischen Aufnahmen der beiden Kometen 1892 I und 1892 III zeigten, hierher zu zählen sind. Mehrfache, isolirte, also wahrscheinlich plötzlich auftretende und rasch verschwindende Nebelmassen in der Nähe des Schweifes, ähnlich denjenigen bei dem Kometen (281), wurden auch bei den photographischen Aufnahmen des Kometen 1893 IV beobachtet.

Getrennte, den Hauptkometen begleitende Kometen wurden beobachtet bei dem in mehrfacher Beziehung interessanten Kometen (309). Am 1. August 1889 hatte BARNARD in Nashville zwei Begleiter des Hauptkometen $A$ gefunden, welche er $B$, $C$ nannte; jeder der beiden Begleiter hatte einen sehr kleinen Kern in einem kleinen Kopfe *(a very small nucleus and condensation in a very small head)*[1]) und einen kurzen, feinen Schweif, und bot so ein vollständiges Abbild des grossen Kometen dar. Es war absolut keine nebelartige Verbindung *(nebulous connection)* zwischen dem Kometen und den Begleitern, weder zur Zeit der Entdeckung noch jemals später, weder in dem 12-Zöller noch in dem 36 Zöller zu sehen. Aug. 4. entdeckte BARNARD noch zwei andere Begleiter $D$ und $E$, welche bedeutend schwächer waren und nur in der Nacht der Entdeckung gemessen, später nur selten und schwer gesehen wurden.

Vom 1.—5. Aug. entfernte sich $B$ v. $A$ tägl. um 0″·93; v. 16.—24. Aug. tägl. um 0″·20
„ „ „ $C$ v. $A$ „ „ 1″·72; „ „ „ „ 2″·76
Die Entfernungen betrugen: Aug. 3: $BA$ = 66″·48 Aug. 28: $BA$ = 78″·22
$CA$ = 263″·46 $CA$ = 328″·44

Am 4. August war die Entfernung $CD$ = 78″; $CE$ = 156″.

Der hellste von den Begleitern war $C$; am 2. August hatte $C$ bereits die Helligkeit von ¼$A$, wurde immer heller, und war Ende August heller als der Hauptkomet $A$, obzwar bedeutend kleiner. Seit Mitte September wurde er immer grösser, aber minder hell und verschwand Ende November. $B$ war Anfangs etwas heller als $C$, verlor aber bereits Mitte August an Helligkeit, und verschwand schon Mitte September.

Der Komet wurde im nächsten Jahre nochmals in der Opposition beobachtet, von den Nebenkometen wurde aber dabei keine Spur gesehen.

Für den Kometen (281) hatte KREUTZ 16 verschiedene Elementensysteme abgeleitet, je nachdem der Schwerpunkt in den verschiedenen Kernpunkten angenommen wurde, die Beobachtungen vor der Theilung ausgeschlossen oder berücksichtigt wurden, u. s. w., denn die Kenntniss des wahren Schwerpunktes des Systems konnte selbstverständlich aus den Beobachtungen nicht erlangt werden. Allein dem Wesen nach kommt diese Untersuchung darauf hinaus, die Bahnen der einzelnen Kernpunkte zu untersuchen[2]); die Resultate sind im Folgenden zusammengestellt[3]):

---

[1]) Astronomical Journal, Bd. 9, pag. 77.

[2]) Es ist dabei zu beachten, dass die Coëfficienten der Normalgleichungen für alle Kernpunkte dieselben sind, und nur die absoluten Glieder um die Rectascensions- bezw. Deklinations-Differenz der beiden Punkte zu ändern sind; es wird dieses sofort klar, wenn man bedenkt, dass z. B. die Bahn des Punktes (3) aus derjenigen des Punktes (2) so erhalten werden kann, als ob die Beobachtungen von (2) um die Beobachtungsdifferenzen (3) — (2) fehlerhaft wären.

[3]) KREUTZ, l. c., II. Theil, pag. 35 ff.

Elemente mit Berücksichtigung aller Beobachtungen für die Punkte:

| | (1)[1] | (2) | (3) | (4) | |
|---|---|---|---|---|---|
| $T$ = | 1882 Sept. 17·261818 | 17·261308 | 17·261298 | 17·261291 | |
| $\omega$ = | 69° 35′ 15″·4 | 69° 35′ 16″·0 | 69° 35′ 14″·2 | 69° 35′ 2″·8 | Mittl. Aeq. 1882·0 |
| ☊ = | 346 0 39·9 | 346 0 38·8 | 346 0 33·4 | 346 0 20·6 | |
| $i$ = | 141 59 45·3 | 141 59 44·2 | 141 59 42·5 | 141 59 38·4 | |
| $\log q$ = | 7·8893086 | 7·8893177 | 7·8893361 | 7·8892472 | |
| $e$ = | 0·9998987 | 0·9999078 | 0·9999152 | 0·9999199 | |
| $a$ = | 76·67 | 84·14 | 91·48 | 97·00 | |
| $U$ = | 671·3 Jahre | 771·8 Jahre | 875·0 Jahre | 955·2 Jahre | |

Elemente mit Ausschluss der Beobachtungen vor der Theilung für die Punkte:

| | (1)[2] | (2) | (3) | (4)[2] | |
|---|---|---|---|---|---|
| $T$ = | 1882 Sept. 17·259805 | 17·262826 | 17·260787 | 17·259659 | |
| $\omega$ = | 69° 35′ 24″·5 | 69° 34′ 35″·0 | 69° 35′ 45″·5 | 69° 35′ 34″·2 | Mittl. Aeq. 1882·0 |
| ☊ = | 346 0 42·7 | 345 59 58·7 | 346 0 56·5 | 346 0 42·7 | |
| $i$ = | 141 59 44·6 | 141 59 32·2 | 141 59 48·7 | 141 59 44·6 | |
| $\log q$ = | 7·8895744 | 7·8889619 | 7·8897746 | 7·8897581 | |
| $e$ = | 0·9998982 | 0·9999077 | 0·9999158 | 0·9999206 | |
| $a$ = | 76·22 | 88·98 | 92·80 | 97·80 | |
| $U$ = | 665·6 Jahre | 769·7 Jahre | 886·8 Jahre | 967·2 Jahre | |

Aus den Beobachtungen vor der Theilung ergab sich für den ungetheilten Kern:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $T$ = | 1882 Sept. 17·2611872 | | $\log q$ = | 7·8888971 |
| $\omega$ = | 69° 34′ 26″·8 | Mittl. Aequ. 1882·0 | $e$ = | 0·9999407 |
| ☊ = | 346 0 52·9 | | $a$ = | 130·9 |
| $i$ = | 141 59 42·0 | | $U$ = | 1497 Jahre |

Man sieht hieraus, dass nach der Theilung jeder der Kernpunkte eine andere Bahn beschrieb. Der Haupteinfluss der Theilung zeigt sich auf die Excentricität und mit dieser, da die Periheldistanz nur unwesentlichen Veränderungen unterworfen ist, auf die grosse Axe und die Umlaufszeit. In dieser Richtung aber ist bemerkenswerth, dass man nahe dieselben Werthe erhält, ob man die Beobachtungen eines Kernpunktes mit Rücksicht auf die Beobachtungen vor der Theilung oder auch mit Ausschluss dieser Beobachtungen bestimmte, dass aber für die verschiedenen Kernpunkte die Differenz sich nicht in demselben Sinne ergab. Die Excentricität war am kleinsten für den der Sonne nächstgelegenen Kernpunkt, und um so grösser, je weiter der Punkt von der Sonne entfernt war, ein Resultat, welches *a priori* erklärlich ist, da man, wenn nicht die Resultate durch Beobachtungsfehler entstellt sind, für den von der Sonne entfernteren Punkt eine grossere Umlaufszeit finden muss. Man kann nämlich annehmen, dass im

---

[1]) Mit (1) ist dabei der der Sonne nächste Kernpunkt bezeichnet (vergl. Fig. 254).

[2]) Bei diesen Bahnen der Punkte (1) und (4) wurden dabei für die Lage der Bahn keine Correctionen gesucht; ☊ und $i$ sind daher die Ausgangselemente. Die Bezeichnung der Elemente ist die allgemein übliche, ☊ = Länge des aufsteigenden Knotens, $i$ = Neigung der Bahn, $\omega$ = Abstand des Perihels vom Knoten, $\pi$ = Länge des Perihels; $a$ = halbe grosse Axe, $e$ = Excentricität, $p$ = Parameter, $q$ = Periheldistanz, $T$ = Zeit des Periheldurchganges $U$ = Umlaufszeit.

Perihel die Kernpunkte noch dieselbe Geschwindigkeit $v$ hatten; da nun (vergl. die »allgemeine Einleitung in die Astronomie«, pag. 135)

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - v^2$$

ist, so wird $a$ umso grösser, je grösser $r$ ist, und da

$$\Delta a = 2\left(\frac{a}{r}\right)^2 \Delta r$$

folgt, so werden bei grossen Werthen von $a$ und kleinen $r$ die Unterschiede in den grossen Axen sehr beträchtlich. Nimmt man $a = 88$ und für das Perihel $log\ r = log\ q = 7{\cdot}889$, so wird $\Delta a = 260000000\ \Delta q$ oder für $\Delta q = 0{\cdot}0000018$ entsprechend einer Aenderung von $log\ q$ um eine Einheit der 4. Decimale wird $\Delta a = 471$; eine derartig starke Differenz zeigt sich aus den Beobachtungen nicht.

Aus dem Gange der Differenzen in den Excentricitäten kann man aber folgern, dass ein in der Nähe von (2) gegen (3) hin gelegener Punkt eine Bahn beschrieb, die sich sowohl unter Berücksichtigung als unter Ausschluss der Beobachtungen vor der Theilung vollständig identisch ergeben würde; da jedoch die Bahn vor der Theilung eine wesentlich verschiedene war, so lässt sich hieraus immerhin noch kein weiterer Schluss auf die Lage des Schwerpunktes ziehen. Denn für den Schwerpunkt müsste sich eben die Bahn vor und nach der Theilung identisch ergeben; die Differenz kann aber von der Wirkung äusserer Kräfte, welche möglicherweise auch als Ursache der Theilung anzusehen sind, herrühren, und müsste sich, wenn die Beobachtungen vor der Theilung hinreichend zahlreich wären, um die Elemente aus dieser Zeit für genügend sicher zu halten, vollständig heben lassen, wobei auch unter Bestimmung der wirkenden Kraft die Differenzen zwischen den Bahnen der einzelnen Kernpunkte erklärt würde.

Bei dem Kometen (300) war die Theilung nicht beobachtet worden; die Nebenkometen waren schon als Begleiter entdeckt worden. CHANDLER bestimmte nun die Bahnen der Nebenkometen[1]. Für die Elemente des Hauptkometen $A$ wurde angenommen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $T$ = 1889 Sept. 30·0110 M. Z. Greenw. | | | $e$ = 0·470704 |
| $\pi$ = | 1° 26′ 17″·3 | Mittl. Aequ. 1890·0 | $a$ = 3·684682 |
| ☊ = | 17 58 45·3 | | $q$ = 1·950220 |
| $i$ = | 6 4 10·5 | | $U$ = 7·0730 Jahre |

Für den Begleiter $C$ waren 155 Positionen, über den Zeitraum von 114 Tagen vertheilt, und von 16 Beobachtern beobachtet, gegeben; viel weniger gut war der Begleiter $B$ bestimmt; für diesen waren nur 23 Beobachtungen auf der Licksternwarte und 6 Beobachtungen von Wien, vertheilt auf einen Zeitraum von 85 Tagen, vorhanden, wobei nebst der Kürze der Zeit noch der zweite Uebelstand auftrat, dass die Beobachtungen vom Mount Hamilton und Wien von einander stark abwichen.

Für den Begleiter $C$ ergab sich das Resultat, dass die Differenzen $\Delta$☊, $\Delta i$ und $\Delta e$ gegen die Bahn des Hauptkometen verschwindend klein waren; CHANDLER nimmt daher an, dass $\Delta$☊ $= \Delta i = 0$ wäre, woraus der Schluss folgt, dass die Kraft, welche die Trennung bewirkte, in der Bahnebene wirkte[2]. Unter dieser Voraussetzung folgt für den Begleiter $C$:

---

[1]) Astronomical Journal, Bd. 10, pag. 153.

[2]) Eine Voraussetzung, welche auch schon von KREUTZ berücksichtigt wurde, indem seine Elemente IV′ unter der Annahme eines ungeänderten ☊ und $i$ abgeleitet sind.

$$\Delta T = -0^d{\cdot}2221; \qquad \Delta q = -0{\cdot}000245$$
$$\Delta\omega = -555''{\cdot}46; \qquad \Delta e = 0.$$

Für den Begleiter $B$ nimmt CHANDLER sofort an, dass die Bahnlage nicht geändert wurde; unter dieser Voraussetzung findet sich:

$$\Delta\omega = +82''{\cdot}95 + 1588{\cdot}08\,\Delta T; \quad \Delta e = -0{\cdot}000456 - 0{\cdot}0006551\,\Delta T$$
$$\Delta q = -0{\cdot}000158 - 0{\cdot}0014183\,\Delta T.$$

Nun wurde auch hier die Voraussetzung gemacht, dass die Form der Bahn dieselbe ist, also $\Delta e = 0$ wäre; dann folgt:

$$\Delta T = -0^d{\cdot}697 \qquad \Delta q = +0{\cdot}000881$$
$$\Delta\omega = -1074''.$$

Dass hier der Einfluss von $e$ viel geringer ist als bei dem Kometen (281) hat seinen Grund in der Form der Bahn selbst: der Komet (309) beschreibt eine Ellipse mit kurzer Umlaufszeit, wobei auch starke Aenderungen in der Excentricität nicht so merklich hervortreten.

Unter der Annahme, dass die Theilung in der Bahnebene selbst stattgefunden habe, leitet BREDICHIN für den Begleiter $E$ dessen Bahn ab und findet

$$\Delta T = +7^d{\cdot}8987 \qquad \Delta\mu = +0''{\cdot}000225$$
$$\Delta\pi = +3°\,18'\,32'' \qquad \Delta\varphi = +7'\,57''{\cdot}8.$$

Berechnet man die Schnittpunkte der Bahnen der beiden Begleiter $C$ und $E$ mit dem Hauptkometen, so findet man für beide nahe denselben Punkt in der Nähe des Aphels[1]). Die Entfernung des Aphels ist aber für diesen Kometen $a(1+e) = 5{\cdot}42$, also sehr nahe gleich der Entfernung des Jupiter; in der That war der Komet im Jahre 1886 dem Jupiter sehr nahe gekommen, und hatte durch diesen bedeutende Störungen in seiner Bahn erfahren, und ist es daher denkbar, dass auch die Theilung des Kometen durch die Wirkung des Jupiter hervorgebracht worden war.

Die Kometen erscheinen auf kurze Zeit und verschwinden meist, um nie wiederzukehren: ihre Bahnen sind sehr nahe parabolisch. Sie scheinen daher nicht dem Sonnensysteme anzugehören, sondern fremde, im Weltraume herumirrende Körper zu sein, welche nur dann sichtbar werden, wenn sie in das Bereich der Sonne gelangen, so dass die Anziehung derselben hinreichend kräftig ist, nicht nur um ihre etwaige geradlinige Bahn abzulenken, sondern auch, um sie soweit anzuziehen, dass sie in die Sonnennähe kommen und hier durch die Wirkung der Sonne (Licht, Wärme etc.) sichtbar werden. Aber nicht nur die Sonne übt eine anziehende Kraft auf die Kometen aus; eine qualitativ gleiche, aber nach Maassgabe der Masse viel schwächere Anziehung üben auch die Planeten aus, und es ist daher möglich, dass auch durch die Anziehung der Planeten, bei hinreichender Annäherung an einen derselben, der Komet der Sonne zugeführt, in eine weit geringere Periheldistanz gebracht wird. Es sind daher im Folgenden Wirkungen zweierlei Arten zu untersuchen: die Wirkungen der Sonne und diejenigen der Planeten.

Die Wirkung der Sonne äussert sich zunächst durch die allgemeine Attraction als eine den Kometen dem Sonnensysteme näher bringende Kraft.

---

[1]) Der Werth dieser Berechnung darf nicht zu hoch angeschlagen werden; denn bei der kleinen Verschiedenheit der drei Bahnen hat man es nothwendig mit sehr schiefen Schnitten zu thun, die naturgemäss keinesfalls auf irgend welche Sicherheit Anspruch erheben können.

Die Bahn, welche der Komet um die Sonne beschreiben wird, hängt nur ab von der Geschwindigkeit, welche er in einer gewissen Entfernung hat; ist $v$ die Geschwindigkeit des Kometen in der Entfernung $r$, so würde die grosse Axe der Bahn bestimmt durch

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - v^2$$

und die Bahn wird eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem sich $a$ positiv, Null oder negativ ergiebt. Unter der Annahme, dass $v$ alle möglichen Werthe haben kann, würde es also auf den ersten Blick scheinen, dass alle möglichen Bahnen gleich wahrscheinlich wären. Dabei ist aber zu beachten, dass für $r$ ein bestimmter Werth nicht wohl angenommen werden kann; wo beginnt denn eigentlich die Wirkung der Sonne auf den Kometen merkbar zu werden? Strenge genommen wirkt die Sonne, sowie jeder Korper auf jeden anderen selbst in unendlicher Entfernung, nur mit ausserordentlich geringer, der Null gleich zu setzender Intensität. Die Bahn des Kometen kann dann noch immer geradlinig, oder wenigstens äusserst nahe geradlinig bleiben, mit so geringen Abweichungen, dass dieselben sich der Beobachtung, wenn eine solche möglich wäre, völlig entziehen würden; aber eine Wirkung ist vorhanden. Aus diesem Grunde muss also für $v$ die Geschwindigkeit in der geradlinigen, noch nicht von der Sonne gestörten Bahn des Kometen, also für $r$ der Werth $\infty$ gesetzt werden; dann wird $\frac{1}{a} = -v^2$, d. h. alle Kometenbahnen würden hyperbolisch sein.

Betrachtet man aber die Bahnelemente der beobachteten Kometen[1]), so wird man eine verhältnissmassig sehr geringe Anzahl von hyperbolischen Bahnen finden. Dieses hat bereits LAPLACE veranlasst, unter Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu untersuchen, welche Wahrscheinlichkeit dafür besteht, dass eine Kometenbahn hyperbolisch sei; er findet diese Wahrscheinlichkeit äusserst gering[2]), indem unter 8204 Kometen nur immer eine hyperbolische Bahn beschrieben wird, deren grosse Halbaxe gleich oder kleiner als 100 wäre, d. h. welche sich von der grossen Halbaxe $\infty$ (Parabel) merklich entfernt. Die späteren Untersuchungen von SCHIAPARELLI[3]), SEELIGER[4]), NIESSL[5]) u. A., welche mehr oder weniger weitgehende Voraussetzungen über die Vertheilung der Kometenbahnen, deren Perihele, über die Eigenbewegung des Sonnensystems etc. machen, führten zu theilweise einander widersprechenden Resultaten über die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Bahnen der drei verschiedenen Kegelschnittsformen. Eine befriedigende, in dem Sinne der durch die Beobachtungen gegebenen Erfahrungen liegende Beantwortung der Frage ist bisher unter der Annahme des stellaren, d. i. nicht zum Sonnensysteme gehörigen Charakters der Kometen noch nicht gegeben: die Beobachtungen ergaben bisher ein merkwürdiges Hervortreten einer bestimmten, speciellen Bahnform, in welcher Vertheilung allerdings durch die in neuester Zeit entdeckten Kometen eine kleine Verschiebung einzutreten beginnt.

---

1) Vergl. hierzu das Kometenverzeichniss am Schlusse des Werkes.
2) Connaissance des Temps für 1816, pag. 213.
3) Entwurf einer astronomischen Theorie der Sternschnuppen, pag. 261.
4) Astron. Nachrichten No. 2968.
5) Astron. Nachrichten No. 3224.

Von den 678 erwähnten Kometen, welche bis 1799 gesehen worden waren[1]), sind nur für 135 Erscheinungen zusammen 122 Bahnen berechnet, indem sich 13 Erscheinungen auf den periodischen HALLEY'schen Kometen und 2 Erscheinungen auf den periodischen PONS-ENCKE'schen Kometen beziehen. Unter diesen 122 Bahnen sind 3 elliptisch mit grossen Halbaxen kleiner als 10, 5 elliptisch mit grossen Halbaxen grösser als 10, und 2 hyperbolisch. Ueber die 284 Erscheinungen bis 1895 giebt die folgende Tabelle Aufschluss.

| In der Zeit | wurden bereits früher entdeckte Kometen wiedergesehen | wurden Kometen entdeckt, deren Bahnen sind: Ellipsen mit Halbaxen kleiner als 10 | Ellipsen mit Halbaxen grösser als 10 | Parabeln | Hyperbeln | parabelähnliche Bahnen | Zusammen |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Von 1801 bis 1830 | 7 | 2 | 11 | 25 | 2 | 38 | 47 |
| „ 1831 „ 1850 | 10 | 3 | 12 | 21 | — | 33 | 46 |
| „ 1851 „ 1860 | 10 | 1 | 12 | 16 | 2 | 30 | 41 |
| „ 1861 „ 1870 | 7 | 2 | 6 | 20 | — | 26 | 35 |
| „ 1871 „ 1880 | 13 | 1 | 8 | 17 | — | 25 | 39 |
| „ 1881 „ 1890 | 10 | 8 | 9 | 24 | 2 | 35 | 53 |
| „ 1891 „ 1895 | 7 | 5 | 3 | 8 | — | 11 | 23 |
| Zusammen | 64 | 22 | 61 | 131 | 6 | 198 | 284 |

Hierzu muss noch erwähnt werden, dass ausser den hier angeführten noch einige Versuche gemacht wurden, für einzelne Kometen die Beobachtungen durch hyperbolische Bahnen besser darzustellen. Alle berechneten Hyperbeln unterscheiden sich von den Parabeln so wenig, dass sie als parabelähnlich zu bezeichnen sind; dasselbe gilt von denjenigen Ellipsen, welche in der Columne »Ellipsen mit Halbaxen grösser als 10« aufgenommen sind, wenngleich hier die Grenze etwas weiter hinausgeschoben hätte werden können. Unter diesen 61 elliptischen Bahnen sind 9 mit einer Umlaufszeit von weniger als 100 Jahren; es sind die folgenden:

1) Komet (19); der HALLEY'sche Komet; im Jahre 1682 von FLAMSTEED am 25. August zuerst beobachtet (nachdem derselbe schon am 23. August von den Jesuiten in Orleans gesehen worden war). Seine Bahn wurde von HALLEY berechnet, welcher aus der Aehnlichkeit der Elemente mit denjenigen des von APIAN 1531 und von KEPLER und LONGOMONTAN 1607 beobachteten Kometen auf die Identität derselben schloss, und seine Wiederkehr für 1759 vorhersagte. In der That wurde er, zuerst am 25. und 27. December 1758 von einem Landmanne, PALITZSCH, bei Dresden, gesehen, so dass die Zusammengehörigkeit der vier Erscheinungen von 1531, 1607, 1682 und 1759 unzweifelhaft festgestellt war. LAUGIER berechnete aus diesen 4 Erscheinungen Elemente, mit denen er die Berechnung des Kometen zurückverfolgte und die Identität desselben mit älteren Erscheinungen festzustellen versuchte. Später wurden diese Rechnungen von HIND wieder aufgenommen; aus den Jahren 1456, 1378, 1301,

[1]) Für die Zeit von 1800 bis 1895 sind nur diejenigen Kometen berücksichtigt, deren Bahnen bestimmt worden sind; einzelne Kometen, welche nur einmal gesehen wurden, deren Bahn daher nicht bestimmt werden konnte, wurden, wie schon erwähnt, nicht mitgerechnet. Dahin gehören: der Sonnenfinsterniskomet von 1882 Mai 16, 1893 April 16; ein von M. WOLF auf den photographischen Platten 1892 März 19. und 20. gesehenes Object u. s. w., welche in der Zusammenstellung nicht aufgenommen sind.

1223, 1145, 1066, 989, 912, 837, 760, 684, 608, 530, 451, 373, 295, 218, 141, 66 n. Chr. Geb. und 12 v. Chr. Geb. sind die Bahnen der Kometen 1456 und 1378, ferner die Bahnen der Kometen aus den Jahren 1301, 1066, 989, 837, 141 und 66 n. Chr. Geb. und vom Jahre 12 v. Chr. Geb. thatsächlich, soweit die rohen Beobachtungen die Resultate als zuverlässig zu betrachten gestatten, von der Bahn des HALLEY'schen Kometen nicht allzu verschieden, obgleich einzelne etwas stärkere Abweichungen zeigen.

Die Vorausberechnung ergab eine Wiederkehr für 1835, in welchem Jahre er von DUMOUCHEL in Rom am 5. August wieder aufgefunden wurde. Ueber seine Erscheinung in diesem Jahre wurde bereits gesprochen; die Folgerungen, zu welchen BESSEL gelangte, werden weiterhin besprochen werden. Seine Elemente[1]) sind:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $T$ = | 1835 November 16. | $q$ = | 0·586 |
| $\pi$ = | 165° 48′ | $e$ = | 0·967 |
| ☊ = | 55 10 | $a$ = | 18 |
| $i$ = | 162 15 | $U$ = | 76 Jahre. |

Die nächste Wiederkehr wird 1911 stattfinden.

2) Komet (124) PONS-BROOKS; am 20. Juli 1812 von PONS entdeckt. Aus seinen Beobachtungen 1812 fand ENCKE, dass die Bewegung in einer sehr gestreckten Ellipse stattfand; die von ihm gefundenen Elemente ergaben eine Ellipse von nahe 71 Jahren Umlaufszeit; vor seiner Wiederkehr 1883 wurde die Rechnung neuerdings von SCHULHOF und BOSSERT in Paris aufgenommen, welche für denselben eine sehr ausgedehnte Aufsuchungsephemeride gaben. Indessen wurde er unabhängig von dieser Ephemeride am 1. September 1883 von BROOKS in Phelps wieder entdeckt. Ueber die an demselben beobachteten Lichtausbrüche s. pag. 58. Die Elemente von SCHULHOF und BOSSERT sind:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $T$ = | 1884 Januar 26. | $q$ = | 0·7757 |
| $\pi$ = | 93° 17′·2 | $e$ = | 0·9550 |
| ☊ = | 254 5·7 | $a$ = | 17·24 |
| $i$ = | 74 2·6 | $U$ = | 71·56 Jahre. |

Die nächste Wiederkehr wird 1955 stattfinden.

3) Komet (127); der OLBERS'sche Komet, den 6. März 1815 von OLBERS entdeckt. Auch dieser Komet wurde bald als elliptisch erkannt; vor seiner Wiederkehr wurde die Berechnung von GINZEL in Wien wieder aufgenommen, der ebenfalls sehr ausgedehnte Aufsuchungsephemeriden gab; er wurde, nachdem er schon 1886 vielfach aber vergeblich gesucht worden war, am 24. August 1887 von BROOKS in Phelps, ebenfalls unabhängig von der Ephemeride, neu entdeckt. Die aus den beiden Erscheinungen abgeleiteten Elemente sind:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $T$ = | 1887 October 8. | | $q$ = | 1·1991 |
| $\pi$ = | 149° 52′·5 | Mittl. Aequ. 1890·0 | $e$ = | 0·9311 |
| ☊ = | 84 32·3 | | $a$ = | 17·41 |
| $i$ = | 44 34·3 | | $U$ = | 72·64 Jahre. |

Die nächste Wiederkehr wird 1960 stattfinden.

---

[1]) Hier sowie im folgenden, wenn nichts besonderes erwähnt ist: Mittleres Aequinoctium der Epoche.

4) Komet (172): der DE VICO'sche Komet 1846 IV entdeckt 1846 Februar 20.
5) „ (181): „ BRORSEN'sche „ 1847 V „ 1847 Juli 20.
6) „ (193): „ WESTPHAL'sche „ 1852 IV „ 1852 Juli 24.
7) „ (238): „ TEMPEL'sche „ 1866 I „ 1865 December 19.
8) „ (239): „ COGGIA'sche „ 1867 I „ 1867 Januar 22.
9) „ (270): „ GOULD'sche „ 1880 I „ 1880 Februar 4.

sämmtlich nach ihren Entdeckern benannt; ihre Elemente sind:

| Komet | T | π | ☊ | i | q | e | a | U | Zu erwartende Wiederkehr |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 172 | 1846 März 5 | 90° 27' | 77° 33' | 85° 6' | 0·6638 | 0·9622 | 17·6 | 73·7 | 1919 |
| 181 | 1847 September 9 | 79 8 | 309 50 | 19 9 | 0·4883 | 0·9739 | 18·7 | 81·1 | 1928 |
| 193 | 1852 October 13 | 48 14 | 346 10 | 40 55 | 1·2500 | 0·9190 | 15·4 | 60·7 | 1913 |
| 238 | 1866 Januar 11 | 42 24 | 231 26 | 162 42 | 0·9765 | 0·9051 | 10·3 | 33·2 | 1899 |
| 239 | 1867 Januar 20 | 75 59 | 78 38 | 18 13 | 1·5778 | 0·8654 | 11·7 | 40·1 | 1907 |
| 270 | 1880 Januar 27 | 74 14 | 356 19 | 142 8 | 0·0059 | 0·9995 | 11·1 | 36·9 | 1917 |

Bei den letzten 6 Kometen ist daher die Umlaufszeit noch nicht durch die beobachtete Wiederkehr bestätigt, doch wird bei allen schon am Ende dieses oder im Anfange des nächsten Jahrhunderts diese Bestätigung erfolgen können. Der Komet (238) hat ein erhöhtes Interesse durch seinen Zusammenhang mit den Sternschnuppen, und der Komet (270) durch seinen Zusammenhang mit den Kometen 1843 I, 1882 II und 1887 I, für welchen Fall jedoch für den letzteren die von GOULD und KREUTZ berechneten parabolischen Bahnen eine grössere Wahrscheinlichkeit haben (vergl. auch pag. 55).

Für die Kometen mit kurzer Umlaufszeit soll zunächst eine Zusammenstellung ihrer Elemente bei ihrer Entdeckung und bei ihrer letzten Erscheinung gegeben werden.

| Laufende Num. | Num. d. GALLE'schen Verzeichn. | Jahr und Ordnungsnumm. d. Erscheinung | T M. B. Z. | π | ☊ | i | log q | φ | log a | μ | U Jahr. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 45 | 1678 | August 18·4 | 322° 48' | 63° 20' | 2° 52' | 0·0589 | 38° 50' | 0·4872 | 659''·6 | 5·88 |
| 1 | 164 | 1844 I | Sept. 2·5 | 342 30·8 | 63 49·6 | 2 54·8 | 0·0742 | 38 7·5 | 0·4014 | 649·0 | 5·46 |
| 2 | 65 | 1743 I | Januar 8·2 | 93 19·6 | 86 54·5 | 1 58·7 | 9·9858 | 40 9·8 | 0·4001 | 652·8 | 5·44 |
| 3 | 79 | 1766 II | April 27·0 | 251 13 | 74 11 | 8 2 | 9·6010 | 50 46 | 0·4671 | 700·1 | 5·08 |
| 4 | 81 | 1770 I | August 13·6 | 356 16·8 | 131 59·0 | 1 34·5 | 9·8289 | 51 49·4 | 0·4088 | 633·6 | 5·60 |
| 5 | 84 | 1772 | Febr. 16·7 | 110 18·6 | 257 15·6 | 17 3·1 | 9·9930 | 46 25·7 | 0·5538 | 524·0 | 6·77 |
| 5 | 84 | 1852 III A | Sept. 23·7 | 109 5·3 | 245 49·6 | 12 33·5 | 9·9340 | 49 2·6 | 0·5458 | 538·7 | 6·59 |
| 5 | 84 | 1852 III B | Sept. 24·0 | 108 58·3 | 245 53·5 | 12 33·8 | 9·9318 | 49 7·4 | 0·5476 | 535·8 | 6·63 |
| 6 | 92 | 1783 | Nov. 20·0 | 50 17·4 | 55 40·5 | 45 6·9 | 0·1641 | 38 32·1 | 0·5183 | 563·0 | 6·09 |
| 7 | 96 | 1786 I | Januar 30·9 | 156 38 | 334 8 | 13 36 | 9·5248 | 58 2 | 0·3440 | 1081·4 | 3·27 |
| 7 | 96 | 1895 I | Febr. 4·77 | 158 42·32 | 334 44·85 | 12 54·40 | 9·53284 | 57 48·23 | 0·34507 | 1074·108 | 3·30 |
| 8 | 102 | 1790 II | Januar 28·3 | 111 45 | 267 9 | 56 58 | 0·0267 | — | — | — | — |
| 8 | 102 | 1858 I | Febr. 23·6 | 115 51·6 | 269 3·2 | 54 24·2 | 0·0109 | 65 10·5 | 0·7578 | 258·07 | 13·70 |
| 8 | 102 | 1885 IV | Sept. 11·18 | 116 28·96 | 269 42·02 | 54 19·75 | 0·01061 | 65 14·38 | 0·75908 | 257·865 | 13·76 |
| 9 | 131 | 1819 III | Juli 18·9 | 274 41 | 113 11 | 10 43 | 9·8885 | 49 2·5 | 0·4907 | 681·6 | 5·62 |
| 9 | 131 | 1858 II | Mai 2·07 | 275 33·9 | 113 31·8 | 10 48·2 | 9·8859 | 49 0·7 | 0·4965 | 638·7 | 5·56 |
| 9 | 131 | 1892 IV | Juni 30·93 | 276 11·07 | 104 4·62 | 14 31·57 | 9·9477 | 46 33·08 | 0·50094 | 609·072 | 5·82 |

| Laufende Num. | Num. d. GALLE'schen Verzeich. | Jahr und Ordnungsnumm. d. Erscheinung | T M. B. Z. | π | ☊ | i | log q | φ | log a | μ | U Jahr. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 182 | 1819 IV | Nov. 20·8 | 67 19 | 77 14 | 9 1 | 9·9506 | 48 21·4 | 0·4547 | 786·0 | 4·82 |
| 11 | 168 | 1843 III | Octob. 17·2 | 49 31·3 | 209 29·3 | 11 21·5 | 0·2285 | 33 46·6 | 0·5811 | 476·8 | 7·41 |
| 11 | 168 | 1881 I | Januar 22·7 | 50 48·78 | 209 35·42 | 11 19·67 | 0·24008 | 33 17·97 | 0·58592 | 468·942 | 7·57 |
| 12 | 171 | 1846 III | Febr. 25·4 | 116 28 | 102 41 | 30 56 | 9·8130 | 52 30·2 | 0·4978 | 635·7 | 5·58 |
| 12 | 171 | 1879 I | März 30·6 | 116 14·1 | 101 19·0 | 29 23·2 | 9·7707 | 51 4·8 | 0·4916 | 649·5 | 5·46 |
| 13 | 174 | 1846 VI | Juni 1·9 | 240 7·6 | 260 29·0 | 30 24·4 | 0·1848 | 46 10·0 | 0·7802 | 276·2 | 12·85 |
| 14 | 189 | 1851 II | Juli 8·7 | 322 57·0 | 148 25·5 | 13 55·4 | 0·0695 | 41 16·5 | 0·5376 | 554·1 | 6·40 |
| 14 | 189 | 1890 V | Sept. 17·5 | 319 14·57 | 146 16·58 | 15 42·69 | 0·12190 | 38 50·30 | 0·55084 | 580·272 | 6·69 |
| 15 | 240 | 1867 II | Mai 23·9 | 236 10 | 101 9 | 6 25 | 0·1941 | 30 38·7 | 0·5037 | 623·1 | 5·69 |
| 15 | 240 | 1879 III | Mai 7·2 | 238 16 | 78 46 | 9 46 | 0·2482 | 27 33·2 | 0·5179 | 593·1 | 5·98 |
| 16 | 244 | 1869 III | Nov. 18·8 | 42 59 | 296 46 | 5 24 | 0·0260 | 41 9·3 | 0·4927 | 647·1 | 5·48 |
| 16 | 244 | 1891 V | Nov. 15·0 | 43 14·27 | 296 31·25 | 5 23·28 | 0·02607 | 40 44·78 | 0·49587 | 641·189 | 5·53 |
| 17 | 251 | 1873 II | Juni 25·2 | 306 6 | 120 57 | 12 45 | 0·1284 | 38 32·7 | 0·4777 | 681·4 | 5·21 |
| 17 | 251 | 1894 III | April 23·3 | 306 15·00 | 121 10·09 | 12 44·37 | 0·18053 | 38 26·45 | 0·47886 | 670·989 | 5·32 |
| 18 | 277 | 1881 V | Sept. 13·4 | 18 33·3 | 65 54·2 | 6 50·7 | 9·8607 | 56 7·1 | 0·6307 | 401·7 | 8·33 |
| 19 | 285 | 1884 II | August 16·5 | 306 11·0 | 5 9·0 | 5 27·6 | 0·1071 | 35 44·3 | 0·4883 | 657·1 | 5·40 |
| 20 | 286 | 1884 III | Nov. 17·8 | 19 1·0 | 206 18·5 | 25 15·7 | 0·1964 | 34 7·2 | 0·5589 | 523·8 | 6·77 |
| 20 | 286 | 1891 II | Septemb. 3·5 | 19 10·73 | 206 22·28 | 25 14·57 | 0·20216 | 33 51·63 | 0·55594 | 520·118 | 6·82 |
| 21 | 293 | 1886 IV | Juni 6·6 | 229 46·0 | 53 3·4 | 12 56·0 | 0·1261 | 37 27·2 | 0·5329 | 563·1 | 6·30 |
| 22 | 295 | 1886 VII | Nov. 22·4 | 7 34·5 | 52 23·0 | 3 1·7 | 9·9080 | 45 52·8 | 0·5185 | 583·7 | 6·65 |
| 22 | 295 | 1893 III | Juli 12·2 | 7 59·57 | 52 27·72 | 3 2·03 | 9·99326 | 46 0·82 | 0·54788 | 533·805 | 6·62 |
| 23 | 309 | 1889 V | Sept. 30·4 | 1 34·92 | 17 59·07 | 6 4·11 | 0·29000 | 28 5·10 | 0·50636 | 501·723 | 7·07 |
| 24 | 310 | 1889 VI | Nov. 29·6 | 40 15·0 | 330 36·0 | 10 14·0 | 0·1315 | 42 31·2 | 0·6208 | 415·8 | 8·53 |
| 25 | 316 | 1890 VII | Octob. 26·5 | 56 23·7 | 45 5·3 | 12 50·4 | 0·2595 | 28 8·5 | 0·5366 | 556·0 | 6·38 |
| 26 | 321 | 1892 III | Juni 13·2 | 345 58·5 | 331 41·2 | 20 47·3 | 0·3308 | 24 11·9 | 0·5594 | 518·9 | 6·90 |
| 27 | 322 | 1892 V | Dec. 11·0 | 16 52·6 | 206 33·7 | 31 12·5 | 0·1551 | 35 32·2 | 0·5331 | 562·8 | 6·30 |
| 28 | 327 | 1894 I | Febr. 9·5 | 130 37·7 | 84 21·8 | 5 31·8 | 0·0597 | 44 17·6 | 0·5802 | 478·4 | 7·42 |
| 29 | 329 | 1894 IV | October 12·5 | 145 19·2 | 48 44·0 | 2 57·0 | 0·1488 | 34 52·1 | 0·5121 | 605·1 | 5·86 |
| 30 | 330 | 1895 II | August 20·0 | 338 4·3 | 170 18·1 | 3 0·3 | 0·1181 | 40 30·5 | 0·5710 | 498·7 | 7·19 |

1) Der LA HIRE-DE VICO'sche Komet. Der Komet wurde 1678 von LA HIRE entdeckt, nach dieser Erscheinung aber nicht wiedergesehen. Die Aehnlichkeit zwischen seinen Elementen und denjenigen des am 22. August 1844 von DE VICO entdeckten, veranlasste LE VERRIER und BRÜNNOW zu einer genaueren Untersuchung, welche die Identität der Kometen ausser Zweifel stellte. Nimmt man in der Zwischenzeit 31 Umläufe, so wird die Umlaufszeit 5·36 Jahre. Seit 1844 ist derselbe aber wieder nicht mehr gesehen worden. In neuerer Zeit wurde auf die entfernte Aehnlichkeit seiner Bahn mit denjenigen der periodischen Kometen (285) und (295) hingewiesen. Der blosse Vergleich der Bahnen genügt dabei nicht, da wie bei den Kometen (81), (286) und (309) bedeutende Störungen nicht ausgeschlossen sind. Genauere Rechnungen von KRUEGER und BOSS ergaben auch, dass diese Kometen nicht identisch wären. Mehr Aehnlichkeit zeigt seine Bahn mit der Bahn des periodischen Kometen (329); nimmt man in diesem Falle 9 Umläufe des Kometen an, so würde sich die Umlaufszeit zu 5·612 Jahre ergeben; die genaueren Untersuchungen von SCHULHOF hierüber sind noch nicht abgeschlossen, scheinen aber die Identität zu bestätigen.

2) Der von GRISCHOW 1743 entdeckte Komet wurde ebenfalls später nicht wiedergesehen. CLAUSEN, der seine Bahn berechnete, hält ihn jedoch für identisch mit dem periodischen Kometen (132) und ist der Meinung, dass die beträchtlichen Aenderungen durch eine Störung des Jupiter bewirkt wurden, welcher die Umlaufszeit von 6·78 Jahre (vor 1758) auf 5·60 Jahre (nach 1817) vermindert hätte (vergl. auch pag. 90).

3) Auch dieser, am 1. April 1766 von HELFENZRIEDER entdeckte Komet, ist nicht wiedergesehen worden. Man hat neuerdings die Vermuthung ausgesprochen, dass der Komet identisch wäre mit dem periodischen Kometen (131); mehr Wahrscheinlichkeit hat die Annahme der Identität mit dem Kometen (277) oder (293), immerhin unter der Voraussetzung von bedeutenden Störungen; ausführliche Untersuchungen hierüber sind noch nicht angestellt.

4) Für den von MESSIER am 14. Juni 1770 entdeckten Kometen hatte bereits der erste Berechner LEXELL, nach welchem der Komet auch der LEXELL'sche Komet genannt wird, eine Umlaufszeit von $5\frac{1}{2}$ Jahren gefunden; man warf daher die Frage auf, warum er nicht früher gesehen worden war. Als er dann bei seiner in den Jahren 1776 und 1781 erwarteten Wiederkehr nicht gesehen wurde musste der Grund hierfür angegeben werden. Zweifel an der Ellipticität der Bahn, an der Güte der Beobachtungen, veranlassten, dass die Frage wiederholt von verschiedenen Berechnern insbesondere von BURCKHARDT aufgenommen wurde. LAPLACE hatte als Ursache eine starke Annäherung des Kometen an Jupiter gefunden, durch welchen derselbe im Jahre 1767 aus einer nahe parabolischen Bahn in jene elliptische übergeführt worden war, welche sich aus seinen Beobachtungen im Jahre 1770 ergeben hatte, in welcher er aber nur bis 1779 blieb, in welchem Jahre neuerdings eine so bedeutende Annäherung des Kometen an Jupiter stattfand, dass seine elliptische Bahn wieder vollständig umgestaltet wurde.

Die Apheldistanz dieses Kometen ist in seiner elliptischen Bahn zwischen 1767—1779, gleich 5·68, also etwas grösser als die grosse Halbaxe der Jupitersbahn. Steht nun Jupiter in der Richtung des Aphels, wenn der Komet dasselbe passirt, so ist die Annäherung der beiden Körper so stark, dass die Wirkung des Jupiter nicht mehr als Störung angesehen werden kann, indem sie die Wirkung der Sonne übertrifft, und LAPLACE wandte für die Untersuchung eine Methode an, bei welcher die Bahn während der grossen Annäherung als eine jovicentrische angesehen wird[1]. Später wurden diese Arbeiten in weit ausgedehnterem Umfange von LE VERRIER wieder aufgenommen[2]. Da es denkbar ist, dass einem gewissen Werthe eines Elementes, z. B. der Knotenlänge, andere Elemente entsprechen, welche die mögliche Bahn des Kometen vor der ersten Störung bezw. nach der zweiten grossen Störung innerhalb der zulässigen Beobachtungsfehler darstellen, so kann man die sämmtlichen möglichen Elementensysteme als Funktionen eines Elementes darstellen, oder, wie dieses LE VERRIER that, alle Elemente von einem gewissen Parameter (unabhängige Variable), welchen er $\mu$ nennt und welcher mit der Genauigkeit der Beobachtungen zusammenhängt, abhängig machen. LE VERRIER fand so, dass unter den bis dahin entdeckten Kometen kein mit dem LEXELL'schen identischer sein könne. Erst in neuerer Zeit wurden durch die Untersuchungen CHANDLER's über den Kometen 309 (s. hierüber das später über die Störungen durch Jupiter Gesagte) auf die mögliche Identität dieser beiden Kometen aufmerksam gemacht.

---

[1]) Vergl. den Art. »Mechanik des Himmels« § 68.

[2]) Annales de l'Observatoire de Paris; T. III.

5) Der BIELA'sche Komet wurde 1772 von MONTAIGNE am 8. März entdeckt und von MESSIER viermal beobachtet, u. z. am 26. 27. 30. März und 1 April. Die erste Bahnbestimmung war daher äusserst unsicher. Die Aehnlichkeit der Elemente mit denjenigen des am 10. November 1805 von PONS entdeckten Kometen (1806 I) war nicht auffällig genug, dass er schon in dieser Erscheinung als periodisch erkannt worden wäre, obzwar GAUSS bei seiner Bahnbestimmung bereits auf eine stark elliptische Bahn geführt worden war. Der am 27. Februar 1826 von BIELA zu Josefstadt in Böhmen und unabhängig von diesem am 9. März von GAMBART in Marseille entdeckte Komet wurde aber bald von beiden als identisch mit demjenigen von 1806 erkannt, und dadurch wurden beide auch auf die Identität derselben mit dem Kometen von 1772 geführt. Bei seiner nächsten Wiederkehr wurde er am 25. August 1832 nach der von BIELA vorausgerechneten Ephemeride im Collegio Romano wiedergefunden. HUBBARD und D'ARREST, welche für die nächste Erscheinung die Vorausberechnung übernahmen, fanden nahe identische Bahnen. Ueber seine späteren Erscheinungen in den Jahren 1846 und 1852 wurde bereits gesprochen. Eine Schwierigkeit bei der Bahnbestimmung ergab die bereits erwähnte Thatsache, dass die Entfernung der beiden Köpfe im Perihel ein relatives Maximum erreichte. Auch schliessen sich die beiden Bahnen nicht vollkommen den beiden Kometentheilen an. Als der Komet im Jahre 1859, wie man damals annahm, wegen der sehr ungünstigen Stellung des Kometen nicht beobachtet wurde, setzte man grosse Hoffnungen auf die Wiederkehr desselben im Jahre 1865 behufs genauerer Bestimmung der Bahnen. Allein, wie schon erwähnt, ist der Komet seither nicht wiedergesehen worden. Zwar hatte im Jahre 1865 am 4. November TALMAGE, am 5. HIND, am 9. BUCKINGHAM, am 18. BARBER und bei der Erscheinung 1872, von KLINKERFUES aufmerksam gemacht, POGSON in Madras am 2. December in der Nähe des Ortes, wo der Komet sich befinden musste, einen kometenartigen Nebel gesehen, allein alle diese Beobachtungen ergaben, mit der Ephemeride verglichen, so bedeutende Unterschiede, dass man das beobachtete Object nicht mit dem BIELA'schen Kometen identificiren kann.

Am 8. Dezember 1896 wurde von PERRINE ein Komet entdeckt, für welchen RISTENPART die folgenden elliptischen Elemente berechnete:

$$
\begin{aligned}
T &= 1896 \text{ November } 24{\cdot}7488 \\
\pi &= 50^\circ\, 21'\, 37''{\cdot}7 \\
\Omega &= 246^\circ\, 24'\, 7''{\cdot}2 \\
i &= 13^\circ\, 50'\, 41''{\cdot}1 \\
\log q &= 0{\cdot}046412 \\
\varphi &= 44^\circ\, 12'\, 27''{\cdot}3 \\
\mu &= 503''{\cdot}490 \\
\log a &= 0{\cdot}565844
\end{aligned}
\quad \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{Mittl. Aequin. 1897·0}
$$

Umlaufszeit 7·047 Jahre,

aus welchen er sofort auf die Aehnlichkeit mit dem BIELA'schen Kometen geführt wurde. Doch bleibt vorerst ohne ausführliche Störungsrechnung, bei denen in erster Linie die Wirkung der Erde in Betracht zu ziehen ist, der grosse Unterschied in der Lage des Perihels sowie in der Durchgangszeit durch das Perihel noch unaufgeklärt, und muss erst die genauere Rechnung, bei denen zunächst eine engere Verbindung der Erscheinungen von 1846 und 1852 unerlässlich ist, darüber entscheiden ob der erwähnte Komet mit dem BIELA'schen identisch ist oder sich nur in seiner ursprünglichen, später durch Erdstörungen modificirten Bahn bewegt. Dass der Komet zur Zeit der grössten Störung, also in der

grössten Erdnahe, nicht hat beobachtet werden konnen, kann nicht gegen die Identitat sprechen, da er in seinen früheren Erscheinungen an Intensität verlor; auch spricht dafür, dass er 1896 erst nach seinem Periheldurchgange, also wahrscheinlich in Folge eines plötzlichen Anwachsens der Intensität, entdeckt wurde.

6) Der von PIGOTT am 19. November 1783 entdeckte Komet unterscheidet sich von den anderen kurz periodischen Kometen wesentlich durch die grosse Neigung; eine noch grössere Neigung hat nur der Komet (102), der aber schon den Uebergang zu den lang periodischen bildet. Der Komet ist seither nicht wiedergesehen worden, und kann auch nicht leicht ohne ausführliche Storungsrechnungen mit einem anderen Kometen verglichen werden.

7) Der ENCKE'sche Komet. Der Komet wurde von MÉCHAIN am 17. Januar 1786 entdeckt und ausserdem nur noch einmal am 19. Januar von MÉCHAIN und MESSIER beobachtet; an eine Bahnbestimmung war daher damals gar nicht zu denken. Als ENCKE die Berechnung des am 26. November 1818 von PONS entdeckten Kometen übernahm, wurde er auf eine Ellipse von 1207 Tagen Umlaufszeit geführt, woraus er auf die Identitat desselben mit dem von BOUVARD, PONS und HUTH am 19. Oktober 1805 entdeckten, ferner mit dem von Miss CAROLINE HERSCHEL im Jahre 1795 entdeckten aber nur vom 7. bis 27. November beobachteten Kometen geführt wurde; eine weitere Zurückrechnung ergab, dass auch die Beobachtung des Kometen 1786 I diesem Kometen angehöre.

Der Komet, welcher übrigens lichtschwach und nur teleskopisch ist, wurde seitdem fast bei jedem Periheldurchgange beobachtet: 1822 in der ersten vorausberechneten Wiederkehr wurde er von DUNLOP in Paramatta aufgefunden und von RÜMKER daselbst vom 2. bis 29. Juni beobachtet; 1825 wurde er von VALZ in Nimes am 13. Juli wiedergefunden; 1829 von ENCKE in Berlin am 7. Oktober, 1832 von MOSSOTTI in Buenos-Ayres am 1. Juni, 1835 von KREIL in Mailand am 22. Juli; 1838 am 16. September und 1842 am 8. Februar von ENCKE in Berlin; 1845 am 4. Juli in Washington; 1848 von BOND in Cambridge U. S. am 27. August; 1852 von VOGEL in Bishops Observatory in London am 9. Januar; 1855 von MACLEAR am Cap am 12. Juli; 1858 am 7. August und 1861 am 4. October von FÖRSTER in Berlin; 1865 Februar 13 von BRUHNS und ENGELMANN in Leipzig; 1868 Juli 17 und 1871 September 19 von WINNECKE in Karlsruhe; 1875 Januar 26 von HOLDEN und TUTTLE in Washington; 1878 August 3 von TEBBUTT in Windsor; 1881 August 20 von WINNECKE in Strassburg; 1884 Dezember 13 von TEMPEL in Arcetri; 1888 Juli 8 von TEBBUTT in Windsor; 1891 August 1 von BARNARD auf dem Mount Hamilton; 1895 gleichzeitig von WOLF in Heidelberg und PERROTIN in Nizza. Seine Vorausberechnung hatte später v. ASTÉN, und in letzter Zeit BACKLUND übernommen; seine nächste Wiederkehr ist für das Jahr 1898 zu erwarten.

Die zahlreichen Beobachtungen dieses Kometen ermöglichten selbstverständlich eine äusserst genaue Bahnbestimmung; dabei zeigte es sich aber, dass sich seine Umlaufszeit stetig, um ungefähr 8 Stunden für jeden Umlauf verkürzt. ENCKE wurde hierdurch auf die Einwirkung eines widerstehenden Mittels geführt, worüber ausführlich in der »Mechanik des Himmels« gesprochen werden wird.

8) Für den am 9. Januar 1790 von MÉCHAIN entdeckten Kometen ergaben sich die in der Tabelle angegebenen parabolischen Elemente. Der von TUTTLE am 4. Januar 1858 in Cambridge U. S. und unabhängig von diesem am 11. Januar von BRUHNS in Berlin entdeckte Komet erwies sich gleich nach der ersten Bahnbestimmung als identisch mit dem Kometen 1790 II, so dass inzwischen 5 Umläufe stattgefunden hatten, und die Umlaufszeit 13·7 Jahre beträgt. Der Komet wurde

in der nächsten Erscheinung 1871 am 12. Oktober von Borrelly in Marseille und am 15. Oktober von Winnecke in Karlsruhe wieder aufgefunden und am 8. August 1885 von Perrotin und Charlois in Nizza. Für die letzte Erscheinung hatte die Bearbeitung Raiffs übernommen. Die nächste Wiederkehr ist für das Jahr 1899 zu erwarten.

9) Der Winnecke'sche Komet; entdeckt im Jahre 1819 von Pons am 12. Juni, wurde für denselben von Encke eine elliptische Bahn gerechnet. In ganz derselben Weise wie beim Tuttle'schen Kometen und im selben Jahre, unmittelbar nach der Entdeckung des Kometen 1858 I wurde dieser Komet von Winnecke in Bonn am 8. März 1858 entdeckt und als identisch mit dem Kometen 1819 III erkannt. Unter der Annahme von 7 Umläufen seit 1819 wurde Winnecke auf eine Bahn von 5·54 Jahren Umlaufszeit geführt. Bei dem nächsten Periheldurchgange 1864 wurde er nicht gesehen; 1869 wurde er am 9. April von Winnecke in Karlsruhe wieder aufgefunden, sodann 1875 Februar 1 von Borrelly in Marseille, 1886 August 19 von Finlay am Cap, endlich 1892 März 18 von Spitaler in Wien. Die nächste Wiederkehr ist 1898 zu erwarten.

10) Der Komet wurde am 27. November 1819 von Blanpain in Marseille entdeckt, später aber nicht wiedergesehen. Ueber die Versuche Clausens ihn mit dem Kometen (65) zu identificiren, s. pag. 90. In neuerer Zeit ist auf die mögliche Identität mit dem Kometen (316) hingewiesen worden.

11) Der Faye'sche Komet; gleich nach seiner Entdeckung 1843 November 22 durch Faye, als elliptisch erkannt. Die genauere Bahn ergab sich erst nach den Erscheinungen 1851, wo er nach den in der Tabelle mitgetheilten Le-Verrier'schen Elementen von Challis in Cambridge (England) am 28. November 1850 und 1858, wo er von Bruhns in Berlin am 7. September aufgefunden wurde. Die Verbindung dieser Erscheinungen schien anfänglich nach den Rechnungen von Axel Möller ebenfalls die Berücksichtigung der Störungen durch ein widerstehendes Mittel zu fordern. 1865 wurde er nicht beobachtet, in der Erscheinung 1873 wurde er von Stephan in Marseille am 3. September wieder aufgefunden, sodann 1880 August 2 von Common in Ealing (1881 I); in der Erscheinung 1888 wurde er nach Aufsuchungsephemeriden von Kreutz, denen die Möller'schen Elemente zu Grunde liegen, Aug. 9 von Perrotin in Nizza und in der letzten Erscheinung 1896 nach einer genäherten Ephemeride von Engström, welche ebenfalls nach den Möller'schen Elementen abgeleitet war, am 26. September 1895 von Javelle in Nizza aufgefunden.

12) Der Brorsen'sche Komet; sofort nach seiner am 26. Februar 1846 durch Brorsen in Kiel erfolgten Entdeckung als elliptisch erkannt; bei seiner ersten Wiedererscheinung 1851 wurde er nicht gesehen; erst in der folgenden Erscheinung 1857 wurde er von Bruhns am 18. März neuerdings entdeckt, während die Ephemeride in Folge der nach van Galen's Elementen zu kleinen mittleren Bewegung (623") den Periheldurchgang zu spät angab. Für die Erscheinungen des Brorsen'schen Kometen giebt Kreutz[1]) die folgende Zusammenstellung: Die Erscheinungen des Kometen theilen sich wegen der fast genau 5½ Jahre betragenden Umlaufszeit in Frühjahrs- und Herbsterscheinungen. Gut zu beobachten ist er nur in den ersteren. Im Jahre 1857 war aber seine theoretische Helligkeit[2]) kleiner als die Hälfte derjenigen der ersten Erscheinung im Jahre 1846; nichtsdestoweniger wurde er bedeutend heller gesehen. Schmidt, damals in Olmütz, glaubte den Kometen sogar 1857 April 8 bis 12 mit blossem Auge gesehen zu haben. In der nächsten

[1]) Vierteljahrsschr. d. Astron. Gesellsch. Bd. 26, pag. 76.

[2]) Ueber die Helligkeit, vergl. pag. 77.

Herbsterscheinung 1862 wurde er nicht wahrgenommen; 1868 wurde er von SCHMIDT in Athen wieder aufgefunden; in der nächsten Herbsterscheinung wurde er am 31. August 1873 von STEPHAN in Marseille wieder aufgefunden; der Komet war diffus, ohne merkbare Condensation; seine Helligkeit war ⅓ derjenigen der ersten Erscheinung 1846, thatsächlich war er aber, wahrscheinlich in Folge seiner ungünstigen Stellung, noch viel schwächer. 1879 wurde er, wieder im Frühjahr am 14. Januar von TEMPEL in Arcetri aufgefunden, mehrere Wochen nach dem Periheldurchgange zeigte er eine rapide Lichtzunahme und eine Vergrösserung des Kernes, eine Erscheinung, die übrigens auch schon, wenn auch weniger decidirt, in den früheren Erscheinungen wahrgenommen worden war. In der Herbsterscheinung 1884 wurde er nicht gefunden, aber ebensowenig in der Frühjahrserscheinung 1890, obgleich seine Stellung in diesem Jahre nahe so günstig war, wie 1846; in der Herbsterscheinung 1895 war seine Stellung besonders ungünstig; die nächste Wiedererscheinung ist für das Frühjahr 1900 zu erwarten.

13) Der Komet wurde von C. H. F. PETERS am 26. Juni in Neapel entdeckt; er wurde nur in dieser einen Erscheinung beobachtet, später nicht wiedergesehen. Zu bemerken ist übrigens, dass diese Bahn aus Beobachtungen abgeleitet ist, welche im Ganzen einen Zeitraum von kaum einen Monat umfassen.

14) Der d'ARREST'sche Komet; am 27. Juni 1851 von d'ARREST in Leipzig entdeckt und bereits in der ersten Erscheinung als elliptisch erkannt; in der nächsten Erscheinung 1857 am 5. December am Cap wieder aufgefunden, sodann, nachdem er in der nächsten Erscheinung nicht gesehen wurde, 1870 August 31 von WINNECKE in Karlsruhe aufgefunden, 1877 Juli 9 von TEMPEL in Arcetri, 1890 Oktober 6 von BARNARD auf der Lickssternwarte. Der Komet war in seiner Erscheinung 1890 ungefähr unter denselben Umständen sichtbar, wie bei seiner Erscheinung 1870; die Periheldurchgänge fielen auf 1870 September 22, und 1890 September 17; dennoch wurde er im Jahre 1890 nur mit grosser Mühe gefunden; lange blieb das Suchen erfolglos, bis er, schon nach dem Periheldurchgange, am 6. October von BARNARD gefunden wurde. Der Komet hat daher ausserordentlich an Lichtstärke verloren. Die nächste Wiederkehr ist 1897 zu erwarten.

15) Der erste TEMPEL'sche periodische Komet, mit kurzer Umlaufszeit: $\text{TEMPEL}_1$ entdeckt von TEMPEL am 3. April 1867 in Marseille; er wurde in der nächsten Erscheinung 1873 von STEPHAN in Marseille am 3. April wiedergefunden, sodann 1879 April 24 von seinem ersten Entdecker TEMPEL in Arcetri. Bei den folgenden Periheldurchgängen 1885 und 1892 wurde er nicht aufgefunden, die nächste Wiederkehr ist 1897/8 zu erwarten.

16) Der dritte TEMPEL'sche Komet: $\text{TEMPEL}_3$ - SWIFT: entdeckt am 27. November 1869 von TEMPEL in Marseille. Die Ellipticität seiner Bahn wurde nicht gleich bei der ersten Bahnbestimmung erkannt, wenn auch die Abweichungen von der Parabel schon damals angedeutet waren. Bei dem nächsten Periheldurchgang wurde er nicht beobachtet und erst durch die Uebereinstimmung seiner Bahn mit derjenigen des am 10. Oktober 1880 von SWIFT in Rochester entdeckten Kometen wurde er als periodisch erkannt (die Bezeichnung $\text{TEMPEL}_2$ war inzwischen für den von TEMPEL entdeckten periodischen Kometen 1873 II gewählt worden). Die Berechnung des Kometen wurde sodann von SCHULHOF und BOSSERT durchgeführt. Bei seinem Periheldurchgange 1886 wurde er jedoch nicht gefunden; 1891 wurde er am 27. September von BARNARD auf dem Mount Hamilton wieder aufgefunden; seine nächste Wiederkehr findet im Frühjahr 1897 statt; da aber die Frühjahrserscheinungen bei diesem Kometen sehr

ungünstig sind, so dürfte er nur unter besonders günstigen Helligkeitsverhältnissen gesehen werden, und erst im Herbst 1902 kann seine Wiederkehr mit Sicherheit erwartet werden.

17) Der periodische Komet TEMPEL$_2$, entdeckt am 3. Juli 1873 von TEMPEL in Mailand, wiedergefunden 1878 von dem ersten Entdecker TEMPEL, in Arcetri am 19. Juli und 1894 von FINLAY am Cap als äusserst schwache, kreisrunde Nebelmasse von 1′ Durchmesser. Nächste Wiederkehr: 1899.

18) Der erste DENNING'sche Komet[1]); wurde bei seinem zweiten Periheldurchgange 1890 nicht gesehen; nächste Erscheinung 1898/9.

19) Der erste BARNARD'sche Komet wurde bei seinen folgenden Periheldurchgängen 1890 und 1895 nicht gesehen; nächste Erscheinung 1900.

20) Der WOLF'sche Komet wurde bei seinem zweiten Periheldurchgange 1891 von SPITALER in Wien wieder aufgefunden; über seine Störungen durch Jupiter wird später gesprochen. Nächste Wiederkehr 1898.

21) Der erste BROOKS'sche Komet wurde bei seinem zweiten Periheldurchgange 1892 nicht wiedergefunden; nächste Wiederkehr: 1899.

22) Der FINLAY'sche Komet; in seinem zweiten Periheldurchgange 1893 von FINLAY selbst am Cap wiedergefunden; nächste Wiederkehr 1900.

23) Der periodische Komet BROOKS$_2$ hatte eine ungewöhnlich lange Sichtbarkeitsdauer, und sind die von BAUSCHINGER abgeleiteten Elemente bereits sehr nahe richtig. In der zweiten Erscheinung wurde er am 20. Juni 1896 von JAVELLE in Nizza wieder aufgefunden. Ueber die Begleiter wurde schon früher gesprochen; seine Störungen durch Jupiter werden später behandelt.

Die folgenden 7 Kometen: (310) = Komet SWIFT$_1$, (316) = Komet SPITALER, (321) = Komet HOLMES, (322) = Komet BARNARD$_2$, (327) = Komet DENNING$_2$, (329) = Komet SWIFT$_2$, (330) = Komet SWIFT$_3$ sind bisher erst in einem Periheldurchgange beobachtet worden. Die nächsten Periheldurchgänge fallen bezw. für den Kometen (316) in das Jahr 1897; für (310) in das Jahr 1898; für die Kometen (321) und (322) in das Jahr 1899; für den Kometen (329) in das Jahr 1900, für den Kometen (327) in das Jahr 1901 und für den Kometen (330) in das Jahr 1902.

Dass die Kometen nur in der Nähe des Perihels gesehen werden, hat seinen Grund darin, dass sie in grösserer Entfernung von der Sonne zu lichtschwach sind. Ihre Lichtintensität wird bestimmt durch die von der Sonne erhaltene Lichtmenge, welche umgekehrt proportional dem Quadrate ihrer Entfernung $r$ von der Sonne ist; weiter ist für eine durch ihre Entfernung von der Sonne bestimmte Lichtintensität die von der Erde gesehene Lichtstärke umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung $\Delta$ von der Erde. Ihre Helligkeit wird daher

$$H = \frac{H_0}{r^2\Delta^2},$$

wobei $H_0$ die Helligkeit in der Entfernung 1 von der Sonne und Erde eine für den Kometen (abgesehen von Helligkeitsänderungen, Lichtausbrüchen) constante Grösse ist. Abweichungen von diesem Gesetze deuten auf Eigenlicht-Entwickelung. Kometen werden daher nur in der Nähe ihrer Perihele entdeckt, und daher kommt es auch, dass die beobachteten Kometen überhaupt nur mässige Periheldistanzen haben. Vergleicht man die bis Ende 1895 beobachteten Kometen,

---

[1]) Die Kometen nach ihren Entdeckern benannt.

deren Bahnen berechnet wurden, nach ihren Periheldistanzen, so erhält man die folgende Tabelle:

| Periheldistanzen zwischen | 0·0 | 0·1 | 0·2 | 0·3 | 0·4 | 0·5 | 0·6 | 0·7 | 0·8 | 0·9 | 1·0 | 1·2 | 1·5 | 2·0 | 3·0 | 5·0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Bis 1800[1]) | 5 | 4 | 4 | 16 | 9 | 25 | 10 | 18 | 11 | 13 | 11 | 4 | 2 | 1 | 1 | |
| 1801 bis 1850 | 5 | 3 | 3 | 15 | 3 | 6 | 7 | 4 | 13 | 6 | 11 | 9 | 5 | 3 | — | |
| 1851 bis 1880 | 3 | 2 | 3 | 15 | — | 9 | 9 | 11 | 9 | 13 | 15 | 13 | 11 | 2 | — | |
| 1881 bis 1895 | 3 | 1 | 2 | 7 | 2 | 1 | 5 | 5 | 6 | 8 | 10 | 10 | 12 | 4 | — | |
| Zusammen | 16 | 10 | 12 | 53 | 14 | 41 | 31 | 38 | 39 | 40 | 47 | 36 | 30 | 10 | 1 | |

Dabei sind jedoch die nach Ephemeriden gefundenen Kometen mit gerechnet; zählt man diese nicht mit, so ergiebt sich die folgende Tabelle, in welcher jedoch die wiederholten Erscheinungen desselben Kometen, falls derselbe nicht nach der Ephemeride wieder gefunden, sondern neu entdeckt wurde, mitgezählt sind[2]):

| Periheldistanzen zwischen | 0·0 | 0·1 | 0·2 | 0·3 | 0·4 | 0·5 | 0·6 | 0·7 | 0·8 | 0·9 | 1·0 | 1·2 | 1·5 | 2·0 | 3·0 | 5·0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Bis 1800[1]) | 5 | 4 | 4 | 16 | 9 | 25 | 10 | 18 | 11 | 13 | 11 | 4 | 2 | 1 | 1 | |
| 1801 bis 1850 | 5 | 3 | 3 | 6 | 3 | 6 | 7 | 4 | 11 | 5 | 11 | 9 | 5 | 3 | — | |
| 1851 bis 1880 | 3 | 2 | 3 | 6 | — | 5 | 9 | 11 | 8 | 13 | 14 | 10 | 6 | 2 | — | |
| 1881 bis 1895 | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 5 | 5 | 6 | 7 | 9 | 8 | 9 | 4 | — | |
| Zusammen | 16 | 10 | 12 | 31 | 14 | 37 | 31 | 38 | 36 | 38 | 45 | 31 | 22 | 10 | 1 | |

In diesen Zahlen zeigt sich auffallend die Wirkung der grösseren, lichtstärkeren Kometensucher. Bis 1800 fand sich das Maximum zwischen 0·5 und 1·0 der Periheldistanz; zwischen 1801 und 1880 zwischen 0·7 und 1·5; nach 1880 zwischen 0·9 und 2·0. Selbstverständlich kann diese Tabelle kein vollständig getreues Bild geben, da ja viele Kometen in neuerer Zeit schon weit vor ihrem Periheldurchgange, andere erst nach demselben entdeckt wurden. Noch weniger zeigt sich hierin die Wirkung der grossen Fernrohre der neuen Zeit, mit denen ja keine Kometen entdeckt werden. Doch zeigt sich die Wirkung derselben in der Dauer der Beobachtung nach dem Periheldurchgange.

---

[1]) Bei dem ersten Kometen von 372 vor Chr. Geb., dessen Bahn überhaupt nur genähert bestimmt werden konnte, bleibt die Periheldistanz unsicher; man findet nur, dass sie »klein« war.

[2]) Speciell mögen die Kometen, deren Periheldistanz kleiner als 0·2 und jene, deren Periheldistanz grösser als 2·0 ist, angeführt werden.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Komet | 1668 (?)<br>1880 I | : 0·005 | 1874 I | : 0·044 | 1830 II | : 0·126 | 1826 II | : 2·008 |
| | | | 1816 | : 0·048 | 1827 III | : 0·138 | 1835 I | : 2·041 |
| | 1680<br>1843 I<br>1887 I | : 0·006 | 1882 I | : 0·061 | 1851 IV | : 0·141 | 1854 I | : 2·045 |
| | | | 1689 | : 0·064 | 1582 | : 0·168 | 1890 IV | : 2·048 |
| | | | 1593 | : 0·089 | 1853 IV | : 0·173 | 1847 II | : 2·115 |
| | 1882 II | : 0·008 | 1821 | : 0·092 | 1577 | : 0·178 | 1892 III | : 2·130 |
| | 1865 I | : 0·026 | 1780 I | : 0·099 | 1826 III | : 0·188 (?) | 1855 I | : 2·194 |
| | 1826 V | : 0·027 | 1665 | : 0·106 | 1895 IV | : 0·192 | 1747 | : 2·199 |
| | 1847 I | : 0·043 | 1769 | : 0·123 | | | 1889 II | : 2·256 |
| | | | | | | | 1885 II | : 2·507 |
| | | | | | | | 1729 | : 4·043 |

Der erste Komet, der in einer zweiten Opposition beobachtet wurde[1]), die nicht mit seinem Periheldurchgange zusammenfiel, war der Komet 1811 I, der von WISNIEWSKI in Neu Tscherkask im Jahre 1812 beobachtet wurde, wo er von seinem Perihele bereits sehr weit entfernt war. Die Beobachtungen des Kometen 1882 II bilden nach dem Durchgange desselben vor der Sonnenscheibe am 17. September eine ununterbrochene Reihe bis Mitte März 1883, obzwar er schon am 4. Januar 1883 in Opposition war. Der Komet 1889 I wurde in der zweiten Opposition 1890 März 28 in Wien wieder aufgefunden, und der Komet 1889 V wurde in der zweiten Opposition 1890, in welcher die Entfernung des Kometen von der Sonne bereits 8·8, diejenige von der Erde 2·8 Erdbahnhalbaxen war, wiedergesehen, und bis 1891 Januar 1 beobachtet, sodass dessen Beobachtungen vom ersten Periheldurchgange bis zu seinem Verschwinden einen Zeitraum von 556 Tagen umfasst.

Besonders bemerkenswerth jedoch ist die Thatsache, dass die Bahnen mit grossen Periheldistanzen seit 1881 weniger die parabolischen als die elliptischen Kometen mit kurzer Umlaufszeit betreffen.

Von den seit 1881 entdeckten periodischen Kometen sind zwei mit Periheldistanzen kleiner als 1 (davon einer, dessen Periheldistanz sehr nahe gleich 1 ist), und 11 mit solchen grösser als 1. Es hangt dieses damit zusammen, dass die Excentricitäten dieser Kometen immer massig sind, sodass die Bahnen derselben denjenigen der Planeten ähnlicher werden.

Vergleicht man die periodischen Kometen mit den kleinen Planeten, so findet man übrigens nicht nur diesen einen Berührungspunkt zwischen denselben. In erster Linie tritt der Umstand hervor, dass die Halbaxen derselben von denjenigen der kleinen Planeten nicht sehr verschieden sind. Unter den sämmtlichen beobachteten kurz-periodischen Kometen haben zwei eine mittlere Bewegung kleiner als 300″; mit Rücksicht auf ihre Periheldistanz wird daher in demselben Maasse ihre Apheldistanz wachsen; sie ist für den Kometen (174) gleich 9·44, für den Kometen (102) gleich 10·48, für den ersteren daher etwas kleiner, für den letzteren etwas grösser als der Halbmesser der Saturnsbahn. Diese beiden Kometen bilden gewissermaassen den Uebergang zwischen den kurzperiodischen Kometen und denjenigen mit langer Umlaufszeit. Ihnen zunächst kommen dann die folgenden Kometen:

| | | $\mu$ | $\varphi$ | $i$ |
|---|---|---|---|---|
| Komet | (277) | 402″ | 56°·1 | 6°·8 |
| | (310) | 416 | 42·5 | 10·2 |
| | (168) | 468 | 38·3 | 11·3 |
| | (327) | 478 | 44·8 | 5·5 |
| | (350) | 494 | 40·7 | 8·0 |

[1]) Bei Kometen mit nahe parabolischen Bahnen wird, sobald der Komet in grössere Anomalien gekommen ist, seine Bewegung ziemlich langsam, und die Richtung von der Sonne zum Kometen sich nur wenig ändern; sie nähert sich immer mehr und mehr derjenigen Richtung, welche dem Perihel entgegengesetzt ist, und welche für Ellipsen das Aphel ist, und für Parabeln oder parabelähnliche Hyperbeln auch so genannt werden kann. Da die Erde sich inzwischen in ihrer Bahn fortbewegt hat, so geht sie dann zwischen der Sonne und dem Kometen durch, woraus ersichtlich ist, dass die mit den Perihelien nicht zusammenfallenden Oppositionen (für alle Kometen, deren Periheldistanzen kleiner als 1 sind) sehr nahe an der entgegengesetzten Seite des Himmels (in der Gegend des Aphels, für Hyperbeln genauer in der Richtung der Asymptoten) stattfinden.

Zum Vergleiche mögen hier diejenigen bis Ende 1895 entdeckten kleinen Planeten, deren mittlere Bewegungen kleiner als 500'' sind, nebst den Excentricitäten und den Neigungen angesetzt werden:

| | | μ | φ | i |
|---|---|---|---|---|
| Planet | (279) | 408'' | 4°·7 | 2°·4 |
| | (361) | 450 | 11·8 | 12·6 |
| | (158) | 451 | 9·4 | 7·9 |
| | (190) | 452 | 9·5 | 6·1 |
| | (384) | 456 | 0·4 | 4·6 |

Die Kometen mit den kleinsten Halbaxen sind:

| | | μ | φ | i |
|---|---|---|---|---|
| Komet | (96) | 1080'' | 57°·8 | 12°·9 |
| | (182) | 787 | 48·4 | 9·0 |
| | (79) | 706 | 59·8 | 8·0 |

und die Planeten, deren mittlere Bewegungen grösser als diejenigen der periodischen Kometen sind:

| | | μ | φ | i | | | μ | φ | i |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Planet | (323) | 1120'' | 16°·0 | 19°·8 | Planet | (270) | 1089'' | 8°·7 | 2°·4 |
| | (244) | 1106 | 7·9 | 2·8 | | (341) | 1087 | 11·0 | 5·7 |
| | (149) | 1106 | 8·9 | 0·9 | | (8) | 1086 | 9·0 | 5·9 |
| | (281) | 1098 | 7·6 | 5·8 | | (228) | 1086 | 13·9 | 2·6 |
| | (352) | 1092 | 8·5 | 8·4 | | (48) | 1085 | 9·7 | 5·5 |
| | (254) | 1091 | 7·0 | 4·5 | | | | | |

überdiess noch 20 mit mittleren Bewegungen zwischen 1000'' und 1080''.

Von den übrigen 20 Kometen haben 10 mittlere Bewegungen zwischen 500'' und 599'' und 10 zwischen 600'' und 699''. Soweit also die relativ noch geringe Zahl der periodischen Kometen einen Schluss gestattet, unterscheiden sich dieselben von den kleinen Planeten nicht wesentlich durch die Axen und Neigungen, sondern wesentlich durch die Excentricitäten[1]).

Bezüglich der Neigungen ist zu bemerken, dass mit

| Neigungen zwischen | 0° | 5° | 10° | 15° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| die Anzahl d. kurz periodisch. Kometen | 6 | 8 | 7 | 2 | 2 | 3 | 1 | 1 | |

beträgt, wobei für die Kometen, bei denen die Neigung ausserhalb der gewählten Grenzen veränderlich ist (z. B. für den Kometen 84), stets der grössere Werth angesetzt ist. Man ersieht hieraus ein Ueberwiegen der kleinen Neigungen; zusammen 23 unter 20° und 7 über 20°, ganz ähnlich wie dies bei den kleinen Planeten der Fall ist. Immerhin ist zu beachten, dass die relative Zahl der Kometen mit kleinen Neigungen nicht so gross ist, als bei den kleinen Planeten. Von den bis Ende 1895 entdeckten kleinen Planeten sind die Bahnneigungen

---

[1]) Auf die nahen Beziehungen zwischen Kometen mit kurzer Umlaufszeit und den kleinen Planeten hat schon V. MARSH im Jahre 1862 hingewiesen. Er sagt: »*It is perhaps worthy of remark, that the asteroid Polyhymnia approaches in eccentricity so near to the comets of short period, as to suggest the suspicion, that some of the Asteroids may yet be found to partake somewhat of the cometary character, and to fournish a connecting link between the planets and comets.* (SILLIMAN American Journal of Sciences and Arts II. Serie, Bd. 33, pag. 94.

| zwischen | 0° | 5° | 10° | 15° | 20° | 30° | 40° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| für | 126 | 149 | 79 | 27 | 25 | 1 | |

demnach in % ausgedrückt

| zwischen | 0° | 5° | 10° | 15° | 20° | 30° | 40° | darüber |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| für die kurz periodische Kometen | 20 | 27 | 23 | 7 | 6 | 10 | 7 | |
| für die kleinen Planeten | 31 | 37 | 19 | 7 | 6 | 0 | 0 | |

Mit Neigungen unter 10° sind daher 68% von den kleinen Planeten, hingegen nur 47% der kurz periodischen Kometen. Ganz auffällig unterscheiden sich aber auch die periodischen Kometen von denjenigen mit parabolischen oder nahe parabolischen Bahnen. Unter allen bisher entdeckten Kometen sind:

| mit Neigungen zwischen | 0° | 5° | 10° | 15° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° | 90° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Bis 1800 | 5 | 4 | 5 | 3 | 6 | 7 | 6 | 6 | 7 | 7 | 6 | |
| Zwischen 1801 und 1850 | 0 | 3 | 2 | 1 | 3 | 3 | 9 | 7 | 5 | 2 | 5 | |
| Zwischen 1851 und 1895 | 3 | 6 | 6 | 2 | 5 | 7 | 8 | 5 | 7 | 14 | 13 | |
| Zusammen | 8 | 13 | 13 | 6 | 14 | 17 | 23 | 18 | 19 | 23 | 24 | |

| mit Neigungen zwischen | 90° | 100° | 110° | 120° | 130° | 140° | 150° | 160° | 170° | 180° | Zus. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Bis 1800 | 2 | 9 | 8 | 12 | 10 | 7 | 6 | 4 | 2 | | 122[1]) |
| Zwischen 1801 und 1850 | 4 | 7 | 1 | 7 | 6 | 6 | 3 | 0 | 2 | | 76 |
| Zwischen 1851 und 1895 | 11 | 9 | 9 | 10 | 5 | 11 | 6 | 5 | 2 | | 144 |
| Zusammen | 17 | 25 | 18 | 29 | 21 | 24 | 15 | 9 | 6 | | 342 |

Von 30° zu 30° zusammengefasst erhält man hier Kometen mit

| Neigungen zwischen | 0° | 30° | 60° | 90° | 120° | 150° | 180° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 54 | 58 | 66 | 60 | 74 | 30 | |

daher auffallend wenige Kometen mit retrograden Bewegungen und kleinen Neigungen, während im übrigen die Kometen nahe gleich vertheilt erscheinen. Rechnet man jedoch die periodischen Kometen ab, und zwar

| Mit Neigungen zwischen | 0° | 5° | 10° | 15° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| die kurzperiodischen | 6 | 8 | 7 | 2 | 2 | 3 | 1 | 1 | — | |
| ferner die langperiodischen[2]) | — | — | — | 2 | — | — | 2 | — | — | |
| so bleibt f. d. Kom. m. parab. Bahnen | 2 | 5 | 6 | 2 | 12 | 14 | 20 | 17 | 19 | |

| Mit Neigungen zwischen | 70° | 80° | 90° | 100° | 110° | 120° | 130° | 140° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| die kurzperiodischen | — | — | — | — | — | — | — | |
| ferner die langperiodischen[2]) | 1 | 1 | — | — | — | — | — | |
| so bleibt f. d. Kom. m. parab. Bahnen | 22 | 23 | 17 | 25 | 18 | 29 | 21 | |

| Mit Neigungen zwischen | 140° | 150° | 160° | 170° | 180° | Zus. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| die kurzperiodischen | — | — | — | — | | 30 |
| ferner die langperiodischen[2]) | 1 | — | 2 | — | | 9 |
| so bleibt f. d. Kom. m. parab. Bahnen | 23 | 15 | 7 | 6 | | 303 |

| oder zwischen | 0° | 30° | 60° | 90° | 120° | 150° | 180° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| parabolische Kometen | 27 | 51 | 64 | 60 | 73 | 28 | |
| oder in % | 9 | 17 | 21 | 20 | 24 | 9 | |

daher ziemlich gleich viel direkte und retrograde Kometen mit kleinen Neigungen, aber eine überwiegende Anzahl von Kometen mit Neigungen zwischen

---

1) Ein Komet mit unbestimmter Neigung.

2) Mit Umlaufszeiten unter 100 Jahren.

80° und 150°. Diese Erscheinung bietet aber durchaus nichts auffälliges. Nimmt man nämlich eine gleichmässige Vertheilung aller Kometenbahnen an, so wird sich dieses darin äussern, dass die Pole aller Kometenbahnen an der Himmelskugel gleichmässig vertheilt sind, worin dann sowohl die Vertheilung nach der Neigung als auch diejenige nach dem Knoten enthalten ist. In diesem Falle wird die Neigung gegen irgend eine beliebige feste Ebene gegeben durch den Abstand des Poles der Bahn von dem Pole der festen Ebene; die Zahl der in einer gewissen Calotte enthaltenen Bahnpole muss nun proportional der Oberfläche dieser Calotte sein, wobei es ganz gleichgültig ist, auf welche feste Ebene die Bahnen bezogen werden. Bahnen, deren Neigungen nun kleiner als $i$ sind, sind in einer Calotte enthalten, deren Mittelpunkt der Pol der festen Ebene ist, und deren Halbmesser $\sin i$ ist; die Oberfläche dieser Calotte ist proportional ihrer Höhe, also proportional $1 - \cos i$; ist daher $N$ die Anzahl aller Bahnen, so ist die Zahl $n$ derjenigen Bahnen, deren Neigung kleiner als $i$ ist, gegeben durch

$$n = N(1 - \cos i) = 2\,N \sin^2 \tfrac{1}{2} i.$$

Dabei ist ein Unterschied zwischen direkter und retrograder Bewegung nicht gemacht; es sind also z. B. die Neigungen zwischen 0° und 10° und diejenigen zwischen 170° und 180° zusammengezogen.

Rechnet man diesen Ausdruck für $N = 100$ (in %) so erhält man für die Zahl der Kometen deren Neigungen

| zwischen | 0° | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° | 90° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ist den theoretischem Werth | 1·5 | 4·5 | 7·3 | 10·0 | 12·3 | 14·3 | 15·8 | 16·9 | 17·4 | |
| während sich a. d. 303 beobacht. nicht period. Kometen ergiebt | 13 | 15 | 27 | 37 | 41 | 46 | 37 | 47 | 40 | |
| oder in % | 4·2 | 4·9 | 8·9 | 12·3 | 13·5 | 15·2 | 12·3 | 15·5 | 13·2 | |

Verhältnissmässig zeigt sich demnach noch ein geringes Ueberwiegen der kleinen Neigungen; dass die retrograden und direkten Bewegungen ziemlich gleich vertheilt sind, zeigt die vorhergehende Tabelle.

Es zeigt sich also hier eine auffallende Trennung der Kometen zwischen den periodischen und parabolischen, so dass die ersteren sich mehr den kleinen Planeten nähern, gegen welche die Unterschiede in den Neigungen nicht so bedeutend sind. Hingegen besteht ein sehr bedeutender Unterschied in den Excentricitäten. Die grösste bisher bei einem kleinen Planeten beobachtete Excentricität ist noch immer kleiner als die kleinste bei den periodischen Kometen beobachtete. Bezüglich der Anzahl hat man unter den 407 bis Ende 1895 entdeckten Planeten:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 97 | deren Excentricitätswinkel zwischen | 0° | und | 4° 59'·9 | |
| 175 | „ „ „ | 5 | „ | 9 59·9 | |
| 111 | „ „ „ | 10 | „ | 14 59·9 | |
| 21 | „ „ „ | 15 | „ | 19 59·9 | |
| 3 | „ „ über | 20 | ist. | | |

Die grössten Excentricitäten haben

Planet (332) : $\varphi = 22° \; 7'·9$ ($\mu = 605''$)
(183)* : 20 18·2 ($\mu = 761''$)
(164)* : 20 16·0 ($\mu = 881''$)
(33)* : 19 38·9 ($\mu = 781''$).

Planet (324) $\varphi = 19° \; 38'·1$ ($\mu = 806''$)
(132) 19 21·2 ($\mu = 904''$)
(393) 19 13·6. ($\mu = 768''$)

Von diesen sind jedoch nur die mit * bezeichneten genügend sichergestellt, da die Planeten (88) und (188) in mehr als 10, der Planet (164) in 6 Oppositionen beobachtet wurde, während die vier anderen nur in je einer Opposition beobachtet wurden; speciell der Planet (182) ist seit seiner Entdeckung nie wiedergesehen worden. Von den 80 periodischen Kometen sind:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 dessen Excentricitätswinkel kleiner als 25° ist (Komet 821) | | | | | |
| 8 deren | „ | zwischen | 25° | und | 29° 59′·9 sind (Komet 809, 816, 240) |
| 5 „ | „ | „ | 30 | „ | 34 59·9 |
| 5 „ | „ | „ | 35 | „ | 39 59·9 |
| 5 „ | „ | „ | 40 | „ | 44 59·9 |
| 5 „ | „ | „ | 45 | „ | 49 59·9 |
| 2 „ | „ | „ | 50 | „ | 54 59·9 |
| 4 „ | „ | „ | 55 | „ | 59 59·9 |

sind; dabei sind die ausserhalb der angegebenen Grenzen veränderlichen Excentricitäten mit ihrem kleineren Werthe berücksichtigt.

Hieran wird sich unmittelbar die Frage knüpfen, ob alle möglichen Excentricitäten gleich wahrscheinlich sind. Wird über die Entstehung der Himmelskörper keine besondere Annahme gemacht, so kann man offenbar annehmen, dass alle Excentricitäten zwischen 0 und $\infty$ gleich wahrscheinlich sind; allein eine solche Annahme würde den thatsächlichen Verhältnissen nicht entsprechen. Ebensowenig kann man annehmen, dass alle grossen Halbaxen gleich wahrscheinlich sind, denn die Elemente sind stets bedingt durch äussere Umstände, nämlich durch die Anfangsconstellationen der Himmelskörper (Integrationsconstanten). Aus der pag. 65 angeführten Formel für die Geschwindigkeit folgt, wenn man $r = \infty$ setzt:

$$\frac{1}{a} = -v^2$$

also, wie schon erwähnt, sämmtliche Bahnen hyperbolisch. Setzt man für die Hyperbel $-a$ an Stelle von $a$, so wird diese Formel:

$$a = \frac{1}{v^2}$$

oder da

$$a = \frac{q}{e-1}$$

ist, so folgt

$$e = 1 + qv^2.$$

Die Excentricität wird sich daher um so mehr von der Einheit entfernen, je grösser $q$ und je grösser $v$ ist. Gemäss der Formel, aus welcher dieses Resultat abgeleitet ist, müssen $q$ und $v$ in zusammengehörigen Einheiten, also z. B. $q$ in Einheiten der Erdbahnhalbaxe, $v$ in Einheiten der mittleren Geschwindigkeit der Erde um die Sonne ausgedrückt werden. Für $v$ hat man aber nicht die absolute, sondern die relative Geschwindigkeit des Kometen gegen die Sonne zu wählen, dabei also die Richtung der Bewegung der Sonne in Betracht zu ziehen. Aus dem Umstande nun, dass die meisten Kometen Parabeln beschreiben, wird man folgern können, dass $v$ in grossen Entfernungen nahe Null ist, d. h. dass die Kometen an der Bewegung des Sonnensystems theilnehmen, und nur jene, bei denen eine starke Abweichung von der Parabel bei kleinem Werthe von $q$ stattfindet, wird man als stellaren Ursprungs (dem Sonnensysteme vollständig fremde Körper) anzusehen haben. Dass die ersteren dem Sonnensysteme

angehören, und dabei dennoch sich nach ihrer einmaligen Annäherung fortwährend entfernen, enthält keinen Widerspruch; es liegt darin nur der Ausdruck der Thatsache, dass die meisten Kometen, die beobachtet werden, schon vor ihrer Erscheinung dem Sonnensysteme angehörten, und mit dem Sonnensysteme sich auch noch weiter bewegen werden. Dieses gilt auch für jene Kometen, welche streng parabolische Bahnen beschreiben, also thatsächlich nicht wieder beobachtet werden können.

Die periodischen Kometen nehmen nun aber nicht nur an der Bewegung des Sonnensystems theil, sondern müssen auch mit demselben in engerer Verbindung stehen; entweder sie sind durch die Anziehung der kleineren Körper des Sonnensystems, also der Planeten, wenn sie denselben hinreichend nahe gekommen sind, in ihre Bahnen gelenkt worden, oder aber sie mussten von vornherein mit den Planeten einen gemeinsamen Ursprung haben, was seinen Ausdruck in der berühmten KANT-LAPLACE'schen Hypothese über die Entstehung des Weltsystems[1]) findet. Dieses zeigt sich auch in zwei Thatsachen ganz augenfällig: dass sie sich rechtläufig bewegen, und dass ihre Bahnen gegen diejenigen der Planeten nur wenig geneigt sind.

Nach den Erfahrungen der letzten Jahre wird man vermuthen müssen, dass, sowie es in dem Gürtel zwischen Mars und Jupiter eine grosse Zahl von kleinen Planeten giebt, in demselben Gürtel auch eine grössere Zahl von Kometen sich bewegt, und dass vielleicht, ebenfalls gegen die Ekliptik nur wenig geneigt, noch eine grössere Anzahl von periodischen Kometen längerer Umlaufszeit mit grösseren Periheldistanzen existirt. Die Entdeckung von Kometen dieser letzteren Art kann natürlich nur mit lichtstarken Fernröhren stattfinden, die aber in ihrer jetzigen Construction zum Suchen von Kometen wenig geeignet sind, da sie nur ein geringes Gesichtsfeld zu überblicken gestatten. Mit den gegenwärtigen Hilfsmitteln bleibt also die Entdeckung derselben dem Zufall überlassen.

Die Frage, ob der Unterschied zwischen den kleinen Planeten und den periodischen Kometen ein in der Natur derselben gelegener ist, oder eine Folge ihrer Bewegung, hängt aufs innigste mit der Frage nach der Ursache der äusseren Beschaffenheit der Kometen zusammen.

Wenn die Kometen kurzer Umlaufszeit und die Planeten einen gemeinsamen Ursprung haben, so kann ihr äusserer Anblick nur eine Folge der Verschiedenheit ihrer Bahnen sein. In der That wird das Aussehen derselben wesentlich bedingt erscheinen durch die Wärmewirkung der Sonne. Bedenkt man, welche Verschiedenheit die Sonne in den verschiedenen Zonen unseres Erdballes erzeugt, wie hier tropische Hitzen und dadurch bedingte Verdampfungen mit eisigen Kälten und den begleitenden allseitigen Erstarrungen wechseln, und bedenkt man weiter, dass die Wärmewirkung der Sonne im verkehrten Quadrate der Entfernungen steht, so wird man, — abgesehen von den verschiedenen Wärmewirkungen auf die einzelnen Theile eines und desselben Körpers, welche theils durch die Rotation desselben, theils durch die Lage seiner Rotationsaxe bedingt sind, — auf die Abhängigkeit der Veränderungen jedes Weltkörpers von seiner Bahn geführt. Körper, die sich in nahe kreisförmigen Bahnen bewegen, werden nahe dieselbe Wärmemenge in allen Punkten ihrer Bahn erhalten; so wie aber die Excentricität grösser wird, wird die Wirkung im Perihel bedeutend stärker als im Aphel. Man hat für das Verhältniss $V$ der Wärmemenge $V = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2$, und es ist:

[1]) Vergl. den Artikel »Kosmogonie«.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| für $e = 0·1$ | $\varphi = 5°·7$ | $V = 1·494$ | $e = 0·9$ | $\varphi = 64°·2$ | $V = 361$ |
| 0·2 | 11·5 | 2·250 | 0·95 | 71·9 | 1521 |
| 0·3 | 17·5 | 3·449 | 0·96 | 73·7 | 2401 |
| 0·4 | 23·6 | 5·444 | 0·97 | 75·9 | 4812 |
| 0·5 | 30·0 | 9·000 | 0·98 | 78·9 | 9801 |
| 0·6 | 36·8 | 16·00 | 0·99 | 81·9 | 39600 |
| 0·7 | 44·0 | 32·11 | | | |
| 0·8 | 53·1 | 81·00 | | | |
| 0·85 | 58·2 | 152·1 | | | |

Während also die Wirkung der Wärme bei den Planeten, bei denen die Excentricitäten kleiner als 0·4 ist, im Perihel höchstens das vierfache von derjenigen im Aphel ist[1]), wird dieselbe bei den periodischen Kometen schon bedeutend grösser; wie die kleine Tafel zeigt, wächst das Verhältniss ziemlich rasch. So ist es erklärlich, dass von den auf den Kometen befindlichen Stoffen, wenn diese in die Sonnennähe kommen, unter den gegenüber der Sonnenferne vollständig veränderten Verhältnissen, ein Theil in Dampf verwandelt wird und sich als Dunsthülle (Coma) um den Kometen lagert. Bei der Entfernung des Kometen von der Sonne werden dann die Stoffe wieder condensirt, und so ist die Abnahme der Dunsthülle nicht ein bloss optisches, sondern ein physisches, von der Verkleinerung der Coma abhängiges Phänomen.

Allerdings können auch Planeten mit grossen Excentricitäten beobachtet werden, die sich von den Kometen mit kleinen Excentricitäten eben durch das Fehlen der Coma unterscheiden. Man muss also jedenfalls eine gewisse stoffliche Verschiedenheit annehmen, und wenn auch gemäss den spectroskopischen Untersuchungen die Grundstoffe, aus denen die Kometen bestehen, von denjenigen der Planeten nicht verschieden sind, so ist doch in der Zusammensetzung ein Unterschied: die Kometen zeigen das Kohlenwasserstoffspectrum (modificirt durch Kohlenoxyd). Da gewisse Kohlenwasserstoffe (Methylen) selbstleuchtend sind (phosphorescirend), so wird das durch Polarisationsversuche unzweifelhaft erwiesene Selbstleuchten der Kometen theilweise auch hierdurch erklärt. Dass aber die Kometen auch andere Grundstoffe enthalten, ist durch das Auftreten der Natriumlinie (zum ersten Male bei dem Kometen 1882 I am 27. und 28. Mai in Dunecht gesehen) und zahlreicher Eisenlinien nachgewiesen. Es ist aber bemerkenswerth, dass die Metalllinien bei der Annäherung an die Sonne aufleuchteten und bei der Entfernung der Kometen von der Sonne an Intensität abnahmen. Weiter muss hervorgehoben werden, dass die bedeutenden Lichtausbrüche in der Nähe des Perihels (plötzliche Lichtzunahme) ebenfalls durch ein in Folge starker Erwärmung auftretendes starkes Glühen (grosse Intensität des continuirlichen Spectrums) oder durch Ausbrüche von brennenden Gasen (grössere Intensität des Kohlenwasserstoffspectrums) erklärt werden können. Hierdurch erscheint die erhöhte Wärmewirkung der Sonne auch durch Beobachtungen constatirt.

Es ist hierbei bereits von den nicht periodischen Kometen die Rede. Dass sich in dieser Richtung die periodischen Kometen von den nicht periodischen nicht unterscheiden, ist wieder durch spectroskopische Beobachtungen erwiesen; aber bei den nicht periodischen Kometen ist, wie die obige Tafel für das Ver-

[1]) Hier mag bemerkt werden, dass die von manchen Geologen zur Erklärung der Eiszeit herangezogene Veränderlichkeit der Excentricität der Erdbahn keineswegs die erwähnte Folge haben kann, wie ja auch der Unterschied der Jahreszeiten nicht auf der Entfernung der Erde von der Sonne beruht (da die Erde im Winter in der Sonnennähe ist), sondern wegen der Kleinheit der Excentricität und ihrer Veränderung, auf der Stellung der Erdaxe.

hältniss der Wärmewirkung zeigt, die Wirkung der Sonne noch unvergleichlich viel stärker. Es kann daher nicht Wunder nehmen, wenn bei so kleinen Periheldistanzen, wie diese bei den Kometen vorkommen (vergl. pag. 78), theilweise Verdampfungen und Massenverluste in den Weltraum entstehen. In Hinsicht auf die Bewegung bleiben derartige Massenverluste nicht ohne Wirkung: ein Massenverlust ist stets von einer Verzögerung der mittleren Bewegung begleitet. Bei den Kometen mit parabolischen Bahnen kann diese Erscheinung nicht wesentlich hervortreten; hingegen kann diese Störung bei den periodischen Kometen mit grosser Sonnennähe merklich werden. In dieser Richtung mag hervorgehoben werden, dass unter allen bisher bekannten periodischen Kometen, wenn man von dem nicht wiedergefundenen Kometen (79) absieht, der ENCKE'sche die grösste Excentricität und (selbst einschliesslich des Kometen 79) die kleinste Periheldistanz hat[1]).

Es ist aber eine bekannte Thatsache, dass bei manchen Kometen eine plötzliche Verkleinerung der Dunsthülle unmittelbar vor der Annäherung an das Perihel, und nach dem Durchgange durch das Perihel wieder eine langsame Vergrösserung der Coma stattfindet. Diese Erscheinung haben z. B. HEVEL bei dem Kometen von 1618, WINNECKE bei dem DONATI'schen Kometen 1858 VI, SCHMIDT bei dem ENCKE'schen Kometen beobachtet. Diese Erscheinung lässt sich eben wegen der nachherigen Vergrösserung der Coma durch einen Massenverlust nicht erklären. Ebenso lassen sich die längere Zeit nach dem Periheldurchgange erfolgten Lichtausbrüche nicht wohl auf die Wirkung der Sonne zurückführen. Eine Erscheinung dieser Art ist der zwei Monate nach dem Periheldurchgange erfolgte Lichtausbruch bei dem Kometen 1884 I. Auffällig in dieser Richtung ist auch der Komet (821), der erst 4 Monate nach dem Periheldurchgange als ziemlich helles Object entdeckt wurde, und 6 Monate nach seinem Periheldurchgange, nachdem er bereits ein sehr schwaches und schwierig zu beobachtendes Object geworden war, neuerdings eine sehr starke Helligkeitszunahme in einer schon sehr grossen Entfernung von der Sonne erfuhr.

Ein noch viel schwierigeres Problem bietet die Erklärung der Kometenschweife. Dass man, um zu einer befriedigenden Erklärung zu kommen, nebst der allgemeinen Gravitation noch andere Kräfte annehmen muss, war schon am Ende des vorigen Jahrhunderts erkannt; es war selbstverständlich, eine Repulsivkraft anzunehmen, weil die Kometenschweife von der Sonne weggerichtet sind. Da eine solche abstossende Kraft mit den aus ihr folgenden, für irdische Verhältnisse grossartigen Naturerscheinungen in der Elektricität bekannt war, so war es naheliegend, diese abstossende Kraft mit der Elektricität zu vergleichen. SCHRÖTER nimmt eine »unserer elektrischen ähnliche, ab- und fortstossende Naturkraft« an; OLBERS identificirt diese Repulsivkraft mit der Elektricität; er sagt: »Enthalten kann man sich indessen schwerlich, dabei an etwas, unseren elektrischen Anziehungen und Abstossungen Analoges zu denken. Warum sollte auch diese mächtige Naturkraft, von der wir in unserer feuchten, stets leitenden Atmosphäre schon so bedeutende Wirkungen sahen, nicht im grossen Weltall nach einem, weit über unsere kleinlichen Begriffe gehenden Maassstabe wirksam sein?«

---

[1]) Eine Erscheinung, auf welche schon PEIRCE und MITCHELL hingewiesen haben (s. American Journal of Sciences and Arts, 2. Serie, Bd. 33, pag. 99). Doch lässt sich die Beschleunigung der mittleren Bewegung des ENCKE'schen Kometen keinesfalls durch einen Massenverlust erklären; hingegen würde ein Massenverlust die Erscheinung erklären, dass zwischen 1865 und 1871 eine Beschleunigung der Umlaufszeit, wie dieselbe vor 1865 und nach 1871 sich ergab, nicht stattfand.

Bessel unterwarf die Erscheinungen der Rechnung, indem er die Grösse der Kraft (das Verhaltniss derselben zur Sonnenattraction) zu bestimmen suchte, welche nothig ist, um die Schweifform, d. i. die Krümmung der Schweife zu erklären. Ist — μ das Verhältniss derselben zur Sonnenattraction, negativ, da sie im entgegengesetzten Sinne wirkt, so ist die Summe der Massenanziehung der Sonne und der Abstossung durch die Polarkraft 1—μ. Bredichin hat die Bessel'sche Theorie auf die Berechnung der Schweife einer grossen Zahl von Kometen angewendet; er findet drei Grundtypen: für den ersten Typus 1 — μ = 11·0; für den zweiten Typus 1 — μ = 1·4; für den dritten Typus: 1 — μ = 0·3. Bei den Kometen mit mehreren Schweifen (anomale Schweife) gehört dann jeder der Schweife einem anderen Typus an. In den »Astronomischen Nachrichten«[1]) versucht er, um die Beobachtungen mit den Rechnungen zu vergleichen, Ephemeriden für die Kometenschweife zu rechnen, und Marcuse geht sogar so weit, den Typus der Kometenschweife als charakteristisches Element für einen Kometen anzusehen: »dann würden dieselben eine wichtige Rolle bei der Identificirung von Kometen spielen[2])«.

Das Leuchten des Schweifes entsteht dann dadurch, dass zwischen den elektrisch polarisirten, von dem Kometen ausgestossenen Theilchen elektrische Entladungen, Ausgleichungen, stattfinden.

Bredichin nimmt an, dass die Verschiedenheit der Kraft auf die einzelnen Schweiftheile dadurch erklärt wird, dass sie aus anderen chemischen Elementen bestehen. Unter der Annahme, dass die Grösse der Abstossung von dem Molekulargewichte abhängt, so dass auf die leichtesten Moleküle die stärkste Abstossung ausgeübt wird, erhält Bredichin die folgende Scala, in welcher die auf Wasserstoff ausgeübte abstossende Kraft gleich 12 gesetzt ist:

| | | | |
|---|---|---|---|
| H | 12 | Na, Mg | 0·5 |
| Li | 1·7 | P, S | 0·4 |
| C | 1·0 | Cl | 0·3 |
| N | 0·9 | K, Ca | 0·3 |
| O | 0·8 | Fe, Co, Ni, Cu | 0·2 |

für alle Elemente, deren Gewichte zwischen 100 und 200 sind, 0·1. Hiernach würde auch die Erscheinung erklärt sein, dass der Typus I sich ziemlich scharf von den beiden Typen II und III, welche in einander übergehende Zahlen liefern, scheidet.

Hiergegen ist einzuwenden, dass Kräfte, welche nach Art der allgemeinen Gravitation wirken, von der Masse unabhängig sind, da eine der Masse proportionale Kraft eine der bewegten Masse umgekehrt proportionirte Beschleunigung ertheilt, und dass Kräfte, welche der elektrischen Anziehung und Abstossung analog wirken, ebenfalls nicht von der ponderabeln Masse, sondern von anderen Umständen, bei der Elektricität selbst von der Dielektricitätsconstanten, die mit der Masse in keinem einfachen Connexe steht, abhängen. Von diesem Einwurfe frei ist die Annahme von Marcuse, dass man es mit magnetischen Kräften zu thun hat, und dass die normalen Schweife aus paramagnetischen, die anomalen aus diamagnetischen Stoffen erzeugt werden. In beiden Fällen aber bleibt eine Variation der Intensität dieser Kraft mit der Zeit, wie dieselbe von Bredichin durch seine Rechnungen in einzelnen Fällen nachgewiesen wurde, unerklärlich.

---

1) Bd. 107, No. 2563.

2) Ueber die physische Beschaffenheit der Kometen, pag. 51.

Weiter aber ist zu bemerken, dass die Uebereinstimmung in den Rechnungen von BREDICHIN nur eine scheinbare ist, und dass die verschiedenen Schweiftypen sich weder scharf trennen[1]), noch auch charakteristisch sind, indem sich, wie dieses bei der Unsicherheit der Schweiftypen nicht anders möglich ist, bei verschiedenen Erscheinungen desselben Kometen der Schweiftypus ändern kann.

Es lassen sich aber gegen die Annahme von materiellen Schweifen, welche durch elektrische Entladungen sichtbar werden, noch manche andere, nicht minder wichtige Bedenken erheben: Entsteht der Schweif durch unausgesetzte Ausstossung von Materie aus dem Kometenkörper, so muss sich dieser, wenn auch die Dichte des Schweifes äusserst gering wäre, dennoch erschöpfen. Zweitens haben die Theilchen des Kometenschweifes, da sie in sehr verschiedenen Entfernungen von der Sonne sind, aber gegen den Radiusvector immer nahe dieselbe Neigung behalten (entweder in der Richtung des Radiusvectors von der Sonne weg oder gegen die Sonne zu, oder gegen den Hauptschweif unter einem bestimmten Winkel geneigt), die verschiedensten Geschwindigkeiten in der Bahn, welche bei den normalen, von der Sonne weggerichteten Schweifen der sehr sonnennahen Kometen mit grossen Schweifen zu ganz ausserordentlichen Unterschieden führen. Der grosse Septemberkomet 1882 II hatte die wahre Anomalie —120° bis 120°, also einen Bogen von 240° in 9 Stunden 20 Minuten zurückgelegt; dem entspricht eine mittlere Geschwindigkeit von 143 *km* in der Secunde, und eine wahre Perihelgeschwindigkeit von ca. 288 *km* in der Secunde. Bei einer Schweiflänge von nur 1° 25′ musste der äusserste Schweifpunkt eine lineare Geschwindigkeit von 1000 *km*, und bei einer Schweiflänge von 20° eine lineare Geschwindigkeit von nahe 15000 *km* in der Secunde gehabt haben. Aber die Geschwindigkeit von ausströmenden Theilchen verändert sich ja nicht bei ihrer Entfernung vom Ausgangspunkte; ein von einem bewegten Körper ausgehendes Projectil behält die Geschwindigkeit dieses bewegten Körpers nebst seiner eigenen, und so müssten die Schweiftheilchen, welche an der Bewegung des Kometen mit der diesem eigenen Bewegung theilnehmen, eine starke Krümmung nach rückwärts zeigen, welche, wenn die Ausströmungsgeschwindigkeit wesentlich kleiner ist als die Geschwindigkeit des Kometen, dem Schweife eine mehr tangentiale Richtung geben würden[2]). Ein solcher Fall ist thatsächlich bei dem Kometen 1894 I (vergl. pag. 57) beobachtet worden. Endlich, wenn man auch annehmen wollte, dass die Geschwindigkeit der Ausströmung bei einem constanten, sich stetig erneuernden Schweife mit 1 *km* pro Secunde, wie sie BESSEL für den HALLEY'schen Kometen erhält, oder selbst mit 90 *km* pro Secunde, wie sie sich aus den allerdings nicht ganz einwurfsfreien Rechnungen von OLBERS für den Kometen 1811 I fand, als zulässig erklärt wurde, so bleibt das so oft beobachtete Fluctuiren des Schweifes, das Schiessen und Spielen, wobei der Schweif sich während eines kleinen Bruchtheiles einer Secunde, anscheinend plötzlich um mehrere Tausende Kilometer verkürzt und verlängert, ganz unaufgeklärt.

---

[1]) Beispielsweise erhält BREDICHIN für den Kometen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1858 VI: | $1-\mu=6$ | 1811 I; | $1-\mu=10·4$ |
| 1472 | 6·2 | 1835 (HALLEY) | 10·9 |
| 1807 | 9·3 | 1862 II | 11 |
| 1877 II | 9·3 | 1682 (HALLEY) | 12 |

[2]) Nimmt man ein widerstehendes Mittel an, so wird an diesem Schlusse nichts geändert; im Gegentheile wirkt das widerstehende Mittel nur in demselben Sinne, den Kometenschweif noch stärker zurückkrümmend.

Viel wahrscheinlicher erscheint es, den Kometenschweif als eine optische Begleiterscheinung stark elektrisch polarisirter Kometen anzusehen. Gerade so nämlich, wie die Sonne Licht- und Wärmewirkungen ausübt, muss sie auch als eine Quelle von Elektricität angesehen werden, welche in den sie umgebenden oder umkreisenden kleineren Körpern Elektricität durch elektrostatische Induction (Influenz) erregt. Die Menge der inducirten Elektricität ist abhängig von der Natur des Körpers selbst (seiner Dielektricitätsconstante) und von der Entfernung. Bei denjenigen Körpern, deren Bahnen stark excentrisch sind, wird, gerade so wie bei der Wärmewirkung eine grosse Verschiedenheit in dem elektrischen Zustande, eine bedeutende Erhöhung der elektrischen Ladung und elektrischen Spannung in der Sonnennähe auftreten, wodurch sich elektrische Ausgleichungen mit anderen in der Nähe befindlichen Körpern (Entladungen) namentlich Ausgleichungen in einem etwa vorhandenen wenig dichten Medium (ähnlich wie bei den Geissler'schen Röhren) auftreten werden. Diese elektrischen Ausgleichungen werden nun wohl auch mit einer Ueberführung von Massen verbunden sein, welche aber in einem Massenaustausch zwischen den nächstgelegenen Massen, ohne nennenswerthen Massenverlust bestehen. Da die Entladung in der Richtung der Kraftlinien (senkrecht zu den Niveauflächen) stattfindet, so ist die Richtung der Entladung in der Richtung des Radiusvectors (von der Sonne weg), während sich bei in der Nähe befindlichen sehr stark polarisirten anderen Körpern in anderen Richtungen auch in diesen Ausgleichungen, also anomale Kometenschweife ergeben werden. Eine besondere Stütze erfährt diese Annahme noch dadurch, dass jetzt, seit Anwendung der Photographie die Erscheinungen der anomalen Kometenschweife viel öfter beobachtet werden; dass übrigens auf den Platten viel mehr Details auftreten, als man mit freiem Auge wahrzunehmen in der Lage ist, deutet darauf hin, dass das Licht der Schweife stärker aktinisch ist, also auf der brechbareren Seite des Spectrums liegt.

Auch das Fluctuiren, Schiessen, Spielen der Schweife erklärt sich durch diese Annahme ganz ungezwungen. Beobachtungen, durch welche diese Theorie eine specielle Stütze erhält sind noch: das Zurücktreten des Kohlenwasserstoffspectrums bei dem Auftreten von Metalllinien, eine Erscheinung, welche nach Hasselberg speciell den elektrischen Entladungen eigen ist, und die Beobachtung von Herschel, dass die Farbe des Kometen 1811 I in allen Teleskopen grünlich oder bläulichgrün war, während die Farbe der Lichthülle eine sehr bestimmt gelbliche, in auffallendem Contraste mit der grünlichen Farbe des Kopfes stehende war, was auf eine disruptive Entladung an einer negativen Elektrode schliessen lässt.

Schon Schröter nimmt an »dass schlechterdings die Regionen des Himmels den ätherischen Lichtstoff selbst enthalten müssen, welcher von der fortstossenden oder fortwirkenden Kraft der Sonne und des Kometen zum Lichte des Schweifes erweckt wird.« Ziemlich präcis ist die Elektricität als Ursache der Kometenschweife 1862 von V. March in folgenden Worten ausgesprochen[1]: ». . . *I ventured the suggestion, that the tail of a Comet is probably of the same nature, it being simply an electric current, rendered visible by its own illumination of a stream of particles which it is continually transporting with nearly the velocity of electricity itself from the atmosphere of the Comet.*« Allein hier wird noch

[1]) »The distinguishing Features of Comets considered as Phases of an Electrical discharge resulting from Excentricity of Orbit«. American Journal of Sciences and Arts, II Serie, Bd. 33, pag. 89.

die unwahrscheinliche Annahme gemacht, dass der elektrische Strom die Ursache ist, dass die materiellen Partikelchen von den Kometen mit nahe der Geschwindigkeit der Elektricität von dem Kometenkörper fortgerissen werden.

Was nun zweitens die Wirkung der Planeten auf die Kometen betrifft, so ist sie im allgemeinen bedeutend schwächer, als diejenige der Sonne, wird aber dennoch nicht zu vernachlässigen, wenn der Komet den Planeten sehr nahe kommt; im letzteren Falle kann der Einfluss zweierlei Art sein: er äussert sich in einer Umgestaltung der Bahn, und ferner, wenn die Wirkung auf verschiedene Theile des Kometen merklich verschieden ist, in einer Theilung des Kometen in mehrere Theile, welche im Laufe der Zeiten auch ganz verschiedene Bahnen beschreiben können.

Die erstere Wirkung wurde zuerst beim Kometen (81) constatirt und in Rechnung gezogen, nichts desto weniger aber anfangs von mancher Seite stark angezweifelt; während aber dieser Komet die Astronomen immer wieder beschäftigte, wurde der Frage selbst weiter keine Aufmerksamkeit zugewendet. Mit den beiden Kometen (65) und (79) beschäftigte man sich damals noch gar nicht, vielleicht weil die Beobachtungen derselben eine genaue Bahnbestimmung nicht vorzunehmen gestatteten, ein Umstand, der bei denselben noch jetzt eine nicht unerhebliche Rolle spielt. Aehnliche Umstände waren zufälligerweise bei den folgenden periodischen Kometen vorhanden, wie aus den Bemerkungen über den Biela'schen und Encke'schen Kometen, pag. 73, ersichtlich ist. Die Excentricität des Kometen (102) war zu gross, als dass man die Abweichung von der parabolischen Bahn sofort der richtigen Ursache zugeschrieben hätte, und so kam es, dass man erst nach der Erscheinung der beiden Kometen (131) und (132), deren Bahnen als elliptisch erkannt worden waren, auf die Frage nach den Ursachen geführt wurde, warum diese Kometen denn nicht schon früher gesehen worden waren, und ob nicht frühere Erscheinungen mit denselben identisch wären oder Störungen durch die Planeten, namentlich durch Jupiter stattgefunden haben konnten. Clausen versuchte es, die beiden Kometen (65) und (132) zu identificiren[1]. Für den ersteren Kometen leitete er die in der Tabelle, pag. 70, gegebenen Elemente ab; für den Kometen (132) interpolirte er zwischen zwei von Encke gegebenen Elementensystemen das Folgende:

$$
\begin{array}{llll}
T = 1819 \text{ Nov. } 20{\cdot}8 & & & \\
\pi = 67^\circ\ 39'{\cdot}4 & & \log q = 9{\cdot}9501 & \\
\Omega = 77\ \ 32{\cdot}8 & & \varphi = 45^\circ\ 31'{\cdot}1 & \\
i = 9\ \ 10{\cdot}9 & & &
\end{array}
$$

Er schloss nun folgendermaassen: Wenn die beiden Kometen identisch sein sollen und die Bahn des ersteren durch die Einwirkung des Jupiter in die Bahn des letzteren verändert worden sein soll, so müssen sich die Bahnen nothwendig in einem Punkte schneiden, welchen einmal gleichzeitig die beiden Kometen und Jupiter eingenommen haben. Clausen fand nun für den Schnittpunkt der beiden Bahnen

$$\lambda = 254^\circ\ 55'{\cdot}8; \qquad \beta = 0^\circ\ 25'{\cdot}8$$

in der wahren Anomalie des Kometen (65): $-199^\circ\ 30'{\cdot}8$ und des Kometen (132): $-172^\circ{\cdot}48'{\cdot}1$ mit sehr nahe den Radien-Vectoren gleich der Entfernung des Jupiter von der Sonne. Jupiter hatte diesen Ort eingenommen $1805 + n \times 11{\cdot}862$.

[1] Astron. Nachr. Bd. 10, pag. 345.

Um jedoch von der Unsicherheit der Bahnen frei zu sein, rechnete CLAUSEN für beide Kometen mit $r$ gleich der Entfernung des Jupiter von der Sonne und den vorhin angegebenen wahren Anomalien nebst den aus den beobachteten Erscheinungen von 1743 bezw. 1819 gefolgerten Periheldistanzen die grossen Halbaxen und fand:

$log\, a = 0·55187$ für den Kometen (65) und 0·49877 für den Kometen (182)

oder die Umlaufszeiten bezw.: 6·78 und 5·60 Jahre, woraus folgte, dass im Jahre 1759 oder 1760 beide Kometen in demselben Punkte in der Nähe des Jupiter gestanden waren, d. h. dass der Komet (65) nachdem er seit 1743 zwei und einen halben Umlauf vollführt hatte, in die Jupitersnähe gekommen war, und dadurch in die Bahn des Kometen (182) gedrängt worden war, in welcher dieser nach etwa zehn und einen halben Umläufen gefunden wurde. Die auf Grund seiner Untersuchungen vorgenommene Vorausberechnung erwies sich jedoch als trügerisch, wie erwähnt wurden die beiden Kometen nicht wiedergesehen.

Da alle kurzperiodischen Kometen sowohl wegen ihrer geringen Neigung als auch wegen der eigenthümlichen Verhältnisse ihre grossen Axen und Excentricitäten in ihren Aphelien sehr nahe der Jupitersbahn kommen, so sind Störungen derselben durch Jupiter nicht ausgeschlossen; da aber die Störung nicht durch die Jupitersbahn, sondern durch den Jupiter ausgeht, so bleibt bei der Beurtheilung, ob eine solche Störung vor nicht gar langer Zeit stattgefunden hat, oder stattfinden wird, der Umstand maassgebend, ob bei einem der letzten Durchgänge des Kometen durch das Aphel der Planet in der Nähe gestanden ist. Hierfür wird man sehr rasch durch eine rohe Näherung einen Ueberblick erhalten. Ist $T$ die Zeit des Periheldurchganges und $\tau$ die Umlaufszeit in Jahren, so sind $T + (n + \frac{1}{2})\,\tau$ die Zeiten der Apheldurchgänge, wobei $n$ jede beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Sucht man für diese Zeiten die heliocentrischen Längen $L$ des Jupiter, und ist diese für einen der Apheldurchgänge genähert gleich $180° + \pi$ (Länge des Aphels), so wird eine Jupitersnähe wahrscheinlich, und eine besondere Untersuchung erforderlich.

Für den Kometen (286) zeigte sich eine grosse Jupitersnähe im Jahre 1875. LEHMANN-FILHÉS nahm die Berechnung der ehemaligen Bahn auf[1]). Er fand für den Kometen mit Rücksicht auf die Störungen die heliocentrischen Elemente:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1875 August 18·0: $M = 280° 17' 34''$ | | | $\varphi = 34° 32' 28''$ |
| $\pi = 18\ 18\ 57$ | Mittl. Aequ. 1880·0 | | $log\, a = 0·55600$ |
| $\Omega = 207\ 40\ 51$ | Mittl. Aequ. 1880·0 | | $\mu = 520''·011$ |
| $i = 27\ 27\ 26$ | Mittl. Aequ. 1880·0 | | $U = 6·82$ Jahre. |

Der Uebergang auf jovicentrische Elemente bezogen auf die Ekliptik[2]) ergab

Perijovium 1875 Juni 8·90 Mittl. Berl. Zeit

| | | |
|---|---|---|
| $\omega = 48° 58' 18''$ | Mittl. Aequ. 1880·0 | $q = -0·02067$ |
| $= 289\ 35\ 14$ | Mittl. Aequ. 1880·0 | Distanz im Perijovium $\rho = 0·12129$ |
| $i = 66\ 7\ 50$ | Mittl. Aequ. 1880·0 | Asymptotenwinkel 16° 45' |

Damit wurden Sonnenstörungen berechnet zwischen 1875 September 12. und Februar 24, und für 1875 April 5, neuerdings auf heliocentrische Elemente übergegangen; es ergab sich

---

[1]) Astron. Nachr. Bd. 124, pag. 1.

[2]) Vergl. den Art. »Mechanik des Himmels«, § 68.

1875 April 5·0: $M = 226° 32'·6$ | $\varphi = 28° 1'·2$

$\pi = 5 \;\; 39·2$
$\Omega = 208 \;\; 26·8$ } Mittl. Aequ. 1880·0
$i = 29 \;\; 26·6$

$\log a = 0·62084$
$\mu = 415''·668$
$U = 8·54$ Jahre.

Noch bedeutend grösseren Störungen war der Komet (809) ausgesetzt, dessen grösste Jupiternähe $\rho = 0·0095$ war. Die Rechnungen hierüber hatte CHANDLER ausgeführt[1]), wobei er während der Zeit der Jupiternähe die Sonnenstörungen, d. h. die Anziehung der Sonne vernachlässigte; er erhielt die folgenden Elemente[2]):

| | Angenommene heliocentrische Elemente a. d. Beobachtungen nach der Jupiternähe | Jovicentrische Elemente | Heliocentrische Elemente vor der grossen Störung |
|---|---|---|---|
| $T =$ | 1889 Sept. 30·012 | 1886 Mai 20·747 | 1886 Nov. 28·779 Mittl. Zeit Greenwich |
| $\pi =$ | 1° 26′ 17″ | 291° 52′·6 | 208° 3′·7 |
| $\Omega =$ | 17 58 45 | 242 20·6 | 179 13·4 |
| $i =$ | 6 4 10 | 87 55·5 | 7 48·8 |
| $a =$ | 3·68468 | −0·16929 | 8·9896 |
| $e =$ | 0·47070 | 1·0580 | 0·3947 |
| $q =$ | 1·95028 | 0·00981 | 5·4411 |
| $U =$ | 7·0780 Jahre | — | 26·95 Jahre |

Es war daher die Periheldistanz vor der grossen Störung fast genau gleich der Apheldistanz nach derselben während die Richtung der Apsidenlinie nur um 22° gedreht wurde, d. h. durch die Anziehung des Jupiter wurde die Bahn des Kometen so stark verändert, dass der Ort des früheren Perihels zum Aphel wurde.

Auch die Knoten wurden vertauscht, d. h. der Komet, der bei seiner Jupiternähe nahe seinem niedersteigenden Knoten war, wurde so weit abgelenkt, dass er an dieser Stelle seinen aufsteigenden Knoten erhielt, während die Drehung der Knotenlinie nur etwa 19° betrug.

Die Umlaufszeit war vor der grossen Störung nahe viermal so gross als nach derselben; mit dieser waren aber vier Umläufe des Kometen 107·8 Jahre, während neun Umläufe des Jupiter 106·6 Jahre sind; 107 Jahre früher musste also wieder eine Jupiternähe stattgefunden haben, diese fiel aber in das Jahr 1779, das Jahr der grossen Störung des LEXELL'schen Kometen. Allerdings bestehen wohl zwischen den Elementen des Kometen (809) vor seiner Störung 1886 und den Elementen des Kometen (81) nach seiner Störung 1779 noch sehr grosse Abweichungen, allein bei der grossen Unsicherheit der letzteren Elemente giebt dieses noch keinen ausreichenden Grund gegen die Annahme, und CHANDLER hielt die Vermutung der Identität beider Kometen für hinreichend gesichert.

Diese Resultate wurden durch die Untersuchungen von C. LANE POOR[3]) etwas modificirt. POOR berücksichtigte während der Jupiternähe bei der jovicentrischen Bewegung des Kometen auch die durch die Sonne bewirkten Störungen, und rechnete nach dem Uebergange von den jovicentrischen Elementen zu den heliocentrischen Elementen noch mit diesen für einige Zeit die durch Jupiter bewirkten Störungen, wobei die heliocentrischen Elemente nicht unerheblich verändert werden; das hauptsächlichste Resultat ist, dass die Umlaufszeit sich vor der Störung zu 28·19 Jahren ergiebt; dann sind vier Umläufe nahe 113 Jahre, und damit fällt die grosse Jupiternähe von 1779 also auch die

[1]) Astronomical Journal Bd. 9, pag. 100.

[2]) $T$ bedeutet für die heliocentrischen Elemente die Zeit des Perihels, für die jovicentrischen Elemente die Zeit des Perijoviums, ähnlich für die anderen Elemente.

[3]) Astronomical Journal Bd. 10, pag. 91.

Wahrscheinlichkeit der Identität mit dem LEXELL'schen Kometen weg. Da aber möglicherweise eine, wenn auch nur ganz geringfügige Aenderung in den Ausgangselementen die kleinste Entfernung vom Jupiter und damit auch die Wirkung dieses Planeten wesentlich ändern kann, so ist das Resultat noch nicht vollkommen sichergestellt.

Bemerkenswerth ist übrigens, dass in der jetzigen Bahn des Kometen fünf Umläufe desselben gleich 35·4 Jahre sind, also nahe drei Umläufen des Jupiter; es muss also im Jahre 1921 eine neuerliche Annäherung des Kometen an Jupiter stattfinden. CHANDLER[1]) hat die Rechnung für dieselbe durchgeführt und findet die jovicentrische Hyperbel:

$$T = 1922 \text{ Juni } 12{\cdot}46$$

$$\left.\begin{aligned} \pi &= 339^\circ\ 2'{\cdot}9 \\ \Omega &= 93^\circ\ 31{\cdot}5 \\ i &= 26\ \ 55{\cdot}2 \end{aligned}\right\} \text{Mittl. Aequ. } 1920{\cdot}0 \qquad \begin{aligned} p &= 1{\cdot}5555 \\ \rho &= 0{\cdot}2854 \end{aligned}$$

also eine nicht allzugrosse Annäherung, so dass die Aenderungen in der Bahn, wie man durch eine Vergleichung mit den oben angesetzten Aenderungen des Kometen (236) leicht überblickt, nur sehr mässig sein werden.

Inzwischen hatte TISSERAND[2]) eine Beziehung gefunden, welche zwischen den Elementen der Bahn vor der Störung und nach derselben bestehen muss. Bezeichnet man mit $M$, $m$, $m_1$, bezw. die Massen der Sonne, des Kometen und des störenden Planeten, mit $a_1$, $r_1$ die grosse Halbaxe und den für die Zeit der Störung gültigen Radiusvector des störenden Planeten, und bezeichnet man die wegen der Kleinheit von $m$ (man kann $m = 0$ setzen) nur von dem störenden Planeten abhängige Grösse

$$\sqrt{\frac{M+m_1}{M+m}}\;\frac{\sqrt{a_1}}{r_1^2} = \mu_0,$$

so besteht zwischen der grossen Halbaxe $a$, dem Parameter $p$ und der Neigung $i$ der Bahn vor der Störung, und diesen Grössen ($a'$, $p'$, $i'$) nach der Störung die Beziehung[3])

$$\frac{1}{a} + 2\mu_0\sqrt{p}\cos i = \frac{1}{a'} + 2\mu_0\sqrt{p'}\cos i' = K,$$

wobei also $K$ die Stelle einer Charakteristik der Bahn und des störenden Himmelskörpers bezeichnet, welche CALLANDREAU[4]) die Invariante für den Kometen (mit Bezug auf einen gewissen störenden Planeten) nennt.

Es handelt sich zunächst darum, für verschiedene Kometen zu bestimmen, ob dieselben den Planeten nahe kommen; als Wirkungssphäre bezeichnet man seit LAPLACE die Entfernung in welcher, wenn Sonne, störender und gestörter Himmelskörper sich in gerader Linie befinden würden, die Wirkung der Sonne und diejenige des störenden Körpers einander gleich wären. Diese ist gegeben durch

$$\rho = r_1\sqrt[5]{\frac{1}{2}\left(\frac{m}{M}\right)^2}$$

und wird für

| | ☿ | ♀ | ♁ | ♂ | ♃ | ♄ | ♅ | ♆ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rho =$ | 0·001 | 0·003 | 0·005 | 0·003 | 0·280 | 0·316 | 0·296 | 0·501 |

SCHULHOF hat die kleinste Entfernung der Bahnen, für 56 Kometen, für welche elliptische Bahnen berechnet worden sind, bestimmt[5]). Aus diesem Ver-

---

1) Astronomical Journal Bd. 10, pag. 124.
2) Bulletin Astronomique Bd. 6, pag. 291.
3) Vergl. d. Art. »Mechanik des Himmels« § 68.
4) Compt. rend. Bd. 112, pag. 1304.
5) Bulletin Astronomique Bd. 8, pag. 291.

zeichnisse sollen im Folgenden die wichtigsten angegeben werden. Als Grenze wurde dabei angesehen

für die vier äusseren Planeten 0·8
für die Erde 0·8
für Mercur, Venus und Mars 0·06

| No. der Kometen | Name der Kometen | U Jahre | ♁ | ♃ | ♄ | Andere störende Körper |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 19 | Halley | 76 | 0·05 | 0·8 | — | ♂ 0·05 |
| 46 | 1680 Kirch | 8810 | 0·005 | 0·4 | — | |
| 76 | 1763 Messier | 7884 | 0·025 | — | — | |
| 80 | 1769 Messier | 2090 | — | 0·8 | — | |
| 84 | Biela | 6·6 | 0·011 | — | — | |
| 96 | Encke | 8·8 | — | — | — | ☿ 0·017 |
| 102 | Méchain-Tuttle | 14 | — | 0·8 | — | |
| 107 | 1793 II Perny | 422 | — | 0·6 | — | |
| 128 | 1811 II Pons | 875 | — | — | 0·15 | |
| 124 | Pons-Brooks | 72 | — | — | — | ♀ 0·076 |
| 127 | Olbers | 74 | — | 0·8 | — | |
| 136 | 1822 IV Pons | 5450 | 0·18 | — | — | |
| 149 | 1827 III Pons | 2611 | — | — | — | ☿ 0·086 |
| 169 | 1845 III Colla | 250 | 0·05 | — | — | ♀ 0·081 |
| 172 | 1846 IV de Vico | 76 | — | — | — | ♀ 0·06; ♅ 0·7 |
| 174 | 1846 VI Peters | 13 | — | — | 0·6 | |
| 175 | 1846 VII Brorsen | 500 | 0·057 | — | — | ♂ 0·045 |
| 181 | 1847 V Brorsen | 81 | — | 0·5 | — | |
| 186 | 1849 III Schweizer | 8875 | — | 0·6 | — | |
| 193 | 1852 IV Westphal | 61 | — | 0·4 | — | |
| 195 | 1853 II Schweizer | 782 | 0·078 | — | — | |
| 201 | 1854 IV Klinkerfues | 1309 | 0·016 | 0·18 | — | |
| 202 | 1854 V Winnecke | 994 | — | 0·8 | — | |
| 203 | 1855 I Schweizer | 1069 | — | — | — | ♅ 0·24 |
| 207 | 1857 III Klinkerfues | 7040 | — | — | — | ☿ 0·008 |
| 208 | 1857 IV Peters | 235 | — | — | — | ♀ 0·028 |
| 209 | 1857 V Klinkerfues | 2465 | — | — | — | ♀ 0·025 |
| 213 | 1858 VI Donati | 1880 | — | — | — | ☿ 0·01 |
| 214 | 1858 VII Tuttle | 6000 | — | — | — | ♅ 0·56; ♆ 0·46 |
| 220 | 1861 I Thatcher | 415 | 0·002 | — | 0·8 | |
| 221 | 1861 II Tebbutt | 409 | — | — | 0·6 | |
| 224 | 1862 III Tuttle | 120 | 0·005 | — | 0·75 | |
| 238 | 1866 I Tempel | 33 | 0·007 | — | 0·45 | ♅ 0·4 |
| 239 | 1867 I Coggia | 34 | — | — | — | ♂ 0·021; ♅ 0·05 |
| 248 | 1871 I Winnecke | 5900 | — | 0·1 | — | ♀ 0·04 |
| 250 | 1871 IV Tempel | 2690 | 0·063 | — | — | |
| 258 | 1874 IV Coggia | 306 | — | — | — | ♅ 0·04 |
| 275 | 1881 III Tebbutt | 2954 | — | — | — | ♀ 0·008 |
| 279 | 1881 VIII Swift | 2740 | — | 0·46 | — | |
| 284 | 1883 II Ross | 94 [1] | — | — | — | ☿ 0·083 |
| 288 | 1885 III Brooks | 496 | — | 0·3 | — | |
| 302 | 1888 I Sawerthal | 2182 | — | — | — | ♀ 0·027 |
| 307 | 1889 III Barnard | 128 | — | 0·5 | — | ♂ 0·04 |
| 308 | 1889 IV Davidson | 5127 | 0·04 | — | — | |

[1] Weitere elliptische Elemente nicht publicirt, Umlaufszeit als unsicher angegeben.

Hierbei ist aber nur die kürzeste Entfernung der Bahnen gegeben; um dann in einem gegebenen Falle zu entscheiden, ob zwei Kometen identisch sind, hat man durch eine genauere Rechnung den Ort (die Länge $l$) der grössten Nähe des Planeten zu bestimmen, und für die Anwendung des TISSERAND'schen Criteriums den Ausdruck $K$ zu bestimmen. SCHULHOF hat mit Ausnahme des ersten periodischen Kometen (45) und des Kometen (174), die bis Ende 1890 erschienenen dieser Untersuchung unterzogen, und die folgenden Resultate erhalten[1]):

| Komet | $l$ | $K$ | Komet | $l$ | $K$ | Komet | $l$ | $K$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 65 | 271° | 0·525 | 182 | 248° | 0·517 | 285 | 126° | 0·556 |
| 79 | 80 | 0·498 | 168 | 210 | 0·508 | 286 | 210 | 0·492 (vor 1868) |
| 81 | 184 | 0·486 (1770) | 164 | 168 | 0·537 | | | 0·497 (1884) |
| | | 0·478 (nach 1779) | 171 | 284 | 0·466 (1842) | 298 | 54 | 0·558 |
| 84 | 269 | 0·482 | | | 0·475 (1890) | 295 | 205 | 0·488 |
| 92 | 288 | 0·478 | 189 | 158 | 0·504 | 809 | 185 | 0·581 (vor 1886) |
| 96 | 885 | 0·591 | 240 | 59 | 0·590 | | | 0·580 (1889) |
| 102 | 268 | 0·887 | 244 | 223 | 0·527 | 810 | 189 | 0·462 |
| 181 | 108 | 0·509 | 251 | 126 | 0·562 | 316 | 228 | 0·540 |
| | | | 277 | 225 | 0·414 | | | |

Hier ist nun besonders hervorzuheben:

1) Die Veränderlichkeit des $K$ ist eine sehr geringe.

2) Es sind gewisse Kometen, bei denen die Differenzen in $l$ und $K$ nur sehr gering sind, und die dennoch als nicht zusammengehörig bezeichnet werden müssen; z. B. (81) und (286); (168) und (244) u. A.; insbesondere ist die Gleichheit der Richtung der Proximitätspunkte und die Gleichheit der Invariante $K$ für die Kometen (251) und (285) zu berücksichtigen, und

3) Ist die Veränderung von $K$ für den BRORSEN'schen Kometen (171), ohne dass bei demselben eine bedeutendere Störung stattgefunden hätte, auffällig.

Dass die Veränderlichkeit von $K$ eine geringe ist, hat schon SCHULHOF in den »Astron. Nachrichten« No. 2964 hervorgehoben; was jedoch den zweiten und dritten Punkt anbetrifft, so wird eine Untersuchung über den Einfluss der Elementenänderungen auf den Werth von $K$ erst ein Urtheil über dessen Schwankungen ermöglichen.

In der Gleichung

$$K = \frac{1}{a} + 2\mu_0\sqrt{p}\cos i \qquad \text{(k)}$$

ist $\mu_0$ eine von den Elementen des gestörten Himmelskörpers unabhängige Grösse. Unterliegen daher $a$, $p$, $i$ gewissen Aenderungen, so wird $K$ eine Veränderung erfahren, welche gefunden wird aus

$$dK = -\frac{da}{a^2} + \frac{\mu_0}{\sqrt{p}}\cos i\, dp - 2\mu_0\sqrt{p}\sin i\, di.$$

Es ist ausreichend genau, für diese Untersuchung in dem Werthe von $\mu_0$ die Masse des störenden Himmelskörpers gegenüber der Sonnenmasse zu vernachlässigen, und die Jupitersbahn als kreisförmig anzusehen; dann wird:

$$\mu_0 = \frac{1}{a_1^{\frac{3}{2}}}$$

1) Astron. Nachrichten Bd. 124, No. 2964 für die ersten 22 und Bulletin Astronomique, Bd. 8, für die letzten zwei. Dabei hat er $l$ und $K$ bei den meisten für die erste und letzte Erscheinung gerechnet, und dabei nur sehr geringe Unterschiede gefunden, was nach dem oben Gesagten nicht auffällig sein kann.

und da $a_1 = 5{\cdot}2026$ ist, $\mu_0 = 0{\cdot}08427$. In dem letzten Gliede ist übrigens $di$ im Bogenmaasse auszudrücken; soll es in Graden ausgedrückt werden, so muss der Coëfficient noch mit $arc\,1° = 0{\cdot}01745$ multiplicirt werden; es ist demnach:

$$\Delta K = -\frac{\Delta a}{a^2} + 0{\cdot}0848\,\frac{\cos i}{\sqrt{p}}\,\Delta p - 0{\cdot}00294\sqrt{p}\,\sin i\,\Delta i.$$

Aendert sich die Perihelдistanz eines Kometen beträchtlich, so dass dieselbe grösser als 2 wird, so wird er meist nicht wiedergesehen; bei den kurzperiodischen Kometen sind überdiess die Neigungen nur massig; für $i = 10°$, $p = 2$, $\Delta i = 10°$ würde der Einfluss des letzten Gliedes 0·007, was sich mit den bei der Tisserand'schen Gleichung vernachlässigten Gliedern vereinigt, und es reducirt sich demnach die Beziehung auf eine solche zwischen $a$ und $p$, was auch aus der Gleichung ($k$) ersichtlich ist, da dann $\cos i$ als constant angenommen werden kann; dann giebt aber diese Gleichung keinerlei Aufschluss über die Zusammengehörigkeit der Bahnen, indem nur Elemente, die von der Form der Bahn, nicht aber solche, die von ihrer Lage abhängen, in die Gleichung eintreten. Ist aber $i$ gross, so wird das letzte Glied in ($k$) überhaupt klein, und mit den vernachlässigten Gliedern zu vereinigen sein, so dass daraus die Constanz der grossen Axen der Kometenbahnen — innerhalb der Grenzen der vernachlässigten Glieder — folgen würde.

Es kann daher aus der Uebereinstimmung der Werthe von $K$ und $l$[1]) auf die Identität der Bahnen kein sicherer Rückschluss gezogen werden; und ebenso ist die grössere Differenz zwischen den Werthen von $K$ für die Kometen (79) und (277) oder für die Kometen (81) und (309) noch nicht gegen die Identität beweisend.

Durch die ungleiche Wirkung einer attrahirenden Masse, sowohl der Sonne, als auch eines störenden Planeten, oder durch Einwirkung äusserer Kräfte auf verschiedene Theile eines Kometen kann es vorkommen, dass die Massen sich trennen, wie diess durch die Beobachtungen von Kerntheilungen und Kometenkomplexen (Hauptkomet und Begleiter) constatirt ist.

Kreutz[2]) untersucht den Einfluss, welchen eine in der Richtung der Tangente wirkende Kraft (also ein Widerstand des Mittels) auf die Bewegung der verschiedenen Kernpunkte haben müsste, und sucht die Constante $K$ des Widerstandes, welchen er nach dem Gesetze $K\frac{v^2}{r^2}$, d. i. proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit und umgekehrt proportional dem Quadrate des Radiusvektors (entsprechend einer immer stärkeren Verdünnung in concentrischen Schichten von dem Centralkörper weg) annimmt, so zu bestimmen, dass, ohne Rücksicht auf diesen Widerstand alle Kernpunkte dieselbe Bahn beschreiben würden. Hierbei erscheint also die Trennung der verschiedenen Theile des Kometen eine Folge der auf verschiedene Punkte desselben verschieden wirkenden Widerstandes eines im Weltraum vertheilten Mittels.

Charlier[3]) nimmt als Ursache die blosse Attraction nach dem Gesetze der allgemeinen Gravitation. Gegen die Ableitung der Differentialgleichungen lässt sich nichts einwenden; dagegen wird die Integration derselben unter ganz

---

[1]) Dass $l$ nur genähert übereinzustimmen braucht, folgt daraus, dass die Störung nicht in dem Punkte der grössten Nähe der Bahnen, sondern nur in der Umgebung dieses Punktes stattzufinden braucht.

[2]) »Untersuchungen über das Kometensystem 1843 I, 1880 I und 1882 II«, zweiter Theil, pag. 53.

[3]) Bulletin de l'Académie de St. Petersbourg, Bd. 32, pag. 383.

unberechtigten, dem Probleme nicht entsprechenden Voraussetzungen vorgenommen. So wird als »Referenzcurve«, d. i. die gemeinschaftliche Bahncurve, von welcher aus die Abweichungen der einzelnen Theilchen gesucht werden, ein Kreis angenommen, eine Voraussetzung, durch welche allerdings, entgegen der Behauptung CHARLIER's sehr bedeutende, dem Problem anhaftende Schwierigkeiten verschwinden, welche aber bei der Bewegung der Kometen durchaus nicht zutrifft. Weiter wird bei der Ableitung der Stabilitätsbedingung (Gleichung 15) ein Zustand relativer Ruhe vorausgesetzt; die Stabilität der Ruhe ist aber eine wesentlich andere, als die Stabilität der Bewegung, wie schon LAPLACE bei einer anderen Gelegenheit hervorhob[1]).

Treten in dieser Weise durch irgend eine Ursache Theilungen der Kometen auf, so werden sich die einzelnen Theile im Laufe der Zeit in genähert gleichen Bahnen um die Sonne bewegen, sich dabei aber von einander entfernen; so entstehen Kometensysteme, für welche einzelne oder mehrere Elemente nahe dieselben sind, während andere von einander abweichen können. Welche Elemente identisch sein müssen, lässt sich nicht allgemein angeben. In der Regel wird man zunächst eine genähert gleiche Lage der Bahnebene, also nahe dieselbe Länge des Knotens und nahe denselben Werth der Neigung annehmen müssen, während die Lage des Perihels, die Excentricität und die Umlaufszeit schon ziemlich weit von einander verschieden sein können, und die Zeit des Durchganges durch das Perihel überhaupt jeden Werth haben kann, indem dieselbe von der Form der Bahn und auch von dem Zeitpunkte der Trennung abhängt[2]). In speciellen Fällen können aber auch andere Elemente stärkeren Schwankungen unterliegen; ist z. B. die Periheldistanz sehr klein, so kann eine Trennung in einer zur Bahnebene senkrechten Richtung zwei Bahnen erzeugen, deren Neigungen von einander stark differiren, u. s. w.

Die ersten Untersuchungen über Kometensysteme rühren von HOEK her[3]). Es wird zunächst die Aphelrichtung für 22 Kometen bestimmt, und diejenigen Kometen zusammengestellt, bei denen die Richtungen weniger als 10° im grössten Kreise abweichen; so entstehen acht Systeme von je 2 Kometen, und die folgenden beiden Systeme von je drei Kometen:

167 (1845 I), 173 (1846 V) und 176 (1846 VIII)
218 (1860 III), 226 (1863 I) und 231 (1863 VI),

für welche die Längen und Breiten des Aphels bez. sind:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 167: | $\lambda = 280°{\cdot}5$, | $\beta = -41°{\cdot}6$ | 218: | $\lambda = 308°{\cdot}1$, | $\beta = -73°{\cdot}2$ |
| 173 | 275 ·8 | − 55 ·4 | 226 | 313 ·2 | − 73 ·9 |
| 176 | 281 ·0 | − 49 ·5 | 231 | 313 ·9 | − 76 ·4 |

Nun wird untersucht, ob und wann die Distanz aller drei Kometen einander nahe gleich waren. Dieses war der Fall für die ersten drei Kometen im Jahre 56·97 mit den Distanzen 600·00, 600·42 und 600·25; und für die letzteren drei Kometen im Jahre 1020·87 mit den Distanzen 500·00, 500·56 und 500·36.

---

[1]) Bei der Interpretation der Gleichung (15) muss es übrigens heissen, »die beiden Körper müssen also $\sqrt{3} = 1{\cdot}732$ mal (nicht aber, wie CHARLIER meint, 3 mal) eine Rotation um den gemeinsamen Schwerpunkt ausführen, während der Schwerpunkt selbst einmal einen Umlauf um die Sonne vollführt.« $Q$ ist nämlich nach der Definition das Quadrat einer mittleren Bewegung.

[2]) In diesem Sinne kann man dann auch von Kometensystemen ohne direkt nachweisbare physische Zusammengehörigkeit sprechen.

[3]) »On the Comets 1860 III, 1863 I, 1863 VI,« Monthly Notices, Bd. 25, pag. 243.

Die nächste Bedingung ist nun die, dass die drei Bahnen einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben, dieses ist für die drei ersten Kometen nicht der Fall; die Durchschnittspunkte sind:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Für die Kometen: | 167, 178 | λ = 171° 11′ | β = − 14° 58′ |
| | 167, 176 | 249 26 | − 46 49 |
| | 178, 176 | 298 45 | − 47 5. |

Diese drei Kometen bilden daher kein System. Für die drei letzten Kometen hingegen finden sich die Durchschnittspunkte:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Für die Kometen: | 218, 226 | λ = 816° 42′·9 | β = − 76° 81′·5 | Mittl. Aequ. 1864·0 |
| | 218, 281 | 812 18·6 | − 75 39·5 | |
| | 226, 281 | 820 46·2 | − 78 89·8 | |
| also in genügender Uebereinstimmung; demnach im Mittel | | λ = 816 86·9 | β = − 76 56·7 | |

und Hoek nimmt daher an, dass diese drei Kometen ein System gebildet haben. In der Nähe dieser Schnittpunkte aber muss auch eine Ursache für die Trennung gesucht werden, und Hoek macht die Hypothese, dass dort ein Bewegungscentrum war, um welches früher die Bewegung stattgefunden hat.

Hoek setzte später seine Untersuchungen fort, und dehnte sie auf alle Kometen seit 1556 aus; aus diesen Untersuchungen mag noch das System der drei Kometen (48) (1672), (44) (1677) und (47) (1683) hervorgehoben werden. Er findet für die Durchschnittspunkte der Bahnen[1]):

| | | | |
|---|---|---|---|
| Für die Kometen: | 48, 44 | λ = 275°·5 | β = − 72°·8 |
| | 48, 47 | 286 ·9 | − 82 ·4 |
| | 44, 47 | 815 ·9 | − 78 ·8, |

also im Mittel, reducirt auf das Aequinoctium 1864·0:

λ = 818°·5, β = − 78°·8

sehr nahe dem Durchschnittspunkt der Bahnen der drei Kometen (218), (226), (281).

| | | |
|---|---|---|
| Die Radienvektoren der Kometen | 44 | 47 |
| waren im Jahre 1076·54 | 400 | 402·4 |
| 518·86 | 600 | 602·0 |

woraus Hoek schliesst, dass gegen die ursprüngliche Identität derselben kein Einwand zu erheben ist[2]).

Man darf jedoch in den Conjekturen hierbei nicht zu weit gehen. Sucht man nach Aehnlichkeiten zwischen Kometenbahnen, so wird man bei der Identifikation oder bei der Zusammenstellung derselben in Gruppen oder Systemen etwas vorsichtig sein müssen; einerseits können Kometen identisch sein, bei denen die Elemente nicht die geringste Aehnlichkeit zeigen; Identität solcher Kometen kann aber nur eine eingehende theoretische Untersuchung zeigen, unter Berücksichtigung der Störungen seitens anderer Himmelskörper. Beschränkt man sich aber auf die Aehnlichkeit der Bahnelemente, so wird man selbstverständlich nach

[1]) Monthly Notices, Bd. 26, pag. 4.

[2]) Mit demselben Rechte könnte man aber mit Rücksicht auf die Unsicherheit, welcher die Bestimmung dieser Radienvectoren aus den doch nicht absolut genauen Elementen in Anbetracht der Entfernung selbst unterliegt, schliessen, dass die Kometen während dieser ganzen Zeit nicht verbunden waren, als auch, dass sie um diese Zeit noch einen einzigen Kometen bildeten.

Maassgabe des Anwachsens der Zahl der Kometen immer gewisse ähnliche Elementensysteme finden, ohne dass desshalb an eine engere Verbindung gedacht zu werden braucht. Bei den neueren Kometen, bei denen in Folge der guten, hauptsächlich aber zahlreichen, über einen grossen Zeitraum sich erstreckenden Beobachtungen eine ziemlich sichere Bahnbestimmung ermöglicht ist, wird man die Grenzen für die zulässigen Unterschiede zwischen den Elementen ziemlich enge zu ziehen haben; bei den älteren Kometen, namentlich etwa vor dem Jahre 1700, also für die ersten 50 Kometenbahnen, wird man auch weitere Grenzen in den Unterschieden für zulässig halten können.

So sind die Elemente der periodischen Kometen (131) und (251), namentlich die Bahnlage, nicht allzu verschieden; und wenn nur sehr wenig periodische Kometen bekannt wären, etwa wie im Anfange unseres Jahrhunderts die 4 kleineren Planeten, so könnte man ganz wohl, sowie ursprünglich bei diesen, an einen gemeinsamen Ursprung, einen Zusammenhang in historischen Zeiten, denken. Gemäss der Zahl und Lage der periodischen Kometen wird man wohl aber alle kurzperiodischen Kometen als eine zusammengehörige Gruppe auffassen können, ohne zwischen einzelnen derselben einen besonderen tieferen Zusammenhang zu vermuthen, wenn nicht die Elemente durch aussergewöhnliche Uebereinstimmung auf einen solchen hinweisen.

Der Komet (94) zeigt eine grosse Aehnlichkeit mit dem Kometen (124) von 74 Jahren Umlaufszeit; seine Elemente sind:

$T$ = 1785 Jan. 27; $\pi$ = 109°·0; ☊ = 264°·2; $i$ = 70°·2; $q$ = 1·143.

Da jedoch der Komet (124) im Jahre 1812 durch sein Perihel ging, so kann der Komet (94) mit ihm nicht identisch sein, wohl aber in der Zwischenzeit von 27 Jahren ihm vorangehen. Unter der Annahme einer nahe gleichen Umlaufszeit würde er um 1859 wieder durch sein Perihel gegangen sein; doch ist die Umlaufszeit kein charakteristisches Element.

Mit den kurzperiodischen Kometen haben folgende 4 Bahnen Aehnlichkeit: Komet (4): $T$ = 568 August 29; $\pi$ = 317°; ☊ = 294°; $i$ = 4°; $\log q$ = 9·96 mit dem Kometen (81); allerdings sind hier die Knotenlängen um nahe 180° verschieden, allein unter der Annahme einer Neigungsänderung von nur 5°, wobei der aufsteigende Knoten zum niedersteigenden würde, würde die Knotenänderung nur etwa 17° betragen. Aber der Komet (81) hatte vor 1766 eine ganz andere Bahn, und wenn die beiden Kometen früher ein System gebildet hätten, so müsste der Komet (4) sich in der alten Bahn des Kometen (81) bewegen[1]. Weiter:

Komet 39 $T$ = 1661 Jan. 27; $\pi$ = 116°; ☊ = 82°; $i$ = 33°; $\log q$ = 9·65
mit dem Kometen (171) und

Komet 208 $T$ = 1857 Aug. 24; $\pi$ = 21·8; ☊ = 200·8; $i$ = 32·8; $\log q$ = 9·878
Komet 258 $T$ = 1874 Juli 18; $\pi$ = 5·5; ☊ = 215·9; $i$ = 34·1; $\log q$ = 0·227
mit dem Kometen (322);

die beiden Kometen (208) und (258) sind jedoch als elliptisch erkannt, mit den grossen Halbaxen 38, bezw. 45, Umlaufszeiten 235 und 306 Jahren, und es ist daher nicht ausgeschlossen, dass der Komet (322) durch eine bedeutende Störung aus einer ähnlichen Bahn in seine jetzige übergeführt wurde.

---

[1]) Es ist dieses ein auffälliges Beispiel, dass man bei der Vergleichung der Bahnen stets auf die der ersten Vergleichung unzugänglichen näheren Umstände Rücksicht nehmen muss.

Eine bedeutende Aehnlichkeit in den Bahnen findet sich bei den folgenden Kometen[1]):

| | | |
|---|---|---|
| 18, 247 | 70, 186 | (b) 4, 254 |
| 30, 318 | (a) 101, 279, 324 | 184, 208, 282, 320 |
| 35, 262, 312 | 118, 275 | (c) 161, 270, 281, 298 |
| 38, 331 | | 257, 274. |

Sodann in etwas weniger guter Uebereinstimmung in einzelnen Elementen:

12, 55 (mit einer Aenderung von 10° in der Neigung, bei welcher der aufsteigende Knoten zum niedersteigenden wird),
119, 225, 332 mässiger Unterschied im Knoten,
218, 224, 264 „ „ „ „

Durch die Länge des Perihels unterscheiden sich die folgenden Bahnen:

| | | |
|---|---|---|
| 265, 299 | 76, 268 | 151, 169 und Gruppe (c) |
| 28, 58 | 90, 269 | 286, 300 |
| 40, 314 | 103, 268 | 260, 292. |
| 48, 118 | 104 und Gruppe (a) | |

Bei sonstiger Uebereinstimmung der Elemente finden sich grössere Unterschiede im Knoten bei den Kometen:

| | | |
|---|---|---|
| 46, 72 | 125, 314 | 273, 275 |
| 106, 245 | 137, 292 | 275, 308; |
| 118, 273 | 149, 258, | |

in der Neigung bei den Kometen:

94, 102 265, 320,

ferner bei Gruppe (b) und Komet (20);

in der Periheldistanz bei den Kometen:

76, 263 237, 320 266, 287,

in der Lage des Perihels und Periheldistanz bei den Kometen:

68, 250 227, 278;

in der Periheldistanz und im Knoten bei den Kometen:

130, 296.

Die Bewegung der Kometen, und zwar die ungestörte um die Sonne, sowie die Störungen durch die Planeten, sind unabhängig von der Masse der Kometen[2]); umgekehrt wären aber die Bewegungen der Planeten von den Kometen beeinflusst, wenn diese eine bedeutendere Masse hätten. Im Volke hat sich auch, nachdem der astrologische Aberglaube über die Bedeutung der Kometen zu schwinden begann, die Kometenfurcht herausgebildet, die Furcht, dass durch den Zusammenstoss eines Kometen mit der Erde die Welt, d. h.

[1]) Eine derartige Zusammenstellung giebt, wie schon erwähnt, nicht unmittelbar die Zusammengehörigkeit der Kometen an; die Fixirung der Grenzen bleibt daher immer mehr oder weniger dem subjektiven Ermessen anheimgestellt (vergl. pag. 98).

[2]) So lange diese nicht mit der Masse des Centralkörpers vergleichbar ist, d. h. so lange in der Summe $M + m$ die Masse $m$ des gestörten Körpers gegen die Masse $M$ des Centralkörpers vernachlässigt werden darf.

die Erde, zu Grunde gehen würde: es wurde an die Erscheinung eines Kometen der Weltuntergang geknüpft. Nun hat man aber bisher noch keinerlei Störungen der Planeten durch irgend einen Kometen angeben können. Der ENCKE'sche Komet kann sich, wie schon BESSEL 1819 bemerkte, dem Merkur bis auf 0·017 Erdbahnhalbmesser nähern, so dass seine Entfernung vom Merkur etwa $\frac{1}{17}$ seiner Entfernung von der Sonne wird, und die vom Merkur auf denselben ausgeübte Kraft sich zu der von der Sonne ausgeübten wie 0500 $m : M$ verhält, wenn $m$ die Merkurmasse ist, und die durch Merkur bewirkten Störungen in der Bewegung des ENCKE'schen Kometen zur Bestimmung der Masse des Merkur dienen können. In der That hat ENCKE zuerst auf diese Art eine genauere Bestimmung der Merkursmasse durchgeführt, und durch die fortgesetzte Beobachtung des ENCKE'schen Kometen hat diese Bestimmung später durch VON ASTEN und BACKLUND einen hohen Grad von Genauigkeit erlangt. Umgekehrt hat man aber eine Einwirkung des ENCKE'schen Kometen auf die Bewegung des Merkur nicht constatiren können.

Ferner hat bereits OLBERS auf die grosse Annäherung des BIELA'schen Kometen an die Erde hingewiesen; seine Entfernung kann bis auf 0·011 herabsinken, d. h. bis auf etwa $\frac{1}{90}$ der Entfernung der Erde von der Sonne. Die von der Erde auf ihn ausgeübte Kraft ist dann etwa der 41·5te Theil von der von der Sonne ausgeübten[1]; wäre die Kometenmasse nur der $n$te Theil der Erdmasse, so würde die von dem Kometen auf die Erde ausgeübte Kraft $\frac{1}{41 \cdot 5n}$ sein. Für den BIELA'schen Kometen allerdings ist zu beachten, dass diese Eventualität eintreten kann, oder eigentlich hätte eintreten können, aber nie eingetreten ist, und vielleicht nie eintreten wird, da inzwischen der BIELA'sche Komet verschwunden zu sein scheint.

Noch näher kann die Erde dem Komet (220) (1861 I) kommen; die kleinste Entfernung der Bahnen beträgt 0·002, und es würde die Wirkung der Erde auf den Kometen, wenn beide Körper zur selben Zeit den nächsten Punkt ihrer Bahnen passiren würden, 7·8 mal stärker als die Wirkung der Sonne auf den Kometen, und die Wirkung des Kometen auf die Erde $\frac{7 \cdot 8}{n}$, wenn die Masse des Kometen der $n$te Theil der Erdmasse wäre.

Dass man durch den Schweif und selbst mitunter durch die Coma Fixsterne fast ungeschwächt hindurchsieht — die mitunter beobachtete geringe Lichtschwächung lässt sich durch die Contrastwirkung gegen den dunklen Himmelshintergrund einerseits und gegen den helleren Hintergrund des Kometen andererseits erklären — kann nicht als Beweis für die geringe Masse gelten. Bei einer noch so geringen Dichte des Kometen müsste eine geringe Schwächung des Lichtes, überdies aber auch eine Ablenkung stattfinden, wenn der Fixstern nicht im Centrum des Kometen oder in der Schweifaxe sich befindet. Wenn aber auch mit

---

[1] Die Wirkung ist für grössere Entfernungen durch den Ausdruck gegeben: $\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \frac{m_1}{M}$, wobei $r$ die Entfernung des Centralkörpers, $r_1$ diejenige des störenden Körpers, $M$ und $m$ die Massen des ersteren und letzteren sind; für kleine Entfernungen ist dieser Ausdruck nicht ausreichend (wegen der vernachlässigten Glieder). Da aber die Wirkung der Sonne und des störenden Körpers in der Entfernung $\rho$ = dem Radius der Wirkungsphäre einander gleich sind, so ist die Wirkung in der Entfernung $r$ gleich $\left(\frac{\rho}{r}\right)^2$; für die Erde ist der Radius der Wirkungssphäre $\sqrt{\frac{1}{[illegible]}} = 0·00540$.

Gewissheit constatirt werden könnte, dass eine Lichtablenkung nicht stattfindet, so wäre damit noch nichts erwiesen, denn dann ist der nächstliegende Schluss, wie auch OLBERS bemerkt, dass der Schweif aus discreten Theilchen besteht; bei der enormen Ausdehnung des Schweifes könnte dann die Masse noch eine ganz beträchtliche sein. Die Kerne selbst scheinen allerdings nicht sonderlich gross zu sein; für den Kometen 1811 I war der wahre Durchmesser des Kerns nicht über 4000 *km*; für den grossen DONATI'schen Kometen 1858 VI nur 1000 *km*, bei dem grossen Kometen von 1862 nach WINNECKE's Messungen bloss 40—50 *km*. Die Messungen dieser kleinen Winkel, unter denen die Kometenkerne erscheinen, sind aber dann mehr Schätzungen, mit erheblicher Unsicherheit behaftet. Würde man für den Kometen (220) einen Halbmesser von etwa 1000 *km* und für seine Dichte etwa diejenige der Erde annehmen, so würde $\mu = 258{\cdot}5$, und seine Wirkung auf die Erde $\frac{1}{284}$ der Sonnenwirkung, also 4158 mal stärker als die Wirkung des Jupiter. Allein, wenn der Halbmesser nur $\frac{1}{10}$ des früheren; also 100 *km* angenommen wird, so wäre die Wirkung schon $\frac{1}{1000}$ der früheren, also $\frac{1}{284000}$; und nimmt man für den Kometen etwa die Dichte des Wassers, so wäre die Wirkung im Verhältniss 5·5 : 1 zu verkleinern, also nur $\frac{1}{1560000}$ der Sonnenwirkung, wäre aber noch beinahe so gross, wie die Wirkung des Jupiter.

Ob man auch für den Kometenkern, dessen Spectrum jedenfalls dasjenige eines festen oder flüssigen Körpers ist, eine Dichte, etwa wie diejenige der atmosphärischen Luft annehmen dürfte, bleibt fraglich; über die Grösse der Kerne befinden wir uns noch ziemlich im Unklaren; viele sind, wie erwähnt, selbst im Fernrohre nicht sichtbar (vergl. pag. 54) und verrathen sich nur durch das Spektroskop. Auf diese Weise können wir also über die Wirkung der Kometen kaum Aufschluss erhalten, um so mehr, als eine solche hypothetische Annäherung nicht oft stattfindet, da die angeführten Proximitätspunkte sich auf die Bahnen beziehen, die Körper selbst aber äusserst selten gleichzeitig durch diese Punkte gehen werden und man bleibt bei diesen Schlüssen zur Zeit auf den Mangel jedes Einflusses des ENCKE'schen Kometen auf den Planeten Mercur angewiesen. Um so werthvoller ist für die Beurtheilung der Kometenmassen daher noch die Thatsache, dass im Jahre 1886 der Komet (809) mitten durch das Jupitersystem ging, ohne in den Bewegungen der Satelliten auch nur die geringste merkliche Störung hervorzubringen. Der Komet näherte sich dem Jupiter bis auf 0·0098 Erdbahnhalbmesser (vergl. pag. 92) oder 20·58 Jupiterhalbmesser, während die Entfernung des äussersten Jupitersatelliten 27 Jupiterhalbmesser beträgt.

Diese Thatsachen beweisen zur Genüge, dass die Kometenmassen nur äusserst klein sind, und dass man bei der Berechnung der Störungen der anderen Himmelskörper ihre Massen, wenigstens bei der jetzt angestrebten und erreichbaren Genauigkeitsgrenze, und vielleicht noch sehr lange hinaus, in völliger Strenge gleich Null setzen kann. Es gilt dieses nicht nur für die grossen Planeten, sondern auch für die kleinen Planeten, ja sogar für jeden Stein auf der Erde, da die Wirkung nicht von der Masse des beeinflussten (gestörten) Körpers, sondern nur von dem Verhältniss der Massen des störenden und des Centralkörpers abhängt. Man könnte nur noch einwerfen, dass die Wirkung eine wesentlich andere sein müsste, wenn die Annäherung bis zur Berührung stattfinden, d. h. wenn ein Zusammenstoss stattfinden würde. Die Wahrscheinlichkeit dieses Zusammenstosses ist nun wohl äusserst gering; aber selbst wenn ein solcher stattfinden sollte, so würde er nur von verderblichen Folgen für den Kometen,

nicht aber für die Erde, begleitet sein. Zwar ist die Geschwindigkeit der Kometen, ebenso wie diejenige der Erde weit grösser, als die Geschwindigkeiten, welche man bei terrestrischen Objecten zu beobachten Gelegenheit hat, und wenn der Komet der Erde mit dieser Geschwindigkeit begegnen würde, so könnte er zum mindesten ein hübsches Loch in sie hineinschlagen; denn die Geschwindigkeit des Kometen ist, eine parabolische Bahn vorausgesetzt, 1·4142 Mal so gross, wie diejenige der Erde, also, da die letztere 29·5 *km* pro Secunde beträgt, für den Kometen 42 *km* pro Secunde. Die relativen Geschwindigkeiten werden daher zwischen 12 und 72 *km* variiren. Aber, wie später gezeigt wird, kommt der Komet eben nicht mit dieser Geschwindigkeit zur Erde; so wie er in den Luftraum treten würde, müsste er sich entzünden, und, wie ein riesiges Meteor leuchtend, zum grössten Theile verbrennen; der Rest könnte detonirend zerspringen, oder auch als ein grosser Block zur Erde fallen; aber die Geschwindigkeit des Falles würde, wie gross auch die kosmische Geschwindigkeit beim Eintritte in die Atmosphäre wäre, lange bevor er die Erde erreicht, unter Umständen schon in den oberen Regionen der Atmosphäre, unter 1000 *m* gesunken sein. Die Luft wirkt dabei wie ein elastisches Polster, das die Erde und ihre Bewohner gegen Katastrophen von Aussen schützt.

## B. Meteore.

Auffallende Erscheinungen in den Luftregionen, von welchen bereits im Alterthum berichtet wird, waren hellglänzende, leuchtende Feuererscheinungen, oft von dem scheinbaren Durchmesser der Mondscheibe, an Glanz dem Monde nicht viel nachstehend, ihn mitunter übertreffend; Erscheinungen, welche man in späterer Zeit mit dem Namen Bolide, Feuerkugeln belegte; ferner die »vom Himmel gefallenen Steine«, welche meist aus einer detonirenden Feuerkugel, d. h. aus einer Feuerkugel, welche unter einer heftigen, weithin, oft mehrere Meilen weit hörbaren Explosion zerspringt, zur Erde fallen, und welche man als Aerolithe, oder je nach ihrer Beschaffenheit als Meteorsteine oder Meteoreisen bezeichnete. Die Meteorerscheinungen, welche Meteormassen zur Erde entsenden, nannte man früher wohl auch zum Unterschiede von den anderen, Meteorite. Es ist jedoch schon hieraus klar, dass zwischen Feuerkugeln und den Meteormassen ein Unterschied nicht besteht. Nichtsdestoweniger hielt man diejenigen Feuerkugeln, welche ohne Zurücklassung irgend einer sichtbaren oder hörbaren Spur verschwinden, wesentlich verschieden von denjenigen, welche Meteormassen zur Erde senden, und bezeichnete wohl auch als Feuerkugeln vorzugsweise die ersteren. Heute ist dieser Unterschied hinfällig, und Meteormassen sind nichts anderes, als die zur Erde gefallenen Reste der Feuerkugeln, diese nichts anderes, als die in der Atmosphäre befindlichen oder sich bewegenden Meteormassen.

Nicht alle Feuerkugeln sind gleich gross und glänzend. SCHMIDT beschreibt eine besonders glänzende in seinen »Resultaten aus zehnjährigen Beobachtungen über Sternschnuppen, Berlin 1852« (pag. 44) folgendermaassen:

»1848 Januar 21. Von allen Meteoren, die ich seither gesehen habe, das glänzendste und grösste. . . . Es schien mir, als sei das Meteor im Zenith entstanden; ich erblickte es erst in etwa 60° Höhe, gleich einem Sterne 2^m an Glanz, wo es bald Aldebarans Helligkeit und Farbe erreichend, in wenig geschlängeltem Laufe dem Kopfe des Pegasus sich zuwandte. Hier nahm das Meteor schnell einen gewaltigen Glanz und das intensivste Smaragdgrün an,

dem sich hinten, in der Richtung der Bewegung, ein ganz unscheinbarer grauer und kurzer Schweif anschloss. Das Merkwürdigste jedoch war der feurige Lichtschein, der rothen, carminfarbigen Nordlichtgluth ähnlich, welcher, soviel ich erkennen konnte, sich zu beiden Seiten des Meteors so an die grüne Hauptmasse anlagerte, dass es an beiden Seiten wie zurückwehendes Haar, von dem scharf elliptisch abgerundeten Kopfe in zwei schmalen Zonen den Uebergang des grünen Lichtes in die graue Schweifmaterie begrenzte. Diese Lage und die beiderseitige scharfe Absonderung von der Umgebung macht es mir augenblicklich während der kurzen Dauer der Erscheinung durchaus wahrscheinlich, dass hier kein subjektives Phänomen vorwalte. Das Meteor glich einem langgedehnten fallenden Tropfen geschmolzenen Metalles. . . . Als das Meteor einen fast blendenden und ungeachtet des Mondscheines schattenwerfenden Glanz erreicht hatte, trat es, schon in der Nähe des Südwest-Horizontes, hinter mässige, vom Monde erhellte Schneewolken, durch welche das grüne Licht, zwar verwaschen und vom Nimbus befreit, doch wunderbar stark in grosser Scheibenform durchstrahlte. Den Durchmesser des scheinbar begrenzten grünen Theiles schätzte ich in 10° Höhe auf 30 Minuten[1]) wenigstens. . . . . Die Dauer der Sichtbarkeit des Meteors überstieg schwerlich 4s. Es verschwand um 7h 25m 54s Mittl. Berl. Zeit«.

Nicht jede Feuerkugel giebt Anlass zu einem Meteorsteinfall. Im Gegentheile sind die Meteorsteinfälle[2]) weit seltener, als das Aufleuchten von Feuerkugeln. Wenn nichtsdestoweniger, namentlich in den chinesischen Annalen, von ziemlich zahlreichen Meteorsteinfallen berichtet wird, so hat dieses vielleicht nur darin seinen Grund, dass den »vom Himmel gefallenen Steinen« mehr Aufmerksamkeit zugewendet wurde, als den spurlos verschwindenden Feuerkugeln. Arago giebt die folgende Zusammenstellung der in historischen Zeiten bemerkten Feuerkugeln. .

| | | | |
|---|---|---|---|
| Vor Chr. Geb. 8 | Im 5. Jahrh. 8 | Im 10. Jahrh. 27 | Im 15. Jahrh. 18 |
| Im 1. Jahrh. 7 | Im 6. Jahrh. 20 | Im 11. Jahrh. 29 | Im 16. Jahrh. 12 |
| Im 2. Jahrh. 2 | Im 7. Jahrh. 18 | Im 12. Jahrh. 4 | Im 17. Jahrh. 39 |
| Im 3. Jahrh. 1 | Im 8. Jahrh. 18 | Im 13. Jahrh. 8 | Im 18. Jahrh. über 100, |
| Im 4. Jahrh. 17 | Im 9. Jahrh. 14 | Im 14. Jahrh. 7 | |

während in unserer Zeit fast in jedem Monate in der einen oder anderen Gegend der Erde eine glänzende Feuerkugel gesehen wird. Hingegen hat Biot aus der Zeit von 644 v. Chr. Geb. bis 333 n. Chr. Geb. 16 Meteorsteinfälle nur allein in den chinesischen Annalen verzeichnet gefunden.

Das Auftreten derselben ist sehr verschieden. Zumeist sieht man sie nach mehr oder weniger heftig detonirenden Feuerkugeln, deren Theile nach allen Seiten zerstieben, von denen einzelne als Meteormassen zur Erde gelangen. Viel seltener kommen Meteorsteinfälle vor, ohne dass vorher eine Feuerkugel gesehen worden wäre; in diesen Fällen wird oft nur eine starke Detonation vernommen, oder aber es fällt eine grosse Zahl kleiner Meteorsteine aus einer dunklen Wolke.

Ebenso verschieden ist die Grösse der Meteormassen. Die meisten sind nur kleine Bruchstücke von wenigen Grammen, doch sind auch mässig grosse von einigen Kilogrammen Gewicht nicht allzu selten. Sehr grosse Meteormassen, die

---

1) Also etwa gleich der Grösse des Mondes.

2) Man spricht von Meteorsteinfällen ohne Unterschied auf die Beschaffenheit der gefallenen Massen, also ebensowohl bei eigentlichen Meteorsteinen als auch bei Meteoreisenmassen.

dann vereinzelt zur Erde fallen, gehoren zu den Seltenheiten und erregten zu alten Zeiten Aufsehen. Zu den merkwürdigsten sind die folgenden zu zählen.

Der grosse Stein, der 465 v. Chr. Geb. bei Aegos-Potamos in Thrakien zur Erde gefallen war, soll »zwei Mühlsteine gross und eine ganze Wagenlast schwer« gewesen sein.

Im Anfange des zehnten Jahrhunderts fiel bei Narni in Italien ein Stein in die Neia (Nebenfluss des Tiber), der noch eine ganze Elle über der Oberfläche des Wassers hervorragte.

Am 7. November 1492 zwischen 11 und 12 Uhr Mittags fiel bei Ensisheim im Elsass eine bedeutende Meteormasse in ein Getreidefeld, einen Meter tief in den Boden eindringend.

Im Jahre 1750 wurde in Sibirien auf einem Hügel in der Nähe des Jenissei von einem Kosaken, MEDWEDEFF, eine Meteormasse von 685 *kgr* aufgefunden, von welcher die Tataren behaupteten, dass sie vom Himmel gefallen sei. Diese Masse, obzwar keine von den grössten, hat insofern ein besonderes Interesse, als sie CHLADNI Veranlassung zu seiner ersten berühmten Abhandlung »Ueber den Ursprung der PALLAS'schen[1]) und anderer ihr ähnlicher Eisenmassen und über einige damit in Verbindung stehende Naturerscheinungen; Riga 1794« bot.

1783 fand eine von den Spaniern zur Ausbeutung von Silberminen nach Otumpa im Bezirke San Jago del Estero, Provinz Chaco-Gualambo der Laplata-Staaten kommende Expedition daselbst eine Meteoreisenmasse von 2·5 *m* Länge, 2 *m* Breite und $\frac{1}{2}$ *m* Dicke mit ca. 15000 *kgr* im Gewicht.

1784 wurde von BERNARDINA DA MOTA BERTELLIO in der Nähe von Bahia (Brasilien) eine Eisenmasse von über 2 *m* Länge, 1 *m* Breite und nicht ganz 1 *m* Dicke im Gewicht von ca. 7000 *kgr* gefunden.

Noch grössere Eisenmassen, welche den Charakter meteorischen Eisens tragen, sollen sich nach CHLADNI[2]) am rechten Ufer des Senegal in Afrika finden.

In neuerer Zeit hat NORDENSKJÖLD 1870 im südlichen Theile der zu Grönland gehörigen Insel Disko mitten unter Granit- und Gneissblöcken 15 Blöcke meteorischen Eisens gefunden, von denen die drei grössten bezw. 20000, 8500 und 4800 *kgr* Gewicht haben[3]).

Zu den grösseren Massen gehören auch diejenigen, über welche DAUBRÉE in den Comptes rendus, Bd. 64 berichtet, von denen die eine, aus den Seealpen, 625 *kgr*, die andere, aus Mexico, 780 *kgr* im Gewicht haben.

Kleinere Meteormassen fallen zumeist in grösserer Zahl in den sogen. Steinregen. Von den älteren Steinregen, welche sich z. B. in der bereits erwähnten Schrift von CHLADNI über Feuermeteore erwähnt finden, sind manche, wenn auch nicht mythologischen, so doch mythischen Ursprungs. Dass dieselben nicht als Steinregen im eigentlichen Sinne des Wortes aufzufassen sind, erwähnt schon CHLADNI bei einzelnen (vergl. z. B. in seiner Schrift pag. 233). Die grosse Mehrzahl derselben ist allerdings zweifellos sichergestellt. Zu kritischen Untersuchungen in dem Gebiete der Meteorastronomie können nichtsdestoweniger erst die Meteorfälle seit der Mitte des vorigen Jahrhunderts herangezogen werden, weil bei den früheren die nöthigen Detailangaben fehlen. Wohl der erste gut bestimmte ist der am 26. Mai 1751 stattgefundene Steinfall bei Hraschina in Slavonien, wo Abends

---

[1]) Sie wurden von dem Reisenden PALLAS in Petersburg untersucht.

[2]) »Ueber Feuermeteore und über die mit denselben herabgefallenen Massen, Wien 1819.« pag. 333.

[3]) Deren meteorischer Ursprung wird übrigens mehrfach angezweifelt.

gegen 6 Uhr aus einer in einem grossen Theile von Deutschland sichtbaren Feuerkugel, die unter heftigem Getöse zersprang, zwei Meteormassen im Gewichte von 85 *kgr* und 8 *kgr* in einer Entfernung von ca. 1500 *m* von einander zur Erde fielen. Der erstere grössere drang ungefähr 6 *m* tief in die Erde, wohl die grösste Tiefe, bis zu welcher das Eindringen der Meteore constatirt wurde.

Eine gewisse Berühmtheit erhielt der grosse Steinregen von Barbotan in der Gascogne am 24. Juli 1790. Aus einer zwischen 9 und 10 Uhr in verschiedenen Gegenden gesehenen Feuerkugel mit langem Schweife fielen zwei Minuten nach ihrem Zerspringen eine Menge Steine zur Erde, die gesammelt, und mit einem von dem Maire unterzeichneten Berichte an die Academie geschickt wurden. Der mit der Untersuchung betraute Gelehrte Bertholon erklärte aber diesen ganzen Bericht als ein dem Volksglauben entsprungenes Märchen[1]) — vielleicht die letzte Erklärung dieser Art, welche von einer wissenschaftlichen Körperschaft gegeben wurde. Für die am 26. April 1803 bei L'Aigle gefallenen Meteormassen, von denen die grösste nahe 9 *kgr* wog und welche ebenfalls der Akademie eingesendet worden waren, gab der Physiker Biot, wie schon erwähnt, die richtige Erklärung. Der Fall von L'Aigle gehört übrigens zu den eigentlichen Steinregen; auf einer elliptischen Fläche, in der Ausdehnung von 11 *km* von S. O. nach N. W. und 4½ *km* in der dazu senkrechten Richtung fiel eine grosse Menge Steine. Ein ähnlicher, wenn auch nicht so ausgedehnter Steinfall war der vom 20. Januar 1868 bei Pultusk; aus einer, im ganzen östlichen Deutschland, in Polen, Böhmen, Mähren beobachteten Feuerkugel fielen nach einem unter donnerartigem Getöse erfolgten Zerplatzen über 8000 Steine, von denen die grössten ein durchschnittliches Gewicht von 1½ bis 2 *kgr* hatten, auf einer Fläche von mehr als 7·5 *km* Länge und 2 *km* Breite.

Ausser den Meteorsteinfällen ist noch der Staubfälle Erwähnung zu thun, zu denen vielleicht auch, wenigstens theilweise die Erscheinungen des rothen Schnees, des rothen Regens, Blutregens, Schlammregens u. s. w. zu zählen sind. Chladni zählt in seiner zweiten Schrift eine grosse Menge auf, welche hauptsächlich aus dem Grunde Beachtung verdienen, weil die weitaus grösste Mehrzahl auf ganz bestimmte Daten fällt. Die wichtigsten mögen deshalb hier angeführt werden.

1) 1548 November 6 fiel im Mansfeldischen eine rothe Flüssigkeit, wie geronnenes Blut, nach einer Feuerkugel (10. November)[2]).

2) 1560 December 24 in Lillbonne: Blitz und Krachen bei heiterem Himmel; Feuer am Himmel. *Alibi dicitur, pluisse sanguine* (December 28).

3) 1618 in der zweiten Hälfte des August Steinfall, Feuermeteore und Blutregen in Steiermark.

4) 1623 August 12 Blutregen zu Strassburg (August 15).

5) 1637 December 6. Zwischen 7 Uhr Abends bis den folgenden Tag 2 Uhr auf einem Schiff im Meerbusen von Volo: zwei Finger hoch Staubfall. (December 9).

---

[1]) Vier Jahre früher war bei Lucé (in Maine) am 13. September 4½ Uhr Nachmittags aus einem dunklen Gewölke nach einem kanonenschussähnlichen Donner ein ca. 3½ *kgr* schwerer Stein zur Erde gefallen, welcher ebenfalls mit noch zwei anderen zur selben Zeit bei Aire in Artois und bei Coutances in Manche gefallenen der Academie geschickt wurde, von dieser aber als irdisches Gestein erklärt wurde.

[2]) Die in () beigesetzten Zahlen geben die Reduction auf eine gemeinsame Epoche (1850) wie dieselbe von H. A. Newton für die Sternschnuppen des Biot'schen Kataloges in Silliman American Journal of Science and Arts., II Serie, Bd. 36 durchgeführt wurde.

6) 1643 Januar in Weinsberg blutiger Schnee.

7) 1645 Januar 23/24 in Herzogenbusch blutiger Schne (Januar 26).

8) 1646 October 6; um 7 Uhr Morgens in Brüssel rother Regen (October 8).

9) 1721 Mitte März in Stuttgart rother Schlammregen.

10) 1755 October 14 Morgens 8 Uhr in Locarno ein warmer, wie aus einem Backofen kommender Wind; die Luft füllte sich mit Dünsten, um 10 Uhr voll von einem rothem Nebel, um 4 Uhr blutrother Regen, der beim Aufsammeln $\frac{1}{9}$ rothen Bodensatz gab. Darnach ein entsetzliches, 8 Stunden wahrendes Gewitter. Regenmenge 9 Zoll. Der Regen fiel auch auf der Nordseite der Alpen bis nach Schweden. Auf den Alpen lag 2 *m* hoch rother Schnee (October 15).

11) 1755 October 20 schwarzer Staub wie Lampenruss auf der Insel Zetland (eine der Orkney-Inseln) bei Südwestwind (daher kein vulkanischer Staub vom Hekla); in der Nacht vom 23. auf den 24. October schwarzer Staub auf einem Schiff zwischen den Shetlands-Inseln und Irland (October 21, 24, 25).

12) 1755 November 15 rother Regen in Russland, Schweden und am Bodensee; das rothe Wasser schmeckte sauerlich, der Bodensatz zum Theil vom Magnet angezogen[1]).

13) 1781 April 24 weisslicher Staub 8 *mm* hoch in Sicilien; nach den damaligen Untersuchungen kein vulkanischer Staub.

14) 1803 März 5/6 in Udine, Venedig, Neapel, Friaul rother Schnee.

15) 1813 März 13/14 wurde in Catalonien und den Abbruzzen eine rothe Wolke beobachtet, von welcher nach und nach der ganze Himmel die Farbe des rothglühenden Eisens annahm; dabei wurde es finster, so dass man Licht anzünden musste, hierauf fiel rother Schnee; der Rückstand bestand aus Kieselerde, Thonerde, Kalkerde und Eisen.

16) 1814 October 27/28 im Thale bei Oneglia bei Genova Regen von rother Erde.

Nun kam es allerdings auch vor, dass man eine papierartige Substanz, Seide, Menschenhaare, ferner ölige, theerige, klebrige, schlammige, gallertartige Massen, Pilze und Schimmelsubstanz in dem gefallenen Regen erkannt hat, und selbst aus Feuerkugeln fallen gesehen haben will. Die gallertartige Substanz welche früher auch als »Sternschnuppensubstanz« bezeichnet wurde, ist aber, wie schon Merrett 1667 in seinem Kataloge britischer Thiere, Pflanzen und Mineralien bemerkt, nichts anderes, als eine aus Eingeweiden von Fröschen bestehende organische Masse. Diese Bemerkung wurde neuerdings von Carus geprüft, welcher in jener Substanz sogar gewisse Theile von Eingeweiden erkannte. Die Eileiter der Frösche haben nämlich die Eigenthümlichkeit, durch Aufnahme von Feuchtigkeit stark aufzuquellen, und zwar bis auf das hundertfache ihres Volumens, so dass ein einziger Frosch einen Liter Gallerte liefert. Doch lässt sich dieses Aufquellen nicht immer gleich beobachten, und scheint zur Laichzeit am grössten zu sein, und nach dem Laichen zu verschwinden[2]). Hiernach wären die gallertartigen Massen Auswürfe von im Magen von Vögeln stark aufgequollenen Froscheingeweiden. Welche Bewandtniss es mit den Pilzen, Schimmel, Papier, Seide, Menschenhaaren hat, ist dabei nicht aufgeklärt. Ob dabei in manchen Fällen nicht Verwechselungen mit Asbest,

[1]) Hier wird die Vermuthung ausgesprochen, dass diese Erscheinung vielleicht identisch ist mit derjenigen vom 20. October; dieses ist jedoch nicht nöthig, vielmehr ist jetzt bekannt, dass sich an beiden Daten Sternschnuppenfälle ereignen.

[2]) Die Ursache liegt in der vermehrten Absonderung von Mucin in dem die Eier einhüllenden Schleime.

Glimmer etc. vorgekommen sind (in einzelnen Fällen wird ausdrücklich die Unverbrennlichkeit derselben erwähnt, in anderen die Brennbarkeit mit einem brenzlichen Geruche), in anderen Fällen nicht thatsächlich organische Substanzen durch den Wind mitgerissen worden waren, lässt sich aus den älteren Berichten nicht mehr deduciren. Wo aber mineralische Stoffe als nachgewiesen anzusehen sind, ist der tellurische Ursprung nicht so unmittelbar anzunehmen. Allerdings hat die Annahme, dass man es nicht nur mit Meteorstaub, sondern mit sogen. Passatstaub zu thun hat, der meist zimmt- oder blutfarbig ist, und namentlich an der Westküste des tropischen Afrika, zwischen Cap Bojador und Cap Blanco so häufig ist, seine Berechtigung — allein: der Passatstaub ist nicht an bestimmte Daten gebunden; allerdings kann am 10. August oder am 13. November oder an den nächstgelegenen Daten ebenso gut Passatstaub fallen, wie an jedem anderen Tag, aber umgekehrt: an jedem Tag ebenso gut wie an diesen ganz bestimmten Tagen.

Nebst den obigen Mittheilungen von CHLADNI mögen noch die folgenden auffälligen Beobachtungen bemerkt werden:

17) OLMSTED[1]) führt einen Bericht von rothem Staub 1755 November 13 und von rothem Regen in der Picardie von 1765 November 14 an.

18) Aus der neueren Zeit ist der Fall von rothem Schnee am 25. Februar 1879 im südlichen Europa bekannt; er wurde als Wüstenstaub aus der Sahara erklärt; G. ROHLFS und Dr. STECKER, die sich damals bei Lokna (Tripolis) aufhielten, berichteten von einem am 24. Februar daselbst stattgefundenen heftigen Samum.

19) 1880 März 30 war ein heftiger Staubfall in Catania.

20) 1885 October 14 Schlammregen unter heftigem Sirocco in Klagenfurt.

21) 1896 Februar 25/26 rother Schnee im westlichen Ungarn, Steiermark, Niederösterreich, Mähren, bis nach Schlesien, wo (in Troppau) bei leicht bewölktem Himmel und Windstille grauer Staub fiel. Dass dieser Staub nicht aus den Sandebenen Ungarns herrühren konnte, wird dadurch erwiesen, dass gleichzeitig in Serbien, Kroatien, im Banat, Südoststürme wehten, welche grosse Staubmassen führten Auch die Erklärung, dass es Wüstenstaub aus der Sahara gewesen sei, trifft nicht zu, da sonst Süd- bis Südwestwind hätte wehen müssen. Auf 1 Liter Schnee kamen 8 *gr* Staub, welcher nach chemischen Untersuchungen frei von jeder organischen Substanz war, und hauptsächlich aus Quarz bestand.

Nach den einzelnen Daten zusammengestellt hat man:

Januar 26: No. 7; im Januar: No. 6.

Februar 24: No. 18; Februar 25/26: No. 21.

März 6: No. 14; März 13/14: No. 15; Mitte März: No. 9; März 30: No. 19.

April 24: No. 13.

August 15: No. 4; zweite Hälfte August: No. 3.

October 8: No. 8; October 14: No. 20; October 15: No. 10; October 21 bis 24: No. 11; October 27/28: No. 16.

November 10: No. 1; November 14: No. 17; November 15: No. 12.

December 9: No. 5; December 28: No. 2.

Hält man diese Daten mit den später gegebenen charakteristischen Daten für die Sternschnuppenfälle zusammen, so wird man nicht umhin können, diese Fälle als höchst wahrscheinlich nicht terrestrischen, sondern ebenfalls kosmischen Ursprungs anzusehen. Ebenfalls kosmischen Ursprungs ist jedenfalls

[1]) SILLIMAN, Bd. 26, pag. 132.

der Meteorstaub, den zuerst (1872) NORDENSKJÖLD auf dem Polarreise in Grönland, dann in Spitzbergen und auf dem Schnee in Schweden und Finnland gesammelt hat.

Die zur Erde gefallenen Meteormassen sind im Momente des Fallens in einem Zustande hoher Erhitzung, von einer sogen. »Schmelzrinde«, d. i. von einer geschmolzenen, erst in Erstarrung begriffenen, dünnen, glatten und dunklen Kruste umgeben. Aerolithe ohne Rinde führt SCHIAPARELLI[1]) nur zwei an: den von Chantonnay, gefallen am 5. August 1812 und von Sétif, gefallen 9. Juni 1867. Versuche über die Schmelzrinde an terrestrischen Körpern gleicher Natur haben gezeigt, dass das Aussehen und die Constitution der Kruste durch eine plötzliche, blitzartige Schmelzung erklärt werden können[2]).

Ihrer chemischen Constitution nach bestehen die Meteormassen entweder aus gediegenem, metallischem Eisen oder aus Gesteinen, oder aus Gemengen beider; in den Steinmeteoren findet man kleine Krystalle eingesprengt, was ebenfalls auf eine rasche Abkühlung oder heftige Erschütterung während der Krystallisation hindeutet, da bei Schmelzung und langsamer Abkühlung sich grosse, ausgesprochene Krystalle bilden.

Unter den vielen Eintheilungen, welche für Meteormassen gegeben wurden, ist die consequenteste die von DAUBRÉE[3]) gegebene; er theilt die Meteormassen in:

A. Siderite, welche Eisen enthalten,

B. Asiderite, welche kein Eisen enthalten.

A. Zu den Sideriten gehören: I. Holosideren, welche nur Eisen enthalten, oder Gesteinsbeimengungen in so geringen Quantitäten, dass nur die chemische Analyse sie nachzuweisen vermag, sie sind sehr selten, etwa 1% aller Meteorfälle. Diese nach ROSE vorzugsweise als Meteoreisen benannten Massen bestehen aus einer Legirung von Eisen mit geringen Quantitäten (bis zu 20%) Nickel. Die auftretenden nichtmetallischen Bestandtheile sind: phosphorsaures Nickeleisen (Schreibersit), Spuren von Silicium. An der polirten Oberfläche des Meteoreisens treten, wenn dieselbe mit Salpetersäure geätzt wird, die sogen. WIDMANNSTÄTTEN-schen Figuren, d. s. zarte Linien und Zeichnungen hervor, aus welchen man erkennen kann, dass die Masse krystallinisch ist, aus dünnen Lagen einzelner, feiner Krystalle bestehend.

---

1) »Entwurf einer astronomischen Theorie der Sternschnuppen«, pag. 27.

2) Wohl die ersten Versuche dieser Art rühren von SCHREIBERS (1816) her. In neuerer Zeit wurde von H. RAUSCH versucht, diese Schmelzrinde als durch wiederholte oberflächliche Schmelzung der Masse beim Durchgange durch das Perihel zu erklären. Der Widerlegung dieser Ansicht hat v. NIESSL einen grossen Theil seiner Abhandlung »Ueber die Periheldistanzen und die Bahnelemente jener Meteoriten, deren Fallerscheinungen mit einiger Sicherheit beobachtet werden konnten, Brünn 1891« gewidmet. Er untersuchte die Bahnen von 86 Meteoriten und fand, dass von diesen nur für einen, denjenigen von Tieschitz (gefallen 15. Juli 1878), gleichgiltig ob man die kosmische Geschwindigkeit gleich 2, $\sqrt{2}$ oder $\sqrt{1\cdot 5}$ annimmt, die Periheldistanz kleiner ist als diejenige des Mercur; und ausserdem noch für 5, resp. 6 kleiner als diejenige der Venus, und zwar für die Fälle von Toulouse (gefallen 10. April 1812), Hraschina (gefallen 26. Mai 1751), Villanova (gefallen 29. Februar 1868), Blansko (gefallen 25. November 1833) unter jeder der drei Annahmen, und für diejenigen von Jowa City (gefallen 15. November 1861), für $v = \sqrt{2}$ oder 2 oder aber für die beiden von Stannern (gefallen 22. Mai 1808) und Agen (gefallen 5. September 1814) für die Annahme $v = \sqrt{1\cdot 5}$. An eine Schmelzung in diesen Entfernungen kann aber bei der bekannten Constitution dieser (zur Erde gefallenen) Meteore nicht gedacht werden.

3) Compt. rend., Bd. 65, pag. 60.

II. Syssideren, wo in den Gemengen von Eisen und Gestein das erstere in compakten Massen auftritt, und die Gesteine, zumeist Olivin, Bronzit, nur in mässigen Quantitäten eingestreut, vorkommen (nach Rose Pallasit genannt).

III. Sporadosideren, in denen die Gesteinsmassen vorwiegen. Sie enthalten das Eisen:

1) in grösseren Massen, compakt: Polysideren (nach Rose Mesosiderit).

2) in kleinen Massen, eingestreut: Oligosideren. Sie bestehen aus Silikaten, und zwar vorwiegend aus Aluminium-, Calcium-, Eisen-, Magnesiumsilikaten (Anorthit, Augit, Bronzit, Diopsit, Enstatit, Olivin), aus reiner Kieselsäure (Quarz) und enthalten ferner die Sulfide von Eisen, Kupfer, Chrom (Magnetkies, Magneteisenerz, Kupferkies, Chromeisenerz), dann das metallische Eisen, Nickeleisen, Phosphornickeleisen. Rose unterscheidet: a) Chondrite, feinkörnige Gemenge von Bronzit und Olivin mit eingelagerten Eisenkörnern (Chondren). b) Howardite, feinkörnige Gemenge von Anorthit, Augit, Olivin mit eingelagertem Eisen, Schwefeleisen und Chromeisenerz; von diesen trennt er die beiden folgenden, seltener auftretenden Formen: c) Chladnit, nur durch zwei Exemplare vertreten: die Meteorsteine von Bishopwill und Bussi; d) Chassignit (eisenreicher Olivin) nur durch ein einzelnes Exemplar vertreten (Meteorstein von Chassigny).

3) Eisen in äusserst kleinen Quantitäten: Cryptosideren. Zu diesen gehören die von Rose als Eukrit bezeichneten Meteormassen.

B. Die Asiderite, welche überhaupt kein Eisen enthalten, bilden die Asideren. Zu diesen gehören unter anderen die folgenden beiden Formen von Rose: a) der Shalkit (nur durch ein Exemplar vertreten: Meteorit von Shalka) und b) die kohligen Meteorite von Bokkeweld und Alais.

Auf die viel kleineren Feuererscheinungen, welche in der Luft auftreten, wurde man, obgleich dieselben viel häufiger sind, erst viel später aufmerksam. Die Hauptursache dafür ist wohl darin zu suchen, dass sie in grösserer Zahl nur in den Morgenstunden sichtbar sind, und dass die vereinzelt auftretenden der frühen Nachtstunden, wenn sie überhaupt beachtet wurden, nicht viel Anlass zum Nachdenken gaben. Erst Lichtenberg (seit 1770 Professor in Göttingen) scheint denselben eine grössere Aufmerksamkeit zugewendet zu haben, und zwei seiner Schüler Brandes und Benzenberg, fassten schon 1798 den Plan, correspondirende Beobachtungen dieser vereinzelten Feuererscheinungen, Sternschnuppen, an verschiedenen Punkten zu machen, um deren Höhe zu bestimmen. Als Standlinie wählten sie ursprünglich die etwas über eine deutsche Meile von einander entfernten Punkte Clausberg und Ellershausen bei Göttingen, später Clausberg und den etwa drei Meilen davon entfernten Ort Sesebühl bei Dransfeld. Zwischen 11. September und 4. November 1798 beobachteten sie zusammen 402 Sternschnuppen, aus welchen sie aus der Beobachtungszeit und den begleitenden Umständen (Bewegungsrichtung, Grösse etc.) 22 als identisch erkannten. Aus diesen fanden sie die Höhe derselben: für 7 unter 10 Meilen, für 9 zwischen 10 und 20 Meilen, für 5 zwischen 20 und 30 Meilen, und für eine über 30 Meilen. Diese Höhen zeigten zum ersten Male zur Evidenz, was früher nur aus einzelnen Beobachtungen gefolgert und immer wieder angezweifelt wurde: die grosse Höhe der Sternschnuppen und ihre Identität mit Feuerkugeln. Schon Chladni hatte in seiner 1794 erschienenen Monographie über die Pallas'sche Eisenmasse die Höhe einzelner Feuerkugeln berechnet, und daraus im Verein mit der Länge des zurückgelegten Weges am Himmel im Bogen auf die Länge des Weges in Kilometern geschlossen, welche mit Rücksicht auf die Zeitdauer der Erscheinung die Ge-

schwindigkeit gab. Sind $\alpha_1$, $\delta_1$ die Rectascension und Deklination des Aufblitzens, $\alpha_2$, $\delta_2$ Rectascension und Deklination des Verschwindens einer Feuerkugel, so wird die Lange des Weges am Himmel (der Bogen des grössten Kreises) aus dem sphärischen Dreieck, dessen Ecken der Pol des Aequators und die beiden genannten Punkte sind, gefunden:

$$\cos s = \sin \delta_1 \sin \delta_2 + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos (\alpha_2 - \alpha_1).$$

Ist die Höhe der Feuerkugel gleich $h$ *km* gefunden worden, so wird diesem Bogen $s$ ein linearer Weg $h \operatorname{arc} s$ entsprechen[1]. Hat man nun die Dauer der Erscheinung gleich $t$ Secunden notirt, so wird die Geschwindigkeit $\left(\frac{h \operatorname{arc} s}{t}\right)$ *km* pro Secunde. CHLADNI fand für die Feuerkugel vom 17. Mai 1719 wenigstens 5 deutsche Meilen pro Secunde, für diejenige vom 26. November 1758: $6\frac{1}{4}$ deutsche Meilen; für eine andere vom 17. Juli 1771: $4\frac{1}{2}$ bis 6 deutsche Meilen, also die Geschwindigkeit der Bewegung vergleichbar mit der kosmischen Geschwindigkeit der Erde und anderer Himmelskörper in ihren Bahnen. Die Resultate wurden vielfach für nicht beweisend erklärt; bei der kurzen Dauer der Erscheinung ist man selbstverständlich bei dieser Art von Beobachtungen auf Schätzungen der Orte am Himmel für den Anfangs- und Endpunkt der Bahn angewiesen, und ebenso wird die Angabe der Zeitdauer der Erscheinung eine blosse Schätzung sein. Aus einigen wenigen Beobachtungen wird daher der Schluss nur sehr unsicher. Noch fraglicher blieb aber die von CHLADNI vermuthete Identität zwischen Feuerkugeln und Sternschnuppen. Seine Beobachtungen beruhten ja ausschliesslich auf den, wenigstens öfter und an verschiedenen Orten beobachteten, also in gegebenen Fällen leicht als identisch zu erkennenden Feuerkugeln, aber durchaus nicht auf Sternschnuppen. CHLADNI erklärte, nachdem er die älteren Ansichten über den terrestrischen Ursprung der Feuerkugeln ausführlich widerlegt hat, die Feuerkugeln als dichte, schwere, im Weltraum zerstreute Massen, »in welchem sie sich, durch die Wurfkraft oder Anziehung getrieben, so lange fortbewegen, bis sie etwa einmal der Erde oder einem anderen Weltkörper nahe kommen, und von dessen Anziehungskraft ergriffen, darauf niederfallen. Durch ihre äusserst schnelle und vermöge der Anziehungskraft der Erde noch mehr beschleunigte Bewegung muss nothwendig wegen der heftigen Reibung in der Atmosphäre eine sehr starke Elektricität und Hitze erregt werden, wodurch sie in einen brennenden und geschmolzenen Zustand gerathen, und eine Menge Dünste und Luftarten sich darinnen entwickeln, welche die Masse zu einer ungeheuren Grösse aufblähen, bis sie endlich bei einer noch stärkeren Entwickelung solcher elastischer Flüssigkeiten zerspringen muss. Gegen das wirkliche Brennen dieser Körper ist von einigen eingewendet worden, dass in einer so beträchtlichen Höhe die Luft so dünn und so unrein sein muss, dass kein Brennen daselbst stattfinden könne. Aber abgesehen davon, dass man noch gar nicht weiss, in welcher Höhe die Luft nicht mehr zur Unterhaltung des Feuers tauglich ist, so wird auch die etwas geringere Tauglichkeit der Luft durch die Schnelligkeit der Bewegung dieser Massen reichlich ersetzt«[2]. Auch hebt er gleich eingangs seiner Schrift hervor,

---

[1] Dabei ist auf die verschiedene Höhe des Aufblitzens und Verschwindens nicht Rücksicht genommen. Hierüber vergl. pag. 134 ff. Die älteste Messung ist wohl diejenige von HALLEY, welcher für die Höhe einer Feuerkugel 90 englische Meilen (114·8 *km*) fand.

[2] l. c., pag. 24/5.

dass die Meteormassen ihren Ursprung in den Feuerkugeln haben, und dass sich diese in einer wahrscheinlich parabolischen Bahn im Weltraume bewegen (was er, wie es scheint, aus ihren kosmischen Geschwindigkeiten schliesst). Endlich bemerkt CHLADNI, dass Sternschnuppen sich von den Feuerkugeln nur durch ihre schnellere Bewegung unterscheiden[1]), womit bereits alle drei Arten von Meteorerscheinungen als identisch erklärt erscheinen, was er auch (pag. 56) besonders hervorhebt: »Aus dem, was bisher vorgetragen wurde, ist zu ersehen, dass folgende 4 Naturerscheinungen, von denen noch keine einzige auf eine befriedigende Art erklärt worden, sich durch einander selbst erklären, sobald man ihre Identität annimmt: 1) die sonderbare Beschaffenheit des PALLAS'schen und ähnlicher Eisenmassen; 2) die Feuerkugeln, 3) die Sternschnuppen, 4) das Herabfallen eisenhaltiger Massen.«

Für die Sternschnuppen war jedoch in keiner Weise ein Beweis geliefert; die Annahme der Identität derselben mit den Feuerkugeln war ein, allerdings sehr naheliegender Inductionsschluss. Nichtsdestoweniger findet man noch viel später eine Trennung dieser Erscheinungen. QUETELET meint, man habe sehr häufig Sternschnuppen mit Aerolithen, Boliden und Staubfällen verwechselt; er hält aber ihren Ursprung für sehr verschieden: Niemand hat noch eine Sternschnuppe berührt[2]). Es ist jedoch eine der Logik widerstreitende Forderung, eine Sternschnuppe berühren zu wollen. In dem Momente, wo sie zur Erde fällt, ist sie, in der ursprünglichen Bedeutung der Worte, nicht mehr als Sternschnuppe, sondern als Meteorsteinfall zu bezeichnen. SCHIAPARELLI meint allerdings[3]), dass drei sicher verbürgte Fälle angeführt werden, wo Sternschnuppen auf die Erde fielen; damit ist aber nur das wirklich beobachtete Fallen von Meteormassen unter den bekannten Begleiterscheinungen der Feuerkugeln verstanden, welche hierbei an Stelle der sonst die Meteorsteinfälle charakterisirenden Begleiterscheinungen treten.

In Deutschland waren die ersten Anhänger CHLADNI's v. ZACH und OLBERS; der letztere hielt die Meteorsteine anfänglich für Mondsteine, d. h. für Steine, welche aus Mondvulkanen mit einer grossen Geschwindigkeit herausgeschleudert wurden, so dass sie bis zu jenem Punkte kamen, wo die Anziehung der Erde diejenige des Mondes überwiegt, und sie in Folge dessen von der Erde angezogen würden und nicht mehr zum Monde zurückkehren könnten.

Die Beobachtungen von BRANDES und BENZENBERG aber über die Höhe der Sternschnuppen bildeten den bis dahin fehlenden Beweis für die Identität der Sternschnuppen mit den Feuerkugeln, und gleichzeitig den Beweis, dass die kosmischen Geschwindigkeiten, wie sie früher in vereinzelten Fällen gefunden wurden, allen Körpern dieser Art zukommen. OLBERS gesteht[4]), dass es die Beobachtungen von BRANDES (die inzwischen wesentlich vermehrt worden waren) über die Geschwindigkeit der Sternschnuppen waren, welche seine frühere Annahme widerlegten. Die Geschwindigkeit, welche einem Körper auf dem Monde ertheilt werden müsste, damit er nicht mehr zum Monde zurückkehren könne, wäre nämlich ca. 7967 Pariser Fuss (2·59 $km$), und dann würden die Massen mit einer Geschwindigkeit von 35000 Pariser Fuss (11·37 $km$) zur Erde gelangen. Damit dieselben aber mit den beobachteten Geschwindigkeiten von 4 bis 6 deutschen

---

[1]) Jetzt ist das Gegentheil erwiesen.

[2]) Physique du Globe, pag. 319.

[3]) l. c., pag. 197.

[4]) SCHUMACHER's Jahrbuch für 1837, pag. 54.

Meilen (30 bis 45 *km*) zur Erde gelangen könnten, müsste man annehmen, dass dieselben vom Monde mit einer Geschwindigkeit von 110000 Pariser Fuss (35·7 *km*) pro Secunde fortgeschleudert worden wären: dieses aber hält OLBERS für nicht mehr wahrscheinlich.

Ueber die Beziehungen zwischen Sternschnuppen und Feuerkugeln spricht sich OLBERS in »SCHUMACHER's Jahrbuch« für 1837 dahin aus, dass sich zwischen beiden kein Unterschied angeben lasst; »sie gehen in einander über«. Sie haben dieselben Höhen, dieselben Geschwindigkeiten, dasselbe Aussehen, ganz ähnliche Schweife. Allein unter den Sternschnuppen selbst macht OLBERS einen Unterschied, der allerdings nicht in ihrem Aussehen begründet ist, sondern in ihrer uns unbekannten Materie. »Ein Theil der Sternschnuppen wenigstens muss also mit den Feuerkugeln gleichen Ursprung, gleiche Beschaffenheit haben, und wir können ohne Bedenken das, was von den Feuerkugeln erforscht, erwiesen, oder wahrscheinlich gemacht ist, auch auf diese Sternschnuppen anwenden. Aber sind denn die Sternschnuppen wirklich untereinander wesentlich verschieden? Ich glaube es mit BRANDES, ob ich gleich nach meinen Erfahrungen nicht alle von ihm angegebenen Verschiedenheiten bestätigen kann . . . es mag unter den Sternschnuppen einige geben, die bloss elektrische Funken sind, oder in unserer Atmosphare aus bekannten oder noch unbekannten, sich entzündenden oder bloss phosphorescirenden Gasarten und Dämpfen oder auf andere Art entstehen: der grosste Theil der Sternschnuppen bleibt mit den Feuerkugeln identisch[1])«

Auch OLMSTED hatte 1834, als er bereits nicht nur den kosmischen (nicht tellurischen) Charakter der Sternschnuppen erkannt hatte, sondern auch die ersten Versuche zu einer Bahnbestimmung für die Novembermeteore vornahm, die gleichartige Zusammensetzung der Sternschnuppen und der Meteormassen geleugnet; als Grund hierfür führt er an, dass er nicht begreifen könne, wie solche Massen in so kurzer Zeit einer so vollständigen Zerstörung unterliegen könnten[2]).

In England wurde CHLADNI's Schrift durch EDUARD KING, welcher 1796 einen Auszug derselben in seiner Abhandlung »Remarks concerning stars, said to have fallen from the Clouds« gab, bekannt, jedoch in einer etwas modificirten, oft entstellten, und nicht zu billigenden Form. Dass CHLADNI's Meinung in Frankreich unbekannt blieb oder nicht gebilligt wurde, geht schon aus dem pag. 106 von dem Gutachten der Pariser Akademie über den Steinfall von Barbotan gesagten, hervor. Erst der Steinfall von L'Aigle bewirkte einen Umschwung der Meinung, und 1804 erschien eine französische Uebersetzung der CHLADNI'schen Schrift von EUGÈNE COQUEBERT.

Den Beobachtungen von BRANDES und BENZENBERG wurde allgemein wenig Interesse entgegengebracht; ihr Beispiel fand auch keine Nachahmung. Erst als in Europa die Einzelheiten des grossen Sternschnuppenfalls von 1799 bekannt wurden, änderte sich die Sachlage. In Europa selbst war der Sternschnuppenfall wenig auffällig; er wurde zwar an vielen Punkten Deutschlands gesehen, auch im Norden Europas, und selbst in Grönland wahrgenommen; nirgends aber bot er besonders auffällige Momente, wenn auch die Zahl der Sternschnuppen über den normalen, gewohnten Durchschnitt stieg. Um so grossartiger entfaltete sich das Schauspiel in Süd-Amerika, und theilweise auch in den südlichen Theilen von Nord-Amerika. HUMBOLDT beschreibt denselben in

---

[1]) l. c., pag. 50.

[2]) SILLIMAN, I. Serie, Bd. 26, pag. 152.

seiner »Reise in die Aequinoctialgegenden des neuen Continents[1]« folgendermaassen.

»Die Nacht vom 11. zum 12. November (1799) war kühl und ausnehmend schön. Gegen Morgen von 2½ Uhr an, sah man gegen Ost höchst merkwürdige Feuermeteore. BONPLAND, der aufgestanden war, um auf der Gallerie der Kühle zu geniessen, bemerkte sie zuerst. Tausende von Feuerkugeln und Sternschnuppen fielen hintereinander, vier Stunden lang. Ihre Richtung war sehr regelmässig von Nord nach Süd; sie füllten ein Stück des Himmels, das vom wahren Ostpunkte 30° nach Nord und nach Süd reichte. . . Nach BONPLAND's Aussage war gleich zu Anfang der Erscheinung kein Stück am Himmel so gross als drei Monddurchmesser, das nicht jeden Augenblick von Feuerkugeln und Sternschnuppen gewimmelt hätte. Der ersteren waren wenigere; da man ihrer aber von verschiedenen Grössen sah, so war zwischen diesen beiden Klassen von Erscheinungen unmöglich eine Grenze zu ziehen. Alle Meteore liessen 8 bis 10° lange Lichtstreifen hinter sich zurück, was zwischen den Wendekreisen häufig vorkommt. Die Phosphorescenz dieser Lichtstreifen hielt 7 bis 8 Secunden an. Manche Sternschnuppen hatten einen sehr deutlichen Kern von der Grösse der Jupiterscheibe, von dem sehr stark leuchtende Lichtfunken ausfuhren. Die Feuerkugeln schienen wie durch Explosion zu platzen; aber die grössten, von 1° bis 1° 13' Durchmesser, verschwanden ohne Funkenwerfen, und liessen leuchtende, 15—20 Minuten breite Streifen *(trabes)* hinter sich. Das Licht der Meteore war weiss, nicht röthlich, wahrscheinlich, weil die Luft ganz dunstfrei und sehr durchsichtig war. . . Fast alle Einwohner von Cumana sahen die Erscheinung mit an, weil sie vor 4 Uhr aus den Häusern gehen, um die Frühmesse zu hören. Der Anblick der Feuerkugeln war ihnen keineswegs gleichgültig; die ältesten erinnerten sich, dass dem grossen Erdbeben des Jahres 1766 ein ganz ähnliches Phänomen vorausgegangen war. . .« (pag. 51/52).

»Von 4 Uhr an hörte die Erscheinung allmählich auf; Feuerkugeln und Sternschnuppen wurden seltener, indessen konnte man noch eine Viertelstunde nach Sonnenaufgang mehrere an ihrem weissen Lichte und dem raschen Hinfahren erkennen . . . . .« (pag. 52). »Da bei meinem Abgange von Europa die Physiker durch CHLADNI's Untersuchungen auf Feuerkugeln und Sternschnuppen besonders aufmerksam geworden waren, so versäumten wir auf unserer Reise von Caracas nach dem Rio Negro nicht, uns überall zu erkundigen, ob am 12. November die Meteore gesehen worden seien . . . . . Der Kapuziner in der Mission San Fernando de Apure, die mitten in den Savannen der Provinz Varinas liegt, die Franziskaner an den Fällen des Orinoko und in Maroa am Rio Negro hatten zahllose Sternschnuppen und Feuerkugeln das Himmelsgewölbe beleuchten sehen. Maroa liegt 780 *km* südwestlich von Cumana. Alle diese Beobachter verglichen das Phänomen mit einem schönen Feuerwerk, das von 3 bis 6 Uhr morgens gewährt . . . . . Am Süd-Ende von spanisch Guyana, im kleinen Fort San Carlos, traf ich Portugiesen, die von der Mission San José dos Maravitanos den Rio Negro heraufgefahren waren. Sie versicherten mich, in diesem Theile Brasiliens sei die Erscheinung zum wenigsten bis San Gabriel das Cachoeiras, also bis zum Aequator sichtbar gewesen.

»Ich wunderte mich sehr über die ungeheure Höhe, in der die Feuerkugeln gestanden haben mussten, um zu gleicher Zeit in Cumana und an der Grenze von Brasilien, auf einer Strecke von 1035 *km* gesehen zu werden. Wie staunte

[1]) Gesammelte Werke, Cotta'sche Ausgabe, Bd. 6.

ich aber, als ich bei meiner Rückkehr nach Europa erfuhr, dieselbe Erscheinung sei auf einem 64 Breiten- und 91 Längengrade grossen Stück des Erdballes, unter dem Aequator, in Südamerika, in Labrador und in Deutschland gesehen worden! . . .« (pag. 53/54).

»Von Weimar an den Rio Negro sind es 8840 *km*, vom Rio Negro nach Herrnhut in Grönland 5850 *km*. Sind an so weit auseinander gelegenen Punkten dieselben Meteore gesehen worden, so setzt dies für dieselben eine Höhe von 1850 *km* voraus . . . . Ich möchte fast glauben, dass die Chaymas in Cumana nicht dieselben Feuerkugeln gesehen haben, wie die Portugiesen in Brasilien und die Missionäre in Labrador . . . . . Die Physiker (BENZENBERG und BRANDES), welche in neuerer Zeit über die Sternschnuppen und ihre Parallaxen so mühsame Untersuchungen angestellt haben, betrachten sie als Meteore, die der äussersten Grenze unseres Luftkreises, dem Raume zwischen der Region des Nordlichtes und der der leichtesten Wolken angehoren. . . . Welchen Ursprung nun auch diese Feuermeteore haben mögen, so hält es schwer, sich in einer Region, wo die Luft verdünnter ist, als im luftleeren Raume unserer Luftpumpen, wo (in 49 *km* Höhe) das Quecksilber im Barometer nicht 0·024 *mm* hoch stände, sich eine plötzliche Entzündung zu denken. . . . Man könnte annehmen, bei den frühesten Umwälzungen des Erdballes seien Gase, die uns bis jetzt ganz unbekannt geblieben, in die Luftregion aufgestiegen, in der sich die Sternschnuppen bewegen; aber aus genauen Versuchen mit Gemischen von Gasen von verschiedenem specifischen Gewichte geht hervor, dass eine oberste, von den unteren Schichten ganz verschiedene Luftschichte undenkbar ist . . . . Diese Schwierigkeiten würden grossentheils beseitigt, wenn man die Sternschnuppen nach der Richtung, in der sie sich bewegen, als Körper mit festem Kern, als kosmische (dem Himmelsraume ausserhalb unseres Luftkreises angehörige) nicht als tellurische (nur unserem Planeten angehörige) Erscheinungen betrachten könnte.« (pag. 57).

HUMBOLDT führt hier in seinem Berufung auf CHLADNI an, dass dieser die Sternschnuppen als den äussersten Grenzen des Luftkreises dem Raume zwischen der Region des Nordlichtes und der der leichtesten Wolken angehörig, betrachtet; dieses kann jedoch nur auf ein Missverstehen der CHLADNI'schen Meinung zurückgeführt werden. Merkwürdig ist, dass sich in der nächsten Zeit die Meinung herausbildete, dass die Sternschnuppen, aus dem Weltraume kommend, durch die Anziehung der Erde zu Satelliten derselben werden. LAPLACE sieht dieses als eine bekannte Thatsache an, er schreibt in der Connaissance des temps für 1816 (pag. 213) in einem Aufsatze: »*Sur les Comètes*«: »Les Comètes seraient ainsi relativement au système solaire, ce que les aerolithes sont par rapport à la terre, à laquelles elles paraissent étrangères.« Die Erscheinung der Kometen, als aus dem Weltraume kommende, dem Sonnensysteme einverleibter Körper, wird hierbei mit denjenigen der in gleicher Weise aus dem Weltraum kommenden, zu Satelliten der Erde umgewandelten Aerolithen erklärt. Dieselbe Meinung äussert H. DAVY in seinen »Untersuchungen über die Flamme«[1]). Er sagt: »Die Thatsachen, welche in dem ersten Abschnitte dargestellt sind, enthalten den Beweis in sich, dass das Licht der Sternschnuppen und der Meteore nicht von einem Entflammen (*inflammation*) elastischer Flüssigkeiten herrühren kann, sondern dass es auf dem Glühen (*ignition*) fester Körper beruhen muss. . . . Diese Körper bewegen sich auf jeden Fall mit einer ungeheuren Geschwindigkeit, bei der sie fähig sind, in der allerverdünntesten Luft eine Verdichtung zu bewirken, welche hinreicht, aus ihr

[1]) GILBERT's Annalen der Physik, I. Serie, Bd. 56, pag. 240.

hinlänglich viel Wärme zu entbinden, um diese Körper zu entzünden. Man wird daher alle diese Phänomene erklären können, wenn man annimmt, dass die Sternschnuppen kleine, feste Körper sind, welche sich um die Erde in sehr excentrischen Bahnen bewegen, und sich bloss dann entzünden, wenn sie mit unermesslicher Geschwindigkeit durch die oberen Theile der Atmosphäre hindurchziehen, und dass diejenigen dieser Meteore, welche Steine herausschleudern, indem sie explodiren, ähnliche Körper sind, welche eine verbrennliche oder elastische Materie enthalten.«.

In seiner zweiten Schrift »Ueber die Feuermeteore und über die mit denselben herabgefallenen Massen« beschränkt sich CHLADNI nicht bloss auf eine Erweiterung seiner ersten Schrift, sondern er macht auf einige bei den Sternschnuppen gemachte Beobachtungen, auf gewisse anomale Bewegungen, auf das Verhältniss der kosmischen Geschwindigkeiten, mit denen die Meteore in die Luft eintreten, zu denjenigen, mit denen sie zur Erde gelangen, auf den Ursprung der Sternschnuppen u. s. w. aufmerksam, wovon später an seiner Stelle die Rede sein wird. Ferner vergleicht er bereits die Zahl der Sternschnuppen nach den Tages- und Jahreszeiten, wo allerdings mehr die Anregung zu diesen Zählungen, als seine aus nur wenigen Beobachtungen gefolgerten, von den späteren wesentlich verschiedenen Resultate, zu erwähnen sind.

BRANDES hatte im Jahre 1823 neuerdings correspondirende Beobachtungen zur Bestimmung der Höhe der Sternschnuppen aufgenommen, und einen weit ausgedehnteren Plan dafür entworfen. Seine Mitarbeiter waren[1]): SCHOLZ in Leipe bei Bolkenhain und OTTAWA in Trebnitz (beides Schüler von BRANDES), LIEDTKY und WOLF in Gleiwitz (Gymnasiallehrer daselbst), PETZOLDT in Neisse (Gymnasiallehrer daselbst), LOHRMANN und PRESSLER in Dresden, Baron VON RICHTHOFEN auf Brechelshof bei Jauer; Lieutenant VON PRITTWITZ in Berlin, KRZIZANOWSKY in Krakau, Dr. HEILBRONN in Brieg und BRETTNER, DOVE, FELDT, GEBAUER, NEPILLY, TÜRKHEIM, WEBER und WICHER in Breslau. Für diese Zahl der Beobachter waren aber die erhaltenen Beobachtungen nicht gerade allzu zahlreich: BRANDES erhielt Höhenbestimmungen für 68 Sternschnuppen. Bemerkenswerth aber ist, dass er bereits das Vorherrschen einer gewissen Bewegungsrichtung bei den Sternschnuppen constatirte, und dafür auch die richtige Ursache angab.

Um dieselbe Zeit hatte auch QUETELET, ohne von den Untersuchungen von BRANDES zu wissen, seine Untersuchungen über die Sternschnuppen begonnen[2]); bald darauf, nach der Wiederkehr des grossen Sternschnuppenphänomens im Jahre 1833, wurde OLMSTEDT auf die Periodicität der Erscheinung geführt und damit waren, um die Worte BESSELS zu gebrauchen, die Sternschnuppen »zu Gegenständen der Aufmerksamkeit des Astronomen geworden, und forderten diesen auf, auch ihre nähere Untersuchung, als nicht ausser seinem Kreise liegend, zu betrachten.« Die erste praktische Aufforderung dieser Art war wohl diejenige, welche ARAGO in den Instructionen für die Officiere des Schiffes »La Bonite« bezüglich der astronomischen Beobachtungen der Sternschnuppen giebt. Die Officiere des Schiffes wurden angewiesen, die Zeit der Erscheinung der Sternschnuppen, ihren Ort am Himmel und die Richtung der Bewegung zu notiren[3]).

Gegen den kosmischen Ursprung der Meteore schien auch der Umstand zu sprechen, dass dieselben oft mit heftigen Winden und plötzlicher Abkühlung auftraten. Dass dieses eine nothwendige Begleiterscheinung der Sternschnuppenfälle

[1]) Vergl. seine »Unterhaltungen für Freunde der Physik u. Astronomie«, Leipzig 1825, pag. 5.
[2]) »Physique du Globe«, pag. 267.
[3]) Compt. rend., Bd. I, pag. 393.

ist, ist längst widerlegt; hingegen treten Fälle von Meteormassen, detonirenden Feuerkugeln u. s. w. mitunter mit derartigen Begleiterscheinungen auf, und es herrschte daher die Ansicht, dass die meteorologischen Processe primär und die auftretenden Feuerkugeln eine secundäre Erscheinung wären. OLMSTEDT war der erste, der die meteorologischen Processe als eine Folge der Sternschnuppenfälle — er dehnt dabei die Begleiterscheinungen auf alle diese Processe aus — darstellte: es wird eine grosse Menge Luft aus den oberen Regionen von der grösseren Geschwindigkeit der täglichen Bewegung in die unteren Regionen kleinerer Geschwindigkeit geführt, wodurch nothwendig ein Westwind entstehen muss; da überdiess die starke Erhitzung der Luft sich nur auf die die Sternschnuppen unmittelbar umgebenden Theile der Luft erstreckt, und auf entferntere Theile nicht so schnell fortpflanzt, so wird die mitgeführte Luft zumeist kalt und eisig sein, daher die plötzliche Abkühlung. Jedenfalls kann dieser Verlauf der Erscheinungen eintreten, wenn die entwickelte Wärme nicht jene abnorme Höhe, wie beim Glühen der Meteormassen hat, also bei den Staubfällen, welche daher auch zumeist von plötzlichen Condensationen der in der Luft befindlichen Dünste, also von heftigem Regen begleitet, auftreten.

Am spätesten wurden die Grösse und Farbe, überhaupt das äussere Aussehen in den Kreis der Untersuchungen gezogen, zum ersten Male geschah dieses, wenigstens in systematischer Weise von SCHMIDT, welcher erwähnte, dass es zur Untersuchung über die physische Constitution nicht genügt, die Sternschnuppen als Punkte zu betrachten.

Die Sternschnuppen erscheinen als plötzlich am Himmel aufblitzende, fixsternartige Lichtpunkte von verschiedener Grösse; als feine, kaum und selbst mit freiem Auge überhaupt nicht wahrzunehmende, nur im Fernrohr sichtbare Lichtpünktchen, durch alle Grössenabstufungen bis zu solchen von der Helligkeit der Fixsterne erster Grösse und selbst vom Glanze der Venus in ihrer Erdnähe: man hat solche beobachtet, die deutliche Schatten geworfen haben, und zu den zahlreichen kleineren Sternschnuppen treten auch zur selben Klasse von Körpern gehörige Feuerkugeln. Manche Sternschnuppen ändern ihre Helligkeit während ihrer Erscheinung; sie erscheinen klein, unansehnlich, und werden dann immer heller; oft entwickeln sich aus solchen Sternschnuppen Feuerkugeln der grössten Gattung, wie schon in einem Beispiele pag. 103 erwähnt ist. Eine andere, von HEIS am 26. September 1851 in Aachen beobachtete leuchtende Kugel nahm allmählich an Helligkeit und Grösse zu, bis sie auf etwa $\frac{1}{4}$ Monddurchmesser angewachsen war, und wurde dabei so hell, dass sie die ganze Stadt wie mit einem bengalischen Feuer erleuchtete. Am Ende ihrer Bahn blieb sie etwa 10 Secunden wie unbeweglich am Himmel, und verschwand durch Abnahme an Helligkeit.

Von diesen sternartigen, scharf begrenzten Sternschnuppen trennt SCHMIDT[1]) eine gewisse Gruppe von nicht scharf begrenzten, verwaschenen, deren Zahl durchaus nicht unbeträchtlich ist, und die er nebelige nennt. Der Grösse nach lassen sie sich in eine der sechs Grössenklassen einreihen, hingegen bleibt bei denselben, wie aus den SCHMIDT'schen Zusammenstellungen ersichtlich ist die Farbe unbestimmbar.

Dass die Sternschnuppen feste Körper sind, geht daraus hervor, dass sie continuirliche Spectra geben; dabei ist zu bemerken, dass bei denselben vorzugsweise das Grün mit bedeutender Intensität hervortritt[2]).

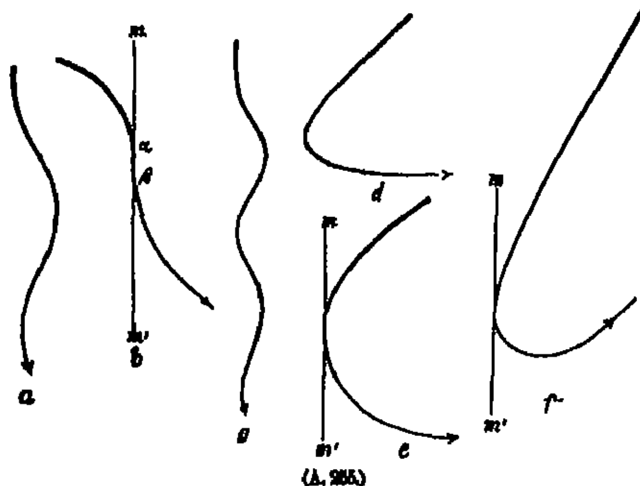
---

[1]) »Resultate aus zehnjährigen Beobachtungen über Sternschnuppen, Berlin 1852«, pag. 4.

[2]) Vergl. den Artikel »Astrospektroskopie«.

Die Sternschnuppen beschreiben am Himmel Bahnen, die oft nur 1° bis 2°, oft jedoch 8 bis 10° lang und auch länger sind, und verlöschen dann meist plötzlich. Ob das Aufleuchten plötzlich stattfindet oder nicht, kann im Allgemeinen nicht angegeben werden; meist sieht man eine Sternschnuppe erst, wenn sie schon einen, wenn auch nur kleinen Bruchtheil einer Secunde geleuchtet hat; nur dann, wenn man zufällig sein Auge auf die Stelle des Aufleuchtens gerichtet hatte, kann man dieses wirklich beobachten. Mit grösserer Sicherheit kann man über das Verschwinden der Sternschnuppen sprechen. Im Allgemeinen wird das Verschwinden derselben als plötzlich bezeichnet. Doch berichtet schon Bessel über einen Fall, in welchem Feldt eine fast oder ganz verschwundene Sternschnuppe aufs neue leuchtend werden, ihren Weg am Himmel noch beträchtlich weit fortsetzen und dann allmählich verschwinden sah. Fälle dieser Art sind später mehrfach aufgetreten. Zezioli beobachtete 4 Fälle, wo das Meteor in der Mitte seines Laufes unsichtbar war, und 4 andere, wo das Meteor abwechselnd erschien und wieder verschwand. Hierher gehörte z. B. auch der oben beschriebene Fall der von Heis am 26. September 1851 beobachteten Sternschnuppe.

Der Weg, den die Sternschnuppe an der scheinbaren Himmelskugel beschreibt, ist zumeist, wie man sich ausdrückt, eine gerade Linie, d. h. ein Bogen grössten Kreises. Ihre Bahn ist also entweder geradlinig, oder wenigstens in einer Ebene gelegen, die durch das Auge des Beobachters geht; dass aber die wirklichen Bahnen der Sternschnuppen gerade in Ebenen liegen, die eine ganz bestimmte Lage zu einem ganz bestimmten Beobachtungspunkte haben würden, in Ebenen, die durch diesen Beobachtungsort gehen sollten, ist viel weniger wahrscheinlich, als dass alle Bahnen geradlinig und beliebig im Raume vertheilt wären. Ueberdies hat man bei jenen Sternschnuppen, welche gleichzeitig an mehreren Orten gesehen wurden, an sämmtlichen Orten ihre scheinbaren Bahnen als grösste Kreise beobachtet, woraus folgt, dass ihre wahren Bahnen in denjenigen Ebenen liegen müssen, welche durch die bezüglichen grössten Kreise und die bezüglichen Beobachtungsorte gehen, also in der Schnittlinie dieser Ebene, d. h. in einer Geraden. Hieraus folgt dann aber auch, dass, wenn eine Sternschnuppe an mehreren Orten zugleich gesehen wurde, die sämmtlichen grössten Kreise sich in demselben Punkte an der Himmelskugel schneiden müssen,



(A. 255.)

nämlich in dem Punkte, in welchem die durch die Beobachtungspunkte zur Bewegungsrichtung gelegte Parallele die Himmelskugel trifft. Schneiden sich die grössten Kreise nicht sämmtlich in demselben Punkte, so gehören die Beobachtungen nicht derselben Sternschnuppe an.

Von der Bewegungsrichtung im grössten Kreise finden sich auch mannigfache Abweichungen; man sieht schlangenförmig (*a*, *b*, Fig. 255), wellenförmig (*c*) ge-

krümmte Bahnen; manche Sternschnuppen scheinen sich plötzlich(*d*) oder auch stetig (*e*) zurückzukrümmen, um ihre Bahn in einer gegen die frühere um einen beträchtlichen Winkel, oft sogar um 180° geänderten Richtung fortzusetzen; andere scheinen auch einen Moment still zu stehen, und dann ihre frühere Bahn fortzusetzen, oder auch in dieselbe wieder zurückzukehren; oft beobachtet man eine springende, schnellende Bewegung wie beim mehrfachen Abprallen eines bewegten Körpers von Widerständen. SCHMIDT beschreibt einige Fälle von ganz merkwürdigen Bewegungsanomalien; so z. B. bemerkte er am 17. September 1843 ein Meteor, das schussweise Sätze machte[1]); am 11. November 1849 beobachtete er in Bonn ein solches mit schlangenförmig gekrümmter Bahn, während HEIS in Aachen dasselbe sich in einer geradlinigen Bahn bewegen, aber abwechselnd aufleuchten und verschwinden sah, so dass für den ersten Anblick die Meteore als zwei verschiedene gelten konnten[2]).

Viele Sternschnuppen hinterlassen auf den zurückgelegten Bahnen eine leuchtende Spur, bei manchen sehr kleinen Sternschnuppen ist weiter nichts als diese Spur zu sehen, so dass sie sich nur als Lichtlinie darstellen. OLMSTEDT[3]) bezeichnet diese als *phosphoric lines*, und unterscheidet sie von den *luminous bodies*, welche ihre Bahn für längere Zeit sichtbar fortsetzen und der dritten Gattung, den grossen *fire balls*.

Von diesen Lichtlinien, »leuchtenden Bahnstücken«, welche nur subjektive Phänomene sind, entstanden durch den zurückbleibenden Eindruck, den das helle, rasch bewegte Meteor auf der Netzhaut des Auges zurücklässt, ist aber wohl zu unterscheiden der eigentliche Schweif der Sternschnuppe, welcher oft erst nach dem Verschwinden der Lichtlinie erscheint. SCHMIDT beschreibt diesen folgendermaassen[4]).

»Der Schweif hat selten parallele Ränder, manchmal eine besondere Farbe, und äusserst selten erkennbare, und dann sehr merkwürdige Bewegungen. Gewöhnlich ist der Schweif an seinen beiden Enden, namentlich am Anfange der Bahn, zugespitzt, und ist gegen den Punkt des Verlöschens hin, etwas breiter, zuweilen auch etwas heller. Ausnahmen mannigfacher Art sind sehr häufig. Der Schweif ist in einigen Fällen ganz gerade, mit deutlichem Durchmesser, und an seinen Rändern äusserst scharf begrenzt; er ist in der Mitte breiter, oft so breit, dass das Fragment eine elliptische Gestalt annimmt, zuweilen stellenweise abgebrochen, aus Stücken bestehend, die wiederum in der Mitte breiter, an den Enden zugespitzt erscheinen. Bei weitem in den meisten Fällen zeigt das Schweiffragment keine Spur von Bewegung. Dass solche aber, wenn auch äusserst selten, wirklich vorkommt, und dann gewöhnlich in auffallender Weise, ist nicht zu bezweifeln. . . .

»Am 24. Oktober 1845 um Mitternacht, als ich bei sehr heiterem Himmel mit Herrn Prof. ARGELANDER im Garten der Bonner Sternwarte Vergleichungen über die Helligkeit verschiedener Fixsterne anstellte, leuchtete plötzlich ein roter Blitzschein auf, der die Nacht schwach erhellte. Wir sahen sogleich gegen das Zenith, woselbst eben das letzte gelbrothe Fragment eines von O—W durch den Perseus ziehenden bedeutenden Meteors erlosch. Zwei 5° lange, ¼° breite, ganz gerade Schweifstücke blieben stehen, und von ihnen erlosch das östliche schon

---

[1]) l. c., pag. 10.
[2]) l. c., pag. 101.
[3]) SILLIMAN, I. Serie, Bd. 25, pag. 339.
[4]) »Resultate aus zehnjährigen Beobachtungen«, pag. 92.

nach 10 Secunden. Aber höchst auffallend war das Verhalten des grossen, gelblichweissen, in der Mitte breiteren Schweifstückes unter α Persei; nachdem es ungefähr 15 Secunden stark geleuchtet hatte, bemerkte zuerst Prof. ARGELANDER dass es sich zu krümmen begann. . . Das Schweiffragment, am Ende der ersten Minute der Sichtbarkeit schlangenförmig gekrümmt, hatte am Ende der zweiten Minute die Sichelform angenommen. Um $12^h\,3^m$ bemerkte ich im kleinen Fernrohre, dass an dem Punkte der stärksten Krümmung die Sichelgestalt des schon lichtschwächer gewordenen Schweifstückes auseinanderging. Es trennte sich dann völlig in zwei kleine Nebelflecken, deren letzte Spur ich mit freiem Auge noch um $12^h\,3^m{\cdot}5$ erkannte, mit dem Fernrohr aber um $12^h\,5^m$ erlöschen sah . . Der Durchmesser der kleinen Nebelmassen war gewiss 10 Bogenminuten.«

Diese mehr oder weniger kurzen Anhängsel, wirkliche Schweife der Sternschnuppen, welche übrigens nicht allzuhäufig auftreten, scheinen thatsächliche Residuen des durch Verbrennen theilweise oder ganz im Auflösen begriffenen, oder bereits aufgelösten Meteors zu sein. So beobachtete SCHMIDT am 23. September 1845 ein Meteor, das ein nebelartiges Fragment hinter sich zog, in welchem verschiedene matte, phosphorescirende Punkte zu erkennen waren[1]), und am 10. August 1850 ein Meteor, das einen in der Mitte breiteren Schweif zeigte, der fünf Secunden nach dem Verlöschen des Meteors nochmals stark aufglühte, und erst am Ende der zwanzigsten Secunde verschwand[2]).

Nach dieser allgemeinen Uebersicht kann nun an die Erörterung der wesentlichsten Punkte geschritten werden.

I. Die äussere Erscheinung der Meteore (Grösse, Farbe, Schweife). Mit normalem, nicht sehr scharfem und nicht sehr geschwächtem Auge sieht man in klaren Nächten die Sterne, welche man in die ersten sechs Grössenklassen getheilt hat, und es gehört nicht allzu viel Uebung dazu, diese Sternklassen von einander zu unterscheiden. Man wird daher auch leicht die Sternschnuppen der verschiedenen Grössen in eine dieser Klassen einreihen können.

Teleskopische Fixsterne sind in viel grösserer Anzahl vorhanden, wie mit freiem Auge sichtbare, und nach ARGELANDER beträgt die Zahl der zur 7., 8. und 9. Grössenklasse gehörigen Sterne etwa das 40fache der mit freiem Auge sichtbaren. Teleskopische Sternschnuppen hingegen gehören zu den Seltenheiten: nach SCHMIDT's Beobachtungen etwa 86 teleskopische auf 1000 mit freiem Auge sichtbare. Das] erste teleskopische Meteor sah J. H. SCHROETER im Jahre 1795. Er beschreibt dasselbe[3]) folgendermaassen: »Am 28. Juni 1795 um $11^h\,15_m$ zog sich ein äusserst feines und mattes, einer äusserst entfernten, sogenannten Sternschnuppe völlig ähnliches Lichtpünktchen von oben bis unten mitten durch das ganze Gesichtsfeld, so dass es dieses ungefähr in einer Secunde Zeit passirte . . . es strich zwar deutlich, aber so fein, und in milchfarbig gräulichem, äusserst schwachem Lichte durch das Gesichtsfeld, als wenn es kein Meteor in unserer Atmosphäre, sondern ein ätherisches, in dem sehr entfernten Himmelsraume wäre.« OLBERS bezweifelt in vielen Fällen die Realität der Erscheinung: »Die höchst seltenen Beispiele, wo andere Astronomen in grossen Teleskopen sehr kleine und blasse Sternschnuppen gesehen haben wollen, scheinen zum

---

[1]) ibid., pag. 22.
[2]) ibid., pag. 69.
[3]) »Aphroditographische Fragmente, Helmstadt 1796«, pag. 241.

Theile auf Verwechselung mit anderen Gegenständen zu beruhen[1]).« Nicht lange darauf aber sah MASON bei der Gradmessung in Pennsylvanien ungefähr 50 teleskopische Meteore, und 1839 zog SCHMIDT auch die teleskopischen Meteore in den Bereich seiner Untersuchungen.

Die Ursache der relativen Seltenheit der teleskopischen Meteore ist aber leicht einzusehen: Die Fixsterne sind bleibend, und können leicht verfolgt werden; die Sternschnuppen sind ephemere Erscheinungen, und die Wahrscheinlichkeit, dass ein Beobachter sein Fernrohr gerade auf einen Punkt des Himmels gerichtet hat, wo eine Sternschnuppe aufleuchtet oder passirt, ist nur sehr klein, und um so kleiner, je kleiner das Gesichtsfeld des Fernrohrs ist; daher werden die grösseren lichtstarken Fernrohre mit kleinem Gesichtsfelde sich zu Sternschnuppenbeobachtungen nicht eignen; man muss zu dergleichen Beobachtungen kleine Handfernrohre, eventuell die Kometensucher verwerthen, welche lichtstarke Objective, bei kurzer Brennweite und daher ziemlich grosses Gesichtsfeld (bis zu 4°) haben. KLEIBER findet[2]), dass ein Beobachter, der, ohne seinen Standpunkt und seine Stellung zu verändern, seinen Blick gegen den Himmel richtet, ein Gesichtsfeld von etwa 80° Oeffnungswinkel umfasst. Nimmt man an, dass das von SCHMIDT für seine Beobachtungen verwandte Fernrohr ein Gesichtsfeld von 8° hatte (er erwähnt nur, dass er hierzu ein »mittelstarkes« Fernrohr verwandte), so würde das von diesem umspannte Gesichtsfeld etwa $(\frac{1}{10})^2$ des sich dem freien Auge darbietenden betragen; die Anzahl der durch das Fernrohr am ganzen Himmel gesehenen Sternschnuppen wird gleich der Zahl der Sternschnuppen, welche durch eine grosse Anzahl, nämlich $(\frac{40}{4})^2$ auf verschiedene Punkte des Himmels gerichtete Fernrohre gesehen werden; setzt man voraus, dass

---

1) »SCHUMACHER's Jahrbuch für 1837«, pag. 37; bei mässig stark bewegten terrestrischen Objekten (fliegenden Vögeln) müsste aber die Geschwindigkeit selbst bei schwachen Vergrösserungen schon sehr gross sein; Objekte, die sich in stärker vergrössernden Fernrohren langsam bewegen, können daher kaum terrestrischen Objekten angehören.

2) Astronomische Nachrichten, Bd. 110, No. 2621 und No. 2638. Ist $p$ eine der Grösse des Gesichtsfeldes proportionale Grösse, welche die Wahrscheinlichkeit für das Aufleuchten eines Meteors darstellt, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Meteor nicht gesehen wird: $q = 1 - p$ und die Wahrscheinlichkeit, dass $n$ Beobachter dasselbe nicht sehen, $q^n = (1 - p)^n$, daher die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Meteor wenigstens von einem der $n$ Beobachter gesehen wird, $1 - q^n$. Ist nun aus Beobachtungen bekannt, dass 1, 2, 3 ... $n$ gleichzeitig beobachtende Beobachter $n_1, n_2 \ldots n_n$ Meteore sahen, so ist

$$1 - q = an_1;\ 1 - q^2 = an_2;\ \ldots\ 1 - q^n = an_n.$$

Daraus folgt durch Elimination des Proportionalitätsfaktors $a$:

$$1 + q = \frac{n_2}{n_1};\ 1 + q + q^2 = \frac{n_3}{n_1}\ \ldots\ 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{n_n}{n_1}$$

und durch Subtraktion:

$$q = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1}\right) = \left(\frac{n_3 - n_2}{n_1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{n_4 - n_3}{n_1}\right)^{\frac{1}{3}} = \ldots = \left(\frac{n_n - n_{n-1}}{n_1}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Versuche in dieser Richtung wurden von NEWTON mit 12 Beobachtern gemacht, und später von KLEIBER mit 8 Beobachtern.

| Ist die Zahl der Beobachter | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| so ist d. Zahl d. v. dens. gesch. Sternschn. nach | NEWTON | 386 | 683 | 834 | 1000 | 1114 | 1200 | 1279 | 1312 | 1404 | 1456 | 1508 | 1560 |
| | KLEIBER | 380 | 652 | 853 | 1000 | 1125 | 1250 | 1340 | 1405 | — | — | — | — |

Aus diesen Zahlen folgt nun $q = 0{\cdot}768$, demnach $p = 0{\cdot}232$, d. h. ein Beobachter sieht etwa $\frac{1}{4}$ aller am Himmel erscheinenden Meteore. Diese Anzahl ist der Grösse des Gesichtsfeldes proportional. Das Gesichtsfeld der Oberfläche für die ganze Halbkugel ist $2\pi$, das Gesichtsfeld einer Calotte vom Gesichtswinkel $2\alpha$ ist $2\pi(1 - \cos\alpha) = 4\pi \sin^2 \frac{1}{2}\alpha$, demnach $p = 2 \sin^2 \frac{1}{2}\alpha$. Hieraus bestimmt sich der Gesichtswinkel $2\alpha = 79°\,40'$ also etwa 80°.

die Zahl der Beobachtungsstunden, welche SCHMIDT auf teleskopische Meteore verwandte, gleich war derjenigen, welche er mit freiem Auge beobachtete, so würde die Zahl der teleskopischen Meteore etwa die 700 fache der von ihm beobachteten, also auf 1000 etwa 25000 sein, demnach das 25 fache der mit freiem Auge sichtbaren. Diese Zahl hat natürlich nicht einmal die gleiche Sicherheit wie die von ARGELANDER für die Fixsterne gefundene, es ist eben nur eine rohe Schätzung. Thatsächlich hatte SCHMIDT im Fernrohre einmal eine Sternschnuppe $1^m$, einmal eine zweiter Grösse, 2 mal solche dritter Grösse, 4 mal von vierter und 8 mal von fünfter gesehen, zusammen also solche der 6 ersten Grössenklassen 16, d. i. nur den neunten Theil der von ihm beobachteten teleskopischen. Zu einer wesentlich abweichenden Zahl kommt H. A. NEWTON[1]). Aus gleichzeitigen Beobachtungen von PAPE und WINNECKE, bei denen der erstere mit freiem Auge, der letztere in einem Kometensucher beobachtete, wird geschlossen, dass, wenn mit dem Fernrohre der ganze Himmel überblickt werden könnte, die Zahl der teleskopischen Meteore das 200 fache derjenigen mit freiem Auge betragen würde. Das Gesichtsfeld war nämlich nur der 1871 te Theil des mit freiem Auge sichtbaren, und da WINNECKE 45 beobachtete, während PAPE 312 sah, so ist das Verhältniss $\frac{45}{312} \cdot 1871$. Eigentlich müsste man sagen, dass man durch dieses Fernrohr Sternschnuppen bis zu einer gewissen Grössenklasse in 200 facher Zahl wie mit freiem Auge sichtbare beobachtet, und NEWTON bemerkt, dass man mit einem stärker vergrössernden Fernrohre noch mehr sehen würde[2]).

SCHMIDT beobachtete:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1842 | an | 57 | Tagen | 811 | Meteore, | darunter | 50 | geschweifte. |
| 1843 | „ | 98 | „ | 885 | „ | „ | 18 | „ |
| 1844 | „ | 128 | „ | 528 | „ | „ | 58 | „ |
| 1845 | „ | 158 | „ | 618 | „ | „ | 58 | „ |
| 1846 | „ | 98 | „ | 411 | „ | „ | 89 | „ |
| 1847 | „ | 98 | „ | 478 | „ | „ | 80 | „ |
| 1848 | „ | 188 | „ | 488 | „ | „ | 55 | „ |
| 1849 | „ | 90 | „ | 505 | „ | „ | 77 | „ |
| 1850 | „ | * | „ | 864 | „ | „ | 101 | „ |
| Zusammen | | | | 4068 | Meteore, | darunter | 581 | geschweifte. |

Der Grösse nach waren dieselben[3]):

| | $1^m$ | $2^m$ | $3^m$ | $4^m$ | $5^m$ | $6^m$ | darunter geschweifte $1^m$ | $2^m$ | $3^m$ | $4^m$ | $5^m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1842 | 90 | 95 | 76 | 82 | 15 | 8 | 40 | 8 | 2 | — | — |
| 1843 | 86 | 110 | 108 | 68 | 14 | 2 | 14 | 4 | — | — | — |
| 1844 | 82 | 99 | 155 | 115 | 54 | 18 | 86 | 18 | 4 | — | — |
| 1845 | 65 | 98 | 162 | 152 | 98 | 88 | 27 | 18 | 8 | — | — |
| 1846 | 74 | 81 | 76 | 98 | 51 | 12 | 24 | 10 | 3 | 1 | — |
| 1847 | 98 | 85 | 81 | 104 | 52 | 19 | 48 | 17 | 8 | 3 | — |
| 1848 | 81 | 91 | 105 | 125 | 54 | 16 | 80 | 17 | 6 | 1 | — |
| 1849 | 44 | 88 | 111 | 140 | 69 | 87 | 22 | 24 | 20 | 6 | — |
| 1850 | 80 | 64 | 79 | 71 | 45 | 21 | 28 | 29 | 25 | 10 | 5 |

1) SILLIMAN, II. Serie, Bd. 39, pag. 201.

2) Es scheint jedoch, dass hier das Fernrohr auf eine bestimmte Gegend zur Zeit eines stärkeren Erscheinens von Meteoren gerichtet war, es müsste sonst auffallen, dass die meisten Beobachter in den Fernröhren thatsächlich so selten Sternschnuppen beobachten.

3) Die Summen stimmen bei SCHMIDT nicht immer; er hat bei seinen Zählungen hin und wieder 1 oder 2 übersehen.

Der Farbe nach waren (einschliesslich der teleskopischen)

| | weisse | gelbe | gelbrothe | grüne | nebelige |
|---|---|---|---|---|---|
| 1842 | 264 | 5 | 21 | 8 | 15 |
| 1843 | 282 | 26 | 46 | 19 | 18 |
| 1844 | 352 | 86 | 17 | 27 | 40 |
| 1845 | 415 | 50 | 89 | 8 | 98 |
| 1846 | 280 | 55 | 27 | 15 | 85 |
| 1847 | 269 | 72 | 35 | 7 | 90 |
| 1848 | 248 | 107 | 29 | 11 | 87 |
| 1849 | 207 | 142 | 20 | 8 | 128 |
| 1850 | 187 | 102 | 11 | 2 | 61. |

Insgesammt waren

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| unter 2151 | weissen | 218 geschweifte, | also | 0·099 | aller | geschweift |
| „ 589 | gelben | 159 „ | „ | 0·270 | „ | „ |
| „ 218 | gelbrothen | 39 „ | „ | 0·188 | „ | „ |
| „ 97 | grünen | 36 „ | „ | 0·371 | „ | „ |
| „ 577 | nebeligen | 8 „ | „ | 0·014 | „ | „ |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| unter 566 | Meteoren | 1ter | waren | 224, | also | 0·395 | aller geschweift |
| „ 711 | „ | 2ter | „ | 119 | „ | 0·167 | „ „ |
| „ 877 | „ | 3ter | „ | 69 | „ | 0·078 | „ „ |
| „ 868 | „ | 4 u. 5ter | „ | 26 | „ | 0·029 | „ „ |

Hieraus folgt, dass die helleren Meteore am öftesten geschweift erscheinen, und dass der Farbe nach die Schweife am öftesten bei den grünen Meteoren auftreten.

Auf 100 Sternschnuppen entfallen:

| | 1ter | 2ter | 3ter | 4ter | 5ter | 6ter | weisse | gelbe | gelbrothe | grüne | nebilige |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1842 | 29·0 | 80·5 | 24·5 | 10·8 | 4·8 | 0·9 | 84·9 | 1·6 | 6·7 | 2 6 | 4·2 |
| 1843 | 22·8 | 28·6 | 28·0 | 16·8 | 8·6 | 0·5 | 78·2 | 6·7 | 11·9 | 4·9 | 8·4 |
| 1844 | 15·8 | 19·1 | 29·9 | 22·2 | 10·4 | 2·5 | 67·3 | 16·4 | 8·2 | 5·2 | 7·6 |
| 1845 | 10 8 | 16·2 | 26·8 | 25·2 | 15·4 | 5·5 | 68·6 | 8·8 | 6·4 | 1·8 | 15·4 |
| 1846 | 18·8 | 20·6 | 19·5 | 25·0 | 18·0 | 8·1 | 55·1 | 18·4 | 6 1 | 8·8 | 21·6 |
| 1847 | 22·8 | 19·8 | 18·5 | 28·8 | 11·8 | 4·8 | 58·4 | 18·4 | 7·8 | 1·6 | 19·2 |
| 1848 | 17·2 | 19·8 | 22·2 | 26·5 | 11·4 | 8·4 | 51·9 | 22·1 | 5·5 | 2·8 | 18·1 |
| 1849 | 9·1 | 17·2 | 22·9 | 28·9 | 14·2 | 7·7 | 41·2 | 27·9 | 8·7 | 1·7 | 25·5 |
| 1850 | 11·4 | 20·2 | 25·0 | 22·4 | 14·2 | 6·7 | 56·7 | 28·2 | 8·2 | 0·6 | 16·8 |
| im Mittel | 17·4 | 21·2 | 24·1 | 22·3 | 11·0 | 8·8 | 61·9 | 14·8 | 6·0 | 2·7 | 14·6 |

Hier zeigt sich nun ein Gang, sowohl in den Grössenbestimmungen, als auch in den Farbenangaben. Schmidt schreibt dieses aber, wie selbstverständlich, der fortgesetzten Uebung zu; es waren ja 1842 überhaupt die ersten Beobachtungen dieser Art, und Schmidt der erste Beobachter; er musste sich also erst successive die passendste, bequemste und sicherste Beobachtungsart zurechtlegen, und sich auf Grössen- und Farbenschätzungen einüben. Es ist eine jedem Beobachter bekannte Thatsache, dass im Laufe der Zeiten den schwächeren Objecten eine grössere Aufmerksamkeit zugewendet wird, und die helleren etwas schwächer geschätzt werden; es wird daher die Zahl der beobachteten schwächeren Objecte steigen, die Zahl der helleren abnehmen, während ungefähr die dritte und vierte Grössenklasse ziemlich constant bleibt. Noch mehr unterliegen die Farbenschätzungen subjectiven Elementen; Schmidt

bemerkt: »Es ist mir oft auffallend gewesen, dass verschiedene Personen sowohl Fixsterne als Sternschnuppen, die ich entschieden grün nannte, als blau oder blaugrün bezeichneten[1].« In der That hatte er ein blaues Meteor nur ein einziges Mal gesehen und zwar 1842, Juli 31; das Meteor erschien anfangs hellgrün, veränderte aber dann seine Farbe, und schien mit blauem Lichte zu zerspringen. Wirklich rothe, carmin und blutfarbige bemerkte SCHMIDT ebenfalls nicht; die roth gefärbten waren stets mit einer Mischung aus Gelb, also gelbroth[2]).

Von teleskopischen Meteoren beobachte SCHMIDT:

| | 7$^m$ | 8$^m$ | 9$^m$ | 10$^m$ | 11$^m$ | Zusammen |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1844 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 |
| 1845 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| 1846 | 2 | 6 | 4 | 4 | 2 | 18 |
| 1847 | 4 | 8 | 6 | 3 | 0 | 21 |
| 1848 | 2 | 0 | 5 | 2 | 0 | 9 |
| 1849 | 1 | 8 | 6 | 3 | 4 | 22 |
| 1850 | 5 | 11 | 18 | 14 | 0 | 48 |
| 1851 | 1 | 5 | 10 | 6 | 2 | 24 |
| Zusammen: | 15 | 39 | 52 | 32 | 8 | 146 |
| daher unter 100: | 10·3 | 26·7 | 35·4 | 21·9 | 5·5. | |

Die häufigste Farbe ist das Gelb, doch hält er dieses für subjectiv, wie ja auch mit freiem Auge die meisten Fixsterne, mit Ausnahme der auffällig gefärbten, weiss erscheinen, während im Fernrohr das Gelb mehr hervortritt.

Nebelige hatte SCHMIDT im Fernrohre keine gesehen.

Das sonstige Aussehen der teleskopischen Meteore war von denjenigen der mit freiem Auge sichtbaren nicht verschieden: sie beginnen schwach und enden im Maximum des Glanzes.

1869 giebt SCHMIDT für die von ihm später beobachteten Meteore eine Zusammenstellung der Helligkeit nach den einzelnen Monaten und nach den einzelnen Tagesstunden; welcher er später eine Ergänzung für die späteren Beobachtungen folgen liess. Es war die Helligkeit

| | Aus den Beobachtungen bis 1869[3]) | | | | aus den Beobachtungen bis 1876[4]) | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| im Januar | 4·06 | aus | 10 | Beobachtungen | 4·22 | aus | 35 | Beobachtungen |
| im Februar | 4·98 | „ | 27 | „ | 4·80 | „ | 44 | „ |
| im März | 4·08 | „ | 11 | „ | 4·38 | „ | 88 | „ |
| im April | 4·80 | „ | 8 | „ | 4·81 | „ | 54 | „ |
| im Mai | 4·21 | „ | 20 | „ | 4·22 | „ | 80 | „ |
| im Juni | 4·12 | „ | 47 | „ | 4·82 | „ | 108 | „ |

---

[1]) l. c., pag. 85. Doch ist die blaue Farbe nicht gar so selten, wie denn namentlich die weissen Sterne stets einen Stich ins Bläuliche haben. Jedenfalls scheint hier eine subjective Disposition SCHMIDT's vorzuliegen. SCHMIDT beobachtete ziemlich viele Meteore, deren Farbe gegen das Ende ihres Laufes in grün bis smaragdgrün überging; dieses ist der Fall bei den Meteoren No. 818, 1171, 2C87, 2289, 2788 (das grosse Meteor vom 21. Januar 1848) 2878, 3566, 3684. Wahrscheinlich auf Contrastwirkungen ist es zurückzuführen, dass er nach den hellen, prachtvoll grünen Meteoren meist schwach röthliche, trübe und lichtschwache, einer verglimmenden Kohle ähnliche Fragmente als Rückstände beobachtete.

[2]) In den Astron. Nachr. Bd. 88, pag. 348 bezeichnet er aber kurzweg diese Meteore als roth.

[3]) »Astron. Beobachtungen über Meteorbahnen, Athen 1869«, pag. 52.

[4]) »Astron. Nachr.« Bd. 88, pag. 343.

| | Aus den Beobachtungen bis 1869 | | | | aus den Beobachtungen bis 1876 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| im Juli | 4·16 | aus | 95 | Beobachtungen | 4·34 | aus | 215 | Beobachtungen |
| im August | 4·05 | „ | 119 | „ | 4·09 | „ | 260 | „ |
| im September | 4·33 | „ | 56 | „ | 4·33 | „ | 114 | „ |
| im Oktober | 4·09 | „ | 64 | „ | 4·14 | „ | 92 | „ |
| im November | 4·02 | „ | 31 | „ | 4·09 | „ | 49 | „ |
| im Dezember | 4·12 | „ | 44 | „ | 4·26 | „ | 78 | „ |

Der Unterschied steigt bis auf eine Grössenklasse; die geringste Helligkeit war im Februar, die grösste im November. Dass dieser Unterschied auf die Reinheit der Luft zurückzuführen wäre, ist nicht wahrscheinlich, einmal, weil für diese Zusammenstellung nur die heitersten Nächte gewählt wurden, und andererseits, weil sich ein solcher Unterschied bei anderen Beobachtungen nicht constatiren lässt. Nach den Tagesstunden ergiebt sich aus den Beobachtungen bis 1869 für die Zeit[1])

| | 6·5$^h$ | 7·5$^h$ | 8·5$^h$ | 9·5$^h$ | 10·5$^h$ | 11·5$^h$ | 12·5$^h$ | 13·5$^h$ | 14·5$^h$ | 15·5$^h$ | 16·5$^h$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| die mittlere Helligkeit | 4·36 | 4·34 | 4·31 | 4·07 | 4·19 | 4·28 | 4·26 | 4·12 | 3·88 | 3·91 | 4·34 |

Die mittlere Helligkeit aus 11000 zwischen 1853 und 1876 beobachteten Meteoren ergab sich zu 4·27; für die verschiedenen Nachtstunden war ein merklicher Unterschied nicht zu constatiren.

Für die mittlere Dauer der Meteore fand SCHMIDT

| für die | weissen | | gelben | | gelbrothen | | grünen | | nebeligen | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| im Jah. 1844 | 1$^s$·00 | (24 B.) | 1$^s$·51 | (18 B.) | — | | 1$^s$·96 | (12 B.) | — | |
| 1849 | 0·85 | (64 B.) | 0·90 | (80 B.) | 1$^s$·28 | (14 B.) | 1·60 | (5 B.) | 0$^s$·91 | (17 B.) |
| 1850 | 1·16 | (12 B.) | 1·25 | (8 B.) | 1·41 | (6 B.) | — | | — | |
| 1842 — 1850 | 0·82 | (100 B.) | 1·03 | (106 B.) | 1·31 | (20 B.) | 1·85 | (17 B.) | 0·91 | (17 B.) |
| 1842 — 1876 | 0·746 | (886 B.) | 0·983 | (400 B.) | 1·627 | (188 B.) | 1·973 | (125 B.) | — | |

Die Constanz dieser Zahlen im Laufe der Jahre zeigt, dass der Unterschied in der Dauer bei den verschieden gefärbten Meteoren reell ist; die Meteore von kürzester Dauer sind die weissen; die längste Dauer haben die grünen.

Hierzu mögen noch die folgenden Angaben hinzugefügt werden:

HERSCHEL fand aus 17 Sternschnuppen am 12. u. 13. Dez. 1863 die mittlere Weglänge 11°·7, die mittlere Dauer 0$^s$·78[2]);

aus 23 Sternschnuppen am 28. und 29. December 1864 die mittlere Weglänge 11°·0, die mittlere Dauer 0$^s$·64[3]);

aus 19 Sternschnuppen am 18. October 1864 und 20. October 1865 die mittlere Weglänge 19°·0, die mittlere Dauer 0$^s$·68[4]);

NEWTON fand aus 867 von 6 Beobachtern angestellten Beobachtungen die mittlere beobachtete Weglänge 12°·6 und mit Rücksicht auf perspectivische Verkürzung daraus 16°·4 als wirkliche mittlere Weglänge und die mittlere Zeitdauer 0$^s$·45[5]); also wesentlich kleiner; auch bemerkt er dazu, dass die Zeitschätzungen im Allgemeinen zu klein werden. Hingegen haben andere Beob-

[1]) 6·5$^h$ gleich 6$^h$ bis 7$^h$ u. s. w.

[2]) Radiant: $\alpha = 105°$, $\delta = +30°$ in der Nähe von τ Geminorum. Monthly Notices, Bd. 25, pag. 163.

[3]) Radiant: $\alpha = 94°$, $\delta = +37°$ in der Nähe von θ Geminorum; Monthly Notices, Bd. 25, pag. 165.

[4]) Radiant: $\alpha = 90°$, $\delta = +15{\cdot}5°$ Monthly Notices, Bd. 26, pag. 51.

[5]) SILLIMAN, II. Serie, Bd. 39, pag. 203.

achter die Bemerkung gemacht, dass die Zeitschätzungen im Allgemeinen zu gross werden. Es scheint hier jedenfalls ein subjectiver Unterschied vorzuliegen, welcher vielleicht in der Gewohnheit begründet ist. Man schätzt den Eintritt eines Phänomens zu früh oder zu spät, wenn man gewarnt ist, und dasselbe nicht zu spät oder zu früh beobachten will, und man schätzt die Dauer einer Erscheinung zu gross oder zu klein, wenn man dem entgegengesetzten Fehler entgehen will. Im Allgemeinen dürften die Zeitschätzungen eher zu gross ausfallen, wie man denn bei sehr kleinen Grössen immer geneigt ist, grössere Werthe anzugeben. Im Mittel aus allen würde sich die mittlere Zeitdauer sehr nahe $0^{s}.7$ ergeben.

II. Anomale Bewegungserscheinungen. SCHMIDT sah 175 von dem grössten Kreise abweichende Meteorbahnen; auf 1000 Meteore kamen 43 mit anomalen Bahnen. Von den 175 beobachteten entfallen:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| auf das Jahr | 1842 | 1843 | 1844 | 1845 | 1846 | 1847 | 1848 | 1849 | 1850 |
| Anzahl von anomalen Bahnen | 12 | 9 | 17 | 26 | 22 | 21 | 26 | 37 | 5. |

Im Ganzen waren unter den Beobachtungen 1842 bis 1850 von den gekrümmten Bahnen: 68 unter den weissen, 49 unter den gelben, 31 unter den gelbrothen, 13 unter den grünen, 17 unter den nebeligen; relativ am häufigsten ist daher die Anomalie bei den grünen. Es muss jedoch bemerkt werden, dass dieser Schluss mit Rücksicht auf die geringe Zahl der grünen Meteore noch nicht als erwiesen anzusehen ist.

Nach den Grössenklassen waren 48 anomale Bahnen bei Meteoren der ersten, 45 bei Meteoren der zweiten, 45 bei der dritten, 26 der vierten, 9 der fünften und 3 der sechsten Grösse.

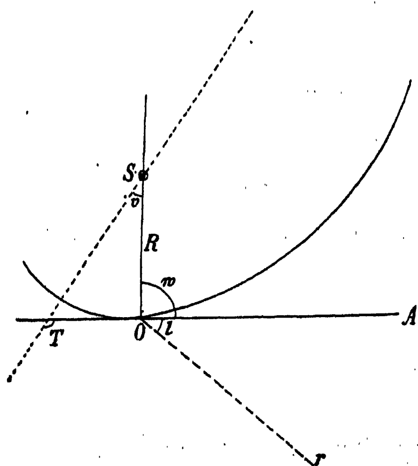
ZEZIOLI fand unter 6853 beobachteten scheinbaren Bahnen 48 gekrümmte (vom grössten Kreise abweichend), 24 wellenförmige, 22 geschlängelte, 10 schwankende, zusammen 104, daher auf 1000 Meteore 15 mit anomalen Bewegungserscheinungen, also eine wesentlich kleinere Anzahl wie SCHMIDT.

Die Unregelmässigkeiten in der Bewegung können zweierlei Ursachen haben: sie können wirklich stattfinden und auch nur optisch sein, d. h. durch die Lage des Beobachters gegen die Bahn der Sternschnuppe bedingt. Wäre die Bahn der Sternschnuppen stets gradlinig, so könnten Anomalien überhaupt nicht vorkommen. Aber die Sternschnuppen bewegen sich mit sehr grosser Geschwindigkeit, welche die auf der Erde beobachteten weit übertreffen, in einem widerstehenden Mittel: der Luft, und schon CHLADNI erklärte 1819, dass der Grund für die schlangenförmige oder Zickzackbewegung »in nichts anderem als in einem Abprallen oder Ricochetiren von der einer so schnellen Bewegung widerstehenden Atmosphäre liegen kann.« Dieser Meinung schlossen sich auch im Allgemeinen BRANDES und OLBERS bezüglich der stetigen Richtungsänderungen an. Die sprungweise geänderten und auch die aufsteigenden Bewegungen erklärt jedoch BRANDES, und hier stimmt ihm OLBERS bei, aus partiellen Explosionen, welche die Feuermeteore nach Art der Raketen in die Höhe treiben. Viel eingehender haben sich mit dieser Frage SCHMIDT und SCHIAPARELLI beschäftigt. Ob nun das Leuchten der Meteore nach der ursprünglich (1794) von CHLADNI geäusserten Meinung durch die Reibung der Meteore entsteht, oder ob nach der von DAVY 1817 geäusserten Meinung, welcher sich später (1819) auch CHLADNI anschloss, die grosse Erhitzung durch Compression der Luft stattfindet, in allen Fällen wird man es als erwiesen anzusehen haben, dass der leuchtende Theil der Bahn sich in der atmosphärischen Luft befindet. Aber der Einfluss der

Bewegung der Luft kann auf die Bewegung der Sternschnuppen nicht merklich sein; die Geschwindigkeit eines heftigen Sturmwindes ist etwa 40 *m* in der Secunde[1]; die Geschwindigkeit der Luft in Folge der Erdrotation erreicht ihr Maximum im Aequator; sie beträgt hier auf der Erdoberfläche 464 *m* und in der Höhe von 100 *km* 471 *m*, während die direkt gemessenen Geschwindigkeiten der Sternschnuppen mehr als das 50fache betragen. Nimmt man dieselbe zu 30 *km* an, so tritt daraus eine Ablenkung in der Richtung von etwa 0·6° auf; da dieses jedoch nicht plötzlich geschieht, so wird die Bahn etwas gekrümmt; die hieraus resultirende Krümmung wird aber so schwach, dass sie nie bemerkt werden kann.

Wesentlich anders aber wird der Einfluss der jährlichen Bewegung der Erde, die Anziehung, welche die Erde auf die Sternschnuppen ausübt, und die Einwirkung des Luftwiderstandes. In Folge der Erdanziehung würden die Sternschnuppen Hyperbeln um die Erde beschreiben, die, in so lange sie sehr grosse Distanzen im Perigeum haben, nicht merklich von der Geraden abweichen werden; dieses gilt aber nur für diejenigen Sternschnuppen, welche von der Erde weitab vorübergehen, während für jene, welche in die Atmosphäre der Erde gelangen, ganz merkliche Krümmungen auftreten werden[2]. Die durch die Bewegung der Erde hervorgebrachten Aenderungen in der Richtung der Bewegung werden sich aus zwei Theilen zusammensetzen: eine scheinbare[3] und eine wirkliche, welche daher rührt, dass sich die Bewegung der Erde auf die Bewegung der Sternschnuppen überträgt; diese letztere wird ebenfalls nicht plötzlich auftreten, und auch hierdurch wird eine Krümmung der Bahn folgen. Da hierbei von der Rotation der Erde abgesehen werden kann, so genügt es, der Luft die jährliche Geschwindigkeit der Erde beizulegen, wobei also während der kurzen Dauer der Erscheinung einer Sternschnuppe die Bewegungsrichtung der Luft stets mit der Bewegungsrichtung der Erde um die Sonne zusammenfällt.

Fällt eine Sternschnuppe aus dem Zenith gegen die Erde, so wird die Anziehung der Erde die Bewegung beschleunigen, der Luftwiderstand dieselbe verzögern und die Bewegungsrichtung wird geradlinig bleiben, wenn die Zenithrichtung mit der Richtung der Erdbewegung zusammenfällt. Fällt dagegen die Sternschnuppe nicht aus dem Zenith, so wird sie durch die Erdanziehung aus ihrer Bahn abgelenkt und der Erde genähert (vergl. Fig. 268). In allen Fällen aber wird sich die Componente der Geschwindigkeit des Meteors in der Richtung der Erdbewegung verändern und schliesslich die Geschwindigkeit der Erdbewegung selbst erlangen.



(A. 256.)

Man nennt den Punkt am Himmel, gegen welchen sich die Erde bewegt, nach PRITCHARD den Apex, den ent-

[1] FAYE (Compt. rend., Bd. 63, pag. 1100) betrachtet die raschen, schlängelnden Bahnen, das rasche Aufleuchten und Verschwinden der Meteore als optische Täuschungen, verursacht durch meist nicht sichtbare Wasserdünste (*Cirrocumulus*, *Cirrus*); hingegen die langsam schlängelnden als Folgen von Strömungen in den höheren Luftregionen.

[2] Vergl. hierüber das später bei der Zenithattraction Gesagte.

[3] Vergl. später über den Unterschied zwischen dem scheinbaren und wahren Radianten.

gegengesetzten Punkt den Antiapex. Sei $S$ (Fig. 256) die Sonne, $O$ die Erde, so ist $OA$ die Richtung nach dem Apex, $OS$ diejenige nach der Sonne; da nun die Bewegung der Erde in der Ekliptik stattfindet, so wird auch die Tangente $OA$ an die Bewegungsrichtung stets in der Ekliptik liegen, folglich die Breite des Apex stets Null sein. Ist $O\gamma$ die Richtung nach dem Frühlingspunkte, so ist $\gamma OA$ die Länge $l$ des Apex; $\gamma OS$ die Länge $\odot$ der Sonne, daher die Länge des Apex stets nahe 90° kleiner als diejenige der Sonne. Bei den Rechnungen über die Meteore wird man zumeist damit ausreichen, die Erdbahn als Kreis anzusehen, daher $l = \odot - 90°$ zu setzen; doch ist die Berechnung des Winkels $w$ zwischen der Tangente und dem Radiusvector der Erde nicht schwer, und in manchen Fällen dennoch erwünscht. Man hat, wenn man die Ellipse auf rechtwinklige Coordinaten bezieht, von denen die $X$-Axe mit der Richtung nach dem Perihel zusammenfällt, und $a$, $e$, $\varphi$ die halbe grosse Axe, Excentricität und Excentricitätswinkel, $r$, $v$, $E$ Radiusvector, wahre und excentrische Anomalie bedeuten:

$$x = a(\cos E - e) \qquad \frac{dx}{dE} = -a \sin E$$
$$y = a \cos\varphi \sin E \qquad \frac{dy}{dE} = +a\cos\varphi\cos E \qquad \frac{dy}{dx} = -\cos\varphi \cot E,$$

und da

$$\sin E = \frac{r \sin v}{a\cos\varphi}, \qquad \cos E = \frac{\cos v + e}{1 + e\cos v} = \frac{r(\cos v + e)}{a\cos\varphi^2}$$

ist, so wird

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos v + e}{\sin v}.$$

Ist $T$ der Winkel, welchen die Tangente mit der positiven Richtung der $X$-Axe einschliesst, so ist

$$\tan T = \frac{dy}{dx}, \qquad 180° - w = T - v,$$

daher

$$\tan T = -\frac{\cos v + e}{\sin v}, \qquad \tan w = -\frac{1 + e\cos v}{e \sin v}.$$

Setzt man nun

$$w = 90° - \omega,$$

so ist

$$\tan \omega = -\frac{e \sin v}{1 + e\cos v} = -\frac{e}{1 - e^2} R \sin(\odot - \Pi), \tag{1}$$

wenn $\Pi$ die Länge des Sonnenperigäums, also

$$\Pi = 280° \, 21'{\cdot}8 + 1'{\cdot}028(t - 1850)$$
$$\log \frac{e}{1 - e^2} = 8{\cdot}2244 \tag{2}$$

ist. Da nun $l = \odot - w$ ist, so wird,

$$l = \odot + \omega - 90°, \tag{3}$$

und wenn $\alpha$, $\delta$ die Rectascension und Deklination des Apex sind und $\varepsilon$ die Schiefe der Ekliptik bedeutet:

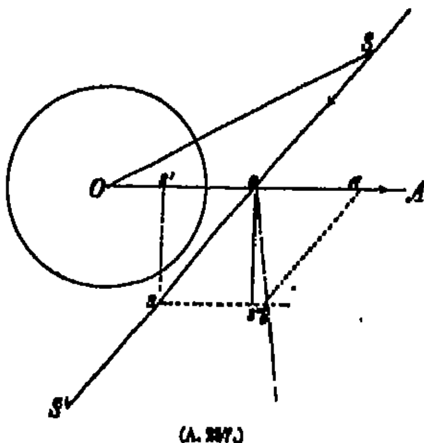
$$\begin{aligned} \cos\delta\cos\alpha &= +\sin(\odot + \omega) \\ \cos\delta\sin\alpha &= -\cos(\odot + \omega)\cos\varepsilon \\ \sin\delta &= -\cos(\odot + \omega)\sin\varepsilon. \end{aligned} \tag{4}$$

Zur Berechnung der Rectascension und Deklination des Apex dienen die Formeln (1), (2) und (4), in denen der Radiusvector $R$ und die Länge $\odot$ der Sonne aus den astronomischen Ephemeriden zu entnehmen sind.

Beispiel: Für 1865 Juli 28·5 ist $\odot = 125^\circ\, 48'$; $\log R = 0{\cdot}0065$

$$\begin{aligned} \mathrm{II} &= 280\quad 37 \\ \odot - \mathrm{II} &= 205\quad 11 \qquad \log \operatorname{tang} \omega = 7{\cdot}8598 \\ \log \sin (\odot - \mathrm{II}) &= 9{\cdot}6289\, n \qquad\qquad \omega = +\,0^\circ\, 24'{\cdot}9 \\ \log \frac{e}{1-e^2} R &= 8{\cdot}2800 \qquad\qquad i = 86^\circ\, 18'. \end{aligned}$$

Sei nun $OA$ (Fig. 257) die Richtung der Erdbewegung, d. h. die Richtung nach dem Apex, $SS'$ die Richtung der Bewegung der Sternschnuppe. In dem Momente, wo dieselbe die Erdgeschwindigkeit vollständig recipirt haben wird wird man ihre Bewegungsrichtung erhalten, indem man die Geschwindigkeiten nach dem Geschwindigkeitsparallelogramm zusammensetzt. Stellt $os$ die Geschwindigkeit der Sternschnuppe vor, wenn $oa$ dieselbe für die Erdbewegung ist, so würde schliesslich die Bewegung der Sternschnuppe $ob$ sein; da aber diese Mittheilung der Geschwindigkeit eben nicht plötzlich stattfindet, so wird die Sternschnuppe thatsächlich eine Curve beschreiben, welche in gewissen Fällen auch nach aufwärts gekrümmt sein kann.



(A. 257.)

In dieser Weise wird nun allerdings die Erscheinung nicht auftreten; denn man sieht sofort, dass es sich hier um eine Stosserscheinung handelt, und die Uebertragung der Geschwindigkeiten findet etwa in folgender Weise statt: Seien $M$, $m$ die Massen der Erde und der Sternschnuppe, $oa = G$ die Geschwindigkeit der Erde, und zerlegt man die Geschwindigkeit $v$ der Sternschnuppe in die beiden Componenten $os' = v_1$ in der Richtung der Erdbewegung, $os'' = v_2$ senkrecht dazu, so würden die beiden Körper schliesslich in der Richtung $OA$ die Geschwindigkeit $\dfrac{MG + mv_1}{M + m}$ haben, und da $m$ gegenüber $M$ verschwindend klein ist, die Geschwindigkeit $G$, welche sich mit der Geschwindigkeit $v_2$ zusammensetzen würde. Die relative Bewegung der Sternschnuppe gegen die Erde wäre aber in der Richtung $OA$ gleich Null, so dass schliesslich die Sternschnuppe sich in der Richtung der Tangente des Auffallsortes bewegen würde. Dieses wird aber nur der Fall sein, wenn die beiden Körper vollkommen unelastisch sind; sind die beiden Körper vollkommen elastisch, so wäre, wieder unter der Voraussetzung der Kleinheit von $m$, die Endgeschwindigkeit der Sternschnuppe in der Richtung $OA$ gleich $2G + v_1$, daher die relative Geschwindigkeit gegen die Erde die resultirende aus den Geschwindigkeiten $G + v_1$ in der Richtung $OA$ und $v_2$ in der dazu senkrechten Richtung. Nun ist die Sternschnuppe allerdings nicht elastisch, hingegen erfolgt ihr Stoss gegen einen elastischen Körper, die Luft; aber die jeweilige gestossene Masse ist veränderlich, und hängt von der Dichtigkeit der Luft ab. Das Problem, die Untersuchung der Bewegung einer unelastischen Masse bei dem Stosse gegen eine elastische Masse von veränderlicher Dichtigkeit, ist aber nichts anderes, als das Problem des Luftwiderstandes. Aber es ist hieraus klar, dass die Wirkung des Luftwiderstandes sich nicht nur auf die Veränderung der Geschwindigkeiten, sondern

auch auf die Aenderung der Bahnform bezieht, und dass der Einfluss dieser Geschwindigkeit auf die Bahnform infolge des Umstandes, dass die Geschwindigkeiten der Sternschnuppe und der Erde vergleichbar sind (Grössen derselben Ordnung) unter Umständen grösser werden kann, als selbst die Anziehung der Erde.

Die Anziehung der Erde wirkt in der Ebene des Radiusvectors *OS* und der Bewegungsrichtung der Sternschnuppe *SS'*, und in Folge derselben würde die Sternschnuppe eine in der Ebene *SS'O* gelegene krumme Bahn beschreiben. Der Luftwiderstand wird, wie später gezeigt wird, die Bahnebene unter der Voraussetzung, dass die Sternschnuppe eine Kugel ist, nicht ändern. Die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten aber findet in derjenigen Ebene statt, welche durch die Bewegungsrichtung der Sternschnuppe parallel zur Bewegungsrichtung *OA* der Erde gelegt wird. Fallen diese beiden Ebenen zusammen, oder mit anderen Worten, schneidet die Bahn der Sternschnuppe die Bewegungsrichtung der Erde, so wird die von ihr beschriebene Curve eine ebene Curve sein. Diese wird sich aber als grösster Kreis an der Himmelskugel nur dann projiciren, wenn der Beobachter sich in derselben Ebene befindet. In allen andern Fällen muss die Sternschnuppe eine von einem grössten Kreise abweichende Bahn beschreiben; die Krümmung der Bahn wird aber nur nach der einen Seite stattfinden; es treten Bahnen von der Form *d*, *e* Fig. 255 auf.

Fällt aber die Richtung der Erdbewegung nicht in die Bahn der Sternschnuppe, so wird die Sternschnuppe in Folge der Erdanziehung und der Erdbewegung eine doppelt gekrümmte Curve beschreiben, die, von verschiedenen Erdorten aus gesehen, eine sehr verschiedenartige Gestalt haben kann.

Wie später gezeigt wird, ist aber der Einfluss der Erdanziehung nur bedeutend für die aus der Nähe des Antiapex kommenden Sternschnuppen; für alle aus grösserer Entfernung vom Antiapex kommenden Sternschnuppen wird demnach die Aenderung der Bewegung in die Ebene fallen, welche durch die Bewegungsrichtung der Sternschnuppe parallel zur Tangente an die Erdbewegung in dem Momente des Eintritts des Meteors in die Atmosphäre gelegt wird, und die Bahn wird wenig von einer ebenen Curve verschieden sein. Für die aus der Nähe des Antiapex kommenden Sternschnuppen ist aber wieder der Einfluss des Luftwiderstandes gering, und für diese wird daher die Bahn in der durch die Anfangsrichtung der Sternschnuppe und den Erdmittelpunkt gelegten Ebene enthalten sein, die Bahn daher ebenfalls eine ebene Curve, so dass die Bahnen sich zumeist in den Formen *d*, *e* darstellen werden. In denjenigen Fällen, wo der Einfluss der Erdanziehung und Erdbewegung gemeinschaftlich wirkt, wird derselbe jedoch nur mässig sein, und die Bahn wird zur doppelt gekrümmten: es treten mässig gekrümmte Curven von der Form *b* auf.

Im ersten Theile der Bewegung, wo die Masse der Luft wegen der sehr geringen Dichte nur klein ist, wird ausser dem Verluste an lebendiger Kraft und dem damit verbundenen Glühen und Verbrennen eine merkliche Aenderung in der Bewegungsrichtung nicht auftreten. Eine bedeutende Aenderung in der Richtung wird aber dort auftreten, wo die Geschwindigkeit des Meteors bereits abgenommen, und die Dichte der Luft zugenommen hat, also in den unteren Theilen der Bahn; daher kommt es, dass gerade gegen das Ende der Bahn oft starke Krümmungen sichtbar werden, und dieses zumeist bei den hellen und lange sichtbaren Meteoren.

Manche mögen thatsächlich ihre Bewegungsrichtung so weit geändert haben, dass sie wieder aus der Erdatmosphäre heraustreten, ihren Weg im Weltraume

fortsetzen. Kleinere Meteore werden schon in den obersten Schichten der Luft aufgezehrt, ohne dass eine Abweichung ihrer Bewegungsrichtung vom grössten Kreise sich merkbar machte; grössere ändern ihre Bewegungsrichtung, wie erwähnt gegen das Ende ihrer Bahn, und nur diejenigen grossen Meteore, welche trotz des fortwährenden Verbrennens noch hinreichende Masse haben, um in die unteren Luftschichten zu gelangen, beschreiben dann Bahnen von der Form *f* (Fig. 255); nur wenige Meteore, und zwar nur jene, welche nahe aus dem Zenith fallen, gelangen thatsächlich zur Erde. Auch in dieser Richtung wirkt die Luft wie ein elastisches Polster[1]).

Eine zweite Ursache, durch welche die Bewegungsrichtung thatsächlich geändert wird, ist die unregelmässige Form der Meteore. Jeder Körper von unregelmässiger Gestalt, der in einer Translationsbewegung begriffen ist, wird durch den Luftwiderstand in eine Rotationsbewegung versetzt, wodurch auch die Richtung seiner Bewegung geändert wird. Derartige Complikationen treten bei der Bewegung von Kugeln aus gezogenen Geschützen auf; bei diesen ist der Lauf schwach schraubenförmig gedreht; dadurch erhält die Kugel eine Rotationsbewegung, und da sie nicht kugelförmig, sondern conoidisch ist, so wird sie aus der verticalen Ebene etwas abgelenkt.

Noch complicirter werden die Bewegungen, wenn der Schwerpunkt einer solchen, in dieser Weise in Rotation versetzten Kugel ausserhalb der Symmetrieaxe liegt. Schiessversuche wurden in Christiania mit derartigen Kanonenkugeln vorgenommen; sie wurden hergestellt, indem man in der Form seitlich an einem Stäbchen ein Thonkügelchen anbrachte. Dieses wurde dann herausgeschabt, und die Oeffnung an der Stelle, wo das Stäbchen das Kügelchen hielt, durch einen Eisenpfropfen verschlossen. Bei einem vierzehnpfündigen Geschütze, das unter einem Elevationswinkel von 10° mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 1000 engl. Fuss (ca. 300 *m*) abgeschossen worden war, war nach einem Wege von 8400 engl. Fuss (2·5 *km*) die Kugel um 40 Fuss (12 *m*) von der ursprünglichen Richtung nach der Seite abgewichen; die Horizontalprojection der Bahn war ungefähr ein Kreis von 270 *km* Radius. Eine vierpfündige Haubitze, unter einem Elevationswinkel von 45° abgeschossen, wich in der Entfernung von 1316 Fuss (400 *m*) um 27 Fuss (8·5 *m*) ab; die Horizontalprojection der Bahn war ungefähr ein Kreis (aber etwas geschlängelt) von nahe 10 *km* Radius.



(A. 258.)

Sehr instructiv in dieser Richtung ist das von den Australiern benützte Wurfgeschoss: der Bumerang, eine kniеartig gebogene Scheibe *abcd*, Fig. 258 die etwas windschief, also wie eine Schraubenfläche gebogen ist, so dass z. B. die Ecken *ac* über die Zeichnungsfläche heraustreten; wie ein Pfeil abgeschossen, geräth dieselbe in eine drehende Bewegung und wird dabei in einem weiten Bogen zum Ausgangspunkte zurückkehren.

Manche Abweichungen von den Bahnen lassen sich durch optische Unregelmässigkeiten erklären. Schmidt erklärt die schlängelnde Bewegung dadurch,

---

[1]) Dieses scheint auch die Ursache, dass bei den teleskopischen Meteoren anomale Bewegungserscheinungen viel seltener auftreten. Schmidt sah (Resultate, pag. 173) unter 146 teleskopischen Meteoren nur eine sicher als anomal zu bezeichnende Bahn (und eine möglicherweise schwach gekrümmte) während er unter 4068 mit freiem Auge beobachteten Meteoren 175 anomale Bewegungen sah; diesem entspricht der Prozentsatz von 0·68% bei den teleskopischen, hingegen 4·4%, also nahe 7 mal so viele bei den mit freiem Auge sichtbaren.

dass ein Meteör eine rotirende Bewegung senkrecht zu seiner Bewegungsrichtung hat, so also, dass die Rotationsaxe in die Richtung der Bewegung fällt, aber nicht das ganze Meteor, sondern nur z. B. ein Punkt ausserhalb der Axe, welcher vielleicht aus leichter entzündlichen Stoffen besteht, zum Glühen oder Verbrennen kommt. Je nach dem Standpunkte der Beobachter wird dann ein solches Meteor einen verschiedenen Eindruck auf das Auge machen; ist die Rotationsaxe, also die Bewegungsrichtung gegen die Gesichtslinie nur wenig geneigt, so entsteht die schlängelnde Bewegung; ist eine starke Neigung, steht sie z. B. beinahe senkrecht auf der Visirlinie, so wird das Meteor in regelmässigen Intervallen aufblitzen und verschwinden, eine Erscheinung, welche sich z. B. bei dem bereits erwähnten Meteore vom 11. November 1849 (vergl. pag. 119) den beiden Beobachtern SCHMIDT und HEIS darbot.

Eine Bahn von der Form *e*, Fig. 255, wird einem Beobachter in der Richtung *mm'* je nach der Neigung in allen möglichen Formen zwischen *d* und *e* erscheinen, und wenn die Ebene, in welcher die Curve *d* liegt, durch das Auge des Beobachters geht, so wird das Meteor eine gerade Linie nach der einen Seite zu beschreiben scheinen, sodann einen Augenblick still stehen, und in seine frühere Bahn zurückkehren. Bei einer Bahn von der Form *b* wird, wenn sich das Auge in der Richtung *mm'* befindet, das Meteor, während es die Bahnstrecke $\alpha\beta$ zurücklegt, still zu stehen und dann in seiner früheren Bahn fortzufahren scheinen, u. s. w.

III. Die Höhe der Meteore. Einer der wesentlichsten Punkte in der Theorie der Meteore war die Ermittelung ihrer Höhe. Nur durch wirkliche Bestimmung derselben, ohne jegliche Hypothese darüber, kann erwiesen werden, ob sie terrestrischen Ursprungs sind, oder nicht; nur wenn ihre Höhe bekannt ist, kann ihre lineare Geschwindigkeit gefunden werden, welche für die Beurtheilung ihrer wirklichen Bahn im Raume von wesentlicher Bedeutung ist.

Ein einfaches, zum Theile graphisches Verfahren zur Bestimmung der Höhe ist das folgende: Man trägt von dem Beobachtungsorte $A$ die Richtung $Ax$[1]), in welcher das Meteor aufblitzte (das Azimuth) auf einer in genügend grossem Maassstabe ausgeführten Spezialkarte der Gegend ein, und notirt die beobachtete Höhe $\alpha$ über dem Horizonte. Hat man die Azimuthe von zwei oder mehreren Orten ($A$, $B$, $C$ u. s. w.), so werden sich die Richtungen $Ax$, $By$, $Cz$, .... in einem Punkte $O$ schneiden, über welchen eben das Meteor $S$ aufblitzte. $O$ ist dann die Projection von $S$ auf die hierzu in dem Bereiche der Erscheinung des Meteors als eben angenommene Erde; $AO$, $BO$, $CO$ ... sind die Projectionen der Visirlinien $AS$, $BS$, $CS$, und $OS$ ist die Höhe, in welcher das Meteor aufgeblitzt ist. Die Entfernungen $AO$, $BO$ ... können mit einem Maassstabe entnommen werden, und dann folgt

$$OS = AO \tang \alpha = BO \tang \beta = CO \tang \gamma \ldots$$

In derselben Weise erhält man die Höhe $O'S'$ des Verschwindens, und dann ist die Länge des Weges, welchen das Meteor zurückgelegt hat:

$$W = \sqrt{(OO')^2 + (OS - O'S')^2}$$

und die Geschwindigkeit des Meteors

$$u_0 = \frac{W}{t},$$

wenn $t$ die Zeitdauer der Erscheinung ist.

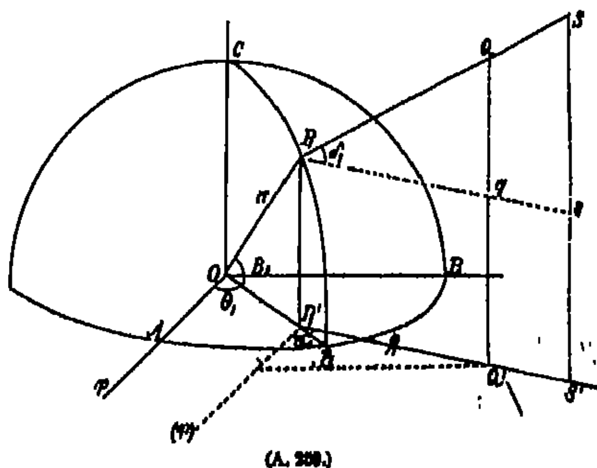
1) Die Figur kann jeder leicht selbst ergänzen.

Bedingung, dass an allen Orten dasselbe Meteor beobachtet wurde, ist zuerst Uebereinstimmung der Zeiten, wobei aber auf die Längendifferenz Rücksicht genommen werden muss. Meteorerscheinungen, welche z. B. in Berlin, Heidelberg und Breslau gesehen werden, können nur dann als demselben Meteor angehörig angesehen werden, wenn die Erscheinung in Heidelberg um die Längendifferenz, d. i. um 20 Minuten Ortszeit früher, und in Breslau um 14¼ Minuten Ortszeit später gesehen wird, als in Berlin.

Die zweite Bedingung ist, dass sich die sämmtlichen Richtungen $AO$, $BO$ $CO$ . . . und ebenso die Richtungen $AO'$, $BO'$, $CO'$ . . . in denselben Punkten $O$, $O'$ schneiden, und dass sich aus allen beobachteten Höhen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ . . $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ . . . dieselben Abstände von der Erde $OS$, $O'S'$ ergeben; Bestimmungen dieser Art waren es, welche schon im vorigen Jahrhundert die grosse Höhe der Meteore über der Erde und ihre grossen Geschwindigkeiten darthaten.

Selbstverständlich wird der Schnitt der Linien $AO$, $BO$ . . . nicht genau in einem Punkte stattfinden, denn die Beobachtungen können nicht absolut genau sein, und sind stets mit gewissen Beobachtungsfehlern behaftet, die bei den Meteoren eine nicht unbeträchtliche Grösse erreichen. Erstrecken sich daher die Beobachtungen nur auf einen geringen Bereich, so wird diese Methode ausreichend genau sein. Will man aber den graphischen Weg verlassen, und die sämmtlichen Operationen durch Rechnung ersetzen, so wird man besser auf die Krümmung der Erde Rücksicht nehmen, wenn das Beobachtungsbereich wie in dem obigen Beispiele (Berlin, Breslau, Heidelberg) etwas grösser ist.

Diesem Umstande trägt bereits die von Olbers gegebene Methode Rechnung. Olbers leitete aber seine Formeln unter der Voraussetzung ab, dass sich die Gesichtslinien von sämmtlichen Beobachtungsorten in einem Punkte schneiden. Unter dieser Voraussetzung werden jedoch die Resultate nicht ganz correkt, und Brandes schlägt eine andere Berechnungsart vor[1]), bei welcher auf die Möglichkeit Rücksicht genommen ist, dass sich die Gesichtslinien im Raume nicht wirklich schneiden, sondern kreuzen, wie dieses in Folge der Beobachtungsfehler zumeist der Fall sein wird. Die Berechnungsart von Brandes lässt sich am einfachsten in folgender Weise darstellen:



(A. 259.)

Sei $O$ (Fig. 259) der Mittelpunkt der Erde, $OC$ die Rotationsaxe, $AB$ der Aequator, $P_1$ ein Beobachtungsort, also $CP_1$ dessen Meridian, $p_1OP_1 = B_1$ dessen geographische Breite, und sei für die Zeit der Beobachtung $OA$ die Richtung nach dem Frühlingspunkt, so ist $p_1OA$ der Stundenwinkel des Frühlingspunktes, also die Sternzeit $\theta_1$ für die in $P_1$ gemachte Beobachtung. Bezieht man nun alle Punkte auf ein rechtwinkliges Axensystem, dessen $X$-Axe durch den Frühlingspunkt, dessen $Y$-Axe nach dem Punkte, dessen

[1]) »Unterhaltungen für Freunde der Physik und Astronomie, Leipzig 1829«, pag. 17.«

Rectascension 90° ist, und dessen $Z$-Axe nach dem Nordpol gerichtet ist, so werden die Coordinaten von $P_1$, wenn man mit $a$ den Erdhalbmesser bezeichnet:

$$x_1 = a \cos B_1 \cos \theta_1; \quad y_1 = a \cos B_1 \sin \theta_1; \quad z_1 = a \sin B_1. \tag{1}$$

Es möge nun $\mathfrak{S}_1$, mit den Rectascensionen und Deklinationen $\alpha_1$, $\delta_1$, der von $P_1$ aus beobachtete Ort der Sternschnuppe am Himmel sein; ist nun $P_1S$ die beobachtete Richtung, $P_1'S'$ die Projection dieser Richtung auf die $XY$-Ebene, so wird, wenn man $P_1'(\Upsilon)$ parallel zu $O\Upsilon$ und $P_1 s$ parallel $P_1'S'$ zieht,

$$(\Upsilon)P_1'S' = \alpha_1; \quad sP_1S = \delta_1$$

sein. Ist $Q$ ein beliebiger Punkt in der Richtung $P_1S$ mit den (laufenden) Coordinaten $\xi, \eta, \zeta$, so findet man leicht, wenn man $P_1'Q' = \rho_1$ setzt

$$\frac{\xi - x_1}{\cos \alpha_1} = \frac{\eta - y_1}{\sin \alpha_1} = \frac{\zeta - z_1}{\tan \delta_1} = \rho_1 \tag{2}$$

und dieses ist die Gleichung der Geraden $P_1S$. In ganz gleicher Weise hat man für einen zweiten Beobachtungsort $P_2$:

$$x_2 = a \cos B_2 \cos \theta_2; \quad y_2 = a \cos B_2 \sin \theta_2; \quad z_2 = a \sin B_2 \tag{1a}$$

und ist $\mathfrak{S}_2$ mit den Coordinaten $\alpha_2$, $\delta_2$ der von $P_2$ aus beobachtete Ort der Sternschnuppe, so wird die Gleichung der Visur für diesen Ort:

$$\frac{\xi - x_2}{\cos \alpha_2} = \frac{\eta - y_2}{\sin \alpha_2} = \frac{\zeta - z_2}{\tan \delta_2} = \rho_2. \tag{2a}$$

Sei nun die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 & \tan \delta_1 \\ \cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 & \tan \delta_2 \end{vmatrix} \tag{3}$$

und die Unterdeterminanten der ersten Zeile

$$\begin{aligned} D_1 &= + \sin \alpha_1 \tan \delta_2 - \sin \alpha_2 \tan \delta_1 \\ D_2 &= - \cos \alpha_1 \tan \delta_2 + \cos \alpha_2 \tan \delta_1 \\ D_3 &= + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 = \sin(\alpha_2 - \alpha_1), \end{aligned} \tag{3a}$$

so ist die Bedingung für das Schneiden der beiden Visuren

$$D = 0. \tag{4}$$

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so wird der kürzeste Abstand der beiden Visuren

$$k = \frac{D}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}}. \tag{5}$$

Die Grösse dieses kürzesten Abstandes wird auch einen Maassstab geben für die Güte der Beobachtungen bezw. für die Zusammengehörigkeit derselben. Da

$$D = D_1(x_2 - x_1) + D_2(y_2 - y_1) + D_3(z_2 - z_1) \tag{3b}$$

ist, so wird $D$ in demselben Maasse erhalten, in welchem $a$ ausgedrückt ist: Man kann $a = 1$ wählen und erhält dann $k$ in Einheiten des Erdhalbmessers ausgedrückt; in dieser Einheit ist 1 $km$ = 0·000157 oder 0·0001 = 0·637 $km$ = 637 $m$. Nähert sich $k$ diesem Werthe, so sind entweder die Beobachtungen sehr schlecht, oder die an den beiden Punkten gemachten Beobachtungen gehören nicht derselben Sternschnuppe an. Schneiden sich die beiden Geraden, so sind die Ausdrücke

$$d_1 = \frac{m_1}{D_1}; \quad d_2 = \frac{m_2}{D_2}; \quad d_3 = \frac{m_3}{D_3}, \tag{6}$$

wobei

$$\begin{aligned} m_1 &= \tan \delta_2 (y_2 - y_1) - \sin \alpha_2 (z_2 - z_1) \\ m_2 &= \cos \alpha_2 (z_2 - z_1) - \tan \delta_2 (x_2 - x_1) \\ m_3 &= \sin \alpha_2 (x_2 - x_1) - \cos \alpha_2 (y_2 - y_1) \end{aligned} \tag{6a}$$

ist, einander gleich, also $d_1 = d_2 = d_3 = \rho_1$, wenn jetzt $\rho_1$ die Entfernung der Projektion $S'$ des Schnittpunktes $S$ der beiden Visuren von $P_1'$ bedeutet und man hat dann für die geocentrischen Coordinaten $x_0, y_0, z_0$ dieses Schnittpunktes, also für die Coordinaten der Sternschnuppe:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_1 + \rho_1 \cos\alpha_1 \\ y_0 &= y_1 + \rho_1 \sin\alpha_1 \\ z_0 &= z_1 + \rho_1 \operatorname{tang}\delta_1. \end{aligned} \tag{7}$$

Die Entfernung $\rho_0$ der Sternschnuppe vom Erdmittelpunkte und ihre Höhe $h$ über der Erdoberfläche werden gegeben durch

$$\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}\,; \quad h = \rho_0 - a. \tag{7a}$$

Da sich die Gleichungen (6) in der Form schreiben lassen

$$D_1 d_1 = m_1\,; \quad D_2 d_2 = m_2; \quad D_3 d_3 = m_3 \tag{6b}$$

so kann man, wenn die Bedingung des Schneidens nicht erfüllt ist, und die Abweichungen als Folge von Beobachtungsfehlern angesehen werden können, als den wahrscheinlichsten Werth von $\rho_1$ den Ausdruck[1]:

$$\rho_1 = \frac{D_1 m_1 + D_2 m_2 + D_3 m_3}{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2} \tag{8}$$

betrachten. Ganz ähnliche Ausdrücke erhält man für die Entfernung $\rho_1'$[2]) für die Coordinaten $x_0', y_0', z_0'$, die geocentrische Entfernung $\rho_0'$ und die Höhe $h'$ des Verschwindens, wenn man an Stelle der beobachteten $\alpha_1, \delta_1, \alpha_2, \delta_2$ des Aufleuchtens die Coordinaten $\alpha_1', \delta_1', \alpha_2', \delta_2'$ des Verschwindens setzt. Der zurückgelegte Weg $W$ folgt aus

$$W^2 = (x_0 - x_0')^2 + (y_0 - y_0')^2 + (z_0 - z_0')^2 \tag{9}$$

und die Geschwindigkeit $v_0$ aus

$$v_0 = \frac{W}{t}, \tag{10}$$

wenn die Dauer der Erscheinung $t^s$ ist. $W$ und $v_0$ sind in derselben Einheit ausgedrückt, wie $a$; wurde daher für $a$ die Einheit gewählt, so hat man $W$ und $v_0$, um dieselben in Kilometern auszudrücken, mit 6370·3 ($\log = 3{\cdot}80416$) zu multipliciren.

Die Bedingung (3) hat eine einfache geometrische Bedeutung. Bezeichnet man den Punkt an der Himmelskugel, wo die Verbindungslinie $P_1P_2$ in der Richtung über $P_2$ verlängert die Himmelskugel trifft, mit $\mathfrak{P}$ und seien dessen Rectascension und Deklination $\mathrm{A}, \Delta$, so ist, wenn die Entfernung $P_1P_2 = \mathrm{P}$ ist

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \mathrm{P} \cos\Delta \cos\mathrm{A} \\ y_2 - y_1 &= \mathrm{P} \cos\Delta \sin\mathrm{A} \\ z_2 - z_1 &= \mathrm{P} \sin\Delta \end{aligned} \tag{11}$$

und die Gleichung (3) wird

$$D = \mathrm{P} \cos\Delta \begin{vmatrix} \cos\mathrm{A} & \sin\mathrm{A} & \operatorname{tang}\Delta \\ \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 & \operatorname{tang}\delta_1 \\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 & \operatorname{tang}\delta_2 \end{vmatrix} \tag{3'}$$

und die Bedingung (4) wird:

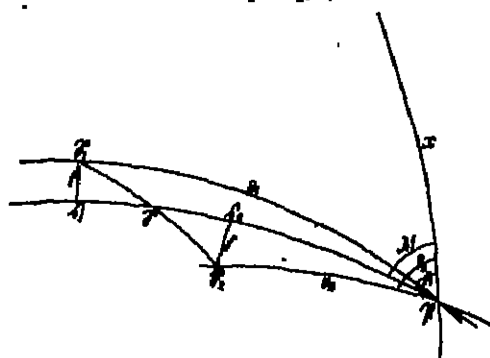
$$\operatorname{tang}\Delta \sin(\alpha_2 - \alpha_1) + \operatorname{tang}\delta_1 \sin(\mathrm{A} - \alpha_2) - \operatorname{tang}\delta_2 \sin(\mathrm{A} - \alpha_1) = 0, \tag{4'}$$

---

[1]) BRANDES schlägt hier natürlich einen andern Weg ein.

[2]) Selbstverständlich kann man auch ganz ähnliche Ausdrücke für die Entfernungen $\rho_2, \rho_2'$ vom zweiten Beobachtungspunkte erhalten, indem nur in (6a) $\alpha_2, \delta_2$ durch $\alpha_1, \delta_1$ ersetzt wird.

welche Gleichung aussagt, dass die drei Punkte $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{P}$ in einem grössten Kreise am Himmel liegen müssen. Dieses ist auch selbstverständlich; sollen die Visuren $P_1\mathfrak{S}_1$, $P_2\mathfrak{S}_2$ derselben Sternschnuppe angehören, so müssen sie sich schneiden, also in einer Ebene liegen, welche die Himmelskugel in dem grössten Kreise $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2\mathfrak{P}$ schneidet. Sind nun die Beobachtungen fehlerhaft, so werden die Punkte $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{P}$ nicht in einem grössten Kreise liegen, aber wenn die Beobachtungen thatsächlich einer und derselben Sternschnuppe angehören, so werden die Abweichungen vom grössten Kreise nur mässig sein, und die kleinstmöglichen Aenderungen, welche man an die Orte $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ anbringen muss, um sie auf einen grössten Kreis zu reduciren, geben nach BESSEL[1]) ein Maass für die Genauigkeit der Beobachtungen. Die anzubringenden Aenderungen werden aber am kleinsten, wenn man für den grössten Kreis den durch den Halbirungspunkt $\mathfrak{S}$ (Fig. 260) von $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2$ gehenden grössten Kreis wählt.


(A. 260.)

Diese Aenderungen sind dann $\mathfrak{S}_1\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{S}_2\mathfrak{Z}_2 = f$, wenn die Kreisbögen $\mathfrak{S}_1\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{S}_2\mathfrak{Z}_2$ senkrecht auf $\mathfrak{S}\mathfrak{P}$ stehen. Man hat nun zunächst die Grössen $s_1, p_1, s_2, p_2$ zu berechnen, wobei $p_1$, $p_2$ die Positionswinkel der Linien $s_1$, $s_2$ (vergl. die Fig. 260) bedeuten, wo also der grösste Kreis $\mathfrak{P}x$ gegen den Nordpol gerichtet ist. Die Berechnung erfolgt aus den Dreiecken $\mathfrak{S}_1$-$\mathfrak{P}$-Pol des Aequators, $\mathfrak{S}_2$-$\mathfrak{P}$-Pol des Aequators; man erhält:

$$\begin{aligned} \cos s_1 &= \sin\Delta \sin\delta_1 + \cos\Delta\cos\delta_1\cos(\alpha_1 - A)\\ \sin s_1\cos p_1 &= \cos\Delta\sin\delta_1 - \sin\Delta\cos\delta_1\cos(\alpha_1 - A)\\ \sin s_1 \sin p_1 &= \cos\delta_1 \sin(\alpha_1 - A), \end{aligned}$$

und ebenso für den zweiten Ort; setzt man daher

$$\begin{aligned} \sin\delta_1 &= k_1 \sin K_1 & \sin\delta_2 &= k_2\sin K_2\\ \cos\delta_1\cos(\alpha_1 - A) &= k_1\cos K_1 & \cos\delta_2\cos(\alpha_2 - A) &= k_2\cos K_2, \end{aligned} \tag{12}$$

so wird:

$$\begin{aligned} \cos s_1 &= k_1\cos(K_1 - \Delta) & \cos s_2 &= k_2\cos(K_2 - \Delta)\\ \sin s_1\cos p_1 &= k_1\sin(K_1 - \Delta) & \sin s_2\cos p_2 &= k_2\sin(K_2 - \Delta)\\ \sin s_1\sin p_1 &= \cos\delta_1\sin(\alpha_1 - A) & \sin s_2\sin p_2 &= \cos\delta_2\sin(\alpha_2 - A). \end{aligned} \tag{12a}$$

Ist $M$ der Positionswinkel von $\mathfrak{S}\mathfrak{P}$, so ist

$$\sin f = \sin s_1\sin(M - p_1) = \sin s_2\sin(p_2 - M) \tag{13}$$

und daraus

$$\frac{\sin s_1}{\sin s_2} = \frac{\sin(p_2 - M)}{\sin(M - p_1)}; \qquad \frac{\sin s_1 + \sin s_2}{\sin s_1 - \sin s_2} = \frac{\sin(p_2 - M) + \sin(M - p_1)}{\sin(p_2 - M) - \sin(M - p_1)}$$

oder

$$\operatorname{tang}\left[\tfrac{1}{2}(p_2 + p_1) - M\right] = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(s_1 - s_2)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(s_1 + s_2)}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(p_2 - p_1). \tag{14}$$

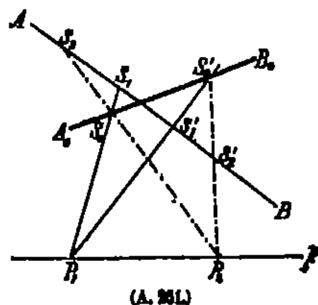
Nachdem $M$ aus (14) berechnet ist, erhält man $f$ aus (13).

Unter 48 von BRANDES als correspondirend angegebenen Sternschnuppen fand BESSEL unter der Voraussetzung ihrer Gleichzeitigkeit

1) Astron. Nachrichten Bd. 16, pag. 321; gesammelte Werke, III. Bd., pag. 328.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Fehler $f$ zwischen | 0° | 1° | 2° | 3° | 4° | 5° | 6° | 7° | 8° | |
| in | | 14 | 11 | 5 | 7 | 5 | 3 | 2 | 1 | Fällen |

und schliesst hieraus, dass die Beobachtungen eben **nicht als streng gleichzeitig anzusehen sind.** Nimmt man aber an, dass die Sternschnuppen an den beiden Beobachtungspunkten nicht wirklich gleichzeitig aufleuchten und verschwinden gesehen wurden, so werden sich auch manche Anomalien der Bewegung erklären lassen. Bessel führt den folgenden charakteristischen Fall an: Sei $AB$ (Fig. 261) der Weg einer Sternschnuppe über den beiden Beobachtungspunkten $P_1 P_2$, wobei der Einfachheit halber die Bahn der Sternschnuppe und die beiden Beobachtungspunkte in derselben Ebene angenommen werden, und werde ihr Aufblitzen in $P_1$ bemerkt, wenn sie in $S_1$ ist; ihr Verschwinden, wenn sie in $S_1'$ ist; von $P_2$ aus bezw., wenn sie in $S_2$, $S_2'$ ist, so ergiebt die Rechnung für den Ort der Sternschnuppe im Raume zur Zeit des Aufblitzens den Schnittpunkt der beiden Visuren $P_1 S_1$, $P_2 S_2$, also $S_0$, für den Ort des Verschwindens $S_0'$, so dass man durch die Rechnung an Stelle der Bahn $AB$ eine andere, davon ganz verschiedene, aufsteigende $A_0 B_0$ erhält. In der That giebt die Rechnung in sehr vielen Fällen aufsteigende Bahnen; wie aus dem Früheren folgt, sind aber aufsteigende Bahnen nur dann als reell zu betrachten, wenn die scheinbare Bahn der Sternschnuppe merklich vom grössten Kreise abweicht; wo aber nur der erste, normale Theil der Bahn gesehen wird, was man leicht daraus schliessen kann, dass von verschiedenen Beobachtungspunkten aus die Bahn der Sternschnuppe sich als grösster Kreis darstellt, kann von aufsteigenden Bahnen nicht wohl die Rede sein.

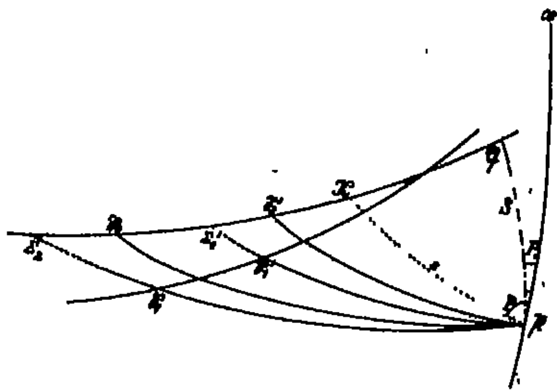


(A. 261.)

Wenn nun überdies die Ebenen $P_1 S_1 S_1'$ und $P_2 S_2 S_2'$ nicht zusammenfallen, so werden sich die Visuren $P_1 S_1$, $P_2 S_2$ und ebenso die beiden anderen kreuzen, und einen Schnittpunkt überhaupt nicht ergeben.

Bessel ersetzt nun die Voraussetzung der Gleichzeitigkeit des Aufblitzens und Verschwindens durch die Annahme, dass die Bahn der Sternschnuppe eine gerade Linie wäre, welche Voraussetzung bei allen jenen Sternschnuppen, welche keine Bewegungsanomalien gezeigt haben, zutreffend ist.

Seien $\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_1'$ (Fig. 262) die durch die Rectascensionen und Deklinationen $\alpha_1, \delta_1, \alpha_1', \delta_1'$ an der Himmelskugel bestimmten Punkte des Aufblitzens und Verschwindens der Sternschnuppe vom Punkte $P_1$ aus gesehen, so stellt unter dieser Voraussetzung der grösste Kreis $\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_1'$ die scheinbare Bahn der Sternschnuppe, gesehen von $P_1$, dar; seien $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_2'$ die Projectionen des Entzündungs- und Verschwindungspunktes der Sternschnuppe von $P_2$. Wenn nun die


(A. 262.)

Beobachtungen gleichzeitig wären, so müssten die drei Punkte der Himmelskugel $\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 \mathfrak{P}$ in einem grössten Kreise liegen, und ebenso die drei Punkte $\mathfrak{S}_1' \mathfrak{S}_2' \mathfrak{P}$. Da dieses nicht der Fall ist, so entsprechen die Beobachtungen nicht denselben Zeiten, und zu den Zeiten, zu denen die Sternschnuppe von $P_1$ aus in $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_1'$ gesehen wurde, würde sie von $P_2$ aus in zwei Punkten $\Sigma_2$, $\Sigma_2'$ gesehen worden sein, welche man erhält, wenn man die grössten Kreise $\mathfrak{P}\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{P}\mathfrak{S}_1'$ zum Schnitte mit dem grössten Kreise $\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_2'$ bringt.

Aus der Figur folgt sofort, dass die Beobachtungen als gleichzeitig anzusehen sind, wenn die Positionswinkel $p_1 = p_2$, $p_1' = p_2'$ sind.

Führt man die auf den Deklinationskreis von $\mathfrak{P}$ bezüglichen Polarcoordinaten $p$, $s$ ein, so sind die Polarcoordinaten von $\Sigma_2$, $\Sigma_2'$, wenn man die Strecken $\mathfrak{P}\Sigma_2 = \sigma_2$, $\mathfrak{P}\Sigma_2' = \sigma_2'$ setzt, bezw.: $p_1, \sigma_2, p_1', \sigma_2'$.

Die Bedingung, dass ein Punkt $K$ auf dem grössten Kreise $\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_2'$ liegt, ist, wenn $\mathfrak{P}\mathfrak{Q} = S$ das Perpendikel von $\mathfrak{P}$ ist, dessen Positionswinkel mit $P$ bezeichnet war, ausgedrückt durch

$$\cos(p - P) = \tang S \cot s.$$

Aus den Coordinaten der beiden Punkte $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_2'$ folgt daher:

$$\cos(p_2 - P) = \tang S \cot s_2; \quad \cos(p_2' - P) = \tang S \cot s_2', \tag{15}$$

woraus sich $P$ und $S$ bestimmen, und dann ist für die Punkte $\Sigma_2$, $\Sigma_2'$:

$$\cos(p_1 - P) = \tang S \cot \sigma_2; \quad \cos(p_1' - P) = \tang S \cot \sigma_2'.$$

Aus den beiden Gleichungen (15) folgt:

$$\frac{\cot s_2}{\cot s_2'} = \frac{\cos(p_2 - P)}{\cos(p_2' - P)}$$

und dann in derselben Weise wie bei (14) zur Bestimmung von $P$:

$$\tang\left[\tfrac{1}{2}(p_2 + p_2') - P\right] = \frac{\sin(s_2' - s_2)}{\sin(s_2' + s_2)} \cot \tfrac{1}{2}(p_2' - p_2); \tag{16}$$

dann folgt $S$ aus einer der Gleichungen (15), und endlich

$$\begin{aligned} \cot \sigma_2 &= \cot S \cos(p_1 - P) \\ \cot \sigma_2' &= \cot S \cos(p_1' - P). \end{aligned} \tag{17}$$

Aus den Grössen $p_1$, $\sigma_2$, $p_1'$, $\sigma_2'$ erhält man nunmehr die Rectascensionen und Declinationen $\alpha$, $\delta$, $\alpha'$, $\delta'$ der Punkte $\Sigma_2$, $\Sigma_2'$ nach:

$$\begin{aligned} \sin\delta &= \cos\sigma_2 \sin\Delta + \sin\sigma_2 \cos\Delta \cos p_1 \\ \cos\delta \cos(\alpha - A) &= \cos\sigma_2 \cos\Delta - \sin\sigma_2 \sin\Delta \cos p_1 \\ \cos\delta \sin(\alpha - A) &= \sin\sigma_2 \sin p_1 \end{aligned}$$

und ebenso für $\alpha'\delta'$; oder wenn man

$$\begin{aligned} \cos\sigma_2 &= l \sin L & \qquad \cos\sigma_2' &= l' \sin L' \\ \sin\sigma_2 \cos p_1 &= l \cos L & \qquad \cos\sigma_2' \cos p_1' &= l' \cos L' \end{aligned} \tag{18}$$

setzt:

$$\begin{aligned} \sin\delta &= l \cos(L - \Delta) & \qquad \sin\delta' &= l' \cos(L' - \Delta) \\ \cos\delta \cos(\alpha - A) &= l \sin(L - \Delta) & \qquad \cos\delta' \cos(\alpha' - A) &= l' \sin(L' - \Delta) \\ \cos\delta \sin(\alpha - A) &= \sin\sigma_2 \sin p_1 & \qquad \cos\delta' \sin(\alpha' - A) &= \sin\sigma_2' \sin p_1'. \end{aligned} \tag{18a}$$

Ersetzt man jetzt die Beobachtungen $\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_2'$ durch die mit den Beobachtungen in $P_1$ gleichzeitigen, fiktiven, der wirklichen Bahn der Sternschnuppe angehörigen Beobachtungen $\Sigma_2\Sigma_2'$ in $P_2$, so werden sich die Visuren gewiss schneiden, die Bedingung (8) oder (8a) ist erfüllt, und man würde durch die Gleichungen (6) denselben Werth erhalten; es wird also genügen

$$\rho_1 = \mathrm{P}\,\frac{\cos\Delta \sin(\alpha - A)}{\sin(\alpha - \alpha_1)}; \quad \rho_1' = \mathrm{P}\,\frac{\cos\Delta \sin(\alpha' - A)}{\sin(\alpha' - \alpha_1')} \tag{19}$$

zu berechnen, und dann nach

$$\begin{array}{ll} x_0 = x_1 + \rho_1 \cos \alpha_1 & x_0' = x_1 + \rho_1' \cos \alpha_1' \\ y_0 = y_1 + \rho_1 \sin \alpha_1 & y_0' = y_1 + \rho_1' \sin \alpha_1' \\ z_0 = z_1 + \rho_1 \tang \delta_1 & z_0' = z_1 + \rho_1' \tang \delta_1' \end{array} \quad (7)$$

$$\begin{array}{ll} \rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} & \rho_0' = \sqrt{x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2} \\ h = \rho_0 - a & h' = \rho_0' - a \end{array} \quad (7a)$$

die Höhen der Sternschnuppe und nach (9), (10) ihre Geschwindigkeit.

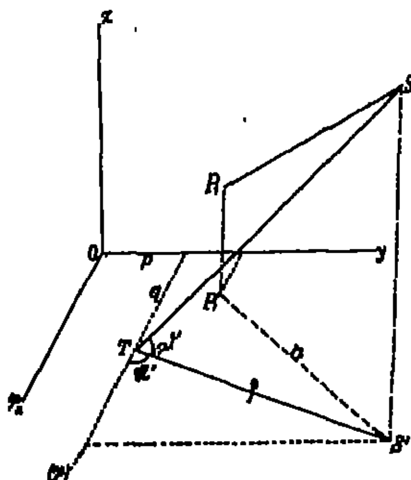
Bessel leitet nun auch Formeln ab für den Einfluss von fehlerhaften Beobachtungen auf die Resultate. Hierbei setzt er aber voraus, dass der Gesammtfehler sich in $s$ äussert, und die $p$ fehlerfrei sind; man kann jedoch auch Formeln ableiten, welche diese Voraussetzung nicht erfordern, und zwar durch Differentiation der Formeln (12)[1]; man erhält dann

$$ds_1 = t_1 \varepsilon; \quad ds_2 = t_2 \varepsilon; \quad dp_1 = q_1 \varepsilon; \quad dp_2 = q_2 \varepsilon,$$

wenn $\varepsilon = \cos \delta \, d\alpha = d\delta$ der in den Rectascensionen und Deklinationen vorauszusetzende Fehler ist, und mit diesen Werthen wäre weiter zu operiren. Da man jedoch auf einfachere Weise zum Ziele gelangen kann, so sollen die Werthe für die Coëfficienten $t_1, t_2, q_1, q_2$ nicht weiter abgeleitet werden.

Die Resultate werden nämlich etwas übersichtlicher, wenn man von den Formeln ausgeht, welche Lehmann-Filhés in seiner Inauguraldissertation »Zur Theorie der Sternschnuppen«, Berlin 1878, gab.

Die Richtung, aus welcher die Sternschnuppe kommt, ist bestimmt durch den Durchschnittspunkt ihrer geradlinigen Bahn (oder auch der zu ihr parallelen Geraden durch das Auge) mit der Himmelskugel. Legt man ein rechtwinkliges Axensystem, dessen $XY$-Ebene der Aequator, dessen $X$-Axe nach dem Frühlingspunkt, und dessen $Z$-Axe nach dem Nordpol gerichtet ist, zu Grunde; ist $ST$ (Fig. 268) die wieder als geradlinig gedachte Sternschnuppenbahn, und $T$ ihr Durchschnittspunkt mit dem Aequator, $TS'$ ihre Projection auf den Aequator, so ist $(\Upsilon)TS' = \mathfrak{A}'$ die Rectascension, $STS' = \mathfrak{D}'$ die Deklination des scheinbaren kosmischen Ausgangspunktes; dieser ist aber nichts anderes, als der Radiant. Sind nämlich mehrere Sternschnuppen beobachtet, die in derselben Richtung kommen, so wird die durch das Auge des Beobachters gelegte Parallele den Verschwindungspunkt (Fluchtpunkt) bestimmen, in welchem sich die scheinbaren Bahnen schneiden müssen[2]. Den Radianten für eine einzelne Sternschnuppe kann man aus den Beobachtungen an einem Orte nicht bestimmen; hierzu müssen Beobachtungen von mindestens zwei Orten vorliegen; hingegen ist der Radiant mehrerer Sternschnuppen durch den gemeinschaftlichen Schnittpunkt aller ihrer scheinbaren Bahnen (grösste Kreise am Himmel) bestimmt.



(A. 268.)

Sind die Coordinaten des Durchstosspunktes $T$ der Meteorbahn mit der

[1] Am besten vor Einführung der Hilfswinkel.

[2] Vergl. auch »Allgemeine Einleitung in die Astronomie«, pag. 161.

$XY$-Ebene $p, q, 0$, die laufenden Coordinaten der Sternschnuppenbahn $\xi, \eta, \zeta$, so ist die Gleichung derselben

$$\frac{\xi - p}{\cos \mathfrak{A}'} = \frac{\eta - q}{\sin \mathfrak{A}'} = \frac{\zeta}{\operatorname{tang} \mathfrak{D}'} = \rho,$$

wenn $\rho = TS'$ die Entfernung der Projektion des Punktes, dessen Coordinaten $\xi, \eta, \zeta$ sind, von $T$ bedeutet.

Ist nun $P_1$ ein Beobachtungsort, dessen Coordinaten wie früher $x_1, y_1, z_1$, seien, und $r_1, \alpha_1, \delta_1$ Projection der Entfernung, Rectascension und Deklination des Punktes $S$ von dem Beobachtungsorte $P_1$, so werden für den Anfangs- und Endpunkt die Grössen $\alpha_1, \delta_1, \alpha_1', \delta_1'$ bekannt sein, hingegen sind $r_1, r_1'$ unbekannt. Nun ist aber für einen beliebigen Punkt $r, \alpha, \delta$ der Sternschnuppenbahn:

$$\begin{aligned} \xi &= x_1 + r \cos \alpha = p + \rho \cos \mathfrak{A}' \\ \eta &= y_1 + r \sin \alpha = q + \rho \sin \mathfrak{A}' \\ \zeta &= z_1 + r \operatorname{tang} \delta = \rho \operatorname{tang} \mathfrak{D}' \end{aligned} \tag{20}$$

Diese drei Gleichungen lassen sich schreiben:

$$\begin{aligned} x_1 - p + r \cos \alpha - \rho \cos \mathfrak{A}' &= 0 \\ y_1 - q + r \sin \alpha - \rho \sin \mathfrak{A}' &= 0 \\ z_1 + r \operatorname{tang} \delta - \rho \operatorname{tang} \mathfrak{D}' &= 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Eliminirt man hieraus $r$ und $\rho$, so folgt

$$\begin{vmatrix} x_1 - p & y_1 - q & z_1 \\ \cos \alpha & \sin \alpha & \operatorname{tang} \delta \\ \cos \mathfrak{A}' & \sin \mathfrak{A}' & \operatorname{tang} \mathfrak{D}' \end{vmatrix} = 0 \tag{22}$$

oder

$$\begin{aligned} (x_1 - p)(\sin \alpha \operatorname{tang} \mathfrak{D}' - \sin \mathfrak{A}' \operatorname{tang} \delta) - (y_1 - q)(\cos \alpha \operatorname{tang} \mathfrak{D}' - \cos \mathfrak{A}' \operatorname{tang} \delta) \\ + z_1 \sin (\mathfrak{A}' - \alpha) = 0. \end{aligned} \tag{22a}$$

Setzt man für die vorläufig unbestimmten Coordinaten $\alpha, \delta$, die Coordinaten des Aufleuchtens $\alpha_1, \delta_1$ und diejenigen des Verschwindens $\alpha_1', \delta_1'$ an dem Beobachtungsorte $P_1$, so erhält man zwei Gleichungen für diesen Beobachtungsort; ebenso erhält man aus den Beobachtungen für das Aufleuchten und Verschwinden an dem zweiten Beobachtungsorte zwei Gleichungen: zusammen 4 Gleichungen, aus denen sich die vier Unbekannten $p, q, \mathfrak{A}', \mathfrak{D}'$ bestimmen lassen. Die Gleichung ist jedoch in Bezug auf $\mathfrak{A}'$ nicht von der ersten Ordnung, indem sie $\sin \mathfrak{A}'$ und $\cos \mathfrak{A}'$ enthält. Man wird jedoch leicht genäherte Werthe für $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{D}'$ erhalten; verschafft man sich gleichzeitig genäherte Werthe für $p$ und $q$ und setzt die Ausdrücke

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}_0 + \Delta\mathfrak{A}; \quad \mathfrak{D}' = \mathfrak{D}_0 + \Delta\mathfrak{D}; \quad p = p_0 + \Delta p; \quad q = q_0 + \Delta q$$

in die Gleichung (22a) ein, und entwickelt nach Potenzen der Incremente $\Delta\mathfrak{A}$, $\Delta\mathfrak{D}$, $\Delta p$, $\Delta q$, wobei man diese Aenderungen einfach als differentiell ansehen kann, so erhält man:

$$n_1 = a_1 \Delta p + b_1 \Delta q + c_1 \Delta \mathfrak{A} + d_1 \Delta \mathfrak{D}, \tag{23}$$

wobei

$$\begin{aligned} &+ \sin \alpha_1 \operatorname{tang} \mathfrak{D}_0 - \sin \mathfrak{A}_0 \operatorname{tang} \delta_1 = a_1 \\ &- \cos \alpha_1 \operatorname{tang} \mathfrak{D}_0 + \cos \mathfrak{A}_0 \operatorname{tang} \delta_1 = b_1 \\ &+ (x_1 - p_0) \cos \mathfrak{A}_0 \operatorname{tang} \delta_1 + (y_1 - q_0) \sin \mathfrak{A}_0 \operatorname{tang} \delta_1 - z_1 \cos (\mathfrak{A}_0 - \alpha_1) = c_1 \\ &- [(x_1 - p_0) \sin \alpha_1 - (y_1 - q_0) \cos \alpha_1] \sec^2 \mathfrak{D}_0 = d_1 \\ &\qquad (x_1 - p_0) a_1 + (y_1 - q_0) b_1 + z_1 \sin (\mathfrak{A}_0 - \alpha_1) = n_1 \end{aligned}$$

ist, oder für die Rechnung bequemer:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= + \sin\alpha_1 \tan \mathfrak{D}_0 - \sin \mathfrak{A}_0 \tan \delta_1 \\
b_1 &= - \cos\alpha_1 \tan \mathfrak{D}_0 + \cos \mathfrak{A}_0 \tan \delta_1 \\
g_1 \sin G_1 &= a_1 \qquad h_1 \sin H_1 = y_1 - q_0 \\
g_1 \cos G_1 &= b_1 \qquad h_1 \cos H_1 = x_1 - p_0 \\
c_1 &= h_1 \cos(H_1 - \mathfrak{A}_0) \tan \delta_1 - s_1 \cos(\mathfrak{A}_0 - \alpha_1) \\
d_1 &= h_1 \sin(H_1 - \alpha_1) \sec^2 \mathfrak{D}_0 \\
g_1 h_1 \sin(G_1 + H_1) &+ s_1 \sin(\mathfrak{A}_0 - \alpha_1) = n_1 .
\end{aligned} \tag{23a}
$$

In ähnlicher Weise erhält man für die drei übrigen Beobachtungen $\alpha_1'$, $\delta_1'$; $\alpha_2$, $\delta_2$; $\alpha_2'$, $\delta_2'$ Werthe für $a_1' b_1' \ldots$; $a_2$, $b_2 \ldots$ und damit die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
n_1' &= a_1'\Delta p + b_1'\Delta q + c_1'\Delta \mathfrak{A} + d_1'\Delta \mathfrak{D} \\
n_2 &= a_2\Delta p + b_2\Delta q + c_2\Delta \mathfrak{A} + d_2\Delta \mathfrak{D} \\
n_2' &= a_2'\Delta p + b_2'\Delta q + c_2'\Delta \mathfrak{A} + d_2'\Delta \mathfrak{D}.
\end{aligned} \tag{23'}
$$

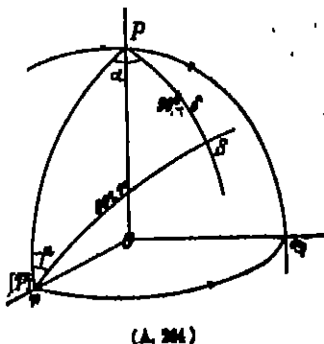
Sind mehr als zwei Beobachtungsorte, so erhält man mehr Gleichungen als Unbekannte, und man wird hieraus die Werthe für $\Delta p$, $\Delta q$, $\Delta \mathfrak{A}$, $\Delta \mathfrak{D}$ nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmen.

Hat man nur zwei Beobachtungsstationen, so wird es gut sein, diese Gleichungen unbestimmt aufzulösen, was am besten durch Determinanten geschieht; man erhält dann leicht:

$$
\begin{aligned}
\Delta p &= A_1 n_1 + A_1' n_1' + A_2 n_2 + A_2' n_2' \\
\Delta q &= B_1 n_1 + B_1' n_1' + B_2 n_2 + B_2' n_2' \\
\Delta \mathfrak{A} &= C_1 n_1 + C_1' n_1' + C_2 n_2 + C_2' n_2' \\
\Delta \mathfrak{D} &= D_1 n_1 + D_1' n_1' + D_2 n_2 + D_2' n_2'.
\end{aligned} \tag{24}
$$

Dabei wird es (wegen des folgenden) praktisch, die Coëfficienten $c_1$, $d_1$ unverändert beizubehalten (nicht mit $arc\,1'$ zu multipliciren) und erst die erhaltenen Correctionen $\Delta \mathfrak{A}$, $\Delta \mathfrak{D}$ durch Division mit $arc\,1'$ in Winkelmaass überzuführen.

Die Gleichungen werden nur dann unanwendbar, wenn $\mathfrak{D}_0$ oder eine der beobachteten Deklinationen nahe 90° sind; in diesem Falle wird es am besten, auf ein anderes Coordinatensystem überzugehen, etwa auf das der Ekliptik. Um jedoch einfache Transformationsformeln zu erhalten, schlägt LEHMANN-FILHÉS nach dem bereits früher von v. OPPOLZER bei einer anderen Gelegenheit empfohlenen Vorgange vor, das Coordinatensystem so zu wählen, dass der Frühlingspunkt zum Pole wird. Zählt man dann die Coordinate $\mu$ analog der Rectascension vom Pole über das Wintersolstitium weiter (vergl. Fig. 264) und die Coordinate $\nu$ der Deklination analog, so hat man für einen Punkt $S$ der Himmelskugel aus dem sphärischen Dreiecke $PS[P]$:



(A. 264)

$$
\begin{aligned}
\sin\nu &= \cos\delta \cos\alpha \\
\cos\nu \sin\mu &= -\cos\delta \sin\alpha \\
\cos\nu \cos\mu &= \sin\delta, \qquad \nu \text{ stets positiv;}
\end{aligned}
$$

und die Berechnung wird dann so wie früher durchgeführt, wobei nur $\mu$, $\nu$ an Stelle von $\alpha$, $\delta$ tritt.

Wurden $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{D}'$ aus nur zwei Beobachtungsstationen ermittelt, so wird die Gleichung (22) vollständig erfüllt sein müssen, und eventuell noch übrigbleibende Fehler werden nur sehr klein sein und nur von der Vernachlässigung der Qua-

drate und Produkte der Correctionen $\Delta\mathfrak{A}$, $\Delta\mathfrak{D}$, $\Delta p$, $\Delta q$ herrühren[1]). Sind aber die Correctionen aus mehr als zwei Orten bestimmt, so werden die Gleichungen (22) nicht vollständig erfüllt sein können, und es werden gewisse Fehler übrig bleiben, die von den den $\alpha$, $\delta$ anhaftenden Beobachtungsfehlern herrühren. Setzt man also in die Gleichungen (22) die bereits corrigirten Werthe $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{D}'$, $p$, $q$, hingegen an Stelle von $\alpha_1$, $\delta_1$, ... die zur Erfüllung der Gleichungen nothwendigen corrigirten Werthe $\alpha_1 + \Delta\alpha_1$, $\delta_1 + \Delta\delta_1$ ... und entwickelt, so erhält man:

$$k_1 \cos\delta_1 \Delta\alpha_1 + l_1 \Delta\delta_1 = m_1. \tag{25}$$

Da man jedoch nur die ersten Potenzen der Correctionen zu berücksichtigen braucht, so wird man bei der Berechnung der Coëfficienten $k_1$, $l_1$ ausreichend genau die Werthe $p_0$, $q_0$ anwenden können; bei der Bestimmung von $m_1$ hingegen muss man die corrigirten, definitiven Werthe $p$, $q$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{D}'$ verwenden, weil der durch das Einsetzen derselben hervorgehende Unterschied gegen Null die Fehler $\Delta\alpha_1$, $\Delta\delta_1$ bestimmt. Da jedoch die Werthe $x_1 - p$, $y_1 - q$ überdies zur Berechnung von $r_1$ und $\rho_1$ erforderlich sind, so kann man setzen:

$$\begin{aligned}
x_1 - p &= i_1 \cos J_1 \\
y_1 - q &= i_1 \sin J_1 \\
k_1 &= \{- i_1 \cos(J_1 - \alpha_1) \tang \mathfrak{D}' + s_1 \cos(\mathfrak{A}' - \alpha_1)\} \sec\delta_1 \\
l_1 &= - i_1 \sin(J_1 - \mathfrak{A}') \sec^2\delta_1 \\
m_1 &= (x_1 - p)(\sin\alpha_1 \tang\mathfrak{D}' - \sin\mathfrak{A}' \tang\delta_1) - \\
&\quad - (y_1 - q)(\cos\alpha_1 \tang\mathfrak{D}' - \cos\mathfrak{A}' \tang\delta_1) + s_1 \sin(\mathfrak{A}' - \alpha_1).
\end{aligned} \tag{25a}$$

Macht man nun die Annahme, dass man in jeder Richtung einen gleich grossen Fehler $\pm\varepsilon$ begeht, dass also $\cos\delta_1 \Delta\alpha_1 = \Delta\delta_1 = \pm\varepsilon$ anzunehmen ist, so wird

$$\varepsilon = \frac{m_1}{[k_1] + [l_1]},$$

wobei $[Z]$ den **absoluten** (stets positiv zu nehmenden) Betrag einer Zahl $Z$ bedeutet[2]). Führt man diese Rechnung für jede Beobachtung (für das Aufleuchten und Verschwinden, für jeden Beobachter getrennt) aus, so kann man durch entsprechende Combinationen den Beobachtungsfehler $\varepsilon$ für das Aufleuchten und Verschwinden für jeden einzelnen Beobachter oder auch für Sternschnuppen verschiedener Grössenklassen u. s. w. erhalten.

Bestimmt man aber den Fehler $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ aus der Gleichung

$$\varepsilon = \frac{m_1}{k_1 + l_1},$$

wobei für die Coëfficienten nicht die absoluten Beträge, sondern die wirklichen Werthe eingesetzt werden, so erhält man die an die beobachteten Werthe $\alpha$, $\delta$ anzubringenden Correctionen $\Delta\delta = \varepsilon$, $\Delta\alpha = \varepsilon \sec\delta$, damit die Visuren die Sternschnuppenbahn schneiden; führt man dann die corrigirten Werthe $\alpha_1 + \Delta\alpha_1$, $\delta_1 + \Delta\delta_1$, $\alpha_1' + \Delta\alpha_1'$, $\delta_1' + \Delta\delta_1'$, $\alpha_2 + \Delta\alpha_2$ ... für alle Stationen ein, so

---

[1]) Dieses übersieht LEHMANN-FILHÉS in seinem Beispiele. Zwar ist im Raume eine Gerade durch **drei** sich kreuzende Gerade bestimmt, hier sind aber die vier sich kreuzenden Geraden in einer speciellen Lage: es schneiden sich zwei und zwei derselben. Und in der That ist durch diese vier Geraden eine alle vier schneidende möglich: die Schnittlinie der durch sie gelegten Ebenen.

[2]) LEHMANN-FILHÉS bestimmt die Correctionen $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ so, dass die Fehlerquadratsumme ein Minimum wird.

werden die Gleichungen (21) gleichzeitig erfüllt sein, und es genügt zur Bestimmung von $r$ und $\rho$ zwei dieser Gleichungen zu verwenden (die dritte ist dann von selbst mit erfüllt); verwendet man dazu die beiden ersten, so folgt:

$$r_1 = \frac{i_1 \sin(J_1 - \mathfrak{A}')}{\sin(\mathfrak{A}' - \alpha_1)}; \qquad \rho_1 = \frac{i_1 \sin(J_1 - \alpha_1)}{\sin(\mathfrak{A}' - \alpha_1)} \tag{26a}$$

für den Punkt des Aufleuchtens, und

$$r_1' = \frac{i_1 \sin(J_1 - \mathfrak{A}')}{\sin(\mathfrak{A}' - \alpha_1')}; \qquad \rho_1' = \frac{i_1 \sin(J_1 - \alpha_1')}{\sin(\mathfrak{A}' - \alpha_1')} \tag{26b}$$

für den Punkt des Verschwindens. $\rho_1$ ist die Entfernung der Projection des Entzündungspunktes von $T$, $\rho_1'$ die Entfernung des Verschwindungspunktes; $\rho_1$, $\rho_1'$ werden sich also für die verschiedenen Stationen nicht identisch ergeben müssen; je grösser ihre Werthe, desto früher wurde ihr Aufleuchten, bezw. Verschwinden beobachtet. Die Länge des beschriebenen Weges folgt hieraus:

$$W = (\rho_1 - \rho_1') \sec \mathfrak{D}'. \tag{27}$$

Die Coordinaten des Punktes des Aufleuchtens und Verschwindens sind für den ersten Ort:

$$\begin{aligned} \xi_{01} &= p + \rho_1 \cos \mathfrak{A}' & \xi'_{01} &= p + \rho_1' \cos \mathfrak{A}' \\ \eta_{01} &= q + \rho_1 \sin \mathfrak{A}' & \eta'_{01} &= q + \rho_1' \sin \mathfrak{A}' \\ \zeta_{01} &= \rho_1 \tang \mathfrak{D}' & \zeta'_{01} &= \rho_1' \tang \mathfrak{D}' \end{aligned} \tag{28}$$

und es werden die Entfernungen dieser Punkte vom Erdmittelpunke und von der Erdoberfläche:

$$\begin{aligned} \rho_{01} &= \sqrt{\xi_{01}^2 + \eta_{01}^2 + \zeta_{01}^2} & \rho_{01}' &= \sqrt{\xi'^2_{01} + \eta'^2_{01} + \zeta'^2_{01}} \\ h_1 &= \rho_{01} - a & h_1' &= \rho'_{01} - a \end{aligned} \tag{29}$$

Verwendet man statt $\rho_1, \rho_1'$ die Werthe $\rho_2, \rho_2'$ für den zweiten Beobachtungsort, so werden die Endwerthe $\xi_{02}, \eta_{02}, \ldots h_2, h_2'$ natürlich etwas verschieden erhalten werden; denn nach der Annahme wird das Aufleuchten und Verschwinden nicht an allen Orten gleichzeitig wahrgenommen.

Hat man mehrere Beobachtungsstationen, so wird man durch die Auflösung der Gleichungen (28), (28') nach der Methode der kleinsten Quadrate bereits die Beobachtungsfehler unschädlich gemacht haben. Hat man aber nur zwei Beobachtungsstationen, so wird die Gleichung (22) strenge erfüllt sein; aber man hat keinerlei Controlle über den Einfluss der Beobachtungsfehler, und dann kann es auch vorkommen, dass sich aufwärts gerichtete Bahnen, nur als Folge von Beobachtungsfehlern, ergeben. Es ist also nöthig, den Einfluss von Beobachtungsfehlern in $\alpha$, $\delta$ auf die berechneten Höhen zu ermitteln.

Differenzirt man die Gleichung (22a) nach allen darin vorkommenden Grössen, mit Ausnahme der festen Werthe $x_1, y_1, z_1$, so erhält man, wie man sofort sieht:

$$a_1 \Delta p + b_1 \Delta q + c_1 \Delta \mathfrak{A} + d_1 \Delta \mathfrak{D} + k_1 \cos \delta_1 \Delta \alpha_1 + l_1 \Delta \delta_1 = 0. \tag{30}$$

Würde man nun hier $\cos \delta_1 \Delta \alpha_1 = \Delta \delta_1 = \varepsilon$ setzen, so würde dieses voraussetzen, dass immer nur Fehler desselben Zeichens $+\varepsilon$ möglich sind. Wollte man ferner $\pm \varepsilon$ zulassen, so müssten die Gleichungen mit jeder der Zeichencombinationen $\pm k_1 \varepsilon \pm l_1 \varepsilon$ aufgelöst werden; es ist daher am besten, den Einfluss der Fehler $\cos \delta_1 \Delta \alpha_1 = \varepsilon_1$, $\Delta \delta_1 = \varphi_1$, $\cos \delta_2 \Delta \alpha_2 = \varepsilon_2 \ldots$ zuerst getrennt zu untersuchen. Hat man die Gleichungen (23), (28') unbestimmt aufgelöst, so erhält man sofort die Auflösung der Gleichungen (30), indem man die Grössen $n_1$, $n_2$, $n_1'$, $n_2'$ durch die correspondirenden Werthe $k_1 \varepsilon_1 + l_1 \varphi_1$, $k_1' \varepsilon_1' + l_1' \varphi_1'$, $k_2 \varepsilon_2 + l_2 \varphi_2$, $k_2' \varepsilon_2' + l_2' \varphi_2'$ ersetzt; es wird also:

$$\begin{aligned}
\Delta p &= A_1(k_1 e_1 + l_1\varphi_1) + A_1'(k_1'e_1' + l_1'\varphi_1') + A_2(k_2 e_2 + l_2\varphi_2) + \\
&\quad + A_2'(k_2'e_2' + l_2'\varphi_2') \\
\Delta q &= B_1(k_1 e_1 + l_1\varphi_1) + B_1'(k_1'e_1' + l_1'\varphi_1') + B_2(k_2 e_2 + l_2\varphi_2) + \\
&\quad + B_2'(k_2'e_2' + l_2'\varphi_2') \\
\Delta\mathfrak{A} &= C_1(k_1 e_1 + l_1\varphi_1) + C_1'(k_1'e_1' + l_1'\varphi_1') + C_2(k_2 e_2 + l_2\varphi_2) + \\
&\quad + C_2'(k_2'e_2' + l_2'\varphi_2') \\
\Delta\mathfrak{D} &= D_1(k_1 e_1 + l_1\varphi_1) + D_1'(k_1'e_1' + l_1'\varphi_1') + D_2(k_2 e_2 + l_2\varphi_2) + \\
&\quad + D_2'(k_2'e_2' + l_2'\varphi_2').
\end{aligned} \tag{30a}$$

Es ist zu bemerken, dass alle hier auftretenden Coëfficienten schon früher berechnet sind.

Den Einfluss von $\Delta\mathfrak{A}$, $\Delta\mathfrak{D}$, $\Delta p$, $\Delta q$ auf $\rho_{01}$, $\rho_{01}'$ kann man mittelst der Gleichungen (29) bestimmen; das Resultat wird jedoch übersichtlicher, wenn man alle drei Gleichungen (30) verwendet. Es wird dabei besser $\Delta r$ zu bestimmen, als $\Delta\rho$; denn $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ enthalten $\Delta\mathfrak{A}$, $\Delta\mathfrak{D}$, $\Delta p$, $\Delta q$ sowohl implicite in $\Delta\rho$ als auch explicite, hingegen, wenn man $\Delta r$ benützt nur implicite in diesem Ausdrucke; das Resultat muss zwar identisch sein, doch werden die Reductionen im ersten Falle etwas länger. Eliminirt man also aus der ersten und dritten, und dann aus der zweiten und dritten Gleichung (30) $\rho_1$[1]), so folgt:

$$\begin{aligned}
r_1(\cos\alpha_1 \operatorname{tang}\mathfrak{D}' - \cos\mathfrak{A}' \operatorname{tang}\delta_1) &= z_1\cos\mathfrak{A}' - (x_1 - p)\operatorname{tang}\mathfrak{D}' \\
r_1(\sin\alpha_1 \operatorname{tang}\mathfrak{D}' - \sin\mathfrak{A}' \operatorname{tang}\delta_1) &= z_1\sin\mathfrak{A}' - (y_1 - q)\operatorname{tang}\mathfrak{D}'.
\end{aligned}$$

Differenzirt man diese Gleichungen, so folgt:

$$\begin{aligned}
\Delta r_1(\cos\alpha_1 \operatorname{tang}\mathfrak{D}' - \cos\mathfrak{A}' \operatorname{tang}\delta_1) &= -\rho_1\cos\mathfrak{A}'\frac{\Delta\mathfrak{D}}{\cos^2\mathfrak{D}'} - \rho_1\operatorname{tang}\mathfrak{D}'\sin\mathfrak{A}'\Delta\mathfrak{A} + \\
&\quad + \Delta p\operatorname{tang}\mathfrak{D}' + r_1\sin\alpha_1\operatorname{tang}\mathfrak{D}'\Delta\alpha_1 + r_1\frac{\cos\mathfrak{A}'}{\cos^2\delta_1}\Delta\delta_1 \\
\Delta r_1(\sin\alpha_1 \operatorname{tang}\mathfrak{D}' - \sin\mathfrak{A}' \operatorname{tang}\delta_1) &= -\rho_1\sin\mathfrak{A}'\frac{\Delta\mathfrak{D}}{\cos^2\mathfrak{D}'} + \rho_1\operatorname{tang}\mathfrak{D}'\cos\mathfrak{A}'\Delta\mathfrak{A} + \\
&\quad + \Delta q\operatorname{tang}\mathfrak{D}' - r_1\cos\alpha_1\operatorname{tang}\mathfrak{D}'\Delta\alpha_1 + r_1\frac{\sin\mathfrak{A}'}{\cos^2\delta_1}\Delta\delta_1.
\end{aligned}$$

Multiplicirt man jede dieser Gleichungen mit dem Coëfficienten von $\Delta r_1$ und addirt, und setzt:

$$\begin{array}{llll}
A_1 = \varkappa_1\cos K_1 & C_1 = \lambda_1\cos L_1 & A_1' = \varkappa_1'\cos K_1' & C_1' = \lambda_1'\cos L_1' \\
B_1 = \varkappa_1\sin K_1 & D_1 = \lambda_1\sin L_1 & B_1' = \varkappa_1'\sin K_1' & D_1' = \lambda_1'\sin L_1' \\
A_2 = \varkappa_2\cos K_2 & C_2 = \lambda_2\cos L_2 & A_2' = \varkappa_2'\cos K_2' & C_2' = \lambda_2'\cos L_2' \\
B_2 = \varkappa_2\sin K_2 & D_2 = \lambda_2\sin L_2 & B_2' = \varkappa_2'\sin K_2' & D_2' = \lambda_2'\sin L_2'
\end{array} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{tang}^2\mathfrak{D}' + \operatorname{tang}^2\delta_i - 2\cos(\mathfrak{A}' - \alpha_i)\operatorname{tang}\mathfrak{D}'\operatorname{tang}\delta_i &= N_i \\
\frac{\cos(\mathfrak{A}' - \alpha_i)\operatorname{tang}\mathfrak{D}' - \operatorname{tang}\delta_i}{N_i\cos^2\mathfrak{D}'} &= \sigma_i\sin\Sigma_i \\
\frac{\sin(\mathfrak{A}' - \alpha_i)\operatorname{tang}^2\mathfrak{D}'}{N_i} &= \sigma_i\cos\Sigma_i \\
-\frac{b_i}{N_i} &= \tau_i\cos T_i \\
+\frac{a_i}{N_i} &= \tau_i\sin T_i \\
\frac{\sin(\mathfrak{A}' - \alpha_i)\operatorname{tang}\mathfrak{D}'\sin\delta_i}{N_i\cos^2\delta_i} &= e_i \\
\frac{\cos(\mathfrak{A}' - \alpha_i)\operatorname{tang}\mathfrak{D}' - \operatorname{tang}\delta_i}{N_i\cos^2\delta_i} &= f_i
\end{aligned} \tag{32}$$

---

[1]) Man könnte auch andere Verbindungen wählen, doch werden die Zwischenresultate weniger symmetrisch.

# Tafel III.





Fig. 2 (1835, Oktober 13, 7h 0m)



Fig. 4 (1835, Oktober 22, 6h 5m)



Fig. 1 (1835, Oktober 12, 12h 40m)



Fig. 3 (1835, Oktober 14, 7h 14m)

Kopf des Halley'schen Kometen 1835 (nach Bessel)

*Hern del.*

Verlag von EDUARD TREWENDT

# Tafel IV.



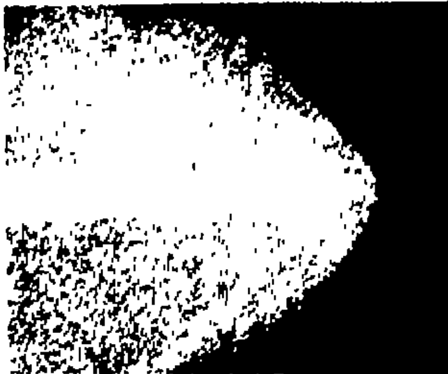


Fig. 1
(1888, April 10—17)



Fig. 2
(1888 April 17, 6a)

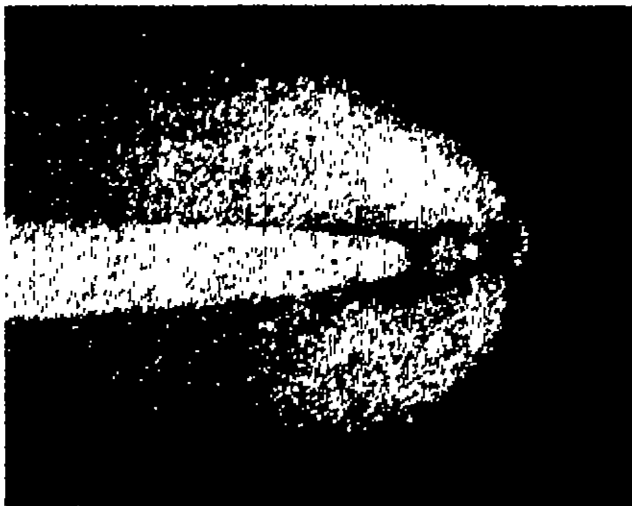


Fig. 3
(1888, Mai 21)

[1] Komet Sawerthal 1888 I
(nach Wutschichowsky, Astron. Nachrichten No. 2844)

Verlag von EDUARD TREWENDT

so wird:

$$\begin{aligned}\Delta r_i = & [-\rho_i\sigma_i\lambda_1 \cos(\Sigma_i - L_1) + \tau_i\varkappa_1 \operatorname{tang}\mathfrak{D}' \cos(T_i - K_1)](k_1\varepsilon_1 + l_1\varphi_1) \\ & + [-\rho_i\sigma_i\lambda_1' \cos(\Sigma_i - L_1') + \tau_i\varkappa_1' \operatorname{tang}\mathfrak{D}' \cos(T_i - K_1')](k_1'\varepsilon_1' + l_1'\varphi_1') \\ & + [-\rho_i\sigma_i\lambda_2 \cos(\Sigma_i - L_2) + \tau_i\varkappa_2 \operatorname{tang}\mathfrak{D}' \cos(T_i - K_2)](k_2\varepsilon_2 + l_2\varphi_2) \quad i = 1, 1', 2, 2' \\ & + [-\rho_i\sigma_i\lambda_2' \cos(\Sigma_i - L_2') + \tau_i\varkappa_2' \operatorname{tang}\mathfrak{D}' \cos(T_i - K_2')](k_2'\varepsilon_2' + l_2'\varphi_2') \\ & + r_i e_i \varepsilon_i + r_i f_i \varphi_i\end{aligned}$$

Endlich ist

$$\begin{aligned}\Delta\xi_{01} &= \Delta r_1 \cos\alpha_1 - r_1 \sin\alpha_1 \Delta\alpha_1 \\ \Delta\eta_{01} &= \Delta r_1 \sin\alpha_1 + r_1 \cos\alpha_1 \Delta\alpha_1 \\ \Delta\zeta_{01} &= \Delta r_1 \operatorname{tang}\delta_1 + r_1 \frac{\Delta\delta_1}{\cos^2\delta_1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta h_1 = \Delta\rho_{01} &= \frac{\xi_{01}}{\rho_{01}}\Delta\xi_{01} + \frac{\eta_{01}}{\rho_{01}}\Delta\eta_{01} + \frac{\zeta_{01}}{\rho_{01}}\Delta\zeta_{01} \\ &= \Delta r_1 \left(\frac{\xi_{01}}{\rho_{01}}\cos\alpha_1 + \frac{\eta_{01}}{\rho_{01}}\sin\alpha_1 + \frac{\zeta_{01}}{\rho_{01}}\operatorname{tang}\delta_1\right) + \\ &+ r_1\left(\frac{\eta_{01}}{\rho_{01}}\cos\alpha_1 - \frac{\xi_{01}}{\rho_{01}}\sin\alpha_1\right)\Delta\alpha_1 + r_1 \frac{\zeta_{01}}{\rho_{01}}\frac{\Delta\delta_1}{\cos^2\delta_1}.\end{aligned}$$

Setzt man also noch

$$\begin{aligned}\frac{\xi_{0i}}{\rho_{0i}}\cos\alpha_i + \frac{\eta_{0i}}{\rho_{0i}}\sin\alpha_i + \frac{\zeta_{0i}}{\rho_{0i}}\operatorname{tang}\delta_i &= F_i \\ \sec\delta_i\left(\frac{\eta_{0i}}{\rho_{0i}}\cos\alpha_i - \frac{\xi_{0i}}{\rho_{0i}}\sin\alpha_i\right) &= \eta_i \\ \frac{\zeta_{0i}}{\rho_{0i}}\sec^2\delta_i &= \psi_i\end{aligned} \tag{83}$$

$$F_i\{-\rho_i\sigma_i\lambda_j \cos(\Sigma_i - L_j) + \tau_i\varkappa_j \operatorname{tang}\mathfrak{D}' \cos(T_i - K_j)\} = E_{ij} \tag{83a}$$

$$\begin{aligned}r_i(e_i F_i + \eta_i) &= \vartheta_i \\ r_i(f_i F_i + \psi_i) &= \theta_i\end{aligned} \tag{83b}$$

so wird:

$$\begin{aligned}\Delta h_i = \pm\{[E_{i1}]([k_1] + [l_1]) + [E_{i1}']([k_1'']) + [l_1']) + [E_{i2}]([k_2] + [l_2]) + \\ + E_{i2}'([k_2'] + [l_2']) + [\vartheta_i] + [\theta_i]\}\varepsilon\end{aligned} \tag{84}$$

Die Berechnung der Coëfficienten ist viel einfacher als es auf den ersten Blick erscheint. Da die Coëfficienten der Gleichung (80a) bereits früher berechnet sind, so hat man nur noch nach den Gleichungen (81), (82), (83) und (83a), (83b) die in (84) auftretenden Coëfficienten zu bestimmen und erhält dann:

$$\Delta h_i = \pm Q_i\varepsilon.$$

Es wird demnach die berechnete Höhe $h_i$ unter der Annahme eines Fehlers $\varepsilon$ in den beobachteten Coordinaten

$$h_i \pm Q_i\varepsilon$$

werden können. Ist nun eine Bahn als aufsteigend gefunden worden, so wird man aus dem Gliede $Q_i\varepsilon$ finden, ob durch einen Fehler $\varepsilon = \pm 0^\circ\!.5$ (oder einen den Umständen entsprechenden Fehler)[1]) die Höhen so geändert werden können, dass die Bahn absteigend wird; in letzterem Falle kann man die aufsteigende Bahn als eine blosse Folge der Beobachtungsfehler ansehen; wird jedoch durch eine zulässige Annahme über $\varepsilon$ das Resultat nicht geändert, so sind einzelne Beobachtungen zu verwerfen; aber nur dann, wenn die Güte der Beobachtungen ausser Zweifel gestellt ist, was wohl selten mit Sicherheit zu constatiren ist, ist die Bahn thatsächlich aufsteigend.

---

[1]) Das Resultat wird dann sofort in derjenigen Einheit erhalten, in welcher $\varepsilon$ ausgedrückt war, wenn $c_i$, $d_i$ nicht mit $arc\ 1'$ multiplicirt wurden.

Zur Bestimmung der Höhe und Geschwindigkeit der Meteore ist die Kenntniss der Rectascensionen und Deklinationen des Anfangs- und Endpunktes unerlässlich. Ein geübter Beobachter, der ein scharfes Auge und eine genügende Kenntniss des gestirnten Himmels hat, wird dabei meist ausreichend genau die Coordinaten der beiden Punkte durch die Lage derselben zu den Fixsternen bestimmen, und durch Einzeichnen in eine Sternkarte fixiren. Man hat zwar auch ein Instrument hierfür construirt, das Meteoroskop, welches, selbstverständlich ohne Fernrohr und selbst ohne Diopter, die Visur längs eines Stabes gestattet, welcher, azimuthal montirt, Höhe und Azimuth giebt. Selten aber wird man Zeit haben, auf beide Punkte einzustellen, und inzwischen für den Punkt des Aufleuchtens abzulesen, selbst wenn zwei Beobachter thätig wären. Die Genauigkeit der Beobachtung dürfte hierdurch keinesfalls erhöht werden. FELDT giebt die Genauigkeit der Schätzung nach der erst angegebenen Methode auf etwa $\frac{1}{2}°$ an.

Oft kommt es darauf an, einen Punkt der scheinbaren Meteorbahn und die Richtung derselben zu kennen; dieses ist der Fall, wenn man für mehrere Meteore am selben Beobachtungsorte den Punkt finden soll, in welchem sich ihre scheinbaren Bahnen schneiden. In diesem Falle ist der von LEHMANN-FILHÉS[1]) gethane Vorschlag empfehlenswerth.

BRANDES fand nach seiner Methode[2]) unter 58 Meteoren

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| die Höhe zwischen | 0 | 3 | 6 | 10 | 15 | 20 | Meilen und darüber |
| für | 3 | 3 | 12 | 23 | 10 | 7 | Meteore. |

Unter 31 neu reducirten Meteoren fand BESSEL die mittlere Höhe

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| zwischen | 0 | 3 | 6 | 10 | 15 | 20 | 25 | Meilen und darüber |
| für | 1 | — | 5 | 14 | 6 | 2 | 3 | Meteore. |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| SCHMIDT und HEIS fanden[3]) für die Meteore | $1^m$ | $2^m$ | $3^m$ | $4^m$ | und kleiner |
| die mittlere Höhe | 16·2 | 15·9 | 10·3 | 8·5 | Meilen |
| aus | 14 | 20 | 24 | 21 | Beobachtungen. |

Hieraus würde folgen, dass die höheren Meteore die helleren sind. Diesem widerspricht die frühere Annahme, dass nur die grösseren Meteore bis zur Erde gelangen, durchaus nicht; nur die grösseren Meteore gelangen in die tieferen Regionen, allein ihren grössten Glanz entwickeln sie in den höheren Regionen, wo ihre Geschwindigkeit und daher auch Wärmeentwickelung am grössten ist. Allerdings geben die hier angeführten Zahlen noch keineswegs definitive Werthe, indem die Zahl der Beobachtungen noch zu gering ist. Nur das eine ist aus allen diesen Angaben jetzt wohl schon mit Sicherheit zu schliessen, dass die Höhe der Meteore jedenfalls zwischen 6 und 20 Meilen anzunehmen ist.

1865 gab NEWTON die folgende Zusammenstellung der Resultate über seine Rechnungen[4]): Die Höhe der Meteorbahnen war

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| zwischen den Grenzen | 0 | 30 | 60 | 90 | 120 | 150 | 180 | 210 | 240 | 270 *km* | u. darüb. |
| daher d. mittl. Höhe $x =$ | * | 45 | 75 | 105 | 135 | 165 | * | * | * | *km* | |
| für | $\rho =$ (39) | 114 | 243 | 277 | 106 | 57 | (20) | (20) | (8) | (12) | Meteore. |

---

[1]) Astron. Nachrichten, Bd. 96, No. 2296.

[2]) »Unterhaltungen für Freunde der Physik und Astronomie«, pag. 53.

[3]) »Resultate«, pag. 112.

[4]) American Journal of Sciences and Arts, II. Serie, Bd. 39, pag. 193.

Als Mittel der Höhen findet er hieraus, indem er die Höhen unter 80 und über 180 *km* weglässt

$$h = \frac{\Sigma(\rho x)}{\Sigma(\rho)} = 95{\cdot}55\ km.$$

Ferner fand er aus correspondirenden Beobachtungen

| | mittlere Höhe des Erscheinens | des Verlöschens | der Mitte der Bahn |
|---|---|---|---|
| für 89 Meteore vom 10/11. Aug. 1863[1]) | 119·4 *km* | 62·9 *km* | 90·1 *km* |
| für 78 Meteore vom 13/14. Nov. 1863[2]) | 154·9 | 97·8 | 126·4 |

Hierbei erscheinen einzelne Meteore in Höhen über 200 *km*. NEWTON ist der Ansicht, dass alle Höhen über 150 *km* verworfen werden sollten[3]). MASON giebt aber an, dass sich die teleskopischen Meteore in seinem Fernrohre mit 80 facher Vergrösserung nicht schneller zu bewegen schienen, als die sonst mit freiem Auge gesehenen; ihre thatsächliche Winkelgeschwindigkeit war daher nur $\frac{1}{80}$, ihre Höhe unter der Annahme derselben linearen Geschwindigkeit 80 mal so gross als diejenige der letzteren. MASON schätzt ihre Höhe auf 1200 engl. Meilen (1930 *km*). Auch ERMAN fand für einzelne Meteore die Höhe über 100 deutsche Meilen (750 *km*).

Obzwar hierüber noch viel zu wenig Erfahrungen vorliegen, kann doch das Vorkommen viel grösserer Höhen als derjenigen, welche man im Durchschnitte findet, nicht schlechtweg geleugnet werden. SCHIAPARELLI nimmt an, dass dieses Meteore von ganz bedeutenden Massen wären, welche einen bedeutenden Luftwiderstand erfahren, und schon in den äusserst verdünnten Schichten der Atmosphäre verbrennen. Schon QUETELET[4]) sagt, dass die verschiedenen Meinungen über die Höhe der Sternschnuppen daher rühren, dass wir eine ungenügende Kenntniss von der Höhe der Atmosphäre haben, und SCHIAPARELLI bemerkt noch[5]), dass die allgemein angegebene Höhe der Atmosphäre zu 28 bis 47 *km* sich eben nur auf jenen Theil erstreckt, welcher noch Licht reflektiren kann. Er bemerkt, dass alle über die Höhe der Atmosphäre »von vielen grossen Mathematikern publicirten Arbeiten grösstentheils nur scharfsinnige Rechnungsübungen sind, deren Resultate keine grössere Genauigkeit gewähren, als die mehr oder weniger willkürlichen Hypothesen, die der analytischen Beweisführung zu Grunde liegen.« QUETELET theilt die Atmosphäre in eine *atmosphère stable*, den oberen Theil, der sich in relativer Ruhe befindet, und die Domäne der Sternschnuppen ist; der untere Theil, von Winden bewegt, die Region der von uns als Sitz der meteorologischen Erscheinungen bezeichneten Phänomene, ist die *atmosphère instable*. Doch nimmt er die Höhe beider Theile noch relativ niedrig an.

IV. Die Geschwindigkeit der Meteore; Einfluss der Erdanziehung und der Luft. Dividirt man die Weglänge eines Meteors durch die Zeit, so erhält man seine Geschwindigkeit. Hier sind aber zwei Faktoren, die der Beobachtung zu entnehmen sind, und beide sind mit gewissen Unsicherheiten behaftet. Nichtsdestoweniger sind die erhaltenen Resultate alle insoweit im

[1]) American. Journal of sciences and arts; II. Serie, Bd. 36, pag. 303.
[2]) Ibidem, II. Serie, Bd. 40, pag. 250. Der Schluss, dass die Novembermeteore beträchtlich höher erscheinen, ist vorläufig noch nicht genügend sichergestellt.
[3]) Ibidem, Bd. 39, pag. 203.
[4]) »Physique du Globe«, pag. 313.
[5]) »Entwurf«, pag. 4.

Einklange, dass sie für die Meteore eine Geschwindigkeit ergeben, welche mit der Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn vergleichbar ist.

SCHMIDT giebt in seinen »Resultaten« über die Geschwindigkeiten keine Zahlen; die Resultate waren nicht befriedigend, meist enorm gross, so dass er es vorzog, »alte Ungewissheiten nicht durch neue schwankende Angaben zu vermehren«[1]).

Hält man für die mittlere Weglänge 16°, für die mittlere Höhe 100 *km*, für die mittlere Sichtbarkeitsdauer $0^s{\cdot}7$ fest, so folgt die mittlere Geschwindigkeit

$$\frac{16 \times 0{\cdot}01745 \times 100}{0{\cdot}7} = 40\ km.$$

Diese Geschwindigkeit ist das 70fache der Geschwindigkeit einer Kanonenkugel, und etwa um die Hälfte grösser, als die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn. Sie ist aber, wie später gezeigt wird, nicht die wahre kosmische Geschwindigkeit ($v$), sondern die relative Geschwindigkeit gegen die Erde ($u$); $v$ ist im allgemeinen kleiner[2]). Allein man hat zu beachten, dass diese Geschwindigkeit die mittlere Geschwindigkeit nicht nur aller Meteore, sondern auch jedes Meteors im Laufe seiner Bahn ist, und zwar die mittlere Geschwindigkeit während seiner Sichtbarkeitsdauer. Beim Beginn seiner Sichtbarkeit war seine Geschwindigkeit schon grösser und hat zu Ende seiner Sichtbarkeit in Folge des Luftwiderstandes schon abgenommen. Aber bereits, wenn es sichtbar wird, hat es so viel an lebendiger Kraft verloren, dass es zum Glühen kommt, und dieser Verlust an lebendiger Kraft ist natürlich auf Kosten seiner Geschwindigkeit eingetreten: die Geschwindigkeit der leuchtenden Sternschnuppe ist schon bedeutend kleiner, als diejenige der noch nicht leuchtenden. Man kann also annehmen, dass die kosmische Geschwindigkeit der Meteore eine weit grössere ist, als die Geschwindigkeit der Erde.

Denkt man sich im Raume ein beliebiges, festes, rechtwinkliges Axensystem, und seien $x_0, y_0, z_0$ die Coordinaten der Erde, $x_1, y_1, z_1$ die Coordinaten einer Sternschnuppe $S$, so werden die Differentialgleichungen der Bewegung der Sternschnuppe im Raume in der Nähe der Erde[3])

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -k^2\frac{x_1 - x_0}{r^3} + X$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = -k^2\frac{y_1 - y_0}{r^3} + Y$$

$$\frac{d^2z_1}{dt^2} = -k^2\frac{z_1 - z_0}{r^3} + Z$$

$$r^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2,$$

wobei $k$ die Constante der Erdanziehung ist. Wählt man als Einheit den Aequatorhalbmesser der Erde, als Einheit der Zeit die Zeitsecunde (an Stelle des mittleren Sonnentages), so wird

$$k = \frac{k_{\odot}\sqrt{m}}{(\sin \pi)^{\frac{3}{2}} \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60},$$

wobei $k_{\odot}$ die Constante der Sonnenattraction, $m$ die Erdmasse und $\pi$ die Sonnenparallaxe ist; also mit $m = \frac{1}{330000}$, $\pi = 8''{\cdot}815$:

$$\log k = 7{\cdot}093615 - 10, \quad \log k'' = 2{\cdot}408040.$$

[1]) l. c., pag. 144.

[2]) Weil die meisten Sternschnuppen aus der Gegend des Apex kommen.

[3]) Vergl. den Artikel »Mechanik des Himmels«, § 9 und § 25.

Die Anziehungskraft der Erde ist dann $\frac{k^2}{r^2}$; diese ist aber identisch mit der (mit der Entfernung veränderlichen) Beschleunigung der Schwere, welche mit $g$ bezeichnet wird; es ist also

$$k^2 = gr^2.$$

Für die Erdoberfläche ist also $k^2 = g$, gleich dem Werthe der Beschleunigung an der Erdoberfläche; in der That ist $k^2$ dieser Werth, aber in Einheiten des Erdhalbmessers; will man denselben in Metern erhalten, so muss er mit dem Radius der Erde in Metern ($log = 6{\cdot}80464$) multiplicirt werden.

$X$, $Y$, $Z$ sind anderweitig auftretende störende Kräfte; von der Anziehung der übrigen Himmelskörper kann in den Entfernungen, in welchen Sternschnuppen beobachtet werden, jederzeit abgesehen werden; mithin bleibt dabei nur der Widerstand der Luft. Dieser ist eine Function der Dichte der Luft und der Geschwindigkeit, sowie des Querschnittes und der Masse des Meteors. Die erstere ist eine Function der Entfernung $r$ vom Erdcentrum und kann durch

$$\delta = f(r)$$

ausgedrückt werden. Die Function der Geschwindigkeit, und zwar der relativen Geschwindigkeit $u$ des Meteors gegen die mit der Erde bewegten Lufttheilchen werde mit $\varphi(u)$ bezeichnet. Ist endlich $\rho$ der Halbmesser des als kugelförmig gedachten Meteors, so wird sein Querschnitt $\pi\rho^2$, seine Masse $\frac{4}{3}\frac{\pi\rho^3 Q}{g}$, wenn $Q$ sein specifisches Gewicht ist, daher der Luftwiderstand:

$$W = \frac{\pi\rho^2 g}{\frac{4}{3}\pi\rho^3 Q} f(r)\varphi(u) = \frac{3}{4}\frac{g}{Q\rho} f(r)\varphi(u) = Af(r)\varphi(u),$$

wobei

$$\frac{3}{4}\frac{g}{Q\rho} = A$$

gesetzt wurde. Die Componenten des Widerstandes werden daher, da dieselbe in der Richtung der Tangente an die Bahn wirkt:

$$X = -Af(r)\varphi(u)\frac{dx_1}{ds}; \quad Y = -Af(r)\varphi(u)\frac{dy_1}{ds}; \quad Z = -Af(r)\varphi(u)\frac{dz_1}{ds},$$

wobei das negative Zeichen zu nehmen ist, weil der Luftwiderstand der Bewegung entgegengesetzt wirkt. Wenn man die absolute Geschwindigkeit des Meteors im Raum mit $v$ bezeichnet, so wird

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2 \qquad (1)$$

und da

$$\frac{dx_1}{ds} = \frac{\frac{dx_1}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{v}\frac{dx_1}{dt}; \quad \frac{dy_1}{ds} = \frac{1}{v}\frac{dy_1}{dt}, \quad \frac{dz_1}{ds} = \frac{1}{v}\frac{dz_1}{dt}$$

ist, so werden die Differenzialgleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{k^2(x_1 - x_0)}{r^3} + Af(r)\frac{\varphi(u)}{v}\frac{dx_1}{dt} &= 0 \\
\frac{d^2y_1}{dt^2} + \frac{k^2(y_1 - y_0)}{r^3} + Af(r)\frac{\varphi(u)}{v}\frac{dy_1}{dt} &= 0 \qquad (2) \\
\frac{d^2z_1}{dt^2} + \frac{k^2(z_1 - z_0)}{r^3} + Af(r)\frac{\varphi(u)}{v}\frac{dz_1}{dt} &= 0.
\end{aligned}$$

Bei der Untersuchung der Bewegung des Meteors kommt es jedoch wesentlich auf die relative Bewegung des Meteors gegen die Erde an; führt man daher die relativen Coordinaten des Meteors gegen den Erdmittelpunkt

$$x_1 - x_0 = x, \quad y_1 - y_0 = y, \quad z_1 - z_0 = z$$

ein, so wird

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{dx_0}{dt}; \quad \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{d^2 x_0}{dt^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Nun kann man für die kurze Zeit, während welcher die Bewegung der Sternschnuppe untersucht wird, von der ungleichförmigen Bewegung der Erde absehen, und diese als geradlinig und gleichförmig betrachten; es wird also

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} = \frac{d^2 y_0}{dt^2} = \frac{d^2 z_0}{dt^2} = 0.$$

Weiter wird die Erdgeschwindigkeit constant zu setzen sein; sei dieselbe für den Moment der Beobachtung $G$ und ihre Componenten nach den drei Axen $G_1, G_2, G_3$, so wird:

$$\frac{dx_0}{dt} = G_1; \quad \frac{dy_0}{dt} = G_2; \quad \frac{dz_0}{dt} = G_3$$

sein, und man hat:

$$\begin{aligned} G^2 &= G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 \\ r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ u^2 &= \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \\ v^2 &= \left(\frac{dx}{dt} + G_1\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} + G_2\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} + G_3\right)^2 \\ &= u^2 + 2\left(G_1 \frac{dx}{dt} + G_2 \frac{dy}{dt} + G_3 \frac{dz}{dt}\right) + G^2 \end{aligned} \tag{3}$$

und die Differenzialgleichungen werden:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 \frac{x}{r^3} + Af(r) \frac{\varphi(u)}{v} \left(\frac{dx}{dt} + G_1\right) &= 0 \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + k^2 \frac{y}{r^3} + Af(r) \frac{\varphi(u)}{v} \left(\frac{dy}{dt} + G_2\right) &= 0 \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + k^2 \frac{z}{r^3} + Af(r) \frac{\varphi(u)}{v} \left(\frac{dz}{dt} + G_3\right) &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit $0, -z, y$, dann mit $z, 0, -x$, endlich mit $-y, x, 0$, und setzt für den Augenblick

$$\begin{aligned} y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} &= f_1 \\ z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} &= f_2 \\ x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} &= f_3, \end{aligned}$$

so erhält man die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{dt} + Af(r) \frac{\varphi(u)}{v} \Big[f_1 + (G_3 y - G_2 z)\Big] &= 0 \\ \frac{df_2}{dt} + Af(r) \frac{\varphi(u)}{v} \Big[f_2 + (G_1 z - G_3 x)\Big] &= 0 \\ \frac{df_3}{dt} + Af(r) \frac{\varphi(u)}{v} \Big[f_3 + (G_2 x - G_1 y)\Big] &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Wäre die Erde ruhend, also $G_1 = G_2 = G_3 = 0$, $u = v$, so könnte man diese Gleichungen integriren; es wird, wenn

$$\psi(t) = e^{-\int Af(r)\frac{\varphi(v)}{v}dt} \tag{5a}$$

gesetzt wird:

$$f_1 = c_1\psi(t); \quad f_2 = c_2\psi(t); \quad f_3 = c_3\psi(t) \tag{5b}$$

und da gemäss der Bedeutung von $f_1, f_2, f_3$:

$$f_1 x + f_2 y + f_3 z = 0$$

ist, so erhält man durch Multiplication mit $x, y, z$:

$$(c_1 x + c_2 y + c_3 z)\psi(t) = 0,$$

oder da $\psi(t)$ nur dann verschwinden kann, wenn der Exponent $-\infty$ wird, so wird allgemein:

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0,$$

d. h. die Bahn der Sternschnuppe würde eine Ebene sein, was an sich klar ist, da in diesem Falle der Widerstand in der Ebene der Bahn wirkt, also eine Veränderung der Bahnlage nicht bewirkt werden kann.

Multiplicirt man die Gleichungen (4) mit $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ und addirt, so folgt mit Rücksicht auf (3):

$$u\frac{du}{dt} + \frac{k^2}{r^2}\frac{dr}{dt} + Af(r)\frac{\varphi(u)}{v}\left(u^2 + G_1\frac{dx}{dt} + G_2\frac{dy}{dt} + G_3\frac{dz}{dt}\right) = 0. \tag{6}$$

Für den Fall der ruhenden Erde wird hieraus

$$u\frac{du}{dt} + \frac{k^2}{r^2}\frac{dr}{dt} + Af(r)\varphi(u)\cdot u = 0. \tag{6a}$$

Betrachtet man zunächst die Erdattraction in jenem Bereiche, in welchem der Luftwiderstand noch nicht vorhanden ist, so folgt:

$$u\frac{du}{dt} + \frac{k^2}{r^2}\frac{dr}{dt} = 0.$$

Diese Gleichung integrirt giebt

$$u^2 - u_0^2 = 2k^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

und da für $r_0 = \infty : u = u_0$, d. i. die relative, von der Erdattraction nicht beeinflusste Geschwindigkeit der Sternschnuppe ist, so wird[1])

$$u^2 - u_0^2 = \frac{2k^2}{r}; \qquad u^2 = u_0^2 + 2gr.$$

$u$, $u_0$ drückt man gewöhnlich in Einheiten der mittleren Erdgeschwindigkeit aus; dann muss man für $g$, $r$, $k$ die entsprechenden Einheiten wählen. $k$ gilt aber für die Einheit des Radius des Erdäquators. Nun ist

$log$ Halbmesser des Erdäquators $= log\ 6377{\cdot}4\ km = 3{\cdot}80464$
$log$ Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn $= log\ 29{\cdot}6\ km = 1{\cdot}47129$
$log$ Erdhalbmesser in Einheiten der Erdgeschwindigkeit $= log\,(r) = 2{\cdot}33335$
$log\ k$ (für die Secunde und $r = 1$) $= 7{\cdot}09861$
$log\,(r)^{\frac{3}{2}} = 3{\cdot}50002$
$log\ k = 0{\cdot}59863$
$log\ 2k^2 : (r) = 9{\cdot}15494$

$$u^2 = u_0^2 + 0{\cdot}14287.$$

---

[1]) Die Formel folgt natürlich viel einfacher, wenn man die Bewegung einfach als einen beschleunigten Fall ansieht; es wurde aber hier wegen des späteren die Ableitung aus den Differenzialgleichungen gewählt.

Hiernach ist die Tafel auf pag. 168 gerechnet. Für grosse Werthe von $u_0$ genügt es

$$u = u_0 + \frac{0 \cdot 07148}{u_0}$$

zu nehmen. Beispielsweise sei

$$\begin{aligned} \log u_0 &= 9 \cdot 7408 \\ \log u_0^2 &= 9 \cdot 4816 \\ \log 2gr &= 9 \cdot 1549 \qquad \log u^2 = 9 \cdot 6498 \\ \text{Add.} &= 0 \cdot 1677 \qquad \log u = 9 \cdot 8246. \end{aligned}$$

Setzt man Sternschnuppen voraus, welche sich in parabolischen Bahnen um die Sonne bewegen, so ist ihre Geschwindigkeit in der Entfernung der Erde von der Sonne, also in der Erdnähe $29 \cdot 6 \sqrt{2} = 41 \cdot 7$ *km*; die grösste, bezw. kleinste relative Geschwindigkeit wird daher $71 \cdot 8$ *km*, bezw. $12 \cdot 1$ *km*, für die von SCHIAPARELLI als Grenzwerthe angenommenen Anfangsgeschwindigkeiten $u_0 = 71200$ und 12200 Meter werden die durch die Erdattraction veränderten Geschwindigkeiten: $u = 72070$, bezw. 16545 Meter, daher die Geschwindigkeitszunahmen 870, bezw. 4345 Meter. Für das Eintreffen der Meteore in der Nähe der Erde wird man diese Geschwindigkeiten an Stelle der kosmischen Geschwindigkeiten zu setzen haben; ein Theil dieses Zuwachses entfällt allerdings schon auf die Bewegung in der Atmosphäre, aber innerhalb der Erdatmosphäre werden diese Geschwindigkeiten nur noch unwesentlich geändert. Um diesen, von dem früheren abzutrennenden Theil zu bestimmen, kann man

$$u' - u = \frac{2gR^2}{u' + u}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right) = \frac{2g(r - R)}{u + u'} = \frac{g}{u}(r - R)$$

setzen. Nimmt man die für das Aufleuchten der Meteore maassgebende Höhe wieder zu 100 *km*, so wird

$$u' - u = 13 \cdot 6 \text{ bezw. } 59 \cdot 3 \text{ Meter.}$$

Diese Beträge können gegenüber den grossen Geschwindigkeitsänderungen, welche die Meteore durch den Luftwiderstand erfahren, als vollständig verschwindend angesehen werden.

Nimmt man jetzt die Erde als ruhend an, und vernachlässigt die Attraction innerhalb der Bewegung in der Luft, so hat man

$$k^2 = 0, \; G_1 = G_2 = G_3 = 0$$

zu setzen, und erhält dann die Integrale (5a), (5b) und an Stelle von (6) tritt:

$$u\frac{du}{dt} + Af(r)\,\varphi(u)\,u = 0$$

und da $u\,dt = ds$ ist:

$$\frac{u\,du}{\varphi(u)} = Af(r)\,ds$$

$$\int_{u_0}^{u_1} \frac{u\,du}{\varphi(u)} = -A\int_{s_0}^{s} f(r)\,ds.$$

Nun ist $\pi\rho^2 ds$ das von der Sternschnuppe in der Zeit $dt$ verdrängte Luftvolumen, daher $dm = \frac{\pi\rho^2 f(r)\,ds}{g}$ die zugehörige Luftmasse; versteht man unter $u_0$ die Geschwindigkeit der Sternschnuppe im Weltraume (relativ gegen die Erde), so kann man die zugehörige Grenze für $m$ gleich 0 setzen, und es ist

$$\int_{u_0}^{u_1} \frac{u\,du}{\varphi(u)} = -\frac{Ag}{\pi\rho^2}\int_0^m dm = -\frac{A}{\pi\rho^2}\,m\,g.$$

Hieraus folgt der Satz: »Bei der Bewegung in einem widerstehenden Mittel wird, wenn keine anderen Kräfte wirken, die Endgeschwindigkeit nicht von dem Gesetze abhängen, nach welchem die Dichtigkeit sich ändert, sondern nur von der Menge der verdrängten Materie«[1]. Die verdrängte Luftmasse ist aber, wenn die Sternschnuppe vertical fällt, gegeben durch das Gewicht der, der Luftsäule das Gleichgewicht haltenden Quecksilbersäule, und wenn die Sternschnuppe in der Zenithdistanz $Z$ fällt, wenn man ihre Bewegung als geradlinig ansieht, in dem Verhältnisse $sec\, Z$ vergrössert, also

$$m = \frac{\pi \rho^2 H q}{g} sec\, Z,$$

wenn $q$ das spezifische Gewicht des Quecksilbers, und $H$ die Höhe des Barometers in dem Punkte ist, welchem die Geschwindigkeit $u$ entspricht; man hat daher

$$\int_{u_0}^{u_1} \frac{u\, du}{\varphi(u)} = -A H q\, sec\, Z = -\frac{3}{4} \frac{g}{\rho} \frac{q}{Q} H\, sec\, Z.$$

Sei

$$\int_{u_0}^{u_1} \frac{u\, du}{\varphi(u)} = \Phi(u_1, u_0)$$

so wird für alle Sternschnuppen, die mit der gleichen Anfangsgeschwindigkeit $u_0$ aus dem Weltraume in die Atmosphäre treten, dieser Ausdruck eine blosse Function der Erdgeschwindigkeit $u_1$ sein. Wenn für verschiedene Meteore die Geschwindigkeit $u_1$ denselben Werth erreicht hat, so wird der Ausdruck

$$-\frac{4}{3qg} \Phi(u_1, u_0) = c$$

eine Constante sein; und dann wird:

$$\frac{H}{\rho\, Q\, cos\, Z} = c.$$

Eine andere Sternschnuppe von dem spezifischen Gewichte $Q'$ und dem Halbmesser $\rho'$ wird, mit derselben Geschwindigkeit $u_0$ in der Richtung $Z'$ aus dem Weltraum kommend, dieselbe Geschwindigkeit $u_1$ erlangen in einer Luftschicht, für welche der Luftdruck durch die Barometerhöhe $H'$ angegeben ist; dann ist für diese Sternschnuppe

$$\frac{H'}{\rho' Q' cos\, Z'} = c$$

demnach, wenn $\Delta$, $\Delta'$ die Dichten derselben sind, da $Q : Q' = \Delta : \Delta'$ ist:

$$H : H' = \rho\, \Delta\, cos\, Z : \rho'\, \Delta'\, cos\, Z'.$$

Hieraus folgen die Sätze:

1) Sternschnuppen gleicher Dichte, welche in derselben Richtung aus dem Weltraum kommen, werden dieselbe Geschwindigkeit erreicht haben in Luftschichten, für welche die Barometerhöhen sich verhalten wie die Halbmesser. Für kleinere Sternschnuppen wird also die Geschwindigkeit bereits in höheren Luftregionen (bei kleineren Barometerhöhen) auf denselben Werth reducirt sein; die grösseren werden daher tiefer herabsinken.

2) Bei Sternschnuppen verschiedener Dichtigkeit wird *caeteris paribus* dieselbe Endgeschwindigkeit in Luftschichten erreicht, für welche die Barometer-

[1] SCHIAPARELLI, »Entwurf einer astronomischen Theorie der Sternschnuppen«, pag. 231.

höhen sich verhalten wie die Dichten; die dichteren steigen also tiefer hinab. Hieraus folgt die geringe Wahrscheinlichkeit für das Herabfallen kleiner, wenig dichter Stoffe. Solche können nur dann in tiefere Regionen herabgelangen, wenn sie, durch grosse Meteorsteine gedeckt, **hinter** diesen sich bewegen, oder aber erst durch Explosion von grossen Meteoren in geringen Tiefen entstanden sind. Meteorstaub kann nicht als solcher zur Erde gelangen, da seine Geschwindigkeit schon in den obersten Luftschichten aufgezehrt wird; er verbrennt. Doch ist es immerhin nicht ausgeschlossen, dass in der Luft verbrannte Staubmassen als Oxyde (Eisenoxyd, Silicate), die sich in der Luft schwebend nicht erhalten können, nach und nach als Meteorablagerungen zur Erde gelangen. Dass auch die verbrannten Meteore Rückstände in den Dämpfen zurücklassen, wird auch schon von Daubrée erwähnt.

8) Je grösser $\cos Z$, d. h. je kleiner $Z$, desto grösser wird $H$ für dieselbe Geschwindigkeit $u$, d. h. desto tiefer steigen die Meteore in die Atmosphäre herab (ein übrigens an sich klarer Satz). Ist $\cos Z$ sehr klein, d. h. bewegt sich das Meteor nahe in horizontaler Richtung, so wird der Geschwindigkeitsverlust in sehr grossen Höhen stattfinden.

Die Höhen $H_1$, $H_2$, für welche ein gegebenes Meteor die Geschwindigkeiten $u_1$, $u_2$ erreicht, folgen aus

$$\int_{u_0}^{u_1}\frac{u\,du}{\varphi(u)} = -\frac{8qg}{4\rho Q\cos Z}H_1;\quad \int_{u_0}^{u_2}\frac{u\,du}{\varphi(u)} = -\frac{8qg}{4\rho Q\cos Z}H_2 \qquad (8)$$

und daraus

$$\int_{u_1}^{u_2}\frac{u\,du}{\varphi(u)} = -\frac{8qg}{4\rho Q\cos Z}(H_1 - H_2). \qquad (8a)$$

Nun ist $\varphi(u)$ für die kosmischen Geschwindigkeiten der Meteore sehr gross (es wächst wie die dritte oder vierte Potenz der Geschwindigkeiten), demnach würde das Integral in (8a) nur klein sein gegenüber den Integralen in (8), und daraus folgt, dass die stärkste Verminderung der Geschwindigkeiten in den oberen, dünneren Theilen der Atmosphäre stattfindet, und dass im unteren Theile der Bahn die Bewegung beinahe unabhängig von der Anfangsgeschwindigkeit der Meteore ist, eine Thatsache, die bereits von Benzenberg erkannt wurde.

Die wirkliche Berechnung des Integrales kann nur vorgenommen werden, wenn man das Gesetz $\varphi(u)$ kennt. Schiaparelli legte der Rechnung die folgenden beiden, aus Artillerieschiessversuchen abgeleiteten Gesetze zu Grunde:

I. Das Gesetz von Didion:

$$\varphi(u) = 0{\cdot}026\,u^2 + 0{\cdot}000065\,u^3 = 0{\cdot}026\left(1 + \frac{1}{400}u\right)u^2$$

II. Das Gesetz von S. Robert:

$$\varphi(u) = 0{\cdot}03874\,u^2 + 0{\cdot}00000007997\,u^4 = 0{\cdot}03874\left[1 + \left(\frac{u}{696}\right)^2\right]u^2,$$

wobei als Einheiten das Meter, die Zeitsecunde, und das Kilogramm gewählt sind. Es ist nun allerdings noch weitaus nicht erwiesen, dass diese, für mässige terrestrische Geschwindigkeiten geltenden Gesetze auch für die kosmischen Geschwindigkeiten der Sternschnuppen gelten; legt man jedoch diese Gesetze zu Grunde, und schreibt

das Gesetz I in der Form $\varphi(u) = a(1 + \alpha u)u^2$

" " II " " " $\varphi(u) = a'(1 + \alpha' u^2)u^2$,

so erhält man durch unbestimmte Integration:

Für das Gesetz I: $\int \frac{u\,du}{\varphi(u)} = \int \frac{du}{a u (1 + a u)} = \frac{1}{a} \int \left(\frac{1}{u} - \frac{a}{1 + a u}\right) du$

$$= \frac{1}{a} [log_n u - log_n (1 + a u)] = \frac{1}{a} log_n \frac{u}{1 + a u}.$$

Für das Gesetz II: $\int \frac{u\,du}{\varphi(u)} = \int \frac{du}{a' u (1 + a' u^2)} = \frac{1}{a'} \int \left(\frac{1}{u} - \frac{a' u}{1 + a' u^2}\right) du =$

$$= \frac{1}{a'} [log_n u - \tfrac{1}{2} log_n (1 + a' u^2)] = \frac{1}{a'} log_n \frac{u}{\sqrt{1 + a' u^2}}.$$

Nimmt man daher das Integral zwischen den angegebenen Grenzen, so wird

für das Gesetz I: $+ \frac{1}{2} \frac{g q a}{\rho Q \cos Z} H = log_n \left(\frac{u_0}{1 + a u_0} \frac{1 + a u_1}{u_1}\right)$

$$= log_n \left(1 + \frac{1}{a u_1}\right) - log_n \left(1 + \frac{1}{a u_0}\right)$$

für das Gesetz II: $+ \frac{1}{2} \frac{g q a'}{\rho Q \cos Z} H = log \left(\frac{u_0}{\sqrt{1 + a' u_0^2}} \frac{\sqrt{1 + a' u_1^2}}{u_1}\right)$

$$= \frac{1}{2} \left[log_n \left(1 + \frac{1}{a' u_1^2}\right) - log_n \left(1 + \frac{1}{a' u_0^2}\right)\right].$$

Hier sind für $g$, $\rho$, $H$ das Meter als Einheit, und ebenso $q$ und $Q$ das spezifische Gewicht, bezogen auf dieselbe Einheit, zu setzen. Da aber die spezifischen Gewichte sich wie die Dichten verhalten, und die Dichte des Quecksilbers 13·60, bezogen auf Wasser ist, so kann man $\frac{q}{Q} = \frac{13{\cdot}60}{\Delta}$ setzen, wenn $\Delta$ die Dichte des Meteors, bezogen auf Wasser ist. Will man die Quecksilberhöhen statt, wie dieses hier geschehen ist, in Metern, lieber in der üblichen Weise in Millimetern ausdrücken, so ist $H = \frac{h}{1000}$ und man erhält, wenn überdiess von den natürlichen Logarithmen durch Multiplikation mit dem Modul $M = 0{\cdot}43429$ auf BRIGG'sche Logarithmen übergegangen wird, und die Zahlenwerthe der Coëfficienten eingesetzt werden[1]):

für das Gesetz I:

$$log \left(1 + \frac{400}{u_1}\right) - log \left(1 + \frac{400}{u_0}\right) = \frac{3}{4000} \cdot \frac{9{\cdot}805 \times 13{\cdot}6 \times 0{\cdot}026 \times 0{\cdot}43429}{\rho \Delta \cos Z} \cdot h$$

$$= 0{\cdot}0011298 \frac{h}{\rho \Delta \cos Z}$$

$$log\, 400 = 2{\cdot}60206$$

$$log\, 0{\cdot}0011298 = 7{\cdot}05280,$$

für das Gesetz II:

$$log \left[1 + \left(\frac{696}{u_1}\right)^2\right] - log \left[1 + \left(\frac{696}{u_0}\right)^2\right] = \frac{6}{4000} \cdot \frac{9{\cdot}805 \times 13{\cdot}6 \times 0{\cdot}03374 \times 0{\cdot}43429}{\rho \Delta \cos Z} \cdot h$$

$$= 0{\cdot}0033658 \frac{h}{\rho \Delta \cos Z}$$

$$log\, 696 = 2{\cdot}84261$$

$$log\, 0{\cdot}0033658 = 7{\cdot}52702.$$

[1]) SCHIAPARELLI hat für $q$ irrthümlich den Werth 10·5; daher wird der Coëfficient für das erste Gesetz irrthümlich 0·0008719; die Tabelle von SCHIAPARELLI kann aber unmittelbar beibehalten werden, wenn statt der von ihm angenommenen Dichte des Meteors 3·5 die Dichte gleich 2·702 angenommen wird. Dasselbe gilt beim zweiten Gesetz, für welches der Coëfficient 0·00278 wurde.

Aus der Form der linken Seite wird schon klar, wie gering der Einfluss von $v_0$ bei sehr grossen Anfangsgeschwindigkeiten wird; selbst eine Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = \infty$ würde an dem Resultate nichts wesentliches ändern. Beispielsweise möge

$$v_0 = 72000\,m; \quad v_1 = 2000\,m$$

angenommen werden. Dann wird für das

I. Gesetz

$$log\left(1 + \frac{400}{v_1}\right) = log\ 1\cdot2 = 0\cdot07918$$
$$log\left(1 + \frac{400}{v_0}\right) = log\ 1\frac{1}{180} = \underline{0\cdot00241}$$
$$0\cdot07677$$
$$log\ \ldots\ 8\cdot88519$$
$$\underline{7\cdot05280}$$
$$log\frac{h}{\rho\Delta\cos Z} = 1\cdot83239$$

II. Gesetz

$$log\left[1 + \left(\frac{696}{v_1}\right)^2\right] = 0\cdot04964$$
$$log\left[1 + \left(\frac{696}{v_0}\right)^2\right] = \underline{0\cdot00004}$$
$$0\cdot04960$$
$$log\ \ldots\ 8\ 69548$$
$$\underline{7\cdot52702}$$
$$log\frac{h}{\rho\Delta\cos Z} = 1\cdot16846$$

für eine aus dem Zenith fallende Sternschnuppe ($Z = 0$) vom Halbmesser $\rho = 4\,cm = 0\cdot04\,m$ und dem specifischen Gewichte $\Delta = 2\cdot7$ wird

$$log\ \rho\Delta\cos Z = 9\cdot03342,$$

demnach für das erste Gesetz $h = 7\cdot34$ Millimeter, für das zweite Gesetz $h = 1\cdot60$ Millimeter.

Für einen Eisenblock ($\Delta = 7\cdot79$) von der Grösse des in Otumpa gefundenen (15000 *kgr* Gewicht) würde der Halbmesser unter der Voraussetzung der Kugelgestalt $\rho = 0\cdot772$ Meter; für diesen Fall wäre, wenn der Block aus dem Zenith gekommen wäre: $log\ \rho\Delta\cos Z = 0\cdot77916$, daher wird die Geschwindigkeit 2000 Meter nach der Didion'schen Formel in der Luftschicht vom Luftdruck 408·9 *mm*, nach der Robert'schen Formel in jener vom Luftdruck 88·6 *mm* gewesen sein. Der Block würde zur Erde gekommen sein, wenn er die kosmische Geschwindigkeit 72000 *m* gehabt hätte mit der Geschwindigkeit 1008 *m* (nach der Didion'schen Formel) bezw. 589·8 *m* (nach der Robert'schen Formel); wenn seine kosmische Geschwindigkeit 16000 *m* gewesen wäre mit der Geschwindigkeit 944 *m* (nach der Didion'schen Formel) oder 589·0 *m* (nach der Robert'schen Formel). Die Wirkung der Erdbewegung wurde dabei näherungsweise berücksichtigt, indem an Stelle der wirklichen kosmischen Geschwindigkeit die relative Geschwindigkeit gesetzt wurde.

Der hier auftretende Verlust an lebendiger Kraft ist ein ganz enormer. Eine Reduction der Geschwindigkeit von 72000 *m* auf einige hundert Meter würde eine Erwärmung von mehreren Millionen Graden zur Folge haben. Dass diese Temperaturen, welchen kein Körper widerstehen kann, nicht wirklich auftreten, hat seinen Grund darin, dass der Prozess sich nicht in dieser einfachen Weise abspielt. Zunächst wird vor dem Meteor Luft comprimirt: die hierdurch erzeugte Wärme wird theilweise weggeführt, theilweise in Töne, also wieder in lebendige Kraft umgewandelt. Schiaparelli findet[1], dass die hierbei erzeugten Temperaturen bei einer Anfangsgeschwindigkeit von 72000 *m* auf 11000°, bezw. 42500° C. steigen, und bei einer Anfangsgeschwindigkeit von 16000 *m* auf 2800° bezw. 7050° C., je nach dem man die Didion'sche oder Robert'sche Formel anwendet.

---

[1]) l. c., pag. 239.

Um nun auch noch die Bewegung der Erde zu berücksichtigen, möge zunächst vorausgesetzt werden, dass die Geschwindigkeit der Erde nur klein ist; dann hat man nach (8):

$$\frac{1}{v}=\frac{1}{u}\left[1+2\frac{G_1\frac{dx}{dt}+G_2\frac{dy}{dt}+G_3\frac{dz}{dt}}{u^2}+\frac{G^2}{u^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{u}\left[1-\frac{G_1\frac{dx}{dt}+G_2\frac{dy}{dt}+G_3\frac{dz}{dt}}{u^2}-\frac{1}{2}\frac{G^2}{u^2}+\frac{3}{2}\frac{\left(G_1\frac{dx}{dt}+G_2\frac{dy}{dt}+G_3\frac{dz}{dt}\right)^2}{u^4}\right]$$

und das zweite Glied in (6) wird:

$$Af(r)\varphi(u)\frac{u^2}{v}\left(1+\frac{G_1\frac{dx}{dt}+G_2\frac{dy}{dt}+G_3\frac{dz}{dt}}{u^2}\right)$$

$$=Af(r)\varphi(u)u\left[1-\frac{1}{2}\frac{G^2}{u^2}+\frac{1}{2}\frac{\left(G_1\frac{dx}{ds}+G_2\frac{dy}{ds}+G_3\frac{dz}{ds}\right)^2}{u^2}\right].$$

Es ist aber $G_1\frac{dx}{ds}+G_2\frac{dy}{ds}+G_3\frac{dz}{ds}$ die Projection der Geschwindigkeit der Erdbewegung auf die Richtung der Bewegung des Meteors. Der Winkel zwischen diesen beiden Richtungen ist gegeben durch den Bogen des grössten Kreises am Himmel zwischen dem Antiapex und dem Radianten. Sind $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{B}'$ Länge und Breite des Radianten[1]), $l$ die Länge des Apex, also $180°+l$ die Länge des Antiapex, so ist der Cosinus des Winkels zwischen dem Antiapex und dem Radianten: $-\cos\mathfrak{B}'\cos(\mathfrak{L}'-l)$; demnach wird der obige Ausdruck:

$$Af(r)\varphi(u)u\left[1-\frac{1}{2}\frac{G^2}{u^2}\left[1-\cos^2\mathfrak{B}'\cos^2(\mathfrak{L}'-l)\right]\right]. \tag{8a}$$

Sei zweitens $G > u$, so wird

$$\frac{1}{v}=\frac{1}{G}\left(1+2\frac{G_1\frac{dx}{dt}+G_2\frac{dy}{dt}+G_3\frac{dz}{dt}}{G^2}+\frac{u^2}{G^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{G}\left[1-\frac{G_1\frac{dx}{dt}+G_2\frac{dy}{dt}+G_3\frac{dz}{dt}}{G^2}-\frac{1}{2}\frac{u^2}{G^2}+\frac{3}{2}\frac{\left(G_1\frac{dx}{dt}+G_2\frac{dy}{dt}+G_3\frac{dz}{dt}\right)^2}{G^4}\right].$$

Setzt man wieder

$$G_1\frac{dx}{dt}+G_2\frac{dy}{dt}+G_3\frac{dz}{dt}=-Gu\cos\mathfrak{B}'\cos(\mathfrak{L}'-l),$$

so wird

$$\frac{1}{v}=\frac{1}{G}\left[1+\frac{u}{G}\cos\mathfrak{B}'\cos(\mathfrak{L}'-l)-\frac{1}{2}\frac{u^2}{G^2}+\frac{3}{2}\frac{u^2}{G^2}\cos^2\mathfrak{B}'\cos^2(\mathfrak{L}'-l)\right],$$

daher

$$Af(r)\frac{\varphi(u)}{v}\left(u^2+G_1\frac{dx}{dt}+G_2\frac{dy}{dt}+G_3\frac{dz}{dt}\right)=Af(r)\varphi(u)\frac{u^2}{G}\Big[1-$$

$$-\frac{G}{u}\cos\mathfrak{B}'\cos(\mathfrak{L}'-l)\Big]\left[1+\frac{u}{G}\cos\mathfrak{B}'\cos(\mathfrak{L}'-l)-\frac{1}{2}\frac{u^2}{G^2}+\frac{3}{2}\frac{u^2}{G^2}\cos^2\mathfrak{B}'\cos^2(\mathfrak{L}'-l)\right]. \tag{8c}$$

Der Fall (a) tritt ein bei den aus der Nähe des Apex kommenden Meteoren, der Fall (b) bei den aus der Nähe des Antiapex kommenden; $u$ kann nur nahe

---

[1]) Und zwar des scheinbaren Radianten.

gleich $G$ werden, wenn die Bewegungsrichtungen nahe auf einander senkrecht stehen; dann kann man aber

$$G_1 \frac{dx}{dt} + G_2 \frac{dy}{dt} + G_3 \frac{dz}{dt} = 0$$

setzen und erhält $v^2 = u^2 + G^2$ und das letzte Glied in Gleichung (8) wird

$$Af(r)\,\varphi(u)\,\frac{u^2}{\sqrt{u^2 + G^2}}. \tag{8b}$$

Man erhält daher für die drei Fälle die Resultate, wenn man an Stelle des Integrales $\int \frac{u\,du}{\varphi(u)}$ setzt:

$$\int \frac{u\,du}{\varphi(u)\left[1 - \frac{1}{2}\frac{G^2}{u^2}\left[1 - \cos^2\mathfrak{B}'\cos^2(\mathfrak{L}' - l)\right]\right]} \tag{9a}$$

$$\int \frac{du \cdot \sqrt{u^2 + G^2}}{u\,\varphi(u)} \tag{9b}$$

$$\int \frac{u\,du}{\varphi(u)\left[u - G\cos\mathfrak{B}'\cos(\mathfrak{L}' - l)\right]\left[G + u\cos\mathfrak{B}'\cos(\mathfrak{L}' - l) - \frac{1}{2}\frac{u^2}{G} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{G}\cos^2\mathfrak{B}'\cos^2(\mathfrak{L}' - l)\right]} \tag{9c}$$

Die weitere Behandlung dieser Integrale, welche übrigens, wie man leicht sieht, keinen theoretischen Schwierigkeiten unterliegt, würde an dieser Stelle zu weit führen. Als Resultat mag jedoch hervorgehoben werden, dass die früher erhaltenen Resultate eine sehr wesentliche Modifikation erleiden, und dass man zu dem Schlusse kommt, dass für die kosmischen Geschwindigkeiten weder die Didion'sche noch die Robert'sche Formel das Widerstandsgesetz darstellen. Dass aber durch diese Näherungsformeln die analytische Behandlung des Problems durchaus nicht erschöpft ist, sieht man sofort an der Form der erhaltenen Näherungen.

### V. Die scheinbare Vertheilung der Meteore nach Zeit und Raum.

Ueber die Vertheilung der Meteore im Weltraum können wir natürlich nur Schlüsse ziehen aus der Vertheilung der Meteorerscheinungen, wie sie sich uns direkt darbieten. In dieser Beziehung hat man die Häufigkeit und die Richtung der Meteore zu untersuchen.

Meteore sieht man in allen Nachtstunden, des Sommers und des Winters; aber sie erscheinen nicht gleich häufig. Die grösste Zahl der Sternschnuppen erscheint in den Morgenstunden, worauf bei der Instruction für Beobachter besonders Rücksicht genommen werden sollte, da die meisten Beobachter nur in der ersten Hälfte der Nacht beobachten, und dann das Wachen aufgeben; und die meisten Sternschnuppen erscheinen in der zweiten Hälfte des Jahres[1]). Die Meteore erscheinen in allen möglichen Richtungen, aber doch sind gewisse Richtungen vorherrschend; endlich scheinen viele Meteore aus einem und demselben Punkte auszustrahlen, als wenn sie hier entstehen und sich dann von demselben entfernen würden.

Man hatte nicht so bald begonnen, sich mit den Sternschnuppen zu beschäftigen, so mussten diese Erscheinungen auch auffallen; sie bildeten anfänglich ebensoviele Einwände gegen den kosmischen Ursprung der Meteore, und hauptsächlich Coulvier-Gravier zog aus ihnen Argumente für den terrestrischen

---

[1]) Jedoch nur für die Beobachtungsorte auf der nördlichen Halbkugel.

Ursprung[1]): vorherrschende Windrichtung, Zeiten der Bewölkung, der elektrischen Erscheinungen, u. s. w. Aber so wie bei dem COPERNICANI'schen Systeme alle anfänglich gegen dasselbe geltend gemachten Argumente schliesslich nur dazu dienten, dasselbe zu bestätigen, so auch hier: alle diese Erscheinungen sind die nothwendige Folge des kosmischen Ursprungs, wenn man auf die Erdbewegung Rücksicht nimmt.

Das Gesetz der stündlichen Variation der Sternschnuppen wurde zuerst von HERRICK 1838 erkannt. CHLADNI untersuchte zwar bereits 1819 die stündliche Häufigkeit der Meteore; das ihm vorliegende Beobachtungsmaterial erstreckte sich natürlich nur auf die Meteorsteinfälle und Feuerkugeln. Unter den seit 852 bis 1818 beobachteten Meteoren findet er

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| zwischen | 12 | 18 | 0 | 6 | 12 Uhr |
| | 12 | 16 | 87 | 11 bis 12 | Fälle. |

Dass auf die Nachtstunden eine geringere Anzahl entfällt, erklärt er damit, dass während dieser Zeit weniger Menschen im Freien sind, und schliesst, dass ein Einfluss der Zeit sich hierin nicht kundgiebt. Bezüglich der Vertheilung der Detonationen und Meteoritenfälle nach den Tagesstunden meint auch SCHMIDT[2]), dass eine sie darstellende Curve in Zukunft darthun werde, dass sie »weniger die Variation jener Phänomene, sondern weit mehr die mittlere Gewohnheit der Lebensweise der Menschen repräsentirt, von denen verschwindend wenige in den Nachtstunden beobachten, während welcher die halbe Bevölkerung der Erde schläft.«

Bezüglich der Vertheilung nach Jahreszeiten findet CHLADNI:

| | im Jan. | Febr. | März | April | Mai | Juni |
|---|---|---|---|---|---|---|
| die Zahl d. Sternschnuppenfälle: | 7 | 6 | 18 | 9—10 | 12 | 8—9 |
| die Zahl der Feuerkugeln: | 24 | 21 | 21 | 18 | 17 | 8 |
| | Juli | August | Sept. | Oct. | Nov. | Dez. |
| die Zahl d. Sternschnuppenfälle: | 9—11 | 9—10 | 8 | 10 | 7 | 7 |
| die Zahl der Feuerkugeln: | 21 | 27 | 20 | 28 | 27 | 28 |

wo die in einzelnen Monaten auftretenden Doppelzahlen daher rühren, dass sich die Fallzeiten nicht genauer ermitteln liessen. Auch hier schliesst CHLADNI, dass sich ein Einfluss der Jahreszeiten nicht bemerkbar macht.

COULVIER-GRAVIER in Paris hatte auf diese Veränderlichkeit ein besonderes Augenmerk gerichtet, und wenn auch seine Erklärungen, nach welcher die Meteore in der Atmosphäre entstehen, längst veraltet sind, so verdankt man ihm doch ein werthvolles Beobachtungsmaterial. Er fand aus 12jährigen Beobachtungen für die durchschnittliche Anzahl der Sternschnuppen in den einzelnen Nachtstunden die in der folgenden Tabelle eingetragenen Zahlen. SCHMIDT giebt 1869 die Resultate der Zählungen während eines Zeitraumes von 27 Jahren, während welcher 1246 Beobachtungsstunden waren, in welche sich SCHMIDT mit einigen Gehilfen theilte. Ersterer beobachtete zusammen 1637, die letzteren 1594 Sternschnuppen; die Resultate sind in der zweiten Columne der folgenden Tabelle eingetragen; als Mittel für die stündliche Anzahl findet er dabei 11·62)

[1]) HUMBOLDT schrieb 1850 im Kosmos: »Es ist schwer, die Ursache einer solchen stündlichen Variation, einen Einfluss des Abstandes vom Mitternachtspunkte zu errathen«. (COTTA'sche Ausgabe, 3. Band, pag. 439).

[2]) »Astron. Beobachtungen über Meteorbahnen«, pag. 54.

[3]) Doch sind dabei die periodischen Novembermeteore ausgeschlossen. HAIDINGER (Sitzungsberichte der Wiener Academie, Bd. 55, pag. 131 und 187) versuchte eine Abhängigkeit

| In der Zeit zwischen | ist die mittlere stündliche Anzahl nach Coulvier-Gravier | nach Schmidt | in der Zeit zwischen | ist die mittlere stündliche Anzahl nach Coulvier-Gravier | nach Schmidt |
|---|---|---|---|---|---|
| 5h–6 | 7·2 | 4·17 | 12h–13 | 10·7 | 14·07 |
| 6–7 | 6·5 | 5·88 | 13–14 | 18·1 | 16·82 |
| 7–8 | 7·0 | 5·72 | 14–15 | 16·8 | 17·91 |
| 8–9 | 6·8 | 6·67 | 15–16 | 15·6 | 18·21 |
| 9–10 | 7·9 | 7·88 | 16–17 | 18·8 | 18·75 |
| 10–11 | 8·0 | 9·58 | 17–18 | 18·7 | 14·92 |
| 11–12 | 9·5 | 11·58 | 18–19 | 18·0 | — |

Die jährliche Variation wurde zuerst 1838 von Brandes bemerkt; er fand, dass die Zahl der Sternschnuppen im Herbste grösser sei. Von den späteren Beobachtungen sind in der folgenden Tabelle die stündliche Anzahl der Meteore aus 12jährigen Beobachtungen von Wolf enthalten; Schmidt giebt in seinen »Resultaten« aus den von ihm in der Zeit 1842 bis 1852 beobachteten Sternschnuppen die mittlere Anzahl der in einem Jahre gesehenen Sternschnuppen 478[1]), davon entfallen auf die einzelnen Monate die in der zweiten Columne eingetragenen Zahlen; die durchschnittliche Anzahl der Beobachtungsnächte, welche einen Maassstab für die Güte der Atmosphäre in den einzelnen Monaten giebt, ist in der dritten Columne eingetragen. Mit Rücksicht darauf, dass die grössere Anzahl der Meteore der grösseren Zahl der Beobachtungsnächte entspringt, lässt sich hieraus kein sicherer Schluss auf die Häufigkeit der Sternschnuppen ziehen, da das Ansteigen der Zahlen ebensowohl als eine Folge der häufigeren Beobachtungen angesehen werden kann; doch ist die grössere Häufigkeit der auf eine Nacht entfallenden Meteore auch aus dieser Tabelle ersichtlich.

| | Wolf aus 12-jährigen Beobachtungen stündl. Anzahl der Meteore | Schmidt | | Quetelet Zahl d. Nächt. m. ausserordentl. grosser Zahl v. Sternschnuppen | Schmidt Zusammenstellung aller beobachteten Sternschnuppenbahnen[2]) bis 1868 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | durchschnittliche Anzahl der Meteore | durchschnittliche Anzahl der Beobachtungsnächte | | Zusammen | Schmidt allein |
| Januar | 5·5 | 17 | 7 | 11 | 98 | 15 |
| Februar | 5·4 | 5 | 4 | 12 | 46 | 8 |
| März | 5·2 | 11 | 6 | 14 | 56 | 7 |
| April | 4·6 | 11 | 6 | 19 | 76 | 16 |
| Mai | 4·1 | 12 | 9 | 7 | 60 | 15 |
| Juni | 5·4 | 14 | 8 | 6 | 66 | 23 |
| Juli | 9·8 | 45 | 10 | 14 | 484 | 200 |
| August | 12·9 | 188 | 16 | 68 | 1581 | 612 |
| September | 7·4 | 88 | 12 | 18 | 829 | 157 |
| October | 6·4 | 37 | 10 | 29 | 586 | 256 |
| November | 5·0 | 58 | 10 | 87 | 1184 | 179 |
| December | 4·1 | 29 | 8 | 17 | 271 | 92 |

der Meteoritenfälle nicht von der Ortszeit, sondern von der Zeit überhaupt zu constatiren, und reducirte zu diesem Zwecke alle Fallzeiten auf Greenwicher Zeit. Dadurch aber gelangte er nur zu dem Resultate, dass die Häufigkeit der Nachmittagsfälle verschwindet, indem ja »was für einen Ort Nachmittag ist, für einen um 180° verschiedenen Vormittag ist.« Hierzu bedarf es allerdings keiner umständlichen Reductionen.

[1]) Die periodischen Novembermeteore ebenfalls ausgeschlossen.

[2]) Beobachtete Coordinaten des Anfangs- und Endpunktes.

Aus QUETELET's Katalog von Meteorerscheinungen seit 1800 vor Chr. Geb. ergiebt sich überdiess

| für die Zeit | Januar bis Juni | Juli bis December |
|---|---|---|
| Die Zahl der Meteorsteinfälle | 186 | 216 |
| Die Zahl der Feuerkugeln | 558 | 848 |

Nach den von ihm in der vorigen Tabelle mitgetheilten Beobachtungen entfallen auf das erste Halbjahr 69, auf das zweite 178 Nächte mit besonders grosser Zahl von Sternschnuppen; doch giebt dieses auch nur mehr ein allgemeines Bild über die Vertheilung der Meteore. Eine die stündliche und jährliche Vertheilung berücksichtigende Zusammenstellung giebt SCHMIDT in den Astron. Nachrichten, Bd. 88, pag. 321. An den Beobachtungen hatten sich nebst SCHMIDT noch vier Beobachter: *W* (WURLISCH), *Ch* (CHANTZIDAKIS), *W'* und *G* betheiligt. Es beobachteten gleichzeitig:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| in 186 Stunden | *S* | 2225 | Meteore | und | *W* | 2606 |
| 29 „ | | 277 | „ | „ | *Ch* | 321 |
| 100 „ | | 1399 | „ | „ | *W'* | 1326 |
| 51 „ | | 1101 | „ | „ | *G* | 755 |
| Zusammen 316 „ | *S* | 5002 | „ | „ | — | 5008 |

Aus den Beobachtungen wurde die stündliche Häufigkeit der Meteore für jede volle Stunde abgeleitet, wo also z. B. die Zeit $12^h$ als die Stunde zwischen $11^h\,30^m$ und $12^h\,30^m$ anzusehen ist: es folgt[1]) für die stündliche Häufigkeit der Meteore.

| | $6^h·0$ | $7^h·0$ | $8^h·0$ | $9^h·0$ | $10^h·0$ | $11^h·0$ | $12^h·0$ | $13^h·0$ | $14^h·0$ | $15^h·0$ | $16^h·0$ | $17^h·0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Januar | 7·0 | 8·7 | 3·4 | 4·7 | 5·1 | 9·0 | 4·1 | 6·5 | — | 14·2 | 11·3 | 11·5 |
| Februar | — | 2·6 | 8·1 | 3·5 | 4·7 | 4·0 | 5·2 | 7·3 | 9·1 | 6·6 | 10·2 | 7·0 |
| März | — | 4·0 | 4·1 | 5·1 | 5·1 | 4·5 | 7·6 | 7·0 | 9·0 | 6·0 | 7·7 | — |
| April | — | — | 4·7 | 4·4 | 5·9 | 6·5 | 9·1 | 8·8 | 8·2 | 8·8 | 8·8 | — |
| Mai | — | — | — | 4·4 | 5·1 | 6·8 | 6·9 | 7·2 | 7·7 | 8·0 | — | — |
| Juni | — | — | — | 5·0 | 6·8 | 6·8 | 6·3 | 6·4 | 7·8 | 8·8 | — | — |
| Juli | — | — | — | 8·1 | 6·8 | 12·1 | 13·4 | 12·4 | 16·0 | 19·1 | 23·0 | — |
| August | — | — | — | 12·7 | 14·5 | 17·9 | 25·1 | 32·1 | 37·6 | 24·5 | 25·3 | — |
| Septemb. | — | 6·2 | 5·6 | 7·9 | 8·9 | 11·2 | 9·0 | 10·4 | 13·0 | 12·2 | 10·1 | — |
| October | — | 6·3 | 7·3 | 8·7 | 9·9 | 12·6 | 13·8 | 20·0 | 25·0 | 17·3 | 29·0 | 29·8 |
| Novemb. | 5·5 | 6·5 | 9·0 | 10·4 | 10·6 | 12·1 | 14·3 | 18·1 | 18·9 | 17·9 | 14·4 | 21·5 |
| Decemb. | 6·0 | 6·2 | 7·7 | 6·7 | 11·4 | 14·0 | 11·2 | 11·5 | 17·7 | 18·9 | 10·4 | 15·6 |

Die Zahlen dieser Tabelle wurden nun graphisch ausgeglichen, und diejenige Zeit $T'$ gesucht, für welche die sich hieraus ergebenden Monatsmittel $s$ gelten; das Maximum ergiebt sich für die einzelnen Monate zu den Zeiten $T$.

Es folgt:

| in den Monaten | Januar | Februar | März | April | Mai | Juni | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| die stündl. Häufigkeit $s =$ | 8·62 | 5·62 | 6·47 | 6·40 | 6·05 | 6·12 | |
| zu den Zeiten $T' =$ | $11^h·05$ | $11^h·60$ | $11^h·55$ | $10^h·60$ | $11^h·15$ | $10^h·58$ | |
| Zeit des Maximums $T =$ | 15·10 | 15·75 | 14·60 | 13·75 | 14·60 | 14·75 | |
| in den Monaten | Juli | August | Septb. | Octob. | Nov. | Dec. | im Jahre |
| die stündl. Häufigkeit $s =$ | 11·13 | 20·60 | 9·31 | 14·15 | 13·29 | 12·16 | 10·03 |
| zu den Zeiten $T' =$ | $11^h·45$ | $10^h·80$ | $10^h·76$ | $12^h·30$ | $11^h·75$ | $10^h·40$ | $11^h·60$ |
| Zeit des Maximums $T =$ | — | 14·60 | 14·60 | — | 15·25 | 14·75 | 14·30 |

[1]) Die periodischen Novembermeteore ebenfalls ausgeschlossen.

Als Jahresmittel ergiebt sich die stündliche Häufigkeit $s = 10$ in der Stunde zwischen 11 und 12 Uhr; wollte man also die Beobachtungen abkürzen, und nur die Mittelwerthe aus den Beobachtungen direkt erhalten, so würde es genügen, die Beobachtungen in der Stunde zwischen 11 Uhr und 12 Uhr Nachts vorzunehmen. SCHMIDT gelangt zu den folgenden Schlüssen:

1) Die mittlere stündliche Häufigkeit der Meteore für einen Beobachter ist im Jahre $s = 10$.

2) Das mittlere Maximum der Häufigkeit trifft auf 15 Uhr.

3) Die Epoche des jedesmaligen (täglichen) Mittelwerthes von $s$ ist $11\frac{1}{4}$ Uhr Nachts.

4) Das allgemeine Minimum fällt in den Februar, das Maximum in den August, wobei die grossen Novemberströme ausser Betracht blieben.

5) Vom Januar bis Anfang Juli ändert sich $s$ nur wenig und erreicht im Mittel nicht 7; dann erfolgt die rasche Zunahme mit bedeutenden Maximis im Juli und August. Der September zeigt allgemeine Abnahme, und in den drei folgenden Monaten wächst $s$ wieder zum doppelten Betrage des $s$ im ersten Halbjahre.

Es muss jedoch darauf hingewiesen werden, dass der Schluss No. 2 nicht mit voller Sicherheit gezogen werden kann. Vergleicht man die Tabelle, so findet man zunächst im Juli und October innerhalb der Beobachtungszeiten ein fortwährendes Ansteigen: für $T$ ergiebt sich das Maximum erst später. Auch im November ist das Ansteigen gegen $17^h$ ziemlich gut angedeutet, wenn dem Abfalle gegen $16^h$ kein besonderes Gewicht beigelegt wird. Erwünscht wären jedenfalls noch Beobachtungen aus den späteren Morgenstunden, nur müssten dieselben mit den übrigen Beobachtungen eine homogene Serie bilden, also auch die durch die Dämmerung bewirkte Verminderung der Anzahl berücksichtigt wird.

Dass die Meteore vom 13. und 27. November ausgeschlossen wurden, hat seinen Grund darin, dass die Häufigkeit der Meteore an diesen beiden Tagen unverhältnissmässig gross ist. Die Maximalwerthe für die stündliche Anzahl waren für die einzelnen Monate[1]):

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Im Januar: | am | 2: | 29 | Im August: | am | 10: | 186 | Im November: | am | 27: | 2777 |
| „ Februar: | am | 8: | 18 | „ „ | am | 11: | 81 | „ „ | am | 13: | 2052 |
| „ März: | am | 7: | 30 | „ „ | am | 9: | 65 | „ „ | am | 12: | 120 |
| „ April: | am | 27: | 20 | „ Septemb.: | am | 3: | 28 | „ „ | am | 7: | 46 |
| „ Mai: | am | 6: | 35 | „ October: | am | 16: | 81 | „ December: | am | 6: | 120 |
| „ Juni: | am | 30: | 24 | „ „ | am | 15: | 80 | „ „ | am | 7: | 82 |
| „ Juli: | am | 31: | 56 | „ „ | am | 14: | 64 | | | | |

Dass die Sternschnuppen nicht aus allen Richtungen mit gleicher Häufigkeit kommen, hatte schon BRANDES beobachtet[2]). Die Richtungen, nach welchen sich die Meteore zu bewegen scheinen, waren für 34 von ihm beobachtete Meteore in den folgenden Oktanten

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| nach d. Richtung zwischen | 26° | 71° | 116° | 161° | 206° | 251° | 296° | 341° | 26° Azimuth |
| schienen sich zu bewegen | 9 | 4 | 6 | 2 | — | 3 | 3 | 7 | |

[1]) Diese Maximalwerthe wurden natürlich nicht jedes Jahr, sondern nur in einem der 26 Beobachtungsjahre gefunden.

[2]) ARAGO hatte in seinen bereits erwähnten Instruktionen (Compt. rend. Bd. I, pag. 391) auch auf diese Thatsache hingewiesen.

Coulvier-Gravier giebt die folgenden Zahlen:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Aus der Richtung zwischen[1] | 202° | 247° | 292° | 337° | 22° | Azimuth |
| schienen zu kommen | 246 | 293 | 258 | 202 | | |
| Aus der Richtung zwischen | 22° | 67° | 112° | 157° | 202° | Azimuth |
| schienen zu kommen | 88 | 87 | 90 | 198 | | |

H. A. Newton giebt Zusammenstellungen für die Zahl der Meteore, welche in den einzelnen Azimuthen zu sehen waren (also nicht Richtungen); die Vertheilung war eine ziemlich gleichmässige, mit einem kleinen Ueberschuss in Südost.

Brandes gab auch schon die richtige Erklärung: Die meisten Sternschnuppen müssen entgegengesetzt der Bewegungsrichtung der Erde zu kommen scheinen: die meisten Sternschnuppen kommen aus dem Apex; denn wenn sie kosmischen Ursprungs sind, und sich Sternschnuppen aus allen Richtungen gleichmässig gegen die Erde zu bewegen, so wird diese Vertheilung auf der Erde nur dann gleichmässig erscheinen, wenn die Erde ruhend ist; sobald sich aber die Erde gegen einen gewissen Punkt hin bewegt, so werden die hinter der Erde kommenden zurückbleiben, einzelne, deren Geschwindigkeit kleiner ist, wie diejenige der Erde, werden diese gar nicht erreichen, während vor der Erde nicht nur diejenigen zur Erde (in die Atmosphäre) gelangen, deren Bewegung gegen die Erde zu gerichtet ist, sondern auch andere, welche sich mit kleinerer Geschwindigkeit als die Erde in derselben Richtung bewegen, welche also gleichsam von der Erde eingeholt werden. Nun findet Brandes, dass die Bewegungsrichtung der Erde im Mittel gegen das Azimuth 228° 10′ gerichtet ist[2]); aus dieser Richtung muss also die Mehrzahl der Meteore zu kommen scheinen; d. h. ihre Bewegungsrichtung muss gegen das um 180° verschiedene Azimuth 48° 10′ gerichtet sein, was sich auch aus seinen Zahlen ergiebt.

Diese Idee von Brandes wurde in sehr glücklicher Weise von Bompas 1856 zur Erklärung der stündlichen Veränderung in der Anzahl der Meteore und des Maximums der Häufigkeit derselben in den Morgenstunden herangezogen[3]) und acht Jahre später von A. S. Herschel zur Erklärung der jährlichen Veränderung[4]).

Die Richtung gegen welche sich die Erde bewegt ist immer um 90° von der Sonne entfernt, gegen diese zurück. Wendet man sich also mit dem Gesichte gegen die Sonne, so hat man den Apex zur rechten Hand in 90° Entfernung (vergl. Fig. 256) in der Ekliptik. Vernachlässigt man zunächst die Schiefe der Ekliptik, und nimmt die Bewegung der Erde im Aequator an, so kann auch der Apex als im Aequator gelegen angenommen werden. Am Abend, wenn die Sonne im Westen untergeht, ist also der Apex im Norden in seiner unteren Culmination (unter dem Horizonte), es ist »meteorische Mitternacht«. Um Mitternacht, wenn die Sonne in ihrer unteren Culmination ist, geht der Apex auf, es ist »meteorischer Morgen«. Des Morgens ist der Apex in seiner grössten Höhe, es ist »meteorischer

[1]) Hier sind also die Azimuthe um 180° verschieden gegen Brandes.

[2]) Dabei ist die Beobachtungszeit also zwischen Abend und Mitternacht vorausgesetzt, während welcher Zeit der Apex von der unteren Culmination (Azimuth 180°) zum Aufgangspunkt (Azimuth 270°) steigt. Es ist merkwürdig, dass Brandes diese Idee nicht weiter verfolgte; hätte er dieses gethan, so hätte er nothwendig auf das Maximum der Häufigkeit in den Morgenstunden geführt werden müssen. Bei Coulvier-Gravier fällt das Maximum auf 270° wie dieses der Fall sein muss, wenn die Beobachtungen über die ganze Nacht vertheilt sind.

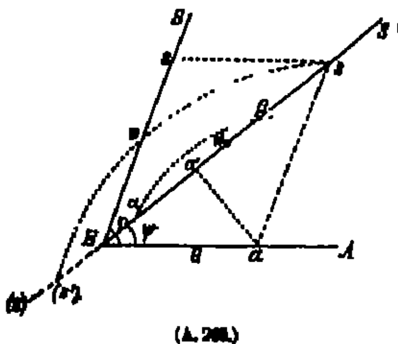
[3]) »Monthly Notices of the R. Astr. Soc.«, Bd. 17, pag. 148.

[4]) »Monthly Notices of the R. Astr. Soc.«, Bd. 24, pag. 133.

Mittag«, und wenn die Sonne in ihrer oberen Culmination ist, ist der Apex im Untergehen begriffen, es ist »meteorischer Abend«[1]). Nun kommen aber die Sternschnuppen am zahlreichsten aus jener Halbkugel, in welcher der Apex sich befindet; von dieser Halbkugel ist zur Zeit des »meteorischen Mittags«, also bei Sonnenaufgang, der grösste Theil über dem Horizonte, und zur Zeit der »meteorischen Mitternacht«, bei Sonnenuntergang der grösste Theil unter dem Horizonte, zur Zeit der oberen und unteren Culmination der Sonne gerade zur Hälfte über dem Horizonte, und zwar um Mitternacht auf der Ostseite. Daraus folgt, dass das Maximum der Häufigkeit der Sternschnuppen um 6 Uhr Morgens eintreten müsste. Nach den übereinstimmenden Angaben aller Beobachter tritt aber das Maximum nicht um diese Zeit, sondern etwa 2 Stunden früher ein; diese Erscheinung ist zur Zeit noch nicht genügend erklärt.

Die Häufigkeit der Meteore ergiebt sich hier als eine Function der Zenithdistanz des Apex; je höher der Apex über den Horizont steigt, desto grösser wird die Menge der sichtbaren Sternschnuppen. In Folge des Umstandes nun, dass der Apex sich nicht im Aequator bewegt, wird er in verschiedenen Jahreszeiten verschiedene Höhen erreichen. Am 21. Juni, wenn die Sonne in der Ekliptik am höchsten steht, ist der Apex um 90° zurück, im Frühlingspunkt, es wird also Mitte des »meteorischen Frühlings«; am 23. September steht der Apex am höchsten; seine Deklination ist gleich der Schiefe der Ekliptik, also + 23° 27', er erreicht die grösstmögliche Höhe, es ist also Mitte des »meteorischen Sommers«; am 22. December ist der Apex im Herbstäquinoktium, es ist Mitte des »meteorischen Herbstes« und am 21. März, wenn der Apex die Deklination — 23° 27' hat, ist Mitte des »meteorischen Winters«. Die grösste Höhe, welche der Apex erreichen kann, ist am 23. September, morgens 6h; dann ist seine Höhe für die Breite von Mitteleuropa ungefähr 70°; am 21. März wird seine grösste Höhe nur ungefähr 23°; während der ganzen zweiten Hälfte des Jahres steht daher der Apex auf der nördlichen Halbkugel höher, während der ersten Hälfte des Jahres tiefer; daher der grössere Reichthum an Sternschnuppen in der zweiten Hälfte des Jahres[2]).

Um das Verhältniss der Zahlen durch Rechnung zu bestimmen, hat man zu beachten, dass durch die Bewegung der Erde die Richtung, aus welcher eine Sternschnuppe kommt, geändert erscheint; es ist dies eine dem Aberrationsphänomen ähnliche Erscheinung. Ist $E$ (Fig. 265) der Ort der Erde, $EA$ die Richtung nach dem Apex, $Ea$ die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn, $SE$ die Richtung der Bewegung der Sternschnuppe, $sE$ ihre Geschwindigkeit, so giebt die Diagonale des aus $sE$, $aE$ construirten Parallelogramms $S'E$ die scheinbare Richtung und Geschwindigkeit des Meteores. Die Richtung $ES$ bestimmt nun den Radianten, und es ist daher $SEA = \varphi$ die Elongation des wahren Radianten vom Apex. Da die Sternschnuppe



(A. 265.)

[1]) Die meteorischen Tageszeiten folgen der Sonnenzeit, weil die tägliche Bewegung des Apex entgegengesetzt der jährlichen Bewegung der Erde in ihrer Bahn ist.

[2]) COULVIER-GRAVIER brachte diese Häufigkeit in Beziehung zur Lage des Perihels der Erdbahn.

aus der Richtung $S'E$ zu kommen scheint, so wird die durch das Auge gelegte parallele Grade die Himmelskugel in der Richtung $ES'$ treffen; diese Richtung bestimmt den scheinbaren Radianten, $S'EA = \psi$ ist ihre Elongation vom Apex. Durch die Erdbewegung werden also die Radianten aller Sternschnuppen dem Apex genähert.

Die scheinbare Elongation vom Apex $\psi$ lässt sich aus der wahren $\varphi$ und den Geschwindigkeiten $Ea = G$ und $sE = v$ der Erde und der Sternschnuppe einfach berechnen; es ist:

$$tang\,\psi = \frac{v \sin\varphi}{G + v \cos\varphi}.$$

Umgekehrt erhält man aus der beobachteten Elongation $\psi$ diejenige $\varphi$ aus der Formel

$$\sin(\varphi - \psi) = \frac{G}{v} \sin\psi.$$

Allein diese Formeln sind nur verwendbar, wenn die wahre Geschwindigkeit $v$ bekannt ist; die aus den Beobachtungen gefolgerte ist aber nicht die kosmische $v$, sondern die durch die Erdbewegung veränderte $u_0$; denn indem die Erde sich in Folge ihrer Bewegung dem Meteore entgegen, oder von ihm wegbewegt, werden aus den durch die Beobachtungen erhaltenen Erscheinungen nur die relativen Geschwindigkeiten erhalten. Man erhält aber aus dem wahren Radianten und der wahren Geschwindigkeit den scheinbaren Radianten und die scheinbare Geschwindigkeit durch

$$tang\,\psi = \frac{v \sin\varphi}{G + v\cos\varphi} \qquad \text{oder} \qquad u_0 \sin\psi = v \sin\varphi$$
$$u_0^2 = G^2 + v^2 + 2Gv\cos\varphi \qquad\qquad u_0 \cos\psi = v\cos\psi + G$$

und aus den beobachteten Radianten und der beobachteten Geschwindigkeit die wahren Grössen durch die Formeln:

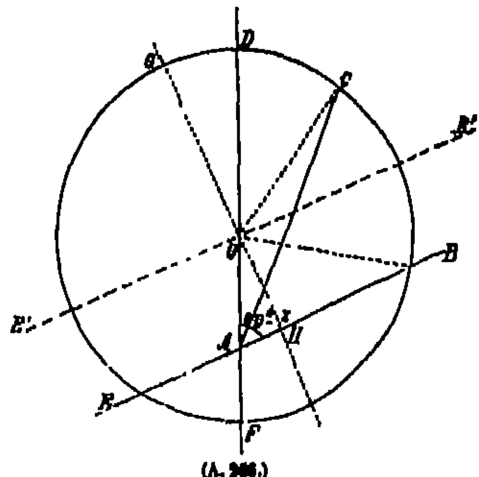
$$tang\,\varphi = \frac{u_0 \sin\psi}{u_0\cos\psi - G} \qquad \text{oder} \qquad v\sin\varphi = u_0 \sin\psi$$
$$v^2 = u_0^2 + G^2 - 2Gu_0\cos\psi \qquad\qquad v\cos\varphi = u_0\cos\psi - G.$$

Ist aber der scheinbare Radiant beobachtet, während man über die wahre kosmische Geschwindigkeit eine Annahme zu machen in der Lage ist, so sind $v$ und $\psi$ gegeben, und man erhält $\varphi$ und $v$ aus den Formeln

$$\sin(\varphi - \psi) = \frac{G}{v}\sin\psi;$$

$$u_0 = v\,\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}.$$

Eine Unbestimmtheit bleibt für $\varphi = 0$ und $180°$, da $u$ in der Form $\frac{0}{0}$ auftritt, in diesem Falle wird aber $u_0 = v \pm G$.



(A. 266.)

Denkt man sich aus allen Punkten der Himmelskugel Sternschnuppen kommend gegen den Mittelpunkt einer Kugel, in welcher sich der Beobachter befinden soll; sei $OD$ (Fig. 266) die Richtung nach dem

Apex. Eine Sternschnuppe, die zur selben Zeit von $C$ ausgeht, zu welcher der Beobachter von $A$ ausging, trifft diesen in $O$, wenn $CO$ die Geschwindigkeit der Sternschnuppe und $AO$ die Geschwindigkeit des Beobachters ist. Ist $AB$ der Horizont des Beobachters, so wird eine von $B$ nach $O$ gehende Sternschnuppe in allen Punkten ihrer Bahn im Horizonte $BA$ bleiben, der sich mit derselben Geschwindigkeit in der Richtung $AD$ bewegt, so dass der Beobachter $A$ und die Sternschnuppe $B$ gleichzeitig in $O$ ankommen. Von allen Sternschnuppen, die sich mit derselben Geschwindigkeit $CO$ gegen $O$ hin bewegen, werden daher alle über dem Horizonte $BE$ befindlichen sichtbar, und über dem als ruhend gedachten Horizonte $B'E'$ erscheinen; umgekehrt: wenn der Apex $D$ unter dem Horizonte ist, so bleiben alle aus dem Kugeltheile $BDE$ kommenden Sternschnuppen unter dem Horizont, weil sie mit diesem gleichzeitig nach $O$ rücken und nur diejenigen werden über dem Horizonte sichtbar, welche aus dem kleinen Kugeltheile $BEF$ kommen. Die Zahl der sichtbaren Sternschnuppen wird also von der Lage von $AD$ gegen $BE$, d. i. von der Höhe des Apex abhängig sein.

Denkt man sich die Sternschnuppen im Raum gleichmässig vertheilt, so werden aus gleichen Oberflächentheilen der Kugel $BDE$ auch eine gleiche Anzahl Sternschnuppen fallen; die Zahl der aus irgend einem Kugeltheile, d. i. in irgend einer Richtung fallenden Sternschnuppen ist daher der Oberfläche dieses Theiles proportional. Die Oberfläche der Calotte $BDE$ ist aber

$$2R\pi \cdot GH = 2R\pi\,(R + OA\cos z),$$

wenn $z$ die Zenithdistanz des Apex ist. Ist demnach $N$ die Gesammtzahl der Sternschnuppen, $n$ die Zahl der über dem Horizont sichtbaren, so ist

$$N = K \cdot 4R^2\pi; \qquad n = K \cdot 2R\pi\,(R + OA\cos z),$$

wo $K$ ein Proportionalitätsfaktor ist, hieraus:

$$\frac{n}{N} = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{OA}{R}\cos z\right).$$

Da nun $OA : R = G : v$ ist, so ist

$$n = \tfrac{1}{2}N\left(1 + \frac{G}{v}\cos z\right).$$

Würde $G = 0$ sein, so wäre stets $n = \frac{1}{2}N$, d. h. es würden immer die Hälfte aller Sternschnuppen sichtbar sein; der Faktor

$$F = 1 + \frac{G}{v}\cos z = 1 + \frac{G}{v}\sin H,$$

wenn $H = 90° - z$ die Höhe des Apex über dem Horizonte bedeutet, stellt daher den Vergrösserungsfaktor der sichtbaren Sternschnuppenzahl dar; es ist für $v = G\sqrt{2}$:

| $H$ | $F$ | $H$ | $F$ |
|---|---|---|---|
| $= 0°$ | $= 1·000$ | $= 0°$ | $= 1·000$ |
| + 10 | 1·123 | − 10 | 0·877 |
| + 20 | 1·242 | − 20 | 0·758 |
| + 30 | 1·354 | − 30 | 0·646 |
| + 40 | 1·455 | − 40 | 0·545 |
| + 50 | 1·542 | − 50 | 0·458 |
| + 60 | 1·613 | − 60 | 0·387 |
| + 70 | 1·665 | − 70 | 0·335 |
| + 80 | 1·697 | − 80 | 0·303 |
| + 90 | 1·707 | − 90 | 0·293 |

Um die Höhe des Apex zu finden, hat man zunächst seine Rectascension und Deklination zu berechnen (vergl. pag. 128) und dann wird, wenn $B$ die geographische Breite des Beobachtungsortes, $\Theta$ die Sternzeit der Beobachtung, also $\Theta - a$ der Stundenwinkel des Apex ist:

$$\sin H = \sin B \sin d + \cos B \cos d \cos (\Theta - a).$$

Die grösste Zahl der Sternschnuppen würde man, abgesehen von der durch die Helligkeit der aufgehenden Sonne stattfindenden Störung, sehen, wenn der Apex im Zenith ist, die geringste Anzahl, wenn er im Nadir ist. Im ersten Falle ist $H = +90°$, im letzten Falle $-90°$; und es wird sich die Zahl der sichtbaren Sternschnuppen in beiden Fallen verhalten, wie

$$\left(1 + \frac{G}{v}\right) : \left(1 - \frac{G}{v}\right) = (v + G) : (v - G).$$

Wäre $v \leqq G$, so würde man keine Sternschnuppe sehen können, wenn der Apex im Nadir ist; für $v = G\sqrt{2}$ wäre das Verhältniss

$$(\sqrt{2} + 1) : (\sqrt{2} - 1) = 2\cdot4142 : 0\cdot4142 = 5\cdot8284.$$

In der folgenden Tabelle giebt der erste Theil die wahre Elongation $\varphi$ vom Apex mit dem Argumente: beobachtete scheinbare Elongation $\psi$ für die Geschwindigkeiten $v = \sqrt{2\cdot2}$, $\sqrt{2\cdot1}$, $\sqrt{2\cdot0}$, $\sqrt{1\cdot9}$, $\sqrt{1\cdot8}$ entsprechend den hyperbolischen Bahnen mit den Halbaxen 5, 10, der Parabel und den Ellipsen mit den Halbaxen 10 und 5; der zweite Theil giebt für dieselben Annahmen die kosmischen relativen (nicht von der Erdattraction afficirten) Geschwindigkeiten $u_0$; die zweite Tafel giebt mit dem Argumente $u_0$ die veränderte Geschwindigkeit $u$ und den Werth $\Phi$, der später erklärt wird.

| | $v = \sqrt{2\cdot2}\,G$ | $v = \sqrt{2\cdot1}\,G$ | $v = \sqrt{2\cdot0}\,G$ | $v = \sqrt{1\cdot9}\,G$ | $v = \sqrt{1\cdot8}\,G$ | $v = \sqrt{2\cdot2}\,G$ | $v = \sqrt{2\cdot1}\,G$ | $v = \sqrt{2\cdot0}\,G$ | $v = \sqrt{1\cdot9}\,G$ | $v = \sqrt{1\cdot8}\,G$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\psi$ | Werthe für $\varphi$ | | | | | Werthe für $u_0$ | | | | |
| 0° | 0° 0'·0 | 0° 0'·0 | 0° 0'·0 | 0° 0'·0 | 0° 0'·0 | 2·4832 | 2·4491 | 2·4142 | 2·3784 | 2·3416 |
| 10 | 16 48·4 | 16 52·9 | 17 3·2 | 17 14·3 | 17 26·2 | 2·4579 | 2·4234 | 2·3883 | 2·3523 | 2·3153 |
| 20 | 33 19·9 | 33 39·1 | 33 59·7 | 34 22·0 | 34 46·2 | 2·3835 | 2·3479 | 2·3118 | 2·2750 | 2·2370 |
| 30 | 49 42·0 | 50 11·0 | 50 42·3 | 51 16·1 | 51 52·9 | 2·2625 | 2·2261 | 2·1888 | 2·1505 | 2·1110 |
| 40 | 65 40·9 | 66 19·9 | 67 2·1 | 67 47·8 | 68 37·7 | 2·1028 | 2·0648 | 2·0257 | 1·9854 | 1·9437 |
| 50 | 81 5·7 | 81 54·6 | 82 47·9 | 83 45·8 | 84 49·1 | 1·9129 | 1·8729 | 1·8316 | 1·7887 | 1·7442 |
| 60 | 95 43·4 | 96 42·0 | 97 45·7 | 98 55·4 | 100 12·2 | 1·7042 | 1·6619 | 1·6180 | 1·5724 | 1·5247 |
| 70 | 109 18·7 | 110 25·5 | 111 38·6 | 112 58·8 | 114 27·7 | 1·4896 | 1·4452 | 1·3988 | 1·3504 | 1·2996 |
| 80 | 121 36·1 | 122 48·6 | 124 8·2 | 125 35·9 | 127 13·6 | 1·2828 | 1·2367 | 1·1886 | 1·1381 | 1·0847 |
| 90 | 132 23·7 | 133 38·1 | 135 0·0 | 136 30·6 | 138 11·5 | 1·0954 | 1·0488 | 1·0000 | 0·9486 | 0·8944 |
| 100 | 141 36·1 | 142 48·6 | 144 8·2 | 145 35·9 | 147 13·6 | 0·9355 | 0·8895 | 0·8413 | 0·7908 | 0·7374 |
| 110 | 149 18·7 | 150 25·5 | 151 38·6 | 152 58·8 | 154 27·7 | 0·8056 | 0·7611 | 0·7148 | 0·6664 | 0·6155 |
| 120 | 155 43·4 | 156 42·0 | 157 45·7 | 158 55·4 | 160 12·2 | 0·7042 | 0·6619 | 0·6180 | 0·5724 | 0·5247 |
| 130 | 161 5·7 | 161 54·6 | 162 47·9 | 163 45·8 | 164 49·1 | 0·6273 | 0·5874 | 0·5460 | 0·5031 | 0·4586 |
| 140 | 165 40·9 | 166 19·9 | 167 2·1 | 167 47·8 | 168 37·7 | 0·5707 | 0·5327 | 0·4936 | 0·4533 | 0·4115 |
| 150 | 169 42·0 | 170 11·0 | 170 42·3 | 171 16·1 | 171 52·9 | 0·5304 | 0·4941 | 0·4568 | 0·4185 | 0·3790 |
| 160 | 173 19·9 | 173 39·1 | 173 59·7 | 174 22·0 | 174 46·2 | 0·5036 | 0·4685 | 0·4325 | 0·3956 | 0·3576 |
| 170 | 176 48·4 | 176 52·9 | 177 3·2 | 177 14·3 | 177 26·2 | 0·4882 | 0·4540 | 0·4186 | 0·3824 | 0·3455 |
| 180 | 180 0·0 | 180 0·0 | 180 0·0 | 180 0·0 | 180 0·0 | 0·4832 | 0·4491 | 0·4142 | 0·3784 | 0·3416 |

| $u_0$ | $u$ | $\Phi$ | $u_0$ | $u$ | $\Phi$ | $u_0$ | $u$ | $\Phi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0·35 | 0·5159 | 21° 37'·0 | 0·60 | 0·7091 | 9° 32'·0 | 1·25 | 1·3059 | 2° 30'·3 |
| 0·36 | 0·5221 | 20 49·1 | 0·62 | 0·7261 | 9 1·1 | 1·30 | 1·3538 | 2 19·4 |
| 0·37 | 0·5290 | 20 3·4 | 0·64 | 0·7433 | 8 32·4 | 1·35 | 1·4019 | 2 9·7 |
| 0·38 | 0·5360 | 19 19·6 | 0·66 | 0·7606 | 8 5·7 | 1·40 | 1·4502 | 2 1·1 |
| 0·39 | 0·5431 | 18 38·2 | 0·68 | 0·7780 | 7 41·2 | 1·45 | 1·4985 | 1 53·1 |
| 0·40 | 0·5503 | 17 58·5 | 0·70 | 0·7955 | 7 18·4 | 1·50 | 1·5469 | 1 45·8 |
| 0·41 | 0·5576 | 17 20·7 | 0·72 | 0·8131 | 6 57·2 | 1·55 | 1·5954 | 1 39·2 |
| 0·42 | 0·5650 | 16 44·7 | 0·74 | 0·8309 | 6 37·4 | 1·60 | 1·6440 | 1 33·3 |
| 0·43 | 0·5725 | 16 10·4 | 0·76 | 0·8487 | 6 19·1 | 1·65 | 1·6928 | 1 27·7 |
| 0·44 | 0·5800 | 15 37·8 | 0·78 | 0·8667 | 6 1·8 | 1·70 | 1·7416 | 1 22·9 |
| 0·45 | 0·5876 | 15 6·6 | 0·80 | 0·8847 | 5 45·7 | 1·75 | 1·7904 | 1 18·4 |
| 0·46 | 0·5953 | 14 36·8 | 0·82 | 0·9029 | 5 30·5 | 1·80 | 1·8392 | 1 14·2 |
| 0·47 | 0·6031 | 14 8·3 | 0·84 | 0·9211 | 5 16·3 | 1·85 | 1·8882 | 1 10·3 |
| 0·48 | 0·6109 | 13 41·1 | 0·86 | 0·9393 | 5 2·9 | 1·90 | 1·9372 | 1 6·7 |
| 0·49 | 0·6188 | 13 15·1 | 0·88 | 0·9577 | 4 50·5 | 1·95 | 1·9863 | 1 3·4 |
| 0·50 | 0·6267 | 12 50·2 | 0·90 | 0·9761 | 4 38·8 | 2·00 | 2·0354 | 1 0·2 |
| 0·51 | 0·6347 | 12 26·4 | 0·92 | 0·9945 | 4 27·7 | 2·05 | 2·0845 | 0 57·4 |
| 0·52 | 0·6428 | 12 3·6 | 0·94 | 1·0131 | 4 17·2 | 2·10 | 2·1337 | 0 54·6 |
| 0·53 | 0.6509 | 11 41·7 | 0·96 | 1·0317 | 4 7·8 | 2·15 | 2·1829 | 0 52·3 |
| 0·54 | 0·6591 | 11 20·8 | 0·98 | 1·0503 | 3 57·9 | 2·20 | 2·2322 | 0 50·0 |
| 0·55 | 0·6673 | 11 0·8 | 1·00 | 1·0689 | 3 49·1 | 2·25 | 2·2815 | 0 47·8 |
| 0·56 | 0·6756 | 10 41·6 | 1·05 | 1·1159 | 3 29·1 | 2·30 | 2·3308 | 0 45·8 |
| 0·57 | 0·6839 | 10 23·1 | 1·10 | 1·1631 | 3 11·3 | 2·35 | 2·3802 | 0 43·9 |
| 0·58 | 0·6923 | 10 5·3 | 1·15 | 1·2106 | 2 56·3 | 2·40 | 2·4296 | 0 42·2 |
| 0·59 | 0·7007 | 9 48·3 | 1·20 | 1·2581 | 2 42·6 | 2·45 | 2·4790 | 0 40·5 |
| 0·60 | 0·7091 | 9 32·0 | 1·25 | 1·3059 | 2 30·3 | 2·50 | 2·5284 | 0 38·8 |

Die Dichte der Sternschnuppen in den beiden Halbkugeln, in denen sich der Apex befindet, und in der anderen Halbkugel verhalten sich wie 5·83:1; aber die Dichte wird nicht in allen Punkten gleich sein. Gleiche Flächenelemente der Kugel, welche man von $O$ unter gleichen Gesichtswinkeln sieht, erscheinen nämlich dem Beobachter in $A$ ungleich, und da bei gleicher Vertheilung der Radianten auf gleiche Flächentheile eine gleiche Anzahl von Sternschnuppenradianten kommen muss, so verhalten sich die Dichten umgekehrt wie die Gesichtswinkel, unter denen gleiche Flächentheile erscheinen; diese verhalten sich aber wie umgekehrt die Quadrate der Entfernung, daher ist die Dichte der Sternschnuppen in einem Punkt $C$ proportional $AC^2$, d. h. proportional dem Quadrate der relativen Geschwindigkeit, und hängt daher von der Elongation vom Apex ab. Es verhalten sich demnach die Dichten der Radianten im Apex und Antiapex wie $(\sqrt{2}+1)^2 : (\sqrt{2}-1)^2 = 33·97 : 1$.

Der Faktor $F$ giebt ein Gesetz für die Vertheilung, aus welcher sich die tägliche und jährliche Variation ableiten lässt. Vergleicht man die aus diesem Gesetze folgende Anzahl mit den Beobachtungen für verschiedene Annahmen von $v$, so kann man hieraus auf den wahrscheinlichsten Werth von $v$ einen Rückschluss ziehen. H. A. Newton[1]) vernachlässigt für die Untersuchung der täglichen Variation die Veränderlichkeit von $d$, und setzt $d = 0$, d. h. er nimmt die Bewegung der Erde in der Aequatorebene an; es wird dann

$$\cos z = \cos B \cos t$$

und da in diesem Falle der Stundenwinkel des Apex auch immer um 90° grösser

[1]) American Journal of Sciences and Arts, III. Serie, Bd. 39, pag. 205.

angenommen werden kann, als derjenige der Sonne, so ist $t = T + 90°$, wenn $T$ die wahre Sonnenzeit ist; es ist also

$$\cos z = -\cos B \sin T$$

und damit der Coëfficient von $N$

$$\tfrac{1}{2}F = \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{G}{v}\cos B \sin T\right).$$

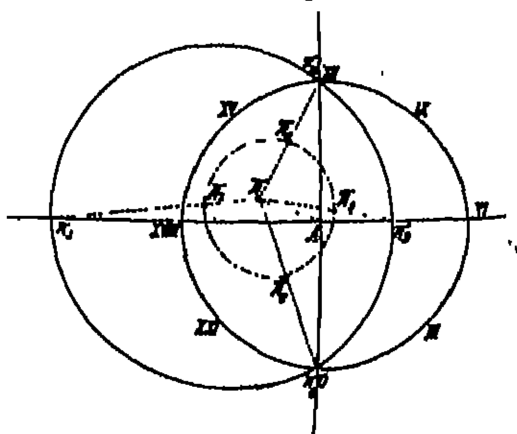
NEWTON rechnete diesen Ausdruck für die Breiten von New Haven und Paris für drei verschiedene Werthe von $\frac{G}{v}$ und erhält:

| | Paris: $B = 48° 50'$ | | | New Haven, $B = 41° 18'$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $v = \frac{1}{2}G$ | $v = G$ | $v = G\sqrt{2}$ | $v = \frac{1}{2}G$ | $v = G$ | $v = G\sqrt{2}$ |
| $T =$ 6^h | 0·089 | 0·171 | 0·268 | 0·080 | 0·125 | 0·235 |
| 9 | 0·209 | 0·268 | 0·336 | 0·168 | 0·235 | 0·311 |
| 12 | 0·500 | 0·500 | 0·500 | 0·500 | 0·500 | 0·500 |
| 15 | 0·791 | 0·732 | 0·664 | 0·832 | 0·765 | 0·687 |
| 18 | 0·911 | 0·829 | 0·732 | 0·970 | 0·875 | 0·765. |

Je kleiner $v$ ist, desto grösser muss selbstverständlich der Unterschied zwischen der Zahl der am Abend und am Morgen sichtbaren Sternschnuppen sein; die Verhältnisszahlen des Maximums und Minimums werden

| | | | |
|---|---|---|---|
| für Paris | 10·24 | 4·85 | 2·73 |
| für New Haven | 32·33 | 7·00 | 3·30. |

NEWTON vergleicht nun diese Zahlen mit den von COULVIER-GRAVIER aus Beobachtungen gefundenen; nach ihm ist dieses Verhältniss (vergl. pag. 160) $\frac{16{\cdot}8}{6{\cdot}3} = 2{\cdot}667$. Daraus zieht NEWTON den Schluss, dass die kosmische Geschwindigkeit $v$ noch grösser sein müsse als $G\sqrt{2}$, d. h. die Sternschnuppen bewegen sich mit hyperbolischen Geschwindigkeiten. Berücksichtigt man aber das spätere, aus viel zahlreicheren Beobachtungen abgeleitete Resultat von SCHMIDT, wonach dieses Verhältniss $\frac{18{\cdot}75}{4{\cdot}17} = 4{\cdot}497$ ist, so würde folgen, dass die Mehrzahl der beobachteten Sternschnuppen elliptische Bahnen um die Sonne beschrieben, deren kosmische Geschwindigkeiten in der Entfernung der Erde von der Sonne grösser als die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn, aber kleiner als die parabolische Geschwindigkeit ist.



(A. 267.)

Dieses Resultat steht auch im Einklange mit einem auf ganz anderem Wege erhaltenen, welches sich aus der Bewegung des Sonnensystems ableitet.

Das Sonnensystem bewegt sich gegen einen Punkt, der sehr nahe die Rectascension 260°, und die Deklination + 32° hat (Apex der Sonnenbewegung). Sei in (Fig. 267) $A$ der Aequatorpol; 0, VI, XII, XVIII der Aequator; $\pi_3\, \pi_6\, \pi_9\, \pi_{12}$ die Ekliptik also 0 der Frühlingspunkt, so stellt $\pi_{12}$ den Apex der Erdbewegung für den

December vor (wenn die Sonne in $\pi_1$ ist); $\pi_2$, $\pi_3$, $\pi_4$ sind die Orte des Apex für die Monate März, Juni, September; dabei ist $A\pi_1 = 66{\cdot}5°$. Ist $\Pi$ der Apex der Sonnenbewegung (im Sternbilde des Hercules), so ist

$$\pi_1 A \Pi = 10°; \quad A\Pi = 58°.$$

Die Geschwindigkeit der Bewegung ist nahe gleich, für die Erde 29·5 *km* pro Secunde, für das Sonnensystem etwa 24 *km*, allerdings mit beträchtlichen Unsicherheiten; es soll für die Geschwindigkeit des Sonnensystems $\Gamma = 0{\cdot}8\, G = 23{\cdot}6$ *km* festgehalten werden. Legt man durch $\Pi$ und $\pi_3$ einen grössten Kreis, und theilt ihn so, dass $\sin \Pi\Pi_3 : \sin \Pi_3\pi_3 = G : \Gamma = 5 : 4$ ist (vergl. Fig. 265; es ist $\varphi = \Pi\pi_3$; $\psi = \Pi_3\pi_3$ und $\Gamma$ tritt an Stelle von $v$), so erhält man in $\Pi_3$ den Ort des resultirenden Apex für den Juni. Ebenso folgen die übrigen Orte desselben. Nun sieht man sofort, dass zwischen dem März und September die Rectascension des resultirenden Apex **kleiner** ist, für die Monate von September bis März hingegen grösser als diejenigen des Apex der Erdbewegung. In den Sommermonaten wird also der resultirende Apex früher culminiren (vor $6^h$ Morgens), in den Wintermonaten später (nach $6^h$ Morgens). Wenn eine solche Verschiebung der Culmination, die im Sommer und Winter im **entgegengesetzten Sinne** stattfinden würde, nicht beobachtet ist, so kann, da eine über das ganze Jahr sich erstreckende Verfrühung des Maximums der Häufigkeit der Sternschnuppen nicht dieser Ursache zugeschrieben werden kann, gefolgert werden, **dass die weitaus grösste Mehrzahl der beobachteten Sternschnuppen an der Bewegung des Sonnensystems theilnimmt.** In dieser Allgemeinheit ist der Satz jedoch vorläufig nicht erwiesen. Vergleicht man die von Schmidt in der Tabelle auf pag. 160 gegebenen Zahlen, so findet man, wie schon dort erwähnt, dass die Zeit des Maximums noch nicht mit genügender Sicherheit festgelegt ist. Eine Entscheidung hierüber muss also erst späteren Zeiten vorbehalten bleiben. Allein auf andere Weise kann man wenigstens Anhaltspunkte für eine Bestätigung dieses Satzes erhalten; doch muss zu diesem Zwecke die Rechnung zu Hilfe gezogen werden.

Sind $A$, $D$, Rectascension und Deklination des Sonnenapex, $\Gamma$ wie bisher die Geschwindigkeit der Bewegung des Sonnensystems, und haben $\alpha$, $\delta$, $\gamma$ dieselbe Bedeutung für den resultirenden Apex, so ist

$$\begin{aligned} \gamma \sin\delta &= \Gamma \sin D + G \sin d &&= \Gamma \sin D - G \cos\odot \sin\varepsilon \\ \gamma \cos\delta \cos\alpha &= \Gamma \cos D \cos A + G \cos d \cos a &&= \Gamma \cos D \cos A + G \sin\odot \\ \gamma \cos\delta \sin\alpha &= \Gamma \cos D \sin A + G \cos d \sin a &&= \Gamma \cos D \sin A - G \cos\odot \cos\varepsilon. \end{aligned} \qquad (1)$$

Sind $\alpha_\odot$, $\delta_\odot$ Rectascension und Deklination der Sonne, so hat man

$$\begin{aligned} \sin\delta_\odot &= \sin\odot \sin\varepsilon \\ \cos\delta_\odot \cos\alpha_\odot &= \cos\odot \\ \cos\delta_\odot \sin\alpha_\odot &= \sin\odot \cos\varepsilon \end{aligned} \qquad (2)$$

daher wird:

$$\begin{aligned} \gamma \cos\delta \cos\delta_\odot \cos(\alpha_\odot - \alpha) &= \Gamma \cos D (\cos A \cos\odot + \sin A \sin\odot \cos\varepsilon) + G \sin\odot \cos\odot \sin^2\varepsilon \\ \gamma \cos\delta \cos\delta_\odot \sin(\alpha_\odot - \alpha) &= \Gamma \cos D (\cos A \sin\odot \cos\varepsilon - \cos\odot \sin A) + G \cos\varepsilon \end{aligned} \qquad (3)$$

und ferner folgt aus (1) mit Rücksicht auf die Beziehungen

$$\begin{aligned} \sin D \sin\varepsilon + \cos D \sin A \cos\varepsilon &= \cos\beta \sin\lambda \\ \cos D \cos A &= \cos\beta \cos\lambda \end{aligned}$$

wo $\lambda$, $\beta$ die Länge und Breite des Sonnenapex sind:

$$\gamma^2 = G^2 + \Gamma^2 - 2G\Gamma \cos\beta \sin(\lambda - \odot). \qquad (3a)$$

Die Zenithdistanz $z$ des resultirenden Apex folgt aus:

$$\cos z = \sin B \sin \delta + \cos B \cos \delta \cos (\theta - \alpha)$$

und es ist $\theta = T + \alpha_{\odot}$, wenn $T$ der Stundenwinkel der Sonne, also die wahre Sonnenzeit ist; daher

$$\cos z = \sin B \sin \delta + \cos B \cos \delta \cos T \cos (\alpha_{\odot} - \alpha) - \cos B \cos \delta \sin T \sin (\alpha_{\odot} - \alpha),$$

daher mit Rücksicht auf (3), wenn

$$\frac{\sin B}{\gamma} [\Gamma \sin D - G \cos \odot \sin \epsilon] = k$$

$$\frac{\cos B}{\gamma \cos \delta_{\odot}} [\Gamma \cos D (\cos A \cos \odot + \sin A \sin \odot \cos \epsilon) + G \sin \odot \cos \odot \sin^2 \epsilon] = l \qquad (4)$$

$$\frac{\cos B}{\gamma \cos \delta_{\odot}} [\Gamma \cos D (\cos A \sin \odot \cos \epsilon - \cos \odot \sin A) + G \cos \epsilon] = m$$

gesetzt wird:

$$\cos z = k + l \cos T - m \sin T. \qquad (5)$$

Hier ist nun in $F = (1 + a \cos z)$ wie leicht ersichtlich $a = \frac{\gamma}{v}$ zu setzen, und dann ist

$$n = \frac{N}{2} (1 + ak + al \cos T - am \sin T); \qquad a = \frac{\gamma}{v}.$$

Da

$$\frac{dn}{dT} = \frac{N}{2} (- al \sin T - am \cos T),$$

ist, so wird für die Zeit des Maximums und Minimums:

$$l \sin T_0 + m \cos T_0 = 0$$

$$\tang T_0 = -\frac{m}{l}; \quad \sin T_0 = \pm \frac{m}{\sqrt{m^2 + l^2}}; \quad \cos T_0 = \mp \frac{l}{\sqrt{m^2 + l^2}}$$

und die zugehörigen Maximal- und Minimalwerthe werden:

$$n_{1,2} = \frac{N}{2} (1 + ak \pm a \sqrt{l^2 + m^2}).$$

Hieraus folgt das Verhältniss zwischen dem Maximum und Minimum:

$$V = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1 + ak + a\sqrt{l^2 + m^2}}{1 + ak - a\sqrt{l^2 + m^2}}.$$

Man kann nun schreiben

$$k = \sin B \cdot k_0; \qquad l = \cos B \cdot l_0; \qquad m = \cos B \cdot m_0$$

und es wird daher

$$\tang T_0 = -\frac{m_0}{l_0} \qquad (6)$$

unabhängig von der geographischen Breite. Ferner wird:

$$V = \frac{1 + a(k_0 \sin B + \sqrt{l_0^2 + m_0^2} \cos B)}{1 + a(k_0 \sin B - \sqrt{l_0^2 + m_0^2} \cos B)}$$

oder wenn man

$$k_0 = \varkappa \cos K$$
$$\sqrt{l_0^2 + m_0^2} = \varkappa \sin K \qquad (7)$$

setzt:

$$V = \frac{1 + a\varkappa \sin (B + K)}{1 + a\varkappa \sin (B - K)} \qquad (8)$$

Berücksicht man die Formeln (2) so kann man schreiben:

$$
\begin{aligned}
k_0 &= \frac{1}{\gamma}\left[\Gamma \sin D - G \cos \odot \sin \varepsilon\right] \\
l_0 &= \frac{1}{\gamma}\left[\Gamma \cos D \cos(\alpha_\oplus - A) + \frac{G}{2 \cos \delta_\oplus} \sin 2\odot \sin^2 \varepsilon\right] \\
m_0 &= \frac{1}{\gamma}\left[\Gamma \cos D \sin(\alpha_\oplus - A) + \frac{G}{\cos \delta_\oplus} \cos \varepsilon\right]
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

Für $\Gamma = 0$ wird

$$\tan T_0' = - \frac{2 \cos \varepsilon}{\sin 2\odot \sin^2 \varepsilon} = \frac{\overline{1{\cdot}0636_n}}{\sin 2\odot}$$

Die Maximalabweichung von $T_0 = 6$ Uhr und 18 Uhr findet statt für $\sin 2\odot = 1$, oder $\odot = 45°$, 135°, 225°, 315°, und schwankt zwischen ± 19·8 Minuten; die Berücksichtigung der Schiefe der Ekliptik giebt daher keinen Aufschluss für die Verfrühung des Maximums der Sternschnuppenzahl auf die Zeit gegen $14^h$ und $16^h$. Für das Verhältniss $V$ findet man für $\Gamma = 0$:

$$l_0^2 + m_0^2 = \cos \varepsilon^2 + \sin \varepsilon^2 \sin \odot^2; \qquad k_0 = - \cos \odot \sin \varepsilon$$

und da, wie man hieraus sieht, $k_0^2 + l_0^2 + m_0^2 = 1$ ist, so wird $\varkappa = 1$,

$$\cos K' = - \cos \odot \sin \varepsilon. \qquad (7a)$$

Um nun den Einfluss der Sonnenbewegung auf die Sternschnuppen zu berechnen, müssen die Coëfficienten numerisch entwickelt werden. Man hat

$$\varepsilon = 23° \, 27'{\cdot}5; \qquad A = 260°, \qquad D = +32° \qquad \lambda = 255° \, 3'{\cdot}5; \qquad \beta = +54° \, 56'{\cdot}6$$

und mit der Annahme $\Gamma = 0{\cdot}8$ (für $G = 1$):

$$\gamma^2 = 1{\cdot}64 \, [1 + 0{\cdot}5604 \sin(\odot + 104° \, 51'{\cdot}5)].$$

Die Werthe von $\gamma$, $k_0$, $l_0$, $m_0$, $T_0$ (für das Minimum) $T_1$ (für das Maximum), ferner $\log \varkappa$, $K$ und $K'$ sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

| Monat | $\odot$ | $\gamma$ | $k_0$ | $l_0$ | $m_0$ | $T_0$ | $T_1$ | $\log \varkappa$ | $K$ | $K'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| April | 0° | 1·590 | 0·045 | − 0·074 | 0·997 | 5h 43m | 17h 43m | 0·0003 | 87° 21' | 113° 28' |
| | 10 | 1·572 | 0·049 | − 0·125 | 0·992 | 5 31 | 17 31 | 0·0005 | 87 11 | 113 5 |
| | 20 | 1·547 | 0·062 | − 0·176 | 0·984 | 5 19 | 17 19 | 0·0007 | 86 27 | 111 56 |
| | 30 | 1·514 | 0·084 | − 0·229 | 0·972 | 5 7 | 17 7 | 0·0010 | 85 12 | 110 10 |
| Mai | 40 | 1·478 | 0·114 | − 0·285 | 0·955 | 4 54 | 16 54 | 0·0014 | 83 23 | 107 45 |
| | 50 | 1·435 | 0·153 | − 0·344 | 0·932 | 4 39 | 16 39 | 0·0021 | 81 15 | 104 50 |
| | 60 | 1·371 | 0·198 | − 0·405 | 0·900 | 4 23 | 16 23 | 0·0028 | 78 32 | 101 29 |
| Juni | 70 | 1·312 | 0·254 | − 0·464 | 0·858 | 4 6 | 16 6 | 0·0036 | 75 18 | 97 49 |
| | 80 | 1·250 | 0·321 | − 0·519 | 0·806 | 3 49 | 15 49 | 0·0047 | 71 29 | 93 58 |
| | 90 | 1·185 | 0·397 | − 0·564 | 0·745 | 3 32 | 15 32 | 0·0063 | 66 59 | 90 0 |
| Juli | 100 | 1·119 | 0·482 | − 0·593 | 0·675 | 3 15 | 15 15 | 0·0081 | 61 47 | 86 2 |
| | 110 | 1·055 | 0·574 | − 0·599 | 0·600 | 3 0 | 15 0 | 0·0108 | 55 54 | 82 51 |
| | 120 | 0·996 | 0·672 | − 0·579 | 0·524 | 2 49 | 14 49 | 0·0130 | 49 17 | 78 31 |
| August | 130 | 0·943 | 0·772 | − 0·526 | 0·452 | 2 43 | 14 43 | 0·0160 | 41 56 | 75 10 |
| | 140 | 0·899 | 0·862 | − 0·440 | 0·387 | 2 45 | 14 45 | 0·0184 | 34 10 | 72 15 |
| | 150 | 0·867 | 0·937 | − 0·331 | 0·335 | 3 5 | 15 5 | 0·0201 | 26 20 | 69 50 |
| September | 160 | 0·851 | 0·992 | − 0·177 | 0·299 | 3 58 | 15 58 | 0·0216 | 19 18 | 68 2 |
| | 170 | 0·851 | 1·015 | − 0·021 | 0·283 | 5 43 | 17 43 | 0·0224 | 15 37 | 66 55 |
| | 180 | 0·867 | 1·002 | + 0·136 | 0·287 | 7 41 | 19 41 | 0·0216 | 17 36 | 66 52 |
| October | 190 | 0·898 | 0·960 | + 0·278 | 0·310 | 8 47 | 20 47 | 0·0197 | 23 27 | 66 55 |
| | 200 | 0·941 | 0·897 | + 0·399 | 0·350 | 9 15 | 21 15 | 0·0176 | 30 37 | 68 2 |
| | 210 | 0·994 | 0·821 | + 0·491 | 0·403 | 9 22 | 21 22 | 0·0154 | 37 44 | 69 50 |

| Monat | ⊙ | γ | $k_0$ | $l_0$ | $m_0$ | $T_0$ | $T_1$ | $\log \varkappa$ | $K$ | $K'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| November | 220° | 1·054 | 0·735 | + 0·552 | 0·466 | 9h 19m | 21h 19m | 0·0131 | 44° 29' | 72° 15' |
| | 230 | 1·118 | 0·649 | + 0·585 | 0·536 | 9 10 | 21 10 | 0·0110 | 50 43 | 75 10 |
| | 240 | 1·183 | 0·566 | + 0·598 | 0·609 | 8 57 | 20 57 | 0·0090 | 56 22 | 78 31 |
| December | 250 | 1·248 | 0·486 | + 0·577 | 0·682 | 8 41 | 20 41 | 0·0073 | 61 27 | 82 51 |
| | 260 | 1·311 | 0·411 | + 0·541 | 0·752 | 8 23 | 20 23 | 0·0058 | 66 3 | 86 2 |
| | 270 | 1·370 | 0·343 | + 0·488 | 0·816 | 8 4 | 20 4 | 0·0046 | 70 10 | 90 0 |
| Januar | 280 | 1·424 | 0·282 | + 0·424 | 0·870 | 7 44 | 19 44 | 0·0035 | 73 46 | 93 58 |
| | 290 | 1·472 | 0·227 | + 0·358 | 0·914 | 7 24 | 19 24 | 0·0025 | 76 57 | 97 49 |
| | 300 | 1·513 | 0·180 | + 0·281 | 0·947 | 7 6 | 19 6 | 0·0019 | 79 42 | 101 23 |
| Februar | 310 | 1·516 | 0·140 | + 0·218 | 0·970 | 6 50 | 18 50 | 0·0014 | 81 59 | 104 50 |
| | 320 | 1·572 | 0·107 | + 0·149 | 0·986 | 6 34 | 18 34 | 0·0011 | 83 53 | 107 45 |
| | 330 | 1·590 | 0·080 | + 0·089 | 0·995 | 6 20 | 18 20 | 0·0008 | 85 25 | 110 10 |
| März | 340 | 1·599 | 0·060 | + 0·032 | 0·999 | 6 7 | 18 7 | 0·0006 | 86 31 | 111 58 |
| | 350 | 1·599 | 0·049 | − 0·022 | 0·999 | 5 55 | 17 55 | 0·0004 | 87 11 | 113 5 |
| | 360 | 1·590 | 0·045 | − 0·074 | 0·997 | 5 43 | 17 43 | 0·0003 | 87 24 | 113 23 |

Rechnet man nach dieser Tabelle für die einzelnen Monate (Sonnenlänge ⊙ = 295°, 355° ...) unter der Annahme $v = \sqrt{2}\,G$ den Werth von $V$, so erhält man

| | Γ = 0 | | Γ = 0·8 G | | Beobachtet v. Schmidt |
|---|---|---|---|---|---|
| | B = 40° | B = 50° | B = 40° | B = 50° | (vergl. pag. 161) |
| Januar | 3·740 | 2·929 | 5·650 | 3·688 | 4·2 |
| Februar | 4·090 | 3·181 | 9·089 | 4·950 | 3·9 |
| März | 4·083 | 3·266 | 11·109 | 5·581 | 2·2 |
| April | 4·058 | 3·226 | 8·455 | 4·806 | 1·0 |
| Mai | 3·858 | 3·089 | 5·187 | 3·498 | 1·8 |
| Juni | 3·444 | 2·724 | 3·185 | 2·476 | 1·6 |
| Juli | 2·988 | 2·286 | 2·082 | 1·787 | 2·8 |
| August | 2·618 | 2·152 | 1·451 | 1·346 | 2·9 |
| September | 2·459 | 2·048 | 1·228 | 1·174 | 2·8 |
| October | 2·587 | 2·096 | 1·571 | 1·430 | 4·7 |
| November | 2·887 | 2·300 | 2·274 | 1·907 | 3·9 |
| December | 3·282 | 2·610 | 3·489 | 2·630 | 3·1 |

Schlüsse hieraus zu ziehen, gestattet die Unvollständigkeit der Beobachtungen nicht. Die bereits früher erwähnte Verschiebung der Zeiten für die Maxima ist aus der Tabelle auch ihrer Grösse nach ersichtlich; sie überschreitet 3 Stunden; die Verfrühung in den Sommermonaten ist damit erklärt, allein die Verspätung erreicht ihr Maximum Ende October[1]); bis zu den in der Tabelle angegebenen Zeiten für die Maxima kann natürlich nicht beobachtet werden, aber ebenso wenig könnte ein weiteres Aufsteigen der Zahl der Sternschnuppen der Beobachtung entgehen.

Auch für das Verhältniss $V$ ergiebt sich eine genügende Uebereinstimmung mit den Beobachtungen weder unter der Annahme Γ = 0, noch unter der Annahme Γ = 0·8 $G$; im Allgemeinen zeigt sich, mit Ausnahme der Monate Juli, August, September eine bessere Uebereinstimmung für Γ = 0. Hierzu kommt aber, dass mit wachsendem $v$, $a$ kleiner wird, also auch, weil für die Maximalvergrösserung $B - K$ negativ ist, $V$ kleiner wird; die Uebereinstimmung

1) Es ist jedoch zu beachten, dass die grossen Novembermeteore ihr Maximum ebenfalls vor der Culmination des Apex haben.

wird also für hyperbolische Bahnen besser, gleichmässig in beiden Annahmen für Γ.

So wird für $v = 2$:

| | $\Gamma = 0$ | | $\Gamma = 0{\cdot}8\,G$ | |
|---|---|---|---|---|
| $B =$ | 40° | 50° | 40° | 50° |
| $V =$ | 2·550 | 2·067 | 3·952 | 2·988; |

doch sind, namentlich im ersten Halbjahre, die Beobachtungen noch zu wenig zahlreich, um einen sicheren Schluss daraus zu ziehen.

Im Grossen und Ganzen überwiegt die Wahrscheinlichkeit $\Gamma = 0$, woraus der bereits ausgesprochene Satz folgt, dass die Mehrzahl der Sternschnuppen an der Bewegung des Sonnensystems theilnimmt. Für die Verfrühung des Maximums der Erscheinung ist hierdurch keine Erklärung gegeben; doch folgt dieselbe naturgemäss, wenn eine thatsächliche physische Concentration der Sternschnuppen in der Richtung von $OA$ (Fig. 256) weg gegen die Verlängerung des Radiusvectors zu, also etwa in der Richtung $Or$ (wo $r$ nicht den Frühlingspunkt bedeutet), stattfindet, weil dann dieser Hauptpunkt der Concentration vor dem optischen Concentrationspunkte (dem Apex) culminirt. In der That findet, wie LEHMAN-FILHÉS gezeigt hat, eine solche Concentration statt, wenn man in Ellipsen sich bewegende Sternschnuppen annimmt, so dass auch hieraus wieder die Annahme der Zusammengehörigkeit der Sternschnuppen mit dem Sonnensysteme eine Stütze erhält.

Die Richtung der Meteore wird noch etwas durch die Anziehung der Erde geändert. Die Sternschnuppen werden in Folge der Erdanziehung Bahnen um die Erde beschreiben, deren Form von der Geschwindigkeit abhängig ist. Man kann hierfür wieder die Fundamentalgleichung

$$V = k_{\odot}\sqrt{m + m'}\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a_1}}$$

verwenden[1]); will man $V$, $a$ und $r$ in Einheiten des Erdhalbmessers ausdrücken, so hat man $V \sin\pi$, $a \sin\pi$, $r \sin\pi$, an Stelle dieser Grössen zu setzen; weiter wird, da für $m$ die Erdmasse zu setzen ist und die Masse des Meteores als verschwindend klein angesehen werden kann:

$$V' = \frac{k_{\odot}\sqrt{m}}{\sin\pi\sqrt{\sin\pi}}\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a_1}},$$

und die Geschwindigkeit ergiebt sich dann für die Einheit des mittleren Sonnentages. Will man dieselbe für die Secunde, so folgt mit Berücksichtigung der Beziehungen auf pag. 148:

$$u = k\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a_1}}, \qquad u^2 = gr^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a_1}\right),$$

welche Gleichung übrigens aus den Gleichungen (4) pag. 150, wenn $A = 0$ gesetzt wird, sofort folgt.

Nun war gefunden (pag. 151) $u^2 = u_0^2 + 2gr$, wobei $u_0$ die kosmische relative (von der Erdattraktion freie) Geschwindigkeit der Meteore bedeutet. Hieraus folgt:

$$u_0^2 = -\frac{gr^2}{a_1}; \qquad a_1 = -\frac{gr^2}{u_0^2}.$$

[1]) Nimmt man die Geschwindigkeit der Erde als Einheit an, so wird $k = 1$ (vergl. »Allgemeine Einleitung in die Astronomie«, pag. 135).

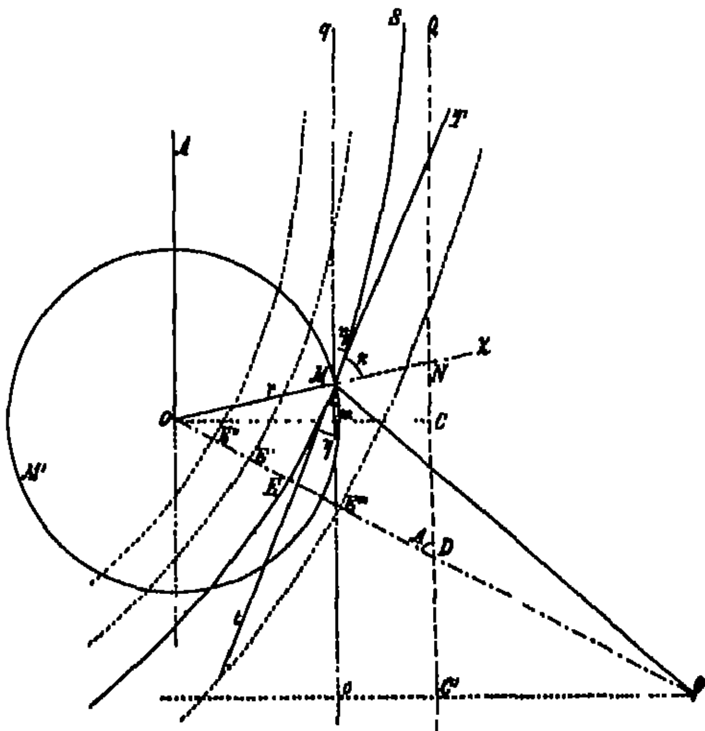
Die grosse Halbaxe ergiebt sich also stets negativ, die Bahnen werden Hyperbeln sein. Es soll in der Folge der positive Werth

$$a = -a_1$$

dieser Axe eingeführt werden, und dann ist

$$a = \frac{gr^2}{u_0^2}. \tag{1}$$

Sei nun $O$ (Fig. 268) der Mittelpunkt der Erde, $QC$ die von der Erdanziehung nicht gestörte Bahn einer Sternschnuppe aus einem Radianten in der Richtung $AO$, und sei die durch die Erdanziehung geänderte Bahn $SM$. Diese Aenderung findet in der durch die Anfangsrichtung und den Erdmittelpunkt gelegten Ebene statt, wird also eine krumme Linie in der Verticalebene des Punktes $M$ ergeben. Die Richtung der Sternschnuppe erscheint dem Beobachter in der Tangente $TM$ dieses Punktes an der Bahn, wird also stets mit dem Zenith einen kleineren Winkel bilden, weshalb SCHIAPARELLI diese Wirkung die Zenithattraction nennt.



(A. 268.)

In dem Punkte $M$ ist die Geschwindigkeit der Sternschnuppe $u$; daher ihre Flächengeschwindigkeit $\frac{1}{2}u \cdot r \sin z$, wenn $r$ der Halbmesser der Erde und $z$ der Winkel $ZMT$, zwischen der Richtung nach dem Zenith und der Richtung der Tangente an der Bahn, also nach dem scheinbaren Radianten, d. h. die Zenithdistanz des scheinbaren Radianten ist. Diese Flächengeschwindigkeit ist gleich $\frac{1}{2}k\sqrt{p}$, wenn $p$ der Parameter ist (vergl. den Artikel »M. d. H.« § 12, Formel (5), folglich wird:

$$u r \sin z = \sqrt{g r^2}\sqrt{a(e^2-1)}$$

demnach

$$a(e^2-1) = \frac{u^2 \sin z^2}{g}. \tag{2}$$

Multiplicirt man die Gleichungen (1) und (2) und zieht die Quadratwurzel, so erhält man für die conjugirte Axe:

$$b = \frac{r u \sin z}{u_0}.$$

Ist $OD$ die Richtung der grossen Halbaxe, $E$ der Scheitel der Hyperbel, $ED = a$, so ist, weil $DQ$ die Tangente in der Unendlichkeit, also die Asymptote der Hyperbel ist, $CDE = A$ der halbe Asymptotenwinkel, gegeben durch

$$tang\, A = \frac{b}{a} = \frac{u\, u_0 \sin z}{g\, r} \tag{3}$$

und

$$e = sec\, A.$$

Die in Folge der Erdanziehung stattgefundene Verschiebung des Radianten ist $qMT = \eta$. Die Aufgabe ist eine rein geometrische: Für einen durch seine Entfernung $r$ vom Brennpunkt $O$ gegebenen Punkt einer Hyperbel den Winkel $\eta$ zwischen der Tangente und Asymptote zu bestimmen. Macht man $DO' = DO$, so ist $O'$ der zweite Brennpunkt; zieht man $OC$ und $O'C'$ senkrecht zu $QD$, so ist

$$CD = C'D = OD \cos A = a\, e \cos A = a,$$

daher $CC' = 2a$. Verbindet man $M$ mit dem zweiten Brennpunkte $O'$, so ist $MO' = r + 2a$.

Da die Tangente den Winkel zwischen den Leitstrahlen halbirt, so ist

$$\sphericalangle O'Mt = tMO = TMZ = z,$$
$$\sphericalangle tMm = TMq = \eta$$

folglich $\sphericalangle O'Mc = z - \eta$; $OMm = z + \eta$, und man erhält:

$$Mc = mc + Mm$$
$$O'M \cos O'Mc = CC' + OM \cos OMm$$
$$(r + 2a) \cos (z - \eta) = 2a + r \cos (z + \eta) \tag{4}$$

aus welcher Gleichung sich $\eta$ bestimmt. Setzt man für $a$ seinen Werth aus (1) ein, und dividirt durch $r$, so folgt

$$\left(1 + \frac{2gr}{u_0^2}\right) \cos (z - \eta) = \frac{2gr}{u_0^2} + \cos (z + \eta)$$

oder da $2gr = u^2 - u_0^2$ ist, so wird

$$u^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}(z - \eta) = u_0^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}(z + \eta)$$
$$u \sin \tfrac{1}{2}(z - \eta) = \pm\, u_0 \sin \tfrac{1}{2}(z + \eta)$$

demnach:

$$tang\, \tfrac{1}{2}\eta = \frac{u \mp u_0}{u \pm u_0}\, tang\, \tfrac{1}{2} z.$$

Da nun $\eta$ immer von der Ordnung der durch die Anziehung bewirkten Aenderung in der Geschwindigkeit, also von der Ordnung $u - u_0$ ist, so müssen die oberen Zeichen gewählt werden, und es ist

$$tang\, \tfrac{1}{2}\eta = \frac{u - u_0}{u + u_0}\, tang\, \tfrac{1}{2} z. \tag{5}$$

Wird für den Fall, dass die Sternschnuppe in horizontaler Richtung zur Erde gelangt ($z = 90°$) die Ablenkung mit $\Phi$ bezeichnet, so ist

$$tang\, \tfrac{1}{2}\Phi = \frac{u - u_0}{u + u_0} \tag{6}$$

$$tang\, \tfrac{1}{2}\eta = tang\, \tfrac{1}{2}\Phi\, tang\, \tfrac{1}{2} z. \tag{6a}$$

Die Werthe von $\Phi$ sind in der Tabelle pag. 168 mit dem Argumente $u_0$ eingetragen.

$\Phi$ wird am grössten, wenn $u - u_0$ am grössten ist, und nimmt mit $u - u_0$ ab; $u - u_0$ ist am grössten im Antiapex, am kleinsten im Apex, daher wird die Zenithattraction am stärksten im Antiapex. Die Zenithattraction wächst vom Apex an langsam bis etwa 120°, wo sie ihren mittleren Werth erreicht, und

von hier aus ziemlich rasch bis zum Antiapex, wo sie im Horizonte ungefähr 17° beträgt.

Die Zenithattraction beeinflusst aber auch die scheinbare Elongation des Radianten; strenge genommen würde man also aus dem scheinbaren Radianten seine Elongation vom Apex, mit dieser die Zenithattraction zu bestimmen haben; dadurch erhält man die corrigirte scheinbare Elongation vom Apex, mit welcher man erst die wahre Elongation vom Apex und damit den wahren Radianten bestimmen muss. Zu diesem Zwecke wird die Tafel auf pag. 168 stets ausreichend sein, da es genügt, den Radianten auf ganze Bogenminuten genau zu erhalten. Dabei ist zu beachten, das $\Phi$ mit dem Argumente $\psi$ (scheinbare Elongation vom Apex) zu entnehmen ist, $z$ hingegen die Entfernung des wahren Radianten. Die Berücksichtigung der Zenithattraction auf die Coordinaten des Radianten kann daher so erfolgen, dass man aus seiner Länge und Breite oder direkt Rectascension und Deklination Azimuth und Zenithdistanz ermittelt, letztere um $\eta$ vermehrt, und mit der corrigirten Zenithdistanz rückwärts Rectascension und Deklination bestimmt. Man kann jedoch diese zweimalige Coordinatentransformation umgehen, wenn man sich, was meist ausreicht, gestattet, $\eta$ als eine differentielle Aenderung anzusehen; man hat dann, wenn $p$ der parallactische Winkel ist:

$$\Delta\mathfrak{A} = -\frac{\sin p}{\cos\mathfrak{D}}\eta; \qquad \Delta\mathfrak{D} = -\cos p\cdot\eta.$$

Man erhält für die geographische Breite $B$ und Sternzeit $\theta$ der Beobachtung gleichzeitig $z$ und $p$ aus den Formeln:

$$\sin z \sin p = \cos B \sin(\theta - \mathfrak{A})$$
$$\sin z \cos p = \cos\mathfrak{D} \sin B - \sin\mathfrak{D} \cos B \cos(\theta - \mathfrak{A}).$$

Hier wird rechts in erster Näherung $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{D}'$ eingesetzt, damit $z$, $p$ bestimmt, ferner $\psi$ aus

$$\cos\psi = \cos\mathfrak{B}' \cos(\mathfrak{L}' - l).$$

Mit $\psi$ erhält man aus der Tafel pag. 167, 168: $\Phi$, damit $\eta$, ferner $\Delta\mathfrak{A}$, $\Delta\mathfrak{D}$, welche an $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{D}'$ angebracht werden. Diese dienen zur Bestimmung der Coordinaten des wahren Radianten (vergl. pag. 165), welche, wenn nöthig, zur Wiederholung der Rechnung für $z$ und $p$ verwandt werden.

Bei dieser Rechnung ist nun allerdings die Wirkung des Luftwiderstandes nicht berücksichtigt: Die Rechnung kann aber auch nur auf Sternschnuppen angewendet werden, deren scheinbare Bahnen nahe grösste Kreise sind, und wenn dieses der Fall war, so ist immer anzunehmen, dass die Wirkung des Luftwiderstandes auf die Form der Bahn noch nicht sehr bedeutend war. Hier kann übrigens das bereits früher über die Wirkung der Erdanziehung erwähnte aus den Zahlen selbst ersehen werden: Die Anziehung der Erde wird nur bedeutend in der Nähe des Antiapex, wo die relative Geschwindigkeit bedeutend kleiner, und demnach auch der Luftwiderstand geringer ist. Stark gekrümmte Bahnen werden daher auch meist in der Nähe des Apex vorkommen; bei solchen Bahnen ist aber an eine Bestimmung des Radianten überhaupt nicht zu denken, oder doch wenigstens nur aus demjenigen Stücke im Anfange der Bahn, welches ein grösster Kreis ist.

VI. Sternschnuppenschwärme. Die durchschnittliche Zahl der von einem Beobachter per Stunde sichtbaren Meteore ist 10. Nebst der Verschiedenheit, welche in der beobachteten Dichtigkeit der Meteore zu den verschiedenen Tages- und Jahreszeiten auftritt, und welche sich aus der Bewegung der Erde erklären, muss aber noch eine zweite Ursache für das Vorkommen einer grösseren

Anzahl von Sternschnuppen zu bestimmten Zeiten vorhanden sein, zu welchen dieselbe per Stunde auf hundert und tausend steigt. Ein solcher grosser Sternschnuppenfall im Jahre 1799 lenkte die allgemeine Aufmerksamkeit auf die Sternschnuppen, und ein mit diesem im Zusammenhange stehender ebenso grossartiger, im Jahre 1833, auf die gesetzmässige Wiederkehr derartiger Erscheinungen.

Am 13. November 1831 hatte Capitän BÉRARD auf der an der französischen Küste kreuzenden Brigg »Loiret« eine bedeutende Anzahl von Sternschnuppen beobachtet; am 12. und 13. November 1832 wurden aus Frankreich, der Schweiz und den Niederlanden, besonders aber aus Russland grosse Sternschnuppenfälle gemeldet. Besonders grossartig aber entfaltete sich wieder der Sternschnuppenfall vom 13. November 1833 in Nordamerika. OLMSTED hatte über denselben die Berichte gesammelt, und im »American Journal of Sciences and Arts«, Bd. 25 (pag. 363) veröffentlicht. Die ausführlichsten Schilderungen sind von einem (nicht genannten) Beobachter in Boston, der seine Wahrnehmungen schon früher im »Boston Centinel« publicirt hatte. Er schätzte die Zahl der Sternschnuppen innerhalb eines Zeitraumes von 15 Minuten vor 6 Uhr auf 8660; die Gesammtzahl der an diesem Morgen gesehenen Sternschnuppen auf über 200000. Der Fall begann zwischen 9 und 12 Uhr Abends, war am stärksten zwischen 2 und 5 Uhr Morgens, im Maximum etwa 4 Uhr Morgens. Dieser Beobachter weist auch schon auf den Sternschnuppenfall desselben Datums vom Jahre 1799 in Cumana hin.

Der Bereich der aussergewöhnlich grossen Zahl der Sternschnuppen war aber nicht sehr ausgedehnt. Capitän PARKER am Schiffe »Junior«, das sich am Eingange des Hafens von Mexiko befand (Breite 26°, westl. Länge von Greenwich 85½°), begann zu zählen, musste es aber aufgeben; er berichtete, dass die Sternschnuppen nach allen Richtungen von einem festen Punkte auszugehen schienen, der ungefähr 45° Höhe hatte, aber während der Beobachtung 5° bis 10° zu steigen schien.

Am Schiffe »Francia«, das sich nordöstlich von den Bermudasinseln befand (in 36° Breite, 61° westl. Länge von Greenwich), waren die Meteore sehr zahlreich, aber ihre Zahl konnte leicht gezählt werden.

Am Schiffe »Douglas«, das sich in der Nähe der Mündung des Amazonenstromes befand (in 2° Breite, 41° westl. Länge) wurde bei vollständig freiem Himmel nichts besonders Auffälliges bemerkt, desgleichen am Schiffe »St. George« auf hoher See in 51¼° Breite und 20° westl. Länge. Dass die Sternschnuppen auch in Europa in grösserer Zahl beobachtet wurden, wurde schon oben erwähnt.

Aus den Berichten aller Beobachter zieht OLMSTED den bemerkenswerthen Schluss: dass die sämmtlichen Sternschnuppen aus einem Punkte des Himmels zu kommen schienen, welcher sich im Sternbild des Löwen befand[1]), und dass dieser Ausstrahlungspunkt (der Radiant) der täglichen Bewegung folgte[2]). Damit war aber eine der wichtigsten Grundlagen für die späteren Untersuchungen über die Novembermeteore und im allgemeinen über die Meteorfälle gegeben.

Dieser Radiant ist nichts anderes als der bereits früher erwähnte Radiant jeder einzelnen Sternschnuppe, der Punkt, in welchem die durch das Auge zu

---

[1]) l. c. Bd. 25, pag. 405.
[2]) l. c. Bd. 26, pag. 140.

ihrer geradlinigen Bahn gelegte Parallele die Himmelskugel trifft. Haben aber alle Sternschnuppen denselben Radianten, so kommen sie in untereinander parallelen Bahnen zur Erde: sie bilden einen **Schwarm zusammengehöriger, sich in parallelen oder wenigstens in der Nähe der Erde sehr nahe parallelen Bahnen bewegender Körper**, einen »**Sternschnuppenschwarm**«.

Der beobachtete Radiant giebt nur die Richtung der Tangente in derjenigen Bahnstrecke, welche eben beobachtet wurde (*Tt*, Fig. 268). OLMSTED nimmt jedoch[1] einen effektiven Ausstrahlungspunkt in der aus seinen Rechnungen folgenden Höhe von 2238 englischen Meilen (3600 *km*) von der Erdoberfläche an.

Es waren nun zwei Fragen zu beantworten: 1) Ist die Erscheinung des fixen Radianten im Löwen eine dem Meteorfalle vom 13. November allein angehörige Erscheinung, oder giebt es noch andere Radianten, aus welchen eine grössere Anzahl von Sternschnuppen zu kommen scheint, und 2) war das Wiedereintreten des grossen Sternschnuppenfalles 1833 am selben Datum wie 1799 eine zufällige Erscheinung, oder musste man hier eine Gesetzmässigkeit vermuten[2])?

Beide Fragen können von einander nicht getrennt werden; man fand bald, dass es thatsächlich eine grössere Anzahl von Punkten am Himmel giebt, aus welchen Sternschnuppen zu kommen scheinen, und zwar stets an bestimmten Tagen des Jahres; d. h. das Bild, welches die Sternschnuppen im Grossen und Ganzen darbieten, ist zwar so, dass aus allen Punkten des Himmels Sternschnuppen auszustrahlen scheinen, also in allen Punkten des Himmels Radianten gelegen sind, welche aber, ohne bestimmtes Gesetz vertheilt, jeden beliebigen Tag des Jahres Sternschnuppen liefern, und bei denen die Ungleichmässigkeit der Vertheilung nur eine Folge der Bewegung der Erde ist; nebst diesen Sternschnuppen, welche, vereinzelt von verschiedenen Radianten kommend, als **sporadische** bezeichnet werden, giebt es aber noch gewisse Radianten, aus denen Sternschnuppen in grosser Zahl, in ganz bestimmten Zeiten kommen, und welche Radianten von **Sternschnuppenschwärmen** oder (nach SCHIAPARELLI) **systematischen Sternschnuppen** bilden.

QUETELET machte schon 1836 auf den Radianten im Perseus aufmerksam, aus welchem am 10. August eine grosse Zahl Sternschnuppen ausstrahlt. Diese Erscheinung war übrigens schon frühzeitig bemerkt worden, wenn man auch derselben keine weitere Bedeutung — am allerwenigsten eine astronomische beilegte; ihrer wurde als der »feurigen Thränen des hl. LAURENTIUS« bereits in alten Kirchenkalendern gedacht, welche Bezeichnung sich im Volksmunde auch noch jetzt erhalten hat.

1836 und 1837 machten HUMBOLDT und HERRICK auf den bedeutenden Sternschnuppenfall am 6. Dezember aufmerksam, welcher mit einem am 6. Dezember

---

[1]) l. c., Bd. 26, pag. 144. Die Höhe ist aus den an verschiedenen Punkten beobachteten Orten des Radianten berechnet. Da diese Beobachtungen aus den Bahnen der Sternschnuppen am Himmel bestehen, aus denen erst der Radiant erschlossen werden muss, so kann der angegebene Ort für diesen selbst um mehrere Grade fehlerhaft sein.

[2]) Der Sternschnuppenfall wiederholte sich in aussergewöhnlich grossartigen Dimensionen wieder im Jahre 1866; dieses Mal aber sehr stark in Europa, während er in Amerika nur schwach war. In Greenwich zählte man um $12^h 42^m$: 70 Sternschnuppen in der Minute, um $1^h 5^m$: 118, um $1^h 20$ das Maximum von 128 Sternschnuppen in der Minute. FAYE, der in Paris beobachtete bemerkt dazu (Compt. rend. Bd. 63, pag. 849): »*Ce qui m'a le plus frappé c'est que toutes ces étoiles sauf deux divergeaient de la partie supérieure de la constellation du Lion comme en 1833.*«

1798 beobachteten coincidirte[1]). ARAGO fand einen fixen Radianten für den Sternschnuppenschwarm vom 21. April; HEIS einen solchen für den 26. Mai, und für den 1. 2. und 3. Januar; SCHMIDT für den 29. Juli.

Hieraus kann man nun zunächst schliessen, dass solche Schwärme sich im Weltraume in Bahnen bewegen, welche die Erdbahn schneiden, und zwar in Punkten, in welchen die Erde an den angegebenen Daten sich befindet. Diesen Schluss zog bereits OLMSTED 1834 aus dem Novemberphänomen. Er erwägt noch die Möglichkeit, dass die Sternschnuppen Satelliten der Erde wären; der von ihm gefundenen Entfernung des Radianten von 3600 *km* von der Erdoberfläche: d. i. nahe $r = 9970$ *km* $= 1{\cdot}565$ Erdhalbmessern entspricht aber die mittlere Bewegung in einer Secunde $\frac{k}{r^{\frac{3}{2}}} = 130''{\cdot}7$ oder eine Umlaufszeit von $9917^s = 2^h 45^m 17^s$. In diesem Falle aber müsste sich der Radiant zwischen den Gestirnen weiter bewegt haben, und zwar der obigen mittleren Bewegung entsprechend, um $130^\circ{\cdot}7$ in einer Stunde, während er nach den Beobachtungen zwischen den Gestirnen fest war. OLMSTED schliesst demnach, dass der Schwarm sich um die Sonne bewegt[2]). Die Umlaufszeit des Schwarms muss aber genau $\frac{1}{n}$ Jahre sein, da sonst der Schwarm nicht immer zur selben Zeit die Erde begegnen würde: dann aber wird die halbe grosse Axe in Einheiten der Erdbahnhalbaxe:

$$a = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \text{ also für } n = 2, 3 \ldots\ldots a = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = 0{\cdot}630, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{9}} = 0{\cdot}481 \ldots$$

Da aber das Aphel die Erdbahn erreichen muss, weil sonst die Sternschnuppen nicht zur Erde gelangen könnten und das Perihel auf der anderen Seite der Sonne liegen muss, so muss $2a$ mindestens gleich der Entfernung der Erde von der Sonne, also mindestens gleich 1 sein; die Umlaufszeit kann daher nicht $\frac{1}{3}$ Jahr sein; und daraus schliesst OLMSTED, dass die Umlaufszeit ein halbes Jahr, die halbe grosse Axe 0·630, daher die Entfernung des Perihels 0·260, also noch etwas innerhalb des Mercurperihels sein muss. Die Bahn liegt weiter so, dass die Richtung des Aphels nach dem Erdorte am 12. November, daher die Richtung des Perihels gleich der geocentrischen Länge der Sonne am 12. November, also gleich 21° Scorpion ist, und dass die Neigung der Bahn gegen die Ekliptik so ist, dass die Richtung der Tangente an die Bahn gegen den beobachteten Radiationspunkt geht, also etwa 7 bis 8°. Auch H. A. NEWTON hielt später noch an der Annahme einer kurzen Umlaufszeit, nahe ein Jahr, fest.

Gegen diese Resultate waren aber zwei Bedenken: die Erscheinung wiederholt sich nicht alle Jahre, und wenn man die hierbei gemachte Annahme festhalten wollte, müsste man für alle an bestimmten Daten periodisch wiederkehrenden Sternschnuppenschwärme genau dieselbe Umlaufszeit von einem halben Jahr oder einem Jahr annehmen. OLBERS folgert daher viel richtiger, dass der Novemberschwarm sich in einer viel länger gestreckten Ellipse mit einer Umlaufszeit von mehreren Jahren in einer Bahn um die Sonne bewegt, die die Erdbahn am 13. November schneidet. Dass durch mehrere aufeinanderfolgende Jahre Sternschnuppen beobachtet werden, die diesem Schwarm angehören, hat seinen Grund darin, dass die Sternschnuppen nicht in einem Punkte concentrirt, sondern über ein

---

[1]) Aeltere Angaben, vor 1772, finden sich für diese Schwärme nicht.

[2]) Auch ARAGO schliesst sich dieser Meinung an, und bezeichnet die Sternschnuppen als eine neue planetarische Welt: »*C'est un nouveau monde planétaire, qui commence à se révéler à nous*« (Compt. rend., Bd. I., pag. 395.)

grösseres Bahnstück vertheilt sind, so dass man »im Jahre 1834 nicht dieselben wiederkehrenden Körperchen sah, die man im Jahre 1832 und 1833 gesehen hatte[1])«. In der That kann man, wenn man die Erscheinungen 1833, 1799 mit der bereits früher von HUMBOLDT erwähnten von 1766 zusammenhalt auf eine Umlaufszeit von 33 Jahren schliessen; der Sternschnuppenfall von 1866 führt dann unmittelbar darauf, dass 1899 wieder der Punkt der stärksten Concentration die Erde treffen wird, und 1898 und 1900 noch bedeutende Sternschnuppenfälle als Vorläufer und Nachzügler zu erwarten sind.

Bei den Beobachtungen der Sternschnuppen musste aber nunmehr das Augenmerk nicht nur auf die Sternschnuppen selbst, sondern auch auf die Radiation gerichtet werden. Bei denjenigen Beobachtungen mehrerer Sternschnuppen an demselben Orte oder an verschiedenen Orten, für welche sich Radianten bestimmen liessen, wurden diese ermittelt, und alle berechneten Radianten in ein Verzeichniss eingetragen. Solche Radiantenverzeichnisse sind:

GREG: Verzeichniss von 56 Radianten in dem »Report of the British Association« für 1864 (pag. 98), nebst einer Erweiterung in der Scientific Revue für 1868.

HEIS. Verzeichniss von 84 Radianten, Astron. Nachrichten, Bd. 69 (No. 1642).

SCHIAPARELLI: Verzeichniss von 189 Radianten aus den Beobachtungen von ZEZIOLI; »Entwurf einer astron. Theorie der Sternschnuppen« 1866 (pag. 84).

SCHMIDT: Verzeichniss von 150 Radianten; in den »Astron. Beobachtungen über Sternschnuppen«, 1869.

Endlich fasste KLEIBER 1490 berechnete Radianten, welche von CORDER, DENNING, GREG, GRUBER, HEIS, KONKOLY, NEUMAYER, SCHIAPARELLI, SCHMIDT, TUPMANN, ZEZIOLI in 26049 Nächten beobachtet worden waren, in einem Radianten-Katalog zusammen.

Untersuchungen über die Vertheilung der Radianten rühren wieder von dem um die Meteorastronomie hoch verdienten SCHMIDT her. Er giebt die folgende Zusammenstellung der in seinem Kataloge vorkommenden Radianten:

| Im | Jan. | Febr. | März | April | Mai | Juni | Juli | Aug. | Sept. | Oct. | Nov. | Dec. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sicher bestimmte Rad. | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 18 | 26 | 9 | 12 | 5 | 2. |
| Genäherte Radianten | 8 | 1 | 1 | 0 | 0 | 8 | 8 | 8 | 17 | 9 | 6 | 12 |

Zwischen der Anzahl der Radianten einer Nacht, und der stündlichen Häufigkeit der Sternschnuppen findet SCHMIDT die folgende Beziehung:

für $n = 1 \quad 2 \quad 8 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7$

Radianten in einer Nacht ist die stündliche Häufigkeit der Sternschnuppen

$s = 4·7 \quad 6·7 \quad 9·9 \quad 18·8 \quad 21·0 \quad 22·0 \quad 30·8$

aus 25 825 888 185 121 51 61 Beobachtungen[2]).

Reducirt man diese für $n$ Radianten gültigen Zahlen auf einen Radianten, so folgt für

$n = 1 \quad 2 \quad 8 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7$

$\frac{s}{n} = 4·7 \quad 8·8 \quad 8·8 \quad 8·4 \quad 4·2 \quad 8·7 \quad 4·4$

im Mittel als Anzahl der von einem Radianten stündlich ausgehenden Sternschnuppen 8·9.

Noch ausgedehntere Untersuchungen über die Vertheilung der Radianten hat TILLO[3]) gestützt auf den KLEIBER'schen Radiantenkatalog, vorgenommen. Die 1490 Radianten vertheilen sich auf die einzelnen Monate folgendermaassen:

---

[1]) SCHUMACHER's Jahrbuch für 1837, pag. 60.

[2]) Astron. Nachrichten, Bd. 88, pag. 341.

[3]) Bulletin Astronomique, Bd. 5, pag. 237 und 283.

| Im | Jan. | Febr. | März | April | Mai | Juni | Juli | Aug. | Sept. | Oct. | Nov. | Dec. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Zahl d. Radianten[1] | 106 | 95 | 136 | 180 | 108 | 115 | 238 | 306 | 188 | 219 | 169 | 115 |
| „ in % | 5·4 | 4·8 | 6·9 | 9·1 | 5·5 | 5·8 | 12·0 | 15·5 | 9·6 | 11·0 | 8·6 | 5·8 |
| Zahl der Tage in % | 5·4 | 6·1 | 5·6 | 7·6 | 5·5 | 5·9 | 10·9 | 13·4 | 12·4 | 11·0 | 8·6 | 7·6 |
| Zahl d. Meteore in % | 3·4 | 2·2 | 2·1 | 6·8 | 2·6 | 2·9 | 12·1 | 38·1 | 5·1 | 8·5 | 11·3 | 4·9 |

Um die Vertheilung der Radianten auf der Himmelskugel zu untersuchen, wird diese durch Deklinationskreise und Parallelkreise von 30° zu 30° getheilt, und für jeden Monat die Zahl der Radianten untersucht, welche in eines dieser Vierecke fallen. Für das ganze Jahr wird diese Tafel:

| α = \ δ = | +90° / +60° | +60° / +30° | +30° / 0° | 0° / −30° | −30° / −60° | Zusammen | In Procenten f. alle nördl. Meteore | | In Procenten für alle Deklinationen | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0°–30 | 34 | 58 | 47 | 7 | 2 | 148 | 10·2 | | 9·6 | |
| I 30–60 | 33 | 63 | 40 | 10 | 0 | 146 | 10·3 | 29·8 | 9·8 | 28·1 |
| 60–90 | 26 | 57 | 39 | 5 | 2 | 129 | 9·3 | | 8·7 | |
| 90–120 | 20 | 34 | 33 | 4 | 2 | 93 | 6·6 | | 6·2 | |
| II 120–150 | 19 | 39 | 32 | 4 | 4 | 98 | 6·8 | 19·7 | 6·6 | 18·8 |
| 150–180 | 16 | 36 | 30 | 6 | 1 | 89 | 6·3 | | 6·0 | |
| 180–210 | 13 | 42 | 25 | 17 | 3 | 100 | 6·1 | | 6·7 | |
| III 210–240 | 21 | 50 | 34 | 10 | 3 | 118 | 8·0 | 23·0 | 7·9 | 23·0 |
| 240–270 | 35 | 36 | 46 | 17 | 4 | 138 | 8·9 | | 8·3 | |
| 270–300 | 23 | 53 | 43 | 27 | 8 | 154 | 9·4 | | 10·3 | |
| IV 300–330 | 38 | 50 | 36 | 18 | 4 | 146 | 9·4 | 27·5 | 9·8 | 29·2 |
| 330–360 | 29 | 47 | 38 | 19 | 3 | 136 | 8·7 | | 9·1 | |
| zusammen | 307 | 565 | 443 | 144 | 31 | 1490 | | | | |

Die Zahl der Nächte, in welchen während des ganzen Zeitraumes, über den sich der Catalog erstreckt, Sternschnuppen aus diesen Radianten beobachtet wurden, ist in der folgenden Tabelle eingetragen:

| α = \ δ = | +90° / +60° | +60° / +30° | +30° / 0° | 0° / −30° | −30° / −60° | zusammen | In Procenten f. alle nördl. Meteore | | In Procenten für alle Deklinationen | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0°–30 | 631 | 1227 | 992 | 210 | 60 | 3120 | 12·6 | | 12·1 | |
| I 30–60 | 417 | 1191 | 868 | 121 | 0 | 2637 | 11·2 | 33·3 | 10·4 | 31·0 |
| 60–90 | 405 | 1015 | 733 | 42 | 32 | 2227 | 9·5 | | 8·5 | |
| 90–120 | 303 | 859 | 607 | 80 | 90 | 1889 | 7·4 | | 7·0 | |
| II 120–150 | 418 | 790 | 564 | 103 | 123 | 1998 | 7·8 | 21·7 | 7·7 | 20·9 |
| 150–180 | 395 | 512 | 558 | 125 | 28 | 1618 | 6·5 | | 6·2 | |
| 180–210 | 330 | 712 | 311 | 359 | 55 | 1767 | 6·0 | | 6·8 | |
| III 210–240 | 252 | 469 | 562 | 229 | 66 | 1578 | 5·7 | 18·9 | 6·0 | 20·9 |
| 240–270 | 605 | 334 | 686 | 374 | 121 | 2120 | 7·2 | | 8·1 | |
| 270–300 | 341 | 1005 | 657 | 294 | 80 | 2377 | 8·9 | | 9·1 | |
| IV 300–330 | 572 | 783 | 632 | 178 | 103 | 2268 | 8·8 | 26·1 | 8·7 | 27·2 |
| 330–360 | 297 | 783 | 810 | 492 | 68 | 2450 | 8·4 | | 9·4 | |
| zusammen | 4966 | 9735 | 7920 | 2607 | 821 | 26049 | | | | |

[1] Die Gesammtzahl beträgt hier 1975, indem 485 in mehreren Monaten vorkommende Radianten wiederholt angeführt erscheinen.

Nach der Deklination geordnet entfallen:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Zwischen $\delta =$ | $+90°$ | $+80°$ | $+70°$ | $+60°$ | $+50°$ | $+40°$ | $+30°$ |
| In $^0/_0$: | 8·9 | 5·0 | 11·0 | 12·8 | 13·1 | 11·9 | |
| Zwischen $\delta =$ | $+30°$ | $+20°$ | $+10°$ | 0 | $-10°$ | und darunter: | |
| In $^0/_0$: | 10·8 | 11·5 | 7·4 | 5·0 | 0·7 | | |

Nach der Stellung zur Sonne vertheilen sich die Radianten folgendermaassen[1]) (in Procenten):

| | Im Helion | | Im Antiapex | | Im Anthelion | | Im Apex | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 315°–330 | 2·3 | 45°–60 | 0·7 | 135°–150 | 4·2 | 225°–240 | 9·0 |
| | 330–0 | 1·5 | 60–90 | 2·4 | 150–180 | 15·3 | 240–270 | 13·9 |
| | 0–30 | 0·9 | 90–120 | 5·2 | 180–210 | 18·5 | 270–300 | 9·9 |
| | 30–45 | 0·7 | 120–135 | 4·2 | 210–225 | 9·0 | 300–315 | 2·3 |
| Zusammen | | 5·4 | | 12·5 | | 47·0 | | 35·1 |

Es sind daher im Antiapex nur etwa der dritte Theil wie im Apex, in diesem aber etwas weniger als im Anthelion; dabei ist aber zu bedenken, dass, da der Ort des Apex von dem Orte der Sonne nur um 90° absteht, in dem Oktanten 270° bis 315° die Zahl der Radiationspunkte in dem Maasse verringert werden muss, als die Gegend naher zur Sonne rückt.

Bei der Vergleichung der von verschiedenen Beobachtern gefundenen Radianten zeigt sich, dass nebst einer grossen Zahl von sporadischen Meteoren sich auch einzelne Radianten finden, die sich innerhalb der Unsicherheit, welche der Bestimmung derselben aus den Beobachtungen zugeschrieben werden darf, als identisch ergeben, welche sich überdiess durch mehrere Nächte erhalten, welche also den Charakter der früher erwähnten Radianten im Löwen und im Perseus tragen, wenn auch das Phänomen für das blosse Auge nicht so auffällig zu Tage tritt. So fand SCHMIDT von 150 in seinem Kataloge aufgenommenen Radianten 26 identisch mit von HEIS beobachteten, 45 identisch mit GREG'schen, und 17 mit von NEUMAYER bestimmten Radianten.

Die grosse Mehrzahl der Schwärme ist nicht so sehr hervorstechend durch Zahl und Helligkeit der Sternschnuppen, als durch ihre regelmässige Wiederkehr an ganz bestimmten Tagen.

Ob es auch Sternschnuppenschwärme giebt, welche die Erdbahn nicht schneiden, kann natürlich nicht behauptet, weil nicht erwiesen werden; solche Schwärme müssten, um gesehen zu werden, wenn sie nicht in der Atmosphäre eines anderen Himmelskörpers zum Leuchten kommen, selbstleuchtend sein; wenn sie aber in der Atmosphäre eines anderen Himmelskörpers in grosser Zahl zum Leuchten kommen, so können sie bei diesem eine Erhöhung der Lichtintensität, ähnlich wie bei Lichtausbrüchen bewirken. Es ist nicht unmöglich, dass z. B. der zwei Monate nach dem Periheldurchgange erfolgte Lichtausbruch des Kometen 1888 I auf eine solche Ursache zurückzuführen ist. Für den Kometen 1884 I machte CHAPEL[2]) die Bemerkung, dass er am 13. Januar durch den Schwarm der Bieliden und am 19. Januar durch den Schwarm vom 6. bis 13. December gegangen sei.

Ueber die Beobachtung eines thatsächlich teleskopischen Meteorschwarms berichtet SCHMIDT in seinen »Resultaten« (pag. 173). Während der Tagesbeob-

[1]) Die Zahlen zwischen 30° und 60°, zwischen 120° und 150° sind hier halbirt, um die Quadranten gemäss der Stellung zur Sonne besser zu trennen.

[2]) Compt. rend., Bd. 98, pag. 591.

achtungen des Polarsternes am 16. Mai, sah er im Fernrohre einen Strom von feinen Lichtpunkten in ausserordentlich grosser Menge, die das Fadennetz unter einem Winkel von 40° durchschnitten, und aus dem HEIS'schen Nordpolradianten $\alpha = 358°$, $\delta = +85°$ zu kommen schienen. SCHMIDT hält diese Lichtpunkte für einen Meteorstrom.

Von grossen Sternschnuppenschwärmen sind in erster Linie die 4 folgenden zu erwähnen, wobei das Datum: die »Fallzeit« vorangesetzt ist:

1) April 18. 19. 20. Radiant: $\alpha = 267°$; $\delta = +33°$, in der Nähe des hellen Sterns Wega in der Leier; der Schwarm wird aus diesem Grunde auch die Lyraiden genannt.

2) August 10. 11. 12. Radiant: $\alpha = 45°$, $\delta = +57°$ in der Nähe des Algol im Sternbild des Perseus, daher auch Perseiden (im Volksmunde die Thränen des hl. LAURENTIUS) genannt. Bei diesem Schwarm ist jedoch zu bemerken, dass hier weniger von einem Radianten, als von einer Radiationsgegend gesprochen werden muss, welche sich nördlich und östlich von dem Algol hin erstreckt. Nebst dem erwähnten Hauptradianten sieht man zur selben Zeit stets noch eine grössere Anzahl anderer Radianten in der Umgebung thätig[1]); hierzu kommt, dass auch die Fallzeit sich bedeutend länger erstreckt, als bei anderen Strömen; zwischen 2. und 12. August sieht man unausgesetzt eine auffallend grosse, wenn auch nicht so übermässige Anzahl von Sternschnuppen; selbst schon von Ende Juli angefangen kann man, und zwar aus derselben Radiationsgegend, eine erhöhte Anzahl von Sternschnuppen beobachten, welche jedoch von SCHMIDT als ein besonderer, nicht zu den Perseiden gehöriger Schwarm angesehen werden.

COULVIER-GRAVIER glaubt bemerkt zu haben, dass der Augustschwarm von Jahr zu Jahr an Intensität abnimmt; QUETELET führt, um dieses zu untersuchen, die Mittelwerthe für die Anzahl der beobachteten Sternschnuppen zwischen 1837 und 1853 an, und hält aus denselben diese Behauptung für bestätigt. Zieht man aus den Beobachtungen an verschiedenen Stationen das Mittel, so findet man:

| August | 8. | 9. | 10. | 11. | 12. | Zahl der Beobachtungsorte |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1837 | — | — | 65·5 | — | — | 2 |
| 1838 | — | — | — | 58·0 | — | 1 |
| 1839 | — | 28·8 | 54·1 | — | — | 1, 2 |
| 1840 | — | 148·7 | 52·0 | — | — | 1, 1 |
| 1841 | — | 37·0 | 68·0 | — | — | 1 |
| 1842 | 77·4 | 68·5 | 124·7 | — | — | 1, 8, 6 |
| 1845 | — | 64·0 | — | — | — | 1 |
| 1846 | — | — | 27·6 | — | — | 1 |
| 1847 | — | — | 48·0 | 111·8 | 66·7 | 1, 1, 1 |
| 1849 | — | 82·0 | 50·8 | 38·0 | — | 1, 1, 1 |
| 1850 | — | 80·0 | 80·2 | 55·5 | 82·0 | 1, 5, 8, 1, |
| 1853 | — | 24·4 | 69·7 | 24·2 | — | 1, 2, 1 |

Aus diesen Zahlen scheint jedoch eine Verminderung der Intensität nicht hervorzugehen; allerdings scheint nicht jedes Jahr dieselbe Intensität zu herrschen, aber eher eine Andeutung von Stellen stärkerer Verdichtung aufzutreten, wenn sich auch eine Gesetzmässigkeit nicht verräth.

[1]) Man gebraucht das Wort »die Thätigkeit« eines Radianten für die Erscheinung, dass von ihm Sternschnuppen zu kommen scheinen.

3) November 13. 14. 15. Radiant: $\alpha = 149°$, $\delta = +21°$ in der Nähe des Regulus im Sternbilde des Löwen, daher Leoniden genannt. Der zuerst bekannte und reichste Sternschnuppenschwarm.

4) November 27. Radiant: $\alpha = 24°$, $\delta = +44°$. Im Sternbilde der Andromeda, daher Andromediden und aus einem später ersichtlichen Grunde auch Bieliden genannt.

Andere bemerkenswerthe Sternschnuppenfälle finden statt:

am 2. 3. Januar; Radiant im Hercules
„ 19. 20. Februar; Radiant im Hercules
„ 12.—15. April; Radiant in der Leier
„ 25.—31. Juli; Radiant im Schwan
am 16.—24. October; Radiant im Orion (Orioniden)
„ 8.—12. December; Radiant in den Zwillingen (Geminiden).

Ueber die mittlere Helligkeit der einzelnen Ströme giebt SCHMIDT[1]) die folgenden Daten:

für den Strom vom

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1.— 5. Januar | $H =$ 4·14 aus 18 Beobachtungen | | |
| 19. 20. Februar | 4·80 „ 44 | „ | |
| 20. 21. April | 3·71 „ 13 | „ | (meist Lyraiden) |
| 25.—31. Juli | 4·22 „ 84 | „ | (Vorläufer der Perseiden) |
| 7.—13. August | 3·90 „ 75 | „ | (meist Perseiden) |
| 17.—24. October | 3·48 „ 49 | „ | |
| 12.—13. November | 3·81 „ 12 | „ | (meist Leoniden) |
| 11.—12. December | 3·90 „ 14 | „ | |

Ein besonderer Unterschied der Helligkeit gegen die Helligkeit der sporadischen Meteore in den einzelnen Monaten ist dabei nur für die Lyraiden, den Orionstrom und die Leoniden, welche etwa um eine halbe Grössenklasse heller sind. Auch die Perseiden sind durchschnittlich nicht heller wie die sporadischen Juli- und August-Meteore.

NEWTON hat im Jahre 1863[2]) aus den älteren Erscheinungen diejenigen herausgesucht, welche der Zeit nach mit diesen Schwärmen identisch sind, indem er die Zeitangaben mittels der Länge des siderischen Jahres auf den GREGORIANIschen Kalender und die Epoche 1850 reducirte. Er findet die folgenden Angaben von bedeutenden Sternschnuppenfällen als zusammengehörig:

1) Die Lyraiden: 687 und 15 v. Chr. Geb., dann n. Chr. Geb.: 582, 1093, 1094, 1095, 1096, 1122, 1123, 1803 ziemlich genau coincidirend zwischen April 19 und 21.

2) Die Perseiden: n. Chr. Geb.: 830, 833, 835, 841, 924, 925, 926, 933, 1243, 1451 ziemlich genau zwischen August 8 und 10 fallend; nur 933 giebt die Rechnung August 6—11; ausserdem noch in der Nähe die folgenden vier Einzelangaben: nach Chr. Geb.: 36 Juli 21, 784 Juli 29, 714 August 3, und 865 August 19. Hier kann noch von einer Ausdehnung der Radiation über mehrere Tage in der jetzt beobachteten Art nicht gesprochen werden.

3) Die Leoniden: n. Chr. Geb.: 585, 902, 1582, 1698, 1799, 1833, November 11—13.

4) Für die Bieliden findet sich keine ältere Angabe.

NEWTON reducirt auch die übrigen Sternschnuppen aus QUETELET's Katalog und findet die folgenden Resultate:

---

1) Astr. Nachrichten, Bd. 88, pag. 348.

2) American Journal of Science and Arts, II. Serie, Bd. 36.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Januar 5: 1118/9[1]) | März 28: 861 | Mai 30: 965 | Novemb. 3: 1101 |
| „ 14: 848/9 | „ 31: 842 | Juli 9—11: 1022 | „ 4: 855 |
| „ 16: 599/600 | April 12: 839 | Sept. 7: 1037 | „ 4: 1202 |
| „ 18, 20: 765 | „ 14: 1108 | „ 7: 1063 | „ 5: 856 |
| „ 20: 745 | „ 16: 840 | „ 18: 532 | „ 6: 1366 |
| Februar 9: 308 | „ 16: 1000 | „ 28: 1012 | „ 7: 1533 |
| „ 19: 918 | „ 24: 538[2]) | Octob. 3: 945 | „ 14: 979 |
| „ 19: 919 | „ 28: 1009 | „ 13: 585 | „ 18: 1058 |
| „ 20: 913 | „ 29: 401 | „ 16: 1743 | „ 20: 970 |
| „ 29: 1106 | „ 29: 927 | „ 16: 1798 | Decemb. 2: 899 |
| März 2: 36 | „ 31: 839 | „ 17: 1436 | „ 11: 1571 |
| „ 3: 1584 | „ 31: 934 | „ 18: 288 | „ 12: 930 |
| „ 4: 937 | Mai 12: 1158 | „ 19: 1439 | „ 13: 901 |
| „ 16: 807 | „ 19: 842 | „ 31: 931 | „ 16: 848 |
| „ 19: 842 | „ 24: 954 | „ 31: 934 | „ 17: 1565 |
| | „ 26: 839 | „ 31: 1002 | |

Hiernach gruppiren sich die Sternschnuppenfälle um gewisse Daten, von denen die auffälligsten durch Klammern verbunden sind. Insbesondere ist hervorzuheben, dass nebst den oben erwähnten beiden Schwärmen von 585 und 902 deren Datum (reducirt) auf den 12. bezw. 11. November fällt, sich von 855 an eine Reihe von Daten findet, die sehr wohl mit den späteren Novemberphänomenen 1582, 1698, 1799, 1833 vereinbar sind, wenn man eine successive Verspätung in der Fallzeit annimmt. NEWTON nimmt dafür einen Tag in 70 Jahren. Nun fand zwischen dem 11. November 1799 und 12. November 1833 eine Verspätung von einem Tage statt, und ebenso wieder bis zum 13. November 1866, für welche HUMBOLDT und OLBERS eine Erklärung in der Verschiebung des Knotens der Bahn gaben. Durch die Störungen, welche die Planeten auf die übrigen sich um die Sonne bewegenden Himmelskörper ausüben, wird nämlich die Bahnlage geändert. Hierfür wurden bereits in der »allgemeinen Einleitung in die Astronomie« Formeln entwickelt (Formel 8, pag. 110), welche auch hier angewendet werden können, wenn man nur unter ☾, ☉, $D$ bezw. die Länge des gestörten, des störenden Himmelskörpers, und die Elongation der beiden versteht. Das seculare Glied ist übrigens von diesen Grössen frei, und daher von dem Orte des Himmelskörpers in der Bahn unabhängig. Dabei ist $\omega = d☊$ das Differential der Störung in der Knotenlänge, $\alpha$ das Differential der Bewegung des gestörten Körpers in Länge. Es ist aber zu beachten, dass diese beiden Grössen im entgegengesetzten Sinne zu nehmen sind: $\alpha$ im Sinne der directen Bewegung, $\omega$ im Sinne der retrograden Bewegung (wie aus Fig. 40 pag. 108 folgt)[3]). Ist daher die Bewegung des gestörten Körpers direct, so ist die Secularbewegung des Knoten (das constante Glied in Formel 8) retrograd. Da nun das Verspäten der Sternschnuppen des Novemberschwarmes auf ein

[1]) 1118 December 27, reducirt auf 1850: 1119 Januar 5.

[2]) Vielleicht zu den Lyraiden gehörig.

[3]) Daran wird auch nichts geändert, wenn man den anziehenden (störenden) Körper statt in der Richtung $BS$ in der entgegengesetzten Richtung (rechts von $E$) annimmt, denn die Störung äussert sich in der Differenz der Anziehung auf den Körper $E$ und $S$; da der gestörte Körper dann weiter vom störenden Körper entfernt ist, als der Centralkörper, so wird letzterer stärker angezogen, so dass die Differenz der Anziehungen sich gleichsam in einer Abstossung, wieder im Sinne $RS$ offenbart.

Vorrücken der Knotenlinie (zu einem Orte, wo sich die Erde in einem späteren Datum befindet), deutet, so schloss schon HUMBOLDT, dass die Meteore des Novemberschwarms in ihrer Bahn retrograd sein müssen, eine Vermutung, die sich später auch bestätigte.

Die Störungen, welche die sich in elliptischen, parabolischen oder hyperbolischen Bahnen um die Sonne bewegenden Sternschnuppenschwärme erleiden, sind, solange sie sich den störenden Himmelskörpern nicht allzusehr nähern, so gross oder so klein auch die Sternschnuppen sind, ganz von derselben Art, wie die Störungen aller andern Himmelskörper. Ihre Berechnung kann auch auf dieselbe Art erfolgen, und gehört nicht hierher. Nebst diesen Störungen erleiden aber die Sternschnuppen, ebenso wie diejenigen Kometen, welche sich einem Planeten auf sehr kleine Distanzen nähern, weitaus grössere Störungen, welche aber bei den periodischen Schwärmen genau derselben Art sind, wie sie bereits bei den sporadischen Meteoren angeführt wurden: Geschwindigkeitsänderungen und Aenderungen der Radianten (Zenithattraction).

Infolge der Zenithattraction können nun aber diejenigen Sternschnuppen des Schwarms, welche bei einem Umlaufe sehr nahe bei der Erde vorbeigehen, so weit aus ihrer Bahn abgelenkt werden, dass sie ihre Umlaufszeit beträchtlich ändern[1]. So kann für den Novemberschwarm, dessen Umlaufszeit 33¼ Jahre beträgt, durch die Erdanziehung diese Umlaufszeit auf 28¾ Jahre verkürzt oder auch auf 50 Jahre verlängert werden; eine parabolische Bahn kann durch die Erdanziehung in einen elliptischen Strom verwandelt werden, für welchen die Umlaufszeiten je nach der Entfernung, bis zu welcher sich der Strom der Erde nähert, selbstverständlich verschieden sind. Nähert sich der Strom zur Entfernung $p$, so wird die Halbaxe $a$ und Umlaufszeit $T$ gegeben durch[2]:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| für | $p$ = 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Erdradien |
| wird | $a$ = 2·65 | 5·04 | 7·43 | 9·90 | 12·40 | 14·77 | 17·19 | 19·64 | 22·08 | 24·45 | Erdbahnhalbax. |
| | $T$ = 4·31 | 11·31 | 20·26 | 31·15 | 43·08 | 56·76 | 71·27 | 87·04 | 103·75 | 120·90 | Jahre. |

Dadurch werden dann diese Theile aus der Sternschnuppenwolke abgelöst, sie eilen vor oder bleiben zurück, treten theilweise auch aus dem ganzen Schwarme heraus, sodass dieser in die Länge gezogen und verbreitert wird. Im Laufe der Jahre bei wiederholten Vorübergängen muss dann durch die fortwährende Zerstreuung eine Vertheilung des Sternschnuppenschwarmes und eine Verringerung der Dichtigkeit entstehen. Diese Zerstreuung ist aber um so grösser, je grösser die Zenithattraction ist, d. h. sie ist stärker für Ströme, die aus dem Antiapex kommen, welche sich also direkt bewegen. Daher kommt es, dass der sich retrograd in geringer Neigung bewegende Strom der Leoniden (Entfernung des Radianten vom Apex etwa 14°), so wenig zerstreut wird, und daher mit so grosser Regelmässigkeit nach je 33¼ Jahren mit seinem Maximum auftritt, während die Zerstreuung des Stromes sich auf etwa 3 Jahre, d. i. ungefähr $\frac{1}{11}$ seiner Bahnlänge erstreckt. Mehr zerstreut ist der Strom der Perseiden, für welchen der Abstand des Radianten vom Apex 40° ist; dieses würde aber noch nicht hinreichen, die sonderbaren Erscheinungen der grossen räumlichen und zeitlichen

---

[1]) TWINING (American Journal of Sciences, II. Serie, Bd. 33, pag. 255) bemerkt, dass durch die Zenithattraction auch der Knoten eine retrograde Bewegung erhält, indem die Sternschnuppen schneller, also früher, d. h. an einem etwas zurückliegenden Punkte der Erdbahn, zur Erde gelangen; doch betrifft dieses natürlich nur die zur Erde oder in unmittelbarste Nähe derselben gelangenden Meteore, nicht aber den ganzen Schwarm.

[2]) SCHIAPARELLI, l. c., pag. 153.

Zerstreuung dieses Stromes zu erklären. Weniger intensiv, fast unauffällig sind die stark zerstreuten Ströme der Lyraiden (Elongation des Radianten vom Apex 57°) und der Bieliden (Elongation des Radianten vom Apex 115°). Namentlich der letztere Strom scheint in stetiger Auflösung begriffen zu sein.

Ganz ähnliche Wirkungen müssen natürlich auch die anderen Planeten hervorbringen; nur wird bei ihnen die Wirkung in dem Maasse kleiner, als die Masse und die Entfernung von der Sonne kleiner wird, d. h. je kleiner die Wirkungssphäre ist. SCHIAPARELLI giebt die folgende Tafel[1]):

| | Aequatorhalbmesser | Masse | Ströme aus dem Antiapex: Relative Geschwindigk. | Ströme aus dem Antiapex: Beschleunigte Geschwindigk. | Ströme aus dem Antiapex: Zenithattraction im Horizonte | Ströme aus dem Antiapex: $E$ | Ströme aus dem Apex: Relative Geschwindigk. | Ströme aus dem Apex: Beschleunigte Geschwindigk. | Ströme aus dem Apex: Zenithattraction im Horizonte | Ströme aus dem Apex: $E$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Mercur . | 0·390 | 0·08 | 10488 | 20129 | 1° 52′ | — | 118558 | 118671 | 0° 8′ | — |
| Venus . | 0·969 | 0·86 | 14452 | 17717 | 12 22 | 7·80 | 88081 | 88748 | 0 35 | — |
| Erde . | 1·000 | 1·00 | 12120 | 16482 | 17 20 | 11·71 | 70642 | 71520 | 0 42 | — |
| Mars . | 0·545 | 0·12 | 9818 | 11129 | 7 10 | 2·15 | 57224 | 57465 | 0 14 | — |
| Jupiter . | 11·640 | 338·00 | 5814 | 60419 | 79 56 | 20651 | 30971 | 67686 | 40 48 | 608 |
| Saturn . | 10·010 | 101·00 | 3924 | 35694 | 77 27 | 11814 | 22878 | 42212 | 33 6 | 338 |
| Uranus . | 4·790 | 17·00 | 2767 | 21221 | 75 1 | 3880 | 16129 | 26512 | 27 22 | 118 |
| Neptun . | 4·450 | 18·00 | 2227 | 22571 | 78 45 | 6349 | 12890 | 25898 | 37 5 | 187 |

Dabei ist als Einheit der Entfernung der Erdhalbmesser, als Einheit der Masse die Erdmasse gewählt; in der mit $E$ überschriebenen Colonne ist die äusserste Distanz (in Erdradien) angesetzt, bis zu welcher sich der Körper nähern muss, um eine Ablenkung von 4° im Horizonte zu erfahren.

Je kleiner die Wirkungssphäre ist, desto geringer ist die Aenderung der Geschwindigkeit, desto geringer daher auch die Zenithattraction; dieses ist bei den inneren Planeten der Fall. Für die äusseren Planeten, deren Geschwindigkeiten nur mässig sind, werden hingegen die relativen Geschwindigkeiten aus verschiedenen Theilen des Himmels nicht sehr verschieden, daher gleicht sich der Unterschied zwischen den Strömen aus dem Apex und Antiapex aus.

Bei dem Anlegen von Radiantenverzeichnissen muss man nothwendig jene Radianten zusammenziehen, welche am Himmel nur so weit von einander liegen, dass man die Unterschiede als aus Beobachtungsfehlern entstanden ansehen kann. Dabei ist jedoch zu beachten, dass der wahre Radiant fest ist, nicht aber der scheinbare, von der Erdbewegung afficirte. Es genügt, den Werth des scheinbaren Radianten aus demjenigen des wahren Radianten zu suchen, und den Einfluss einer Veränderung des Apex auf den Ort des scheinbaren Radianten zu bestimmen, um sich von dem Fortrücken des letzteren von einem Tage zum anderen zu überzeugen. Auf diesen Umstand hat schon ERMANN[2]) im Jahre 1840 hingewiesen. In den bisher festgehaltenen Bezeichnungen wird, wenn noch mit $g$ die Rotationsgeschwindigkeit der Erde am Aequator, also $g \cos B$ die Rotationsgeschwindigkeit in der Breite $B$, und $\alpha$, $\delta$ die Rectascension und Deklination des Punktes, gegen welchen die Erdrotation zu stattfindet, bedeuten:

$$v \cos \mathfrak{A} \cos \mathfrak{D} + G \cos a \cos d + g \cos B \cos \alpha \cos \delta = u_0 \cos \mathfrak{A}' \cos \mathfrak{D}'$$
$$v \sin \mathfrak{A} \cos \mathfrak{D} + G \sin a \cos d + g \cos B \sin \alpha \cos \delta = u_0 \sin \mathfrak{A}' \cos \mathfrak{D}'$$
$$v \sin \mathfrak{D} + G \sin d + g \cos B \sin \delta = u_0 \sin \mathfrak{D}'.$$

[1]) l. c., pag. 156.

[2]) Astron. Nachrichten, Bd. 17, pag. 8.

Aendern sich nun die Grössen $a$, $d$, $\alpha$, $\delta$ so werden sich auch bei constanten Werthen von $v$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}$ die Grössen $u_0$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{D}'$ ändern. Die Untersuchung wird am einfachsten, wenn man die Gleichungen auf die Ekliptik bezieht; dann ist an Stelle von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}$, $a$, $d$, $\mathfrak{A}'$ $\mathfrak{D}'$: $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{B}$, $l$, 0 (weil die Breite des Apex Null ist), $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{B}'$ zu setzen. Die Richtung der Erdrotation ist senkrecht auf den Meridian gegen die Westseite zu, und parallel zum Aequator; also die Rectascension des Apex der Erdrotation gleich der um 90° verminderten Sternzeit $\theta$, und die Declination Null, also $\alpha = \theta - 90°$, $\delta = 0$; hieraus folgt für die Länge und Breite ($\lambda$ und $\beta$)

$$\cos\beta\cos\lambda = +\sin\theta$$
$$\cos\beta\sin\lambda = -\cos\theta\cos\varepsilon$$
$$\sin\beta = +\cos\theta\sin\varepsilon$$

und damit:

$$u_0\cos\mathfrak{L}'\cos\mathfrak{B}' = v\cos\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B} + G\cos l + g\cos B\sin\theta$$
$$u_0\sin\mathfrak{L}'\cos\mathfrak{B}' = v\sin\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B} + G\sin l - g\cos B\cos\theta\cos\varepsilon$$
$$u_0\sin\mathfrak{B}' = v\sin\mathfrak{B} + g\cos B\cos\theta\sin\varepsilon.$$

Durch Differentiation dieser Gleichungen bei constanten $v$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{B}$, $G$, $g$, $\varepsilon$, $B$ erhält man:

$$\cos\mathfrak{L}'\cos\mathfrak{B}'\Delta u_0 - u_0\sin\mathfrak{L}'\cos\mathfrak{B}'\Delta\mathfrak{L}' - u_0\cos\mathfrak{L}'\sin\mathfrak{B}'\Delta\mathfrak{B}' = -G\sin l\Delta l + g\cos B\cos\theta\Delta\theta$$
$$\sin\mathfrak{L}'\cos\mathfrak{B}'\Delta u_0 + u_0\cos\mathfrak{L}'\cos\mathfrak{B}'\Delta\mathfrak{L}' - u_0\sin\mathfrak{L}'\sin\mathfrak{B}'\Delta\mathfrak{B}' = + G\cos l\Delta l + g\cos B\sin\theta\cos\varepsilon\Delta\theta$$
$$\sin\mathfrak{B}'\Delta u_0 + u_0\cos\mathfrak{B}'\Delta\mathfrak{B}' = -g\cos B\sin\theta\sin\varepsilon\Delta\theta,$$

folglich[1]):

$$u_0\cos\mathfrak{B}'\Delta\mathfrak{L}' = +G\cos(l-\mathfrak{L}')\Delta l - g\cos B[\sin\mathfrak{L}'\cos\theta - \cos\mathfrak{L}'\sin\theta\cos\varepsilon]\Delta\theta$$
$$u_0\Delta\mathfrak{B}' = +G\sin(l-\mathfrak{L}')\sin\mathfrak{B}'\Delta l - g\cos B[(\cos\mathfrak{L}'\cos\theta + \sin\mathfrak{L}'\sin\theta\cos\varepsilon)\sin\mathfrak{B}' + \sin\theta\sin\varepsilon\cos\mathfrak{B}']\Delta\theta.$$

Nun ist $g = \frac{2\rho\pi}{\omega}$, wenn $\rho$ der Erdhalbmesser, und $\omega$ die Anzahl der mittleren Zeitsecunden in einem Sterntage ist; ferner $G = \frac{2R\pi}{T\omega_1}$, wenn $R$ die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne, $T$ die Länge des Beobachtungsjahres, und $\omega_1$ die Anzahl der mittleren Zeitsecunden in einem mittleren Sonnentage also $\frac{\omega_1}{\omega} = 1{\cdot}002738$ ist; daher ist

$$\frac{g}{G} = \frac{\rho}{r}T\frac{\omega_1}{\omega}$$

und da $\frac{\rho}{r} = \sin\pi_{☉}$ ist, wobei $\pi_{☉}$ die mittlere Aequatoreal-Horizontalparallaxe der Sonne bedeutet, so wird

$$g = G\frac{\omega_1}{\omega}T\sin\pi_{☉} = 0{\cdot}0165\,G = 460\,m;$$

soll $\Delta\theta$ in Stunden ausdrückt werden, so hat man $15\,g = 0{\cdot}247\,G$ oder hinreichend genau $\frac{1}{4}G$ zu substituiren; man kann daher schreiben:

$$\cos\mathfrak{B}'\Delta\mathfrak{L}' = \frac{G}{u_0}[\cos(l-\mathfrak{L}')\Delta l - \tfrac{1}{4}\cos B\sin p\sin q\Delta\theta]$$
$$\Delta\mathfrak{B}' = \frac{G}{u_0}[\sin(l-\mathfrak{L}')\sin\mathfrak{B}'\Delta l - \tfrac{1}{4}\cos B(\cos p\sin\mathfrak{B}' + \sin\theta\sin\varepsilon\cos\mathfrak{B}')\Delta\theta]$$

$\Delta\theta$ in Stunden; $\Delta l$, $\Delta\mathfrak{L}'$, $\Delta\mathfrak{B}'$ in Graden.

---

1) Ermann erhält $\Delta\mathfrak{B}'$ von $\Delta l$ unabhängig, weil er $\Delta u_0$ vernachlässigt.

wobei $p$ und $q$ eine einfache geometrische Bedeutung haben: es ist $p$ der Winkel zwischen dem Meridian und dem Breitenkreis des scheinbaren Radianten, und $q$ die Breite des Durchschnittspunktes dieser beiden Kreise.

Da nun $\frac{G}{u_0} < 1$ ist, so wird bei einer z. B. 8stündigen Beobachtung $\cos\mathfrak{B}'\Delta\mathfrak{L}'$ und $\Delta\mathfrak{B}'$ noch nicht $\frac{1}{8}°$ sein. Man sieht übrigens hieraus auch, dass man die von $g$ abhängige Verschiebung des Radianten, die sogenannte »tägliche Aberration« desselben, ganz übergehen kann[1]). Für die Verschiebung des Radianten, welche in Folge der Aenderung des Apex eintritt, hat man daher:

$$\cos\mathfrak{B}'\Delta\mathfrak{L}' = \frac{G}{u_0}\cos(l - \mathfrak{L}')\Delta l$$

$$\Delta\mathfrak{B}' = \frac{G}{u_0}\sin(l - \mathfrak{L}')\sin\mathfrak{B}'\Delta l.$$

Da der Apex täglich um nahe 1° fortrückt, so erhält man die **tägliche Veränderung** des Radiationspunktes, indem man $\Delta l = 1°$ setzt. Man wird daher den Radianten nicht für längere Zeit als constant ansehen dürfen. Hierauf hat bereits SCHMIDT aufmerksam gemacht; doch kann man Mittelwerthe für mehrere oder einzelne Tage nur nehmen, wenn für jeden Tag eine genügende Anzahl von Bestimmungen vorliegt; da dieses jedoch bisher nicht der Fall ist, so muss man sich jetzt noch mit Mittelwerthen aus mehreren und selbst einer grösseren Reihe von Tagen begnügen. Immerhin wäre es angezeigt, die Radianten mehrerer Tage, ehe sie **zu einem Mittel vereinigt werden, auf eine gemeinschaftliche Epoche zu reduciren.**

In aller Strenge aber dürfte man dann nicht die zuletzt abgeleiteten Formeln anwenden, sondern wie dieses v. NIESSL zuerst gethan hat[2]), auf die kosmische Verschiebung des wahren Radianten Rücksicht nehmen, welcher aber erst aus der Betrachtung der Bahnen, welche die Meteorströme um die Sonne beschreiben, hervorgeht.

VII. **Bestimmung der Meteorbahnen.** Die Bestimmung der Bahn eines Meteorschwarmes unterscheidet sich wesentlich von der Bestimmung einer Planeten- oder Kometenbahn dadurch, dass man nicht drei oder mehr Positionsbestimmungen hat, sondern **nur den Radiationspunkt**, die Richtung aus

---

[1]) Denkt man sich den wahren Radianten bereits wegen der Bewegung der Erde in ihrer Bahn corrigirt (mit Ausschluss der von $g$ abhängigen Glieder), und sucht dann noch die Correction wegen $g$, so kann man $\Delta(u_0\cos\mathfrak{B}'\cos\mathfrak{L}') = g\cos\mathfrak{B}\sin\theta$, u. s. w. betrachten; man erhält dann in genau derselben Weise

$$\cos\mathfrak{B}'\Delta\mathfrak{L}' = -\frac{g}{u_0}\cos B\,[\sin\theta\sin\mathfrak{L}' + \cos\theta\cos\mathfrak{L}'\cos\varepsilon]$$

$$\Delta\mathfrak{B}' = -\frac{g}{u_0}\cos B\,[(\sin\theta\cos\mathfrak{L}' - \cos\theta\sin\mathfrak{L}'\cos\varepsilon)\sin\mathfrak{B}' - \cos\theta\sin\varepsilon\cos\mathfrak{B}'].$$

Dabei ist der Coëfficient, wenn man die Aenderung gleich in Graden erhalten will:

$$\frac{g}{u_0} = \frac{G}{u_0}\cdot\frac{g}{G}\;\frac{1}{arc\,1°} = 0°{\cdot}845\,\frac{G}{u_0}.$$

Die Formeln werden hier noch einfacher, wenn man sofort die Verschiebung in Rectascension und Declination sucht; dann ist $\varepsilon = 0$, und man hat:

$$\cos\mathfrak{D}'\Delta\mathfrak{A}' = -\frac{g}{u_0}\cos B\cos(\theta - \mathfrak{A}')$$

$$\Delta\mathfrak{D}' = -\frac{g}{u_0}\cos B\sin(\theta - \mathfrak{A}')\sin\mathfrak{D}'.$$

[2]) Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften, Bd. 83, pag. 96.

welcher die Meteore zu kommen scheinen. Ein zweites Datum ist allerdings die Beobachtungszeit; diese giebt den Ort der Erde, also den Schnittpunkt der Sternschnuppenbahn mit der Ekliptik, d. i. den Knoten, und zwar den aufsteigenden oder niedersteigenden Knoten. Die Entscheidung hierüber ist nicht schwer. Ist die Breite $\mathfrak{B}$ des Radiationspunktes positiv, so kommt der Schwarm aus der Richtung der positiven Breiten zu denen der negativen, der beobachtete Schnittpunkt mit der Ekliptik ist daher der niedersteigende Knoten, und die Richtung des aufsteigenden Knotens befindet sich in der Richtung der Sonne; es ist also die Länge des aufsteigenden Knotens gleich der Sonnenlänge $\odot$; ist hingegen die Breite $\mathfrak{B}$ des Radiationspunktes negativ, so wird die Länge des aufsteigenden Knotens $180^\circ + \odot$. Angenommen wird nun, man habe den scheinbaren Radiationspunkt direct aus den Beobachtungen abgeleitet, was ja keine Schwierigkeit hat, wenn man die Schnittpunkte der scheinbaren Bahnen einer grösseren Zahl von Sternschnuppen an der Himmelskugel in einen Globus oder eine Sternkarte einträgt. Dieses graphische Verfahren wird bei dem jetzigen Stand der Genauigkeit der Sternschnuppenbeobachtungen stets ausreichen. Aus diesem scheinbaren Radianten ist zunächst der wahre Radiant zu bestimmen. Dazu können aber die auf pag. 189 angegebenen Formeln nicht dienen, weil dieselben die Kenntniss von $v_0$, der relativen kosmischen Geschwindigkeit voraussetzen. Kennt man diese (ebenfalls aus den Beobachtungen), so hat man alle zur Berechnung nöthigen Daten. Allein man kennt nur Mittelwerthe aus vereinzelt erhaltenen Beobachtungen an verschiedenen Punkten, und gerade für die Meteorschwärme ist es zunächst unmöglich, oder wenigstens nicht leichter als für vereinzelte Meteore Bestimmungen von absoluten Höhen zu machen, da die ungewöhnlich grosse Zahl der nahe gleichzeitig erscheinenden Meteore eine Identifikation der an verschiedenen Punkten gemachten Beobachtungen erschwert. Man ist dann auf gewisse Annahmen über die wahren kosmischen Geschwindigkeiten angewiesen. Unmittelbar gegeben ist diese dort, wo die Umlaufszeit des Schwarmes bekannt ist; dieser Fall findet z. B. bei den Leoniden statt; die Umlaufszeit ist für sie 33·25 Jahre, daher die grosse Axe 10·34; hiernach wird die Geschwindigkeit in der Entfernung $r = R = 0{\cdot}9911$ (für November 13):

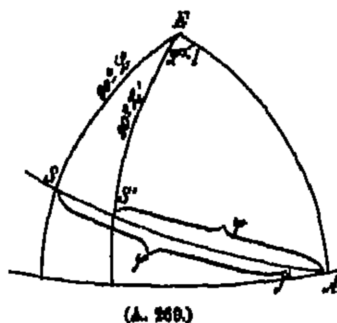
$$v = \sqrt{\frac{2}{R} - \frac{1}{a}}, \tag{1}$$

daher für die Novembermeteore ($R = 0{\cdot}9911$ für den 13. November) $v = \sqrt{1{\cdot}9212} = 1{\cdot}3861$. Ist umgekehrt aus der beobachteten relativen Geschwindigkeit $v_0$ die wahre Geschwindigkeit $v$ gerechnet, so erhält man

$$a = \frac{1}{\frac{2}{R} - v^2}. \tag{2}$$

wobei $v$ in Einheiten der Geschwindigkeit der Erdbahn auszudrücken ist, also wenn dieselbe in Kilometern gefunden wurde:

$$v = \frac{(v)\ \text{Kilometer}}{29{\cdot}6}.$$



(A. 269.)

Sei $E$ (Fig. 269) der Nordpol der Ekliptik $A$ der Apex, $S'$ der scheinbare Radiant; nach Fig. 265 ist dann $AS' = \psi$ und man findet $\psi$ und die Neigung $\gamma$ des grössten Kreises $AS'$ gegen die Ekliptik aus dem Dreiecke $AES'$, in welchem $AE = 90^\circ$, $ES' = 90^\circ - \mathfrak{B}'$, $AS' = \psi$, $\sphericalangle AES' = \mathfrak{L}' - l$, $\sphericalangle S'AE = 90^\circ - \gamma$ ist:

$$\begin{aligned} \cos\psi &= \cos\mathfrak{B}'\cos(\mathfrak{L}'-l) \\ \sin\psi\sin\gamma &= \sin\mathfrak{B}' \\ \sin\psi\cos\gamma &= \cos\mathfrak{B}'\sin(\mathfrak{L}'-l). \end{aligned} \tag{3}$$

Da $\psi < 180°$ angenommen werden kann, so wird $\sin\psi$ stets positiv zu nehmen sein.

Nun ist der wahre Radiant (vergl. Fig. 265) in der Ebene Apex — Beobachter — scheinbarer Radiant gelegen, also an der Himmelskugel der wahre Radiant $S$ in dem grössten Kreise $AS'$; sei derselbe $S$, so ist $AS = \varphi$ und

$$\sin(\varphi-\psi) = \frac{G}{v}\sin\psi. \tag{4}$$

In dieser Formel ist jedoch, wenn die Excentricität der Erdbahn nicht vernachlässigt wird, $G$ die wahre Geschwindigkeit der Erde, in Einheiten der mittleren Geschwindigkeit, also

$$G = \sqrt{\frac{2}{R}-1}$$

oder ausreichend genau mit Vernachlässigung der zweiten Potenzen der Excentricitäten[1])

$$G = \frac{1}{R}. \tag{4a}$$

Dann folgt aus dem Dreiecke $ESA$, in welchem $EA = 90°$, $AS = \varphi$, $ES = 90° - \mathfrak{B}$, $SEA = \mathfrak{L} - l$ ist:

$$\begin{aligned} \cos\mathfrak{B}\sin(\mathfrak{L}-l) &= \sin\varphi\cos\gamma \\ \cos\mathfrak{B}\cos(\mathfrak{L}-l) &= \cos\varphi \\ \sin\mathfrak{B} &= \sin\varphi\sin\gamma. \end{aligned} \tag{5}$$

Dann sind die Componenten der wahren Geschwindigkeit $v$ nach den drei Axen, von denen die $X$-Axe nach dem Frühlingspunkte gerichtet ist:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -v\cos\mathfrak{B}\cos\mathfrak{L} \\ \frac{dy}{dt} &= -v\cos\mathfrak{B}\sin\mathfrak{L} \\ \frac{dz}{dt} &= -v\sin\mathfrak{B}. \end{aligned} \tag{6}$$

Die Coordinaten der Sternschnuppen zur Zeit der Beobachtung sind identisch mit den Coordinaten der Erde; sind also $\odot$, $R$, Länge und Radiusvector der Sonne, so ist

$$\begin{aligned} x &= -R\cos\odot \\ y &= -R\sin\odot \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Da nun (vergl. d. Art. »M. d. H.«)

$$\begin{aligned} x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} &= k_0\sqrt{p}\cos i \\ y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} &= k_0\sqrt{p}\sin\Omega\sin i \\ x\frac{dz}{dt} - z\frac{dx}{dt} &= k_0\sqrt{p}\cos\Omega\sin i \end{aligned}$$

---

1) Setzt man $R = 1 + \alpha$, so ist $\alpha$ von der Ordnung der Excentricität, daher

$$\sqrt{\frac{2}{R}-1} = \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{1+\alpha} = \frac{1}{R}.$$

ist, wobei $p$ der Parameter der Bahn, ☊, $i$ Knoten und Neigung derselben, und $k_0$, da man es mit einer heliocentrischen Bahn zu thun hat, die Constante des Sonnensystems ist. Wählt man aber für $v$ als Einheit die mittlere Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn, so ist $k_0 = 1$, daher

$$\sqrt{p}\cos i = R v \cos \mathfrak{B} \sin(\mathfrak{L} - \odot)$$
$$\sqrt{p}\sin ☊ \sin i = R v \sin \mathfrak{B} \sin \odot$$
$$\sqrt{p}\cos ☊ \sin i = R v \sin \mathfrak{B} \cos \odot.$$

Nun ist aber, wenn der Kürze halber alle auf den Fall »$\mathfrak{B}$ positiv« bezüglichen Formeln mit $a$, alle auf den Fall »$\mathfrak{B}$ negativ« bezüglichen mit $b$ bezeichnet werden:

$$☊ = \odot \quad \text{(Ia)} \qquad ☊ = 180° + \odot \quad \text{(Ib)}.$$

Setzt man dieses in die zuletzt erhaltenen Formeln ein, so werden die letzten beiden identisch, und man erhält:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{p}\cos i = R v \cos \mathfrak{B} \sin(\mathfrak{L} - \odot)\\ \sqrt{p}\sin i = R v \sin \mathfrak{B}\end{array}\right\}\text{(IIa)} \qquad \left.\begin{array}{l}\sqrt{p}\cos i = R v \cos \mathfrak{B} \sin(\mathfrak{L} - \odot)\\ \sqrt{p}\sin i = -R v \sin \mathfrak{B}\end{array}\right\}\text{(IIb)}.$$

Hieraus werden $i$ und $p$ bekannt; da $v$ und $a$ nach (2) gleichzeitig bekannt werden, so folgt dann

$$\left.\begin{array}{lll}\text{1) für den Fall der Parabel:} & & \text{die Periheldistanz } q = \frac{p}{2}\\ \text{2)} & \text{„} & \text{der Ellipse: } \cos^2\varphi_e = \frac{p}{a},\ e = \sin\varphi_e\\ \text{3)} & \text{„} & \text{der Hyperbel: } e = 1 + \frac{p}{a}.\end{array}\right\}\text{(III)}$$

Aus der Gleichung des Kegelschnittes:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos V}$$

in welcher $V$ die wahre Anomalie bedeutet, folgt

$$\frac{dr}{dt} = \frac{k_0\, e \sin V}{\sqrt{p}}. \tag{7}$$

Es ist aber

$$r\frac{dr}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}$$

und da für den Augenblick der Beobachtung $r = R$ ist, mit Rücksicht auf (6) und (7)

$$\frac{R e \sin V}{\sqrt{p}} = R v \cos \mathfrak{B} \cos(\mathfrak{L} - \odot)$$

demnach

$$\left.\begin{array}{l}e \sin V = \sqrt{p}\, v \cos \mathfrak{B} \cos(\mathfrak{L} - \odot)\\ e \cos V = \frac{p}{R} - 1.\end{array}\right\}\text{(IV)}$$

Im Augenblicke der Beobachtung stehen aber die Sternschnuppen des Schwarmes im Knoten, es ist also $-V$ der Abstand des Perihels vom Knoten, im Falle a) vom niedersteigenden, im Falle b) vom aufsteigenden; es ist daher der Abstand des Perihels vom Knoten:

$$\omega = 180° - V \ \text{(a)}; \qquad \omega = -V \ \text{(b)}$$

und folglich die Länge des Perihels in beiden Fällen:

$$\pi = 180° - V + \odot. \tag{V}$$

Die Durchgangszeit durch das Perihel ist belanglos, da sie bei einem Schwarm für die einzelnen Sternschnuppen nicht dieselbe ist.

Beispiel: Es sei Juli 28·5: $\mathfrak{L}' = 829°\,5'$; $\mathfrak{B}' = -17°\,24'$ beobachtet. Man hat für diesen Tag (vergl. pag. 129):

$$l = 86°\,18';\quad \odot = 125°\,48';\quad \log R = 0{\cdot}0065;\quad \log G = 9{\cdot}9985.$$

In Ermangelung irgend welcher Kenntnisse über die Geschwindigkeit, wird $v = \sqrt{\frac{2}{R}}$, also eine parabolische Bewegung angenommen, also

$$\log v = 0{\cdot}1472;\quad \log \frac{G}{v} = 9{\cdot}8468.$$

Die weitere Rechnung wird:

$$\mathfrak{L}' - l = 292°\,52'$$
$$\log\cos(\mathfrak{L}' - l) = 9{\cdot}5895$$
$$\log\cos\mathfrak{B}' = 9{\cdot}9797$$
$$\log\sin(\mathfrak{L}' - l) = 9{\cdot}9644_n$$
$$\log\sin\psi\sin\gamma = 9{\cdot}4757_n$$
$$\log\sin\psi\cos\gamma = 9{\cdot}9441_n$$
$$\log\sin\psi = 9{\cdot}9679$$
$$\log\cos\psi = 9{\cdot}5692$$
$$\log\sin(\varphi - \psi) = 9{\cdot}8142$$

$$\mathfrak{L} - \odot = 160°\,31'$$
$$\log\cos(\mathfrak{L} - \odot) = 9{\cdot}9744_n$$
$$\log\cos\mathfrak{B} = 9{\cdot}9788$$
$$\log\sin(\mathfrak{L} - \odot) = 9{\cdot}5281$$
$$\log R v = 0{\cdot}1587$$
$$\log\sin\mathfrak{B} = 9{\cdot}4887_n$$
$$\log\sqrt{p}\sin i = 9{\cdot}6874$$
$$9{\cdot}8584$$
$$\log\sqrt{p}\cos i = 9{\cdot}6556$$
$$\log\sqrt{p} = 9{\cdot}7972$$
$$\log p = 9{\cdot}5914$$

$$\psi = 68°\,14'$$
$$\varphi = 108\;\;55$$
$$\log\sin\gamma = 9{\cdot}5078_n$$
$$\log\sin\varphi = 9{\cdot}9759$$
$$\log\cos\gamma = 9{\cdot}9762_n$$
$$\log\cos\mathfrak{B}\cos(\mathfrak{L} - l) = 9{\cdot}5108_n$$
$$9{\cdot}9788$$
$$\log\cos\mathfrak{B}\sin(\mathfrak{L} - l) = 9{\cdot}9521_n$$
$$\mathfrak{L} - l = 250°\;\;6'$$
$$\mathfrak{L} = 286\;\;19$$
$$\mathfrak{B} = -17\;\;44$$

$$\log\sqrt{p}\,v = 9{\cdot}9444$$
$$\log\cos\mathfrak{B}\cos(\mathfrak{L} - \odot) = 9{\cdot}9582_n$$
$$\log\frac{p}{r} = 9{\cdot}5879$$
$$Subtr = 0{\cdot}1994$$
$$\log\sin V = 9{\cdot}8976_n$$
$$\log\cos V = 9{\cdot}7878_n$$
$$V = -127°\,49'$$

$$\Omega = 805°\,48'$$
$$i = 48\;\;48$$
$$\pi = 78\;\;87$$
$$\log q = 9{\cdot}2984$$

Würde man eine Ellipse voraussetzen mit der Halbaxe gleich 5, so wäre

$$a = 5,\quad \log\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\right) = 0{\cdot}2480,\quad \log v = 0{\cdot}1240;\quad \log\frac{G}{v} = 9{\cdot}8694$$

$$\log\sin(\varphi - \psi) = 9{\cdot}8878$$
$$\varphi = 111°\,40'$$
$$\log\sin\gamma = 9{\cdot}5078_n$$
$$\log\sin\varphi = 9{\cdot}9682$$
$$\log\cos\gamma = 9{\cdot}9762_n$$
$$\log\cos\mathfrak{B}\cos(\mathfrak{L} - l) = 9{\cdot}5678_n$$
$$9{\cdot}9648$$
$$\log\cos\mathfrak{B}\sin(\mathfrak{L} - l) = 9{\cdot}9444_n$$
$$\mathfrak{L} - l = 247°\,14'$$
$$\mathfrak{L} = 288\;\;27$$
$$\mathfrak{B} = -17\;\;25$$

$$(\mathfrak{L} - \odot) = 157°\,39'$$
$$\log\cos(\mathfrak{L} - \odot) = 9{\cdot}5661_n$$
$$\log\cos\mathfrak{B} = 9{\cdot}9796$$
$$\log\sin(\mathfrak{L} - \odot) = 9{\cdot}5801$$
$$\log R v = 0{\cdot}1305$$
$$\log\sin\mathfrak{B} = 9{\cdot}4760_n$$
$$\log\sqrt{p}\sin i = 9{\cdot}6065_n$$
$$9{\cdot}8878$$
$$\log\sqrt{p}\cos i = 9{\cdot}6902$$
$$\log\sqrt{p} = 9{\cdot}8029$$
$$\log p = 9{\cdot}6058$$
$$\log\frac{p}{a} = 8{\cdot}9068$$
$$\log\cos\varphi_0 = 9{\cdot}4584$$

$$\log\sqrt{p}\,v = 9{\cdot}9269$$
$$\log\cos\mathfrak{B}\cos(\mathfrak{L} - \odot) = 9{\cdot}9454$$
$$\log\frac{p}{R} = 9{\cdot}5998$$
$$Subtr = 0{\cdot}1807$$
$$\log e\sin V = 9{\cdot}8728_n$$
$$\log e\cos V = 9{\cdot}7800_n$$
$$V = -128°\,50'$$

$$\Omega = 805°\,48'$$
$$i = 89\;\;81$$
$$\pi = 74\;\;44$$
$$\log a = 0{\cdot}6990$$
$$\log e = 9{\cdot}9817$$

Die Rechnung lässt sich jedoch noch in bequemerer Weise anordnen. Berücksichtigt man, dass $l = ⊙ + \omega - 90°$, und $\omega$ ein kleiner Winkel ist, dessen Sinus man mit dem Bogen und dessen Cosinus man mit der Einheit vertauschen kann, so erhält man aus (5):

$$+ \cos\mathfrak{B} \cos(\mathfrak{L} - ⊙) + \cos\mathfrak{B} \sin(\mathfrak{L} - ⊙) \cdot \omega = \sin\varphi \cos\gamma$$
$$- \cos\mathfrak{B} \sin(\mathfrak{L} - ⊙) + \cos\mathfrak{B} \cos(\mathfrak{L} - ⊙) \cdot \omega = \cos\varphi,$$

daher mit Rücksicht auf die Formeln pag. 165, und wenn man in den Coëfficienten von $\omega$ die ersten Näherungen einführt (die zweiten Potenzen von $\omega$ vernachlässigt):

$$v \cos\mathfrak{B} \cos(\mathfrak{L} - ⊙) = + u_0 \sin\psi \cos\gamma + \omega\,(u_0 \cos\psi - G)$$
$$v \cos\mathfrak{B} \sin(\mathfrak{L} - ⊙) = - u_0 \cos\psi + G + \omega\,(u_0 \sin\psi \cos\gamma)$$
$$v \sin\mathfrak{B} = + u_0 \sin\psi \sin\gamma.$$

Entwickelt man in ähnlicher Weise die Formeln (3) und setzt die Werthe in diese Gleichungen ein, so erhält man:

$$v \cos\mathfrak{B} \cos(\mathfrak{L} - ⊙) = u_0 \cos\mathfrak{B}' \cos(\mathfrak{L}' - ⊙) - \omega$$
$$v \cos\mathfrak{B} \sin(\mathfrak{L} - ⊙) = G + u_0 \cos\mathfrak{B}' \sin(\mathfrak{L}' - ⊙)$$
$$v \sin\mathfrak{B} = u_0 \sin\mathfrak{B}'$$

indem sich alle übrigen von der ersten Potenz von $\omega$ abhängigen Glieder wegheben. Hier ist noch die Kenntniss von $u_0$ nöthig; es ist aber:

$$\begin{aligned} u_0^2 &= G^2 + v^2 + 2Gv\cos\varphi = G^2 + v^2 + 2Gv\cos\mathfrak{B}\cos(\mathfrak{L} - l) \\ &= G^2 + v^2 - 2Gv\cos\mathfrak{B}\sin(\mathfrak{L} - ⊙ - \omega) \\ &= G^2 + v^2 - 2Gv\,[\cos\mathfrak{B}\sin(\mathfrak{L} - ⊙) - \omega\cos\mathfrak{B}\cos(\mathfrak{L} - ⊙)] \\ &= G^2 + v^2 - 2G^2 + 2u_0 G\cos\psi \end{aligned}$$

oder

$$u_0^2 - 2Gu_0\cos\psi = v^2 - G^2$$
$$u_0 = G\cos\psi \pm \sqrt{G^2\cos^2\psi + v^2 - G^2} = G\cos\psi \pm \sqrt{v^2 - G^2\sin^2\psi}.$$

Hieraus folgt, dass der Minimalwerth von $v$, welcher ein reelles $u_0$ giebt, d. h. welcher mit dem beobachteten Radiationspunkte bestehen kann, $v = G\sin\psi$ ist; eine Bemerkung, die bereits ERMAN 1840 gemacht hat. Es ist dieses jedoch nur eine rein geometrische Beziehung, welche besagt, dass in Fig. 265 $as > aa'$ sein muss; in der That lässt sich sonst in der angegebenen Elongation $\psi$ kein Punkt $s$ finden.

Ist $v > G\sin\psi$, so sind drei Fälle zu unterscheiden:

a) Ist $\sqrt{v^2 - G^2\sin^2\psi} < G\cos\psi$ und $\psi < 90°$, so giebt es zwei Lösungen für $u_0$; dieses findet statt, wenn $v^2 - G^2\sin^2\psi < G^2\cos^2\psi$ oder $v < G$ ist; es sind die beiden Strecken $E\alpha$, $E\beta$, wenn $\alpha$, $\beta$ die Schnittpunkte des aus $a$ als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $a\alpha = a\beta = v$ beschriebenen Kreisbogens mit $ES'$ sind.

b) Ist $v < G\sin\psi$ und $\cos\psi$ negativ, also $\psi > 90°$ [in Fig. 265 $ES$ die Richtung der Sternschnuppe und $\sphericalangle(S)EA = \psi$], so sind beide Lösungen für $u_0$ negativ, also, da $u_0$ eine wesentlich positive Grösse sein muss, überhaupt keine brauchbaren Lösungen: die beiden Schnittpunkte fallen in die Verlängerung der Geschwindigkeitsrichtung.

c) Ist $\sqrt{v^2 - G^2\sin^2\psi} > G\cos\psi$, also $v > G$, so kann nur das obere Zeichen genommen werden, und es giebt nur eine Lösung

$$u_0 = G\cos\psi + \sqrt{v^2 - G^2\sin^2\psi} \tag{8}$$

für $\psi < 90°$ der von $E$ entferntere Punkt $s'$ und für $\psi > 90°$ der in der Richtung des Radianten gelegene Punkt $(s')$.

Der erstere Fall entspricht einer elliptischen Bewegung, für welche die Halbaxe kleiner als die Erdbahnhalbaxe ist; da nämlich

$$v^2 = \frac{2}{R} - \frac{1}{a}; \quad G^2 = \frac{2}{R} - 1, \quad \text{also} \quad v^2 - G^2 = 1 - \frac{1}{a}$$

ist, so wird $v < G$, wenn $a < 1$ ist. ERMAN schliesst diesen Fall nicht aus und hätte daher folgerichtig für jene Falle, in denen er (für den Augustschwarm) $v = 0{\cdot}557$, $0{\cdot}774$, $0{\cdot}990$ annimmt, beide Lösungen untersuchen müssen[1]). Schliesst man nach den jetzigen Kenntnissen von der Geschwindigkeit der Meteore diesen Fall aus, so erhält man nur eine positive, brauchbare Lösung in Formel (8). Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen wird:

$$G^2 \cos^2\psi + v^2 - G^2 = \frac{\cos^2\psi}{R^2} + 1 - \frac{1}{a}.$$

Für den Fall, dass der absolute Werth von $a$ nicht sehr klein angenommen wird, was bei Sternschnuppenschwärmen stets der Fall sein wird, kann man nach Potenzen von $\frac{1}{a}$ entwickeln. Führt man $\cos\psi = \cos\mathfrak{B}' \cos(\mathfrak{L}' - l)$ ein, und setzt:

$$\frac{\cos\mathfrak{B}' \cos(\mathfrak{L}' - l)}{R} = \operatorname{cotang} s,$$

so folgt

$$u_0 = \frac{\cos\psi}{R} + \sqrt{1 + \frac{\cos^2\psi}{R^2} - \frac{1}{a}} = \operatorname{cotang} s + \sqrt{\operatorname{cosec}^2 s - \frac{1}{a}} =$$

$$= \operatorname{cotang} s + \operatorname{cosec} s \sqrt{1 - \frac{\sin^2 s}{a}}$$

$$= \operatorname{cotang} s + \operatorname{cosec} s \left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{\sin^2 s}{a} - \tfrac{1}{8}\frac{\sin^4 s}{a^2} - \tfrac{1}{16}\frac{\sin^6 s}{a^3} \ldots\right)$$

$$= \operatorname{cotang} \frac{s}{2} - \tfrac{1}{2}\frac{\sin s}{a} - \tfrac{1}{8}\frac{\sin^3 s}{a^2} - \tfrac{1}{16}\frac{\sin^5 s}{a^3} \ldots$$

Da $u_0$ positiv sein muss, so wird $s < 180°$ zu nehmen sein; also im ersten oder zweiten Quadranten, je nachdem $\operatorname{cotang} s$ positiv oder negativ ist.

Die Convergenz dieses Ausdruckes wird noch erhöht durch das Auftreten von $\sin^2 s$ im Zähler[2]). Man hat daher zu rechnen:

$$\frac{\cos\mathfrak{B}' \cos(\mathfrak{L}' - l)}{R} = \operatorname{cotang} s; \quad s < 180°$$

$$u_0 = \operatorname{cotang} s + \operatorname{cosec} s \sqrt{1 - \frac{\sin^2 s}{a}}$$

oder

$$u_0 = \operatorname{cotang}\frac{s}{2} - \frac{\sin s}{2a}\left[1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\sin^2 s}{2a}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\sin^2 s}{2a}\right)^2 + \ldots\right]$$

Ist $u_0$ direkt gegeben, so wird der Werth bei der Rechnung sofort benützt. Weiter die Formeln a) oder b) je nachdem $\mathfrak{B}'$ positiv oder negativ ist:

---

[1]) Die zweite Lösung giebt, wie die unten folgenden Formeln II zeigen, einen sehr kleinen Werth der Neigung. Hierauf machte zuerst PEIRCE in den »Transactions of the American. Philosophical Society, Bd. 8« aufmerksam.

[2]) Für $a = \infty$ erhält man hieraus den bekannten Werth für die Parabel: $u_0 = \operatorname{cotang}\frac{s}{2}$; vergl. v. OPPOLZER: Lehrbuch zur Bahnbestimmung von Planeten und Kometen I. Bd., 2. Aufl., pag. 350. Es mag bemerkt werden, dass dort in den Ausdrücken IV das Zusatzglied $\omega$ fehlt, welches nicht ohne Einfluss auf die Uebereinstimmung der Resultate für $s$ aus den Formeln III und IV bleibt.

$$\Omega = \odot \quad \text{(Ia)} \qquad \Omega = 180° + \odot \quad \text{(Ib)}$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{p}\cos i &= 1 + R u_0 \cos\mathfrak{B}' \sin(\mathfrak{L}' - \odot)\\ \sqrt{p}\sin i &= R u_0 \sin\mathfrak{B}'\end{aligned}\right\}\text{(IIa)} \quad \left.\begin{aligned}\sqrt{p}\cos i &= 1 + R u_0 \cos\mathfrak{B}' \sin(\mathfrak{L}' - \odot)\\ \sqrt{p}\sin i &= -R u_0 \sin\mathfrak{B}'\end{aligned}\right\}\text{(IIb)}$$

Für die Parabel: $q = \frac{1}{2}p$;

für die Ellipse: $\cos\varphi_e = \sqrt{\frac{p}{a}}$; $e = \sin\varphi_e$; (III)

für die Hyperbel: $e^2 = 1 + \frac{p}{a}$

$$\left.\begin{aligned}e\sin V &= \sqrt{p}\left[u_0 \cos\mathfrak{B}' \cos(\mathfrak{L}' - \odot) - \frac{\omega}{arc\, 1'}\right]\\ e\cos V &= \frac{p}{R} - 1\end{aligned}\right\}\text{(IV)}$$

$$\pi = 180° - V + \odot. \qquad \text{(V)}$$

Es soll das frühere Beispiel gerechnet werden. Es wird:

$\mathfrak{L}' - l = 292° 52'$
$\mathfrak{B}' = -17\ 24$
$\mathfrak{L}' - \odot = 208\ 17$
$\log\cos(\mathfrak{L}' - l) = 9{\cdot}5897$
$comp \log R = 9\ 9985$
$\log\cos\mathfrak{B}' = 9{\cdot}9797$
$\log\sin(\mathfrak{L}' - \odot) = 9{\cdot}5969_n$
$\log\cos(L' - \odot) = 9{\cdot}9681_n$
$\log cotang\, s = 0{\cdot}5627$
$\log s = 69° 56'$
$u_0 = cotang \frac{1}{2} s = 0{\cdot}1558$
$\log\sin\mathfrak{B}' = 9{\cdot}4757_n$
$\log u_0 R = 0{\cdot}1618$
$\log\cos\mathfrak{B}'\sin(\mathfrak{L}' - \odot) = 9{\cdot}5766_n$
$\log R u_0 \cos\mathfrak{B}'\sin(\mathfrak{L}' - \odot) = 9{\cdot}7384_n$
$Add = 9{\cdot}9172$
$\log\sqrt{p}\cos i = 9{\cdot}6565$
$9{\cdot}8584$
$\log\sqrt{p}\sin i = 9{\cdot}6375$
$\log\sqrt{p} = 9{\cdot}7972$

$\log p = 9{\cdot}5944$
$\omega = +25' = 0{\cdot}00727$
$\log\cos\mathfrak{B}'\cos(\mathfrak{L}' - \odot) = 9{\cdot}9428_n$
$\log u_0\cos\mathfrak{B}'\cos(\mathfrak{L}' - \odot) = 0{\cdot}0981_n$
$\log\omega = 7{\cdot}8615$
$Subtr = 0{\cdot}0025$
$\log u_0\cos\mathfrak{B}'\cos(\mathfrak{L}' - \odot) - \omega = 0{\cdot}1006_n$
$\log\frac{p}{R} = 9{\cdot}5879$
$Subtr = 0{\cdot}1995$
$\log\sin V = 9{\cdot}8978_n$
$\log\cos V = 9{\cdot}7874_n$
$V = -127° 48'$

$\Omega = 305° 48'$
$i = 43\ 48$
$\pi = 73\ 36$
$\log q = 9{\cdot}2934$

Für die elliptische Bewegung mit der Halbaxe $a = 5$ wird die Rechnung:

$\log\sin\frac{s}{2} = 9{\cdot}9728$
$\log\frac{1}{2a} = 9{\cdot}0000$
$\overline{8{\cdot}9728}$
$\log 1{\cdot}0480 = 0{\cdot}0204$
$\log Correkt = \overline{8{\cdot}9932}$
$\log cotang\frac{s}{2} = 0{\cdot}1558$
$Subtr = 9{\cdot}9691$
$\log u_0 = 0{\cdot}1244$

$\frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2 s}{2a}\right) = 0{\cdot}0441$
$\frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2 s}{2a}\right)^2 = \underline{0{\cdot}0039}$
$1{\cdot}0480$

$\log\sin\mathfrak{B}' = 9{\cdot}4757_n$
$\log u_0 R = 0{\cdot}1509$
$\log\cos\mathfrak{B}'\sin(\mathfrak{L}' - \odot) = 9{\cdot}5766_n$
$\log R u_0 \cos\mathfrak{B}'\sin(\mathfrak{L}' - \odot) = 9{\cdot}7075_n$
$Add = 9{\cdot}9828$
$\log\sqrt{p}\cos i = 9{\cdot}6898$
$9{\cdot}8371$
$\log\sqrt{p}\sin i = 9{\cdot}6066$
$\log\sqrt{p} = 9{\cdot}8027$
$\log p = 9{\cdot}6054$
$\log\frac{p}{a} = 8{\cdot}9064$
$\log\cos\varphi_e = 9{\cdot}4532$

$$\log u_0 = 0{\cdot}1244$$
$$\log \cos \mathfrak{B}' \cos (\mathfrak{L}' - \odot) = 9{\cdot}9428_n$$
$$\log u_0 \cos \mathfrak{B}' \cos (\mathfrak{L}' - \odot) = 0{\cdot}0672_n$$
$$\log \omega = 7{\cdot}8615$$
$$Subtr = 0{\cdot}0026$$
$$\log [u_0 \cos \mathfrak{B}' \cos (\mathfrak{L}' - \odot) - \omega] = 0{\cdot}0698_n$$
$$\log \frac{p}{R} = 9{\cdot}5989$$

| | |
|---|---|
| $Subtr = 0{\cdot}1818$ | $\Omega = 805^\circ\ 48'$ |
| $\log e \sin V = 9{\cdot}8727_n$ | $i = 89\ \ 88$ |
| $9{\cdot}8909$ | $\pi = 74\ \ 44$ |
| $\log e \cos V = 9{\cdot}7802_n$ | $\log a = 0{\cdot}0990$ |
| $V = -128^\circ\ 56'$ | $\log e = 9{\cdot}9818$ |

Wären die Gleichungen II und IV von einander unabhängig, so würden sich hieraus, wenn man für $u_0$ seinen Werth substituirt, und dann die Gleichungen II quadrirt und addirt und ebenso die Gleichungen IV, zwei Gleichungen zwischen $p$, $e$, $a$ ergeben, oder da $p = a\,(1 - e^2)$ ist, zwei Gleichungen zwischen $e$ und $a$; so dass diese aus dem gegebenen Radianten bestimmt werden könnten. Dieses kann aber nicht sein, da ja die Axe nur von der Grösse der Geschwindigkeit, nicht aber von der Richtung abhängig ist. Hieraus folgt, dass diese vier Gleichungen nicht von einander unabhängig sind; in der That lässt sich dies auch direkt zeigen. Geht man zu diesem Zwecke von den Gleichungen auf pag. 193 aus, so erhält man:

$$p = R^2 v^2 [\cos^2 \mathfrak{B} \sin^2 (\mathfrak{L} - \odot) + \sin^2 \mathfrak{B}]$$
$$e^2 = p\, v^2 \cos^2 \mathfrak{B} \cos^2 (\mathfrak{L} - \odot) + \left(\frac{p}{R} - 1\right)^2.$$

Substituirt man hier

$$v^2 = \frac{2}{R} - \frac{1}{a}, \quad e^2 = 1 - \frac{p}{a}$$

und setzt Kürze halber

$$\cos^2 \mathfrak{B} \sin^2 (\mathfrak{L} - \odot) + \sin^2 \mathfrak{B} = m; \quad \cos^2 \mathfrak{B} \cos^2 (\mathfrak{L} - \odot) = n$$

so folgt:

$$p = R^2 \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\right) m$$
$$1 - \frac{p}{a} = p \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\right) n + \left(\frac{p}{R} - 1\right)^2$$

Setzt man weiter $x = \frac{R}{a}$, so folgt:

$$\frac{p}{R} = (2 - x)\, m$$
$$1 - \frac{p}{R}\, x = \frac{p}{R}\,(2 - x)\, n + \left(\frac{p}{R} - 1\right)^2.$$

Eliminirt man $\frac{p}{R}$, so erhält man die Gleichung

$$1 - (2 - x)\, m\, x = (2 - x)^2\, m\, n + [(2 - x)\, m - 1]^2$$

oder

$$(2 - x)\, [(2 - x)\, m\, (m + n) - 2\, m + m\, x] = 0,$$

welche Gleichung, da $m + n = 1$ ist, eine Identität ergiebt.

Die gefundenen Formeln reichen aus, um die umgekehrte Aufgabe zu lösen: Aus den gegebenen Elementen eines Sternschnuppenschwarmes seinen Radiationspunkt zu bestimmen.

Als Elemente können angenommen werden: $\Omega$, $i$, $\pi$, $p$, $e$; für die Parabel ist $e = 1$, $p = 2q$; für die Ellipse ist $p = a(1 - e^2)$ und für die Hyperbel $p = a(e^2 - 1)$; man kann daher aus zwei dieser drei Grössen die dritte leicht finden. Nun muss

$$\odot = \Omega \text{ (Ia)} \qquad \text{oder} \qquad \odot = 180° + \Omega \text{ (Ib)}$$

sein. Mit diesen Sonnenlängen erhält man dann

$$V = 180° + \odot - \pi$$

und aus den Ephemeriden den zur Sonnenlänge $\odot$ gehörigen Radiusvector $R$.

Zur wahren Anomalie $V$ gehören nun zwei Radienvectoren $r$, je nachdem man die Sonnenlänge aus (Ia) oder (Ib) verwendet; es ist

$$r = \frac{p}{1 + e\cos V}.$$

Soll nun der Sternschnuppenschwarm die Erde schneiden, so muss $r = R$ sein; der zweite Werth wird verworfen; wird $r = R$ für die Sonnenlänge aus Ia, so ist der Sternschnuppenschwarm im niedersteigenden Knoten beobachtet; wenn für Ib, so ist die Beobachtung im aufsteigenden Knoten. Dann folgt weiter:

$$\left.\begin{aligned} u_0 \cos\mathfrak{B}' \cos(\mathfrak{L}' - \odot) &= \frac{e\sin V}{\sqrt{p}} + \frac{\omega}{arc\,1'} \\ u_0 \cos\mathfrak{B}' \sin(\mathfrak{L}' - \odot) &= \frac{\sqrt{p}\cos i - 1}{R} \\ u_0 \sin\mathfrak{B}' &= \frac{\sqrt{p}\sin i}{R} \end{aligned}\right\} \quad \text{(IIIa)}$$

$$\left.\begin{aligned} u_0 \cos\mathfrak{B}' \cos(\mathfrak{L}' - \odot) &= \frac{e\sin V}{\sqrt{p}} + \frac{\omega}{arc\,1'} \\ u_0 \cos\mathfrak{B}' \sin(\mathfrak{L}' - \odot) &= \frac{\sqrt{p}\cos i - 1}{R} \\ u_0 \sin\mathfrak{B}' &= -\frac{\sqrt{p}\sin i}{R}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(IIIb)}$$

Beispiel: Es sei
$\Omega = 245° 58'$
$i = 12\ 33$
$\pi = 108\ 58$
$\log p = 0{\cdot}1794$
$\log e = 9{\cdot}8735$

| | | |
|---|---|---|
| Es ist zu untersuchen: | $\odot = 245° 58'$ | und $\odot = 65° 58'$ |
| Hierfür wird | $V = 316\ 55$ | $136\ 55$ |
| | $\log r = 9{\cdot}9936$ | $0{\cdot}4940$; |

es ist daher der zweite Werth zu verwerfen; die Erde wird vom Schwarm in seinem niedersteigenden Knoten getroffen, und zwar am 28. November, zu welcher Zeit die Sonnenlänge den angegebenen Werth hat; für dieses Datum ist $\log R = 9{\cdot}9958$ und $\omega = +46{\cdot}9' = 0{\cdot}0136$; die weitere Rechnung wird:

| | |
|---|---|
| $\log\sin V = 9{\cdot}8685_n$ | $\log\cos i = 9.9895$ |
| $\log e\sin V = 9{\cdot}7420_n$ | $\log\sqrt{p} = 0{\cdot}0897$ |
| $\log\sqrt{p} = 0{\cdot}0897$ | $\log\sin i = 9{\cdot}3370$ |
| $\log\frac{e\sin V}{\sqrt{p}} = 9{\cdot}6523_n$ | $\log\sqrt{p}\cos i = 0{\cdot}0792$ |
| | $\log(\sqrt{p}\cos i - 1) = 9{\cdot}3011$ |
| $\log\omega = 8{\cdot}1335$ | $\log R = 9{\cdot}9958$ |
| $Add = 9{\cdot}9866$ | $\log\sqrt{p}\sin i = 9{\cdot}4267$ |

$$\begin{aligned}
\log u_0 \cos\mathfrak{B}' \cos(\mathfrak{L}' - \odot) &= 9{\cdot}6889_n \\
& \phantom{=}\; 9{\cdot}9577 \\
\log u_0 \cos\mathfrak{B}' \sin(\mathfrak{L}' - \odot) &= 9{\cdot}3058 \\
\log u_0 \cos\mathfrak{B}' &= 9{\cdot}6812 \\
& \phantom{=}\; 9{\cdot}9414 \\
\log u_0 \sin\mathfrak{B}' &= 9{\cdot}4309 \\
(\mathfrak{L}' - \odot) &= 155^\circ\, 7' \\
\mathfrak{L}' &= \phantom{+}41\;\; 0 \qquad \text{oder} \quad \mathfrak{A}' = \phantom{+}26^\circ 37' \\
\mathfrak{B}' &= +\,29\;20 \qquad \phantom{\text{oder}} \quad \mathfrak{D}' = +42\;\, 37 \\
\log u_0 &= 9{\cdot}7408
\end{aligned}$$

Hier wäre noch die Zenithattraction zu berücksichtigen; man erhält mit dem Argumente $u_0 = 0{\cdot}5506$ aus der Tafel pag. 168: $\Phi = 10^\circ\, 59{\cdot}7'$; die Berechnung der Veränderung des scheinbaren Radianten erfordert aber die Kenntniss der Zenithdistanz, und kann daher nur von Fall zu Fall durchgeführt werden.

Die scheinbare Elongation des Radianten vom Apex ist gegeben durch $\cos\psi = \cos\mathfrak{B}' \cos(\mathfrak{L}' - \odot)$ und ergiebt sich $\psi = 112^\circ\, 14'$; damit erhält man für die wahre Elongation und wahre Geschwindigkeit nach den Formeln pag. 169: $\varphi = 157^\circ\, 18'$; $\log v = 0{\cdot}1204$; man erhält direkt mit dem Werthe $\log a = 0{\cdot}5476$ die Geschwindigkeit $v = \sqrt{\frac{2}{R} - \frac{1}{a}}$; $\log v = 0{\cdot}1198$ in genügender Uebereinstimmung.

VIII. **Stellare Schwärme.** Für die Berechnung der Sternschnuppenschwärme legt man, sofern nicht durch die Umlaufszeit eine Kenntniss der Geschwindigkeit erlangt wird, die parabolische Geschwindigkeit zu Grunde. Man reicht damit zumeist aus, und kann diese Näherung mit demselben Recht anwenden, wie man bei der Bestimmung von ersten Kometenbahnen die Parabel zu Grunde legt. Allein in vielen Fällen wird man dadurch doch in einen Fehler verfallen; für detonirende Meteore und zur Erde fallende Meteormassen hat man fast ausnahmslos Geschwindigkeiten gefunden, die die parabolischen weit übertreffen. Das Meteor von Pultusk hatte nach GALLE eine Geschwindigkeit von 7·28 deutsche Meilen, d. i. nahe 55 *km*. v. NIESSL giebt eine Zusammenstellung der von ihm berechneten, und in verschiedenen Bänden der Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien publicirten Resultate[1]) in seiner Abhandlung »Ueber die Periheldistanzen und andere Bahnelemente jener Meteoriten, deren Fallgeschwindigkeiten mit einiger Sicherheit beobachtet werden konnten[2]). Die Geschwindigkeiten ergaben sich zu 58 bis 150 *km*, im Durchschnitte zu 75 *km*. Hierdurch scheint sich eine neuerliche Trennung zwischen den Meteoriten und Sternschnuppen zu ergeben, und thatsächlich spricht auch SCHIAPARELLI von zwei Arten von Körpern: Kometen und Sternschnuppen, die in parabolischen Bahnen und Meteoriten, »Boten der Sternenwelt«, die in hyperbolischen Bahnen zu uns kommen[3]).

Der Unterschied fällt aber wieder, wenn man die Erscheinung näher betrachtet: Es giebt kosmische Körper, die sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegen; je grösser die kosmische Geschwindigkeit, desto grösser die Wahrscheinlichkeit, dass sie tiefer in die Atmosphäre eindringen, oder zur Erde fallen; folglich werden in die tieferen Regionen der Atmosphäre und zur Erde

[1]) Vergl. Bd. 75, 79, 83, 88, 93, 96, 97, 98.

[2]) Verhandlungen des naturforschenden Vereins in Brünn, Bd. 29.

[3]) l. c., pag. 219 und 222.

nur jene gelangen, deren kosmische Geschwindigkeiten eben die grössten sind, also, die sich in hyperbolischen Bahnen bewegen.

Hierin ist auch eine sehr einfache Erklärung der Erscheinung gelegen, dass zu den Zeiten der grossen Sternschnuppenfälle so wenig detonirende Meteore und Meteoritenfälle zu verzeichnen sind; diese Erscheinung wird um so auffälliger, je mehr Aufmerksamkeit man den Meteorerscheinungen zuwendet. Nun ist aber die Detonation eine secundäre Erscheinung, welche von der Zusammenpressung der Luft (Umsetzung der Wärme in Bewegung) herrührt, und hängt wesentlich von der Entfernung des Meteors ab. Detonationen können daher nur bei den tief nach unten gelangenden Meteoren, also bei jenen, welche mit grosser Geschwindigkeit in die Atmosphäre gelangen, auftreten. In der That haben sich auch bei den grossen Sternschnuppenfällen noch am meisten Meteoritenfälle zur Zeit der Leoniden, die aus der Nähe des Apex (vergl. pag. 187) kommen, gezeigt.

Wenn die Meteorite nun auch wahrscheinlich stellaren Ursprungs, als nicht zum Sonnensystem gehörig anzusehen sind, so zeigt ihre chemische Beschaffenheit, dass sie sich nichtsdestoweniger ihrer Zusammensetzung nach von den dem Sonnensystem angehörigen Körpern nicht unterscheiden; hieraus einen Grund gegen ihren stellaren Ursprung zu schöpfen, ist aber durchaus unzulässig, da man ja bei den Untersuchungen über die Fixsternspectra genau zu denselben Resultaten gelangt. Dass sie aber stellaren Ursprungs sind, zeigt auch noch eine eingehendere Untersuchung ihrer Radianten.

Es zeigt sich, dass gewisse Radiationspunkte durch mehrere Wochen, selbst durch Monate, ihren Ort am Himmel unverändert beibehalten, stationär bleiben. Beispiele von stationären Radianten führt DENNING aus seinen Beobachtungen 1877 und 1885 an:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Zwischen | Juli | 13 | bis | September 22: | $\mathfrak{A}' = 7°$: | $\mathfrak{D}' = +12°$ |
| " | " | 27 | " | December 4 | 80 | +86 |
| " | " | 30 | " | November 7 | 81 | +18 |
| " | Juni | 26 | " | " 30 | 60 | +50 |
| " | August | 21 | " | September 21 | 61 | +86 |
| " | October | 9 | " | October 29 | 92 | +15. |

NIESSL führt[1]) die folgenden Meteore mit nahe demselben Radianten an: 3. Juni 1883, 7. Juni 1878, 17. Juni 1877, 13. Juli 1879: $\mathfrak{A}' = 249°$, $\mathfrak{D}' = -20°$; dieser Radiant findet sich auch noch im Monate Mai und August und zwar am 18. Mai 1874, 20. Mai 1869, 20. August 1864, 11. August 1871, 19. August 1847, 31. August 1871.

Ferner den Radianten $\mathfrak{A}' = 21°$, $\mathfrak{D}' = +19°$ bei den Meteoren vom 5. September 1863, 19. September 1861, 25. September 1862, 15. October 1889, 19. October 1877; den Radianten: $\mathfrak{L}' = 216°$, $\mathfrak{B}' = +4°$ bei den Meteoren vom 11. April 1871, 21. April 1877, 12. Mai 1878; hiermit im Zusammenhange stehen die beiden Radianten: $\mathfrak{L}' = 198°$; $\mathfrak{B}' = +17°$ vom 5. September 1872, und $\mathfrak{L}' = 188°$, $\mathfrak{B}' = +86°$ vom 26. September 1865 und 27. September 1870[2]). Ferner die Radianten:

[1]) Astron. Nachr. Bd. 107, No. 2566.

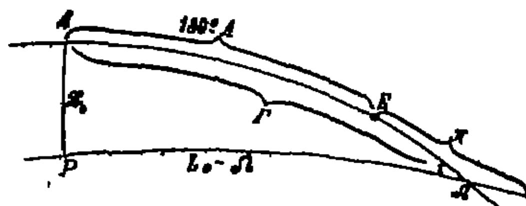
[2]) Kosmischer Ausgangspunkt: $\mathfrak{L}_0 = 182°$, $\mathfrak{B}_0 = +4°$.

$\mathfrak{A}' = 100°$, $\mathfrak{D}' = +28°$ für das Meteor vom 27. November 1862
109 +26 „ 24. December 1873
114 +22 „ 17. Januar 1894
86°, +28° „ 14. Mai 1867
90 +28 „ 9. Juni 1888
86 +44 „ 11. „ 1867[1]).

TUPMANN untersuchte zuerst die Bedingungen, unter denen ein Radiant stationär sein könne, und fand[2]) als Bedingung hierfür: schwache Breite, direkte Bewegung, Periheldistanz des Condensationscentrums nahe 1, und die Lage des Radianten für die Mitte der Zeit der Ausstrahlung nahe dem Antiapex.

Eine ausführliche Untersuchung dieser Erscheinung gab v. NIESSL[3]). Die Aufgabe ist zunächst: aus der kosmischen Richtung und Geschwindigkeit eines in die Breite gezogenen Schwarms, der die Erdbahn in einem ziemlich ausgedehnten Bereiche trifft, die Bahnelemente und den scheinbaren Radianten zu finden, welche den verschiedenen Knoten entsprechen. Auf Grund der im Früheren hier erhaltenen Resultate kann die Ableitung folgendermaassen geführt werden:

Da es sich um Schwärme handelt, welche aus dem Weltraum kommen, so werden die Bahnen Hyperbeln sein, deren Asymptote die Richtung im Weltraum giebt. Sei also (Fig. 268) $MM'$ die Erdbahn, $O$ die Sonne, $SM$ die Bahn eines Sternschnuppenschwarms, welcher die Erde in $M$ schneidet, so ist $QD$ die Richtung, aus welcher der Schwarm kommt, und diese Richtung ist bestimmt durch die Parallele $OA$, welche mit der grossen Axe, d. i. mit der Richtung nach dem Perihele $E$ den Winkel $180° - A$ einschliesst.




(A. 270.)

Ist nun $\mathfrak{L}_0$ die heliocentrische Länge, $\mathfrak{B}_0$ die heliocentrische Breite der Richtung $OA$, also des kosmischen Ausgangspunktes (für den stellaren Schwarm identisch mit der geocentrischen Länge und Breite der Richtung $Mq$), und ist derselbe dargestellt durch den Punkt $A$ (Fig. 270) in der Bahn $\Omega A$ der Sternschnuppe, so ist der Abstand dieses Punktes von dem Perihel $E$ gleich $180° - A$, also $AE = 180° - A$.

Ist $\Omega P$ ein Stück der Ekliptik, und $AP$ senkrecht darauf, so ist

$$P\Omega = \mathfrak{L}_0 - \Omega; \quad AP = \mathfrak{B}_0$$

und man erhält, wenn man den Bogen $\Omega A = \Gamma$ nennt und diesen in der Richtung der Bewegung der Himmelskörper von 0° bis 360° zählt:

$$\begin{aligned} \sin i \sin \Gamma &= \sin \mathfrak{B}_0 \\ \cos i \sin \Gamma &= \cos \mathfrak{B}_0 \sin (\mathfrak{L}_0 - \Omega) \\ \cos \Gamma &= \cos \mathfrak{B}_0 \cos (\mathfrak{L}_0 - \Omega). \end{aligned} \tag{1}$$

Nun ist wie früher:

$$\Omega = \odot \quad (2a) \quad \text{oder} \quad \Omega = 180° + \odot \quad (2b)$$

$$\pi = \Gamma - (180° - A) + \Omega = \Gamma + A + \Omega - 180°$$

$$V = 180° - \pi + \odot,$$

also

$$V = \odot - \Gamma - \Omega - A. \tag{3}$$

---

[1]) Kosmischer Ausgangspunkt: $\mathfrak{L}_0 = 88°$, $\mathfrak{B}_0 = +9°$.

[2]) Monthly Notices, Bd. 38, pag. 115.

[3]) »Sitzungsberichte der kais. Academie der Wissenschaften in Wien«, Bd. 83, pag. 26.

Hiermit sind die Elemente $i$, $\Omega$, $\pi$, $V$ durch $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{B}_0$, $\odot$, $A$ ersetzt, und es sind noch $e$, $p$, $a$ und $A$ durch $\odot$, $R$, $v$ auszudrücken.

Man hat aber

$$v = \sqrt{\frac{2}{R} - \frac{1}{a}}; \quad e \cos V = \frac{p}{R} - 1.$$

In Folge der einfachen Beziehung zwischen $v$ und $a$ wird es gestattet sein, $a$ an Stelle von $v$ beizubehalten; man hat nur zu berücksichtigen, dass für die Hyperbel $a$ negativ ist; setzt man, um mit positiven Grössen zu rechnen, $a = -a_1$, so ist

$$a_1 = + \frac{1}{v^2 - \frac{2}{R}}. \tag{4}$$

Dann wird

$$e \cos(\odot - \Gamma - \Omega - A) = \frac{a_1 (e^2 - 1)}{R} - 1.$$

Substituirt man für $e = \sec A$, $e^2 - 1 = \tan^2 A$ und setzt Kürze halber

$$\odot - \Gamma - \Omega = -w, \tag{5}$$

wobei also

$$w = +\Gamma \quad (6\text{a}) \qquad \text{oder} \qquad w = 180^\circ + \Gamma \quad (6\text{b})$$

ist, so wird:

$$\cos w - \sin w \tan A = \frac{a_1}{R} \tan^2 A - 1$$

$$\tan A = \sqrt{\frac{R}{a_1}} \cos \tfrac{1}{2} w \left( - \sqrt{\frac{R}{a_1}} \sin \tfrac{1}{2} w \pm \sqrt{\frac{R}{a_1} \sin^2 \tfrac{1}{2} w + 2} \right).$$

Setzt man daher:

$$\sqrt{\frac{R}{2 a_1}} = \tau; \quad \tau \sin \tfrac{1}{2} w = \tan y \tag{7}$$

so wird

$$\tan A = \pm 2 \tau \cos \tfrac{1}{2} w \tan (45^\circ \mp \tfrac{1}{2} y) \tag{8}$$

wobei, was für das Folgende zu beachten ist, Correspondenz der Zeichen stattfinden muss. Dann wird[1])

$$\begin{gathered} \pi = \Gamma + A + \Omega - 180^\circ; \qquad V = -(w + A) \\ e = \sec A; \qquad p = a_1 \tan^2 A \\ \sqrt{p} = \pm \sqrt{2R} \cos \tfrac{1}{2} w \tan (45^\circ \mp \tfrac{1}{2} y). \end{gathered} \tag{9}$$

Setzt man die Werthe für $e$, $V$, $p$, $i$ in die Formeln III, pag. 199 ein, so erhält man für einen von einem gegebenen kosmischen Ausgangspunkt $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{B}_0$ mit der Geschwindigkeit $v$ (grosse Axe $a_1$) kommenden Strom den scheinbaren Radianten $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{B}'$ in demjenigen Punkte der Erdbahn, für welchen die Sonnenlänge $\odot$ ist; die dazu dienenden Formeln sind (1), (2), (4), (5), (7), (8) und (9).

Hiernach kann man sehr einfach die Aenderungen $d\mathfrak{L}'$, $d\mathfrak{B}'$ bestimmen, welche der scheinbare Radiant bei constantem kosmischen Ausgangspunkt $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{B}_0$ in Folge der Veränderung des Erdortes (Aenderung der Sonnenlänge um $d\odot$ erfährt.

Aus (2) folgt:

$$d\Omega = d\odot,$$

sodann aus (1):

---

[1]) Dass hier $\sqrt{p}$ besonders eingeführt ist, hat seinen Grund darin, dass in dem Faktor für $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{B}'$ nicht $p$, sondern $\sqrt{p}$ auftritt; das durch das Ausziehen der Quadratwurzel entstehende Doppelzeichen ist aber, gemäss dem Werthe für $\tan A$ nicht beliebig mit dem Zeichen von $y$ zu verbinden, sondern es findet wieder Correspondenz der Zeichen statt.

$$\sin i \cos \Gamma\, d\Gamma + \cos i \sin \Gamma\, di = 0$$
$$\cos i \cos \Gamma\, d\Gamma - \sin i \sin \Gamma\, di = -\cos \Gamma\, d\odot$$
$$-\sin \Gamma\, d\Gamma = +\cos i \sin \Gamma\, d\odot$$

und daraus

$$d\Gamma = -\cos i\, d\odot$$
$$di = +\sin i \cot w\, d\odot \qquad (10)$$
$$dw = d\Gamma.$$

Für das Weitere kann man $R$ während des Zeitraums, während dessen man die Veränderung des Radianten sucht, constant nehmen; dann ist $dR = 0$, $da_1 = 0$, d. h. alle Sternschnuppen beschreiben Bahnen mit derselben Halbaxe[1]); dann folgt aus (7) und (8):

$$dy = +\tfrac{1}{2}\tau \cos \tfrac{1}{2} w \cos^2 y\, d\Gamma$$
$$\frac{dA}{\cos^2 A} = -\tau \cos \tfrac{1}{2} w \frac{dy}{\cos^2 (45^\circ \mp \tfrac{1}{2} y)} \mp \tau \tang (45^\circ \mp \tfrac{1}{2} y) \sin \tfrac{1}{2} w\, d\Gamma$$

und nach einigen leichten Reductionen

$$m = \tfrac{1}{2} (\tang \tfrac{1}{2} w \pm \sin y \cot \tfrac{1}{2} w)$$
$$dA = \tfrac{1}{2} m \sin 2A \cos i\, d\odot \qquad (11)$$

und weiter

$$dV = (1 - \tfrac{1}{2} m \sin 2A) \cos i\, d\odot$$
$$de = m \sin A \tang A \cos i\, d\odot \qquad (12)$$
$$dp = 2p\, m \cos i\, d\odot.$$

Differenzirt man jetzt die Formeln III (pag. 199), so folgt:

$$du_0 \cos \mathfrak{B}' \cos (\mathfrak{L}' - \odot) - u_0 \sin \mathfrak{B}' \cos (\mathfrak{L}' - \odot)\, d\mathfrak{B}'$$
$$- u_0 \cos \mathfrak{B}' \sin (\mathfrak{L}' - \odot)(d\mathfrak{L}' - d\odot) = \mathrm{I}\, d\odot$$
$$du_0 \cos \mathfrak{B}' \sin (\mathfrak{L}' - \odot) - u_0 \sin \mathfrak{B}' \sin (\mathfrak{L}' - \odot)\, d\mathfrak{B}'$$
$$+ u_0 \cos \mathfrak{B}' \cos (\mathfrak{L}' - \odot)(d\mathfrak{L}' - d\odot) = \frac{\mathrm{II}}{R}\, d\odot \qquad (13)$$
$$du_0 \sin \mathfrak{B}' + u_0 \cos \mathfrak{B}'\, d\mathfrak{B}' = \pm \frac{\mathrm{III}}{R}\, d\odot,$$

wobei

$$\mathrm{I} = \frac{\sin V}{\sqrt{p}} \frac{de}{d\odot} - \tfrac{1}{2} \frac{e \sin V}{p\sqrt{p}} \frac{dp}{d\odot} + \frac{e \cos V}{\sqrt{p}} \frac{dV}{d\odot}$$
$$\mathrm{II} = \tfrac{1}{2} \frac{\cos i}{\sqrt{p}} \frac{dp}{d\odot} - \sqrt{p} \sin i \frac{di}{d\odot} \qquad (14)$$
$$\mathrm{III} = \tfrac{1}{2} \frac{\sin i}{\sqrt{p}} \frac{dp}{d\odot} + \sqrt{p} \cos i \frac{di}{d\odot}$$

und damit

$$du_0 = \left[+\mathrm{I} \cos \mathfrak{B}' \cos (\mathfrak{L}' - \odot) + \frac{\mathrm{II}}{R} \cos \mathfrak{B}' \sin (\mathfrak{L}' - \odot) \pm \frac{\mathrm{III}}{R} \sin \mathfrak{B}'\right] d\odot$$
$$u_0\, d\mathfrak{B}' = \left[-\mathrm{I} \sin \mathfrak{B}' \cos (\mathfrak{L}' - \odot) - \frac{\mathrm{II}}{R} \sin \mathfrak{B}' \sin (\mathfrak{L}' - \odot) \pm \frac{\mathrm{III}}{R} \cos \mathfrak{B}'\right] d\odot \qquad (15)$$
$$u_0 \cos \mathfrak{B}' (d\mathfrak{L}' - d\odot) = \left[-\mathrm{I} \sin (\mathfrak{L}' - \odot) + \frac{\mathrm{II}}{R} \cos (\mathfrak{L}' - \odot)\right] d\odot.$$

---

[1]) Ein genähertes Bild von dem Aussehen eines solchen Schwarms erhält man, wenn man sich in Fig. 268 eine Reihe von Hyperbeln mit parallelen Asymptoten in der Richtung $OA$ und mit den Perihelien in $E'$, $E''$, $E'''$. . . zeichnet, und die Figur um $OA$ als Axe dreht; die Erdbahn $MM'$ muss nicht in der Zeichnungsfläche liegen, sondern in einer die Zeichnungsfläche in $MO$ schneidenden Ebene; alle die Erdbahn treffenden Hyperbeln haben dann gleiche Halbaxen $ED$, $E'D'$, $E''D''$ . . .

Durch Substitution von (10) und (12) in (14) erhält man nach einigen Reductionen:

$$\mathrm{I} = \frac{\cos i}{\sqrt{p}}(m \sin w + e \cos V) = \frac{\cos i}{\sqrt{p}}[\cos w + (m - \tang A)\sin w]$$
$$\mathrm{II} = \sqrt{p}\,(m \cos^2 i - \cot w \sin^2 i) = -\sqrt{p}\,[\cot w - (m + \cot w)\cos^2 i]$$
$$\mathrm{III} = \sqrt{p}\,\sin i \cos i\,(m + \cot w).$$

Es ist aber:

$$m - \tang A = \tfrac{1}{2}\tang\tfrac{1}{2}w \pm \tfrac{1}{2}\sin y \cot\tfrac{1}{2}w \mp 2\tau\cos\tfrac{1}{2}w \tang(45° \mp \tfrac{1}{2}y)$$

demnach

$$(m - \tang A)\sin w = \sin^2\tfrac{1}{2}w \pm \sin y\cos^2\tfrac{1}{2}w \mp 2\sin w\cot\tfrac{1}{2}w\tang y\tang(45° \mp \tfrac{1}{2}y)$$
$$= 1 - \cos^2\tfrac{1}{2}w\,[1 \mp \sin y \pm 4\tang y\tang(45° \mp \tfrac{1}{2}y)].$$

Setzt man daher:

$$\sin^2(45° \mp \tfrac{1}{2}y) \pm 2\tang y\tang(45° \mp \tfrac{1}{2}y) = 1 - \tfrac{1}{2}Y,$$

oder[1])

$$Y = 2\cos^2(45° \mp \tfrac{1}{2}y) \mp 4\tang y\tang(45° \mp \tfrac{1}{2}y), \tag{16}$$

so wird

$$(m - \tang A)\sin w = 1 - 2\cos\tfrac{1}{2}w^2\,(1 - \tfrac{1}{2}Y).$$

Weiter ist:

$$m + \cot w = \tfrac{1}{2}\tang\tfrac{1}{2}w \pm \tfrac{1}{2}\sin y\cot\tfrac{1}{2}w + \tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}w - \tfrac{1}{2}\tang\tfrac{1}{2}w = \cot\tfrac{1}{2}w\sin^2(45° \pm \tfrac{1}{2}y).$$

Demnach wird

$$\mathrm{I} = +\frac{\cos i}{\sqrt{p}}\cos^2\tfrac{1}{2}w\cdot Y$$
$$\mathrm{II} = -\sqrt{p}\,[\cot w - \cot\tfrac{1}{2}w\cos^2 i\sin^2(45° \pm \tfrac{1}{2}y)] \tag{17}$$
$$\mathrm{III} = +\sqrt{p}\,\sin i\cos i\cot\tfrac{1}{2}w\sin^2(45° \pm \tfrac{1}{2}y).$$

Um nun die Rechnung durchzuführen, hat man die Werthe für $e$, $V$, $p$, $i$, in die Gleichungen III (pag. 199) zu setzen. Man erhält:

$$u_0\cos\mathfrak{B}'\cos(\mathfrak{L}' - \odot) = -\frac{\sec A\sin(w + A)}{\sqrt{p}} + \omega =$$
$$-\frac{\sin w + \cos w\tang A}{\sqrt{p}} + \omega = -\frac{\sin w + \cos w\sqrt{\frac{p}{a_1}}}{\sqrt{p}} + \omega.$$

Man hat daher zu rechnen: [Für $\mathfrak{B}_0$ positiv die Formeln (a); für $\mathfrak{B}_0$ negativ die Formeln (b)]:

$$\begin{aligned}\sin i\sin w &= \sin\mathfrak{B}_0 \\ \cos i\sin w &= \cos\mathfrak{B}_0\sin(\mathfrak{L}_0 - \odot) \\ \cos w &= \cos\mathfrak{B}_0\cos(\mathfrak{L}_0 - \odot)\end{aligned} \quad (\mathrm{Ia}) \qquad \begin{aligned}\sin i\sin w &= -\sin\mathfrak{B}_0 \\ \cos i\sin w &= \cos\mathfrak{B}_0\sin(\mathfrak{L}_0 - \odot) \\ \cos w &= \cos\mathfrak{B}_0\cos(\mathfrak{L}_0 - \odot)\end{aligned} \quad (\mathrm{Ib})$$

$$a_1 = \frac{1}{v^2 - \frac{2}{R}};\quad \tau = \sqrt{\frac{R}{2a_1}};\quad \tang y = \tau\sin\tfrac{1}{2}w$$
$$\sqrt{p} = \pm\sqrt{2R}\cos\tfrac{1}{2}w\tang(45° \mp \tfrac{1}{2}y) \tag{II}$$

$$u_0\cos\mathfrak{B}'\cos(\mathfrak{L}' - \odot) = -\frac{\sin w}{\sqrt{p}} + \frac{\cos w}{\sqrt{a_1}} + \frac{\omega}{arc\,1'}$$
$$u_0\cos\mathfrak{B}'\sin(\mathfrak{L}' - \odot) = \frac{\sqrt{p}\cos i - 1}{R} \tag{IIIa}$$
$$u_0\sin\mathfrak{B}' = \frac{\sqrt{p}\sin i}{R}$$

---

[1]) $Y$ wird für die Parabel gleich 1; und da gemäss den Gleichungen (7) $y$ für grosse Werthe von $a_1$ nur klein bleibt, so wird $Y$ nur wenig von der Einheit verschieden sein; man kann leicht mit dem Argumente $y$ eine Tafel für $Y$ rechnen.

$$
\left.\begin{aligned}
u_0 \cos\mathfrak{B}' \cos(\mathfrak{L}' - \odot) &= -\frac{\sin w}{\sqrt{p}} + \frac{\cos w}{\sqrt{a_1}} + \frac{\omega}{arc\,1'} \\
u_0 \cos\mathfrak{B}' \sin(\mathfrak{L}' - \odot) &= \frac{\sqrt{p}\cos i - 1}{R} \\
u_0 \sin\mathfrak{B}' &= -\frac{\sqrt{p}\sin i}{R}
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(III b)}
$$

$i$ ist stets positiv zwischen 0° und 180°; aus den Formeln III folgt daher, dass $u_0$ und $\sqrt{p}$ gleichbezeichnet sein müssen, also $\sqrt{p}$ stets positiv; hieraus folgt, dass in II die oberen Zeichen zu nehmen sind; wenn $w < 180°$ ist, und die unteren, wenn $w > 180°$ ist, und zwar sowohl in dem ganzen Ausdrucke, als auch in $tang\,(45° \pm \frac{1}{2}\gamma)$, weil, wie erwähnt, Correspondenz der Zeichen stattfinden muss. Aus der dritten Gleichung (I) folgt aber, dass $w \lesseqgtr 180°$ ist, jenachdem $(\mathfrak{L}_0 - \odot) \lesseqgtr 180°$ oder $\mathfrak{L}_0 \lesseqgtr 180° + \odot$ ist, d. h. je nachdem der kosmische Ausgangspunkt rechts oder links (in der Nacht westlich oder östlich) vom Anthelion liegt.

Die Berechnung von $d\mathfrak{L}'$, $d\mathfrak{B}'$ erfolgt dann nach den Formeln (16), (17) und (15).

Als Beispiel soll der Fall einer parabolischen Geschwindigkeit mit dem kosmischen Ausgangspunkt in der Ekliptik genommen werden. Es ist dann:

$$a_1 = \infty,\ \gamma = 0,$$

und man hat:

$$\text{aus I:}\ i = 0,\ w = \mathfrak{L}_0 - \odot$$

$$\text{aus II:}\ \sqrt{p} = \pm\sqrt{2R}\cos\tfrac{1}{2}w$$

(stets positiv; die oberen Zeichen für $w < 180°$; die unteren für $w > 180°$)

$$\text{aus III:}\ \mathfrak{B}' = 0;$$

$$
\left.\begin{aligned}
u_0 \cos(\mathfrak{L}' - \odot) &= -\frac{\sin w}{\sqrt{p}} + \frac{\omega}{arc\,1'} = \mp\sqrt{\frac{2}{R}}\sin\tfrac{1}{2}w + \frac{\omega}{arc\,1'} \\
u_0 \sin(\mathfrak{L}' - \odot) &= \frac{\sqrt{p} - 1}{R} \qquad\qquad = \pm\sqrt{\frac{2}{R}}\cos\tfrac{1}{2}w - \frac{1}{R}
\end{aligned}\right\} \qquad (18)
$$

Aus (16): $Y = 1$; aus (17): $\mathrm{I} = \frac{\cos^2\frac{1}{2}w}{\sqrt{p}}$; $\mathrm{II} = \frac{1}{2}\sqrt{p}\,tang\,\frac{1}{2}w$; $\mathrm{III} = 0$

$$\text{oder:}\ \mathrm{I} = \pm\frac{1}{\sqrt{2R}}\cos\tfrac{1}{2}w;\quad \frac{\mathrm{II}}{R} = \pm\frac{1}{\sqrt{2R}}\sin\tfrac{1}{2}w.$$

Aus (15): $d\mathfrak{B}' = 0$;

$$u_0(d\mathfrak{L}' - d\odot) = \pm\frac{1}{\sqrt{2R}}\sin[\tfrac{1}{2}w - (\mathfrak{L}' - \odot)]\,d\odot.$$

Multiplicirt man die Gleichungen (18) mit $\cos(\mathfrak{L}' - \odot)$ und $\sin(\mathfrak{L}' - \odot)$ und addirt, so folgt

$$u_0 = \mp\sqrt{\frac{2}{R}}\sin[\tfrac{1}{2}w - (\mathfrak{L}' - \odot)] - \frac{1}{R}\sin(\mathfrak{L}' - \odot) + \frac{\omega}{arc\,1'}\cos(\mathfrak{L}' - \odot),$$

demnach

$$u_0\frac{d\mathfrak{L}'}{d\odot} = \mp\frac{1}{\sqrt{2R}}\sin[\tfrac{1}{2}w - (\mathfrak{L}' - \odot)] - \frac{1}{R}\sin(\mathfrak{L}' - \odot) + \frac{\omega}{arc\,1'}\cos(\mathfrak{L}' - \odot).$$

Soll der Radiant stationär sein, so muss $d\mathfrak{L}' = 0$ sein; hieraus folgt:

$$\left(\mp\frac{1}{\sqrt{2R}}\sin\tfrac{1}{2}w + \frac{\omega}{arc\,1'}\right)\cos(\mathfrak{L}' - \odot) = \left(\frac{1}{R} \mp \frac{1}{\sqrt{2R}}\cos\tfrac{1}{2}w\right)\sin(\mathfrak{L}' - \odot) \qquad (19)$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $u_0$ und setzt für $u_0 \cos(\Omega' - \odot)$, $u_0 \sin(\Omega' - \odot)$ ihre Ausdrücke aus (18) ein, und führt die Multiplikation aus, so erhält man:

$$\cos \tfrac{1}{2} w = \pm \tfrac{1}{3} R \sqrt{R} \sqrt{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R^3} \mp \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\omega}{arc\, 1'} \sin \tfrac{1}{2} w \right)$$

oder wenn $R = 1 + \alpha$ gesetzt wird:

$$\cos \tfrac{1}{2} w = \pm (1 + \tfrac{3}{2} \alpha) \frac{\sqrt{2}}{3} \left( 2 - 3 \alpha \mp \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\omega}{arc\, 1'} \sin \tfrac{1}{2} w \right)$$

$$\cos \tfrac{1}{2} w = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\omega}{arc\, 1'} \sin \tfrac{1}{2} w.$$

Das zweite Glied hängt von der Sonnenlänge selbst ab; abgesehen von diesem Gliede wird daher

$$\text{für } \cos \tfrac{1}{2} w_1 = + \frac{2\sqrt{2}}{3}: \qquad w_1 = 38^\circ\, 56'{\cdot}5 \text{ (und } 321^\circ\ 3'{\cdot}5)$$

$$\text{für } \cos \tfrac{1}{2} w_1 = - \frac{2\sqrt{2}}{3}: \qquad w_2 = 321^\circ\ 3'{\cdot}5 \text{ (und } 38^\circ\, 56'{\cdot}5).$$

Dass das obere Zeichen für $w_1 < 180^\circ$, das andere für $w_1 > 180^\circ$ gilt, wird hier gegenstandslos, da die auszuschliessenden Werthe in Folge des Umstandes, dass $y = 0$ ist, sich mit den beizubehaltenden decken.

Ein stationärer Radiant kann also in der Ekliptik nur auftreten, wenn der kosmische Ausgangspunkt $\Omega_0$, $\mathfrak{B}_0$ die Elongation 39° nach Osten oder Westen von der Sonne hat. Dann ist mit Vernachlässigung der von der Excentricität der Erdbahn abhängigen Glieder:

$$\sqrt{p} = + \sqrt{2} \cos\ 19^\circ\, 28'$$
$$- \sqrt{2} \cos 160\ \ 32; \quad \log p = 0{\cdot}2499.$$

Man kann $\Omega' - \odot$ unmittelbar erhalten, wenn man für $\sin \tfrac{1}{2} w$, $\cos \tfrac{1}{2} w$ die Ausdrücke aus (18) in (19) substituirt; man erhält dann nach gehöriger Reduction und Vernachlässigung der von der Excentricität der Erdbahn abhängigen Glieder:

$$\sin(\Omega' - \odot) = u_0$$

und aus (18) durch Quadriren:

$$u_0 = \sqrt{3 \mp 2\sqrt{2} \cos \tfrac{1}{2} w} = \sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

Es ist daher $u_0 = 0{\cdot}57735$; $\Omega' - \odot = 35^\circ\, 16'$ oder $144^\circ\, 44'$. Diese beiden Werthe entsprechen den beiden kosmischen Ausgangspunkten $w_1$, $w_2$; es ist aber hieraus nicht ersichtlich, wie die Werthe zusammengehören. Setzt man aber für $w$ unmittelbar in die Gleichung (18) ein, so sieht man, dass, da $\sqrt{p}$ positiv sein muss, $\cos(\Omega' - \odot)$ negativ ist für $w < 180^\circ$, dass sich daher

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für } \Omega_0 - \odot = 38^\circ\, 56'{\cdot}5 & \Omega' - \odot = 144^\circ\, 44' \\ \text{für } \Omega_0 - \odot = 321\ \ \ 3{\cdot}5 & \Omega' - \odot = 35\ \ 16 \end{array}\right\} u_0 = 0{\cdot}57735$$

entsprechen. Der zweite scheinbare Radiant liegt der Sonne sehr nahe, und es können daher nur äusserst helle Meteore, die aus demselben kommen, gesehen werden; es bleibt also nur der erstere, der aber durch einen ganzen Monat stationär erscheinen kann. Für denselben kosmischen Ausgangspunkt $\Omega_0$ $\mathfrak{B}_0$ werden sich daher auch nach den verschiedenen Sonnenlängen verschiedene scheinbare Radianten $\Omega'$ $\mathfrak{B}'$ ergeben; es ist mithin möglich, dass aus ganz verschiedenen scheinbaren Radianten kommende Meteore aus demselben kosmischen

Ausgangspunkte kommen können; dahin gehören z. B. die auf pag. 201 angeführten Fälle[1]).

Eine genauere Untersuchung im allgemeinen Falle, wenn $\mathfrak{B}_0$ nicht Null ist, ist selbstverständlich weniger einfach und muss hier übergangen werden. Es zeigt sich, dass kein ausserhalb der Ekliptik liegender Radiant stationär sowohl in Länge als in Breite bleiben kann; dass aber die Veränderungen sehr klein sein können, kann aus der folgenden Tafel von v. Niessl[2]) ersehen werden, welche die Verschiebung im grössten Kreise für verschiedene Elongationen und Breiten für $d\odot = 1°$, also täglich, in Graden ausgedrückt, giebt.

| $\vartheta' - \odot =$ | $v = \sqrt{2}$ | | | | | | | $v = 2$ | | | | | | | $v = 2·5$ | | $v = 3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 90° | 120° | 150° | 180° | 210° | 240° | 270° | 90° | 120° | 150° | 180° | 210° | 240° | 270° | 90° 270° | 180° | 90° 270° | 180° |
| $\beta' =$ | | ° | ° | ° | ° | ° | | ° | ° | ° | ° | ° | ° | ° | ° | ° | ° | ° |
| 0° | | 0·45 | 0·09 | 0·50 | 0·65 | 0·70 | | 0·50 | 0·43 | 0·18 | 0·15 | 0·33 | 0·43 | 0·50 | 0·40 | 0·01 | 0·33 | 0·06 |
| 20 | ∞ | 1·24 | 0·66 | 0·63 | 0·70 | 0·75 | ∞ | 0·50 | 0·46 | 0·26 | 0·25 | 0·36 | 0·43 | 0·50 | 0·40 | 0·17 | 0·33 | 0·14 |
| 40 | | 2·22 | 1·22 | 0·81 | 0·85 | 0·93 | | 0·51 | 0·51 | 0·41 | 0·36 | 0·43 | 0·46 | 0·51 | 0·41 | 0·28 | 0·33 | 0·23 |
| 60 | | 3·17 | 1·70 | 1·32 | 1·23 | 1·51 | | 0·52 | 0·51 | 0·51 | 0·48 | 0·49 | 0·50 | 0·52 | 0·41 | 0·37 | 0·34 | 0·30 |
| 80 | | 6·77 | 3·77 | 3·03 | 3·30 | 5·04 | | 0·53 | 0·54 | 0·53 | 0·53 | 0·53 | 0·53 | 0·53 | 0·41 | 0·41 | 0·34 | 0·34 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Im Pole der Ekliptik ist für | $v = \sqrt{2}$ | 2 | 2·5 | 3 |
| die tägliche Verschiebung | ∞ | 0°·53 | 0°·42 | 0°·34. |

Die Resultate können kurz zusammengefasst werden:

1) Die Verschiebungen werden um so kleiner, je grösser die Geschwindigkeiten sind; scheinbar stationäre Radianten setzen grosse Geschwindigkeiten, daher hyperbolische Bahnen voraus.

2) Die kleinsten Verschiebungen finden stets in der Nähe des Anthelions, in kleinen Breiten statt, und können bei grösseren Geschwindigkeiten selbst in mittleren Breiten noch durch mehrere Wochen scheinbar stationäre Radianten ergeben.

## C. Beziehungen zwischen Kometen und Meteoren.

Sieht man von jenen historischen oder vielleicht mehr prähistorischen Vergleichen der Kometen und Meteore, welche beide Klassen von Körpern in die Luftregion versetzten, ab, so treten in späterer Zeit zunächst die Vergleiche von Kepler, Cardan u. A. entgegen, welche sich auf die äusseren Erscheinungen: die Vergänglichkeit derselben, den Glanz, den Schweif u. s. w., stützen. Chladni hatte 1819 die Meteorite als Trümmer einer vergangenen Welt betrachtet; dazu wurde er vornehmlich durch zwei Gründe veranlasst; der erste Grund war darin gelegen, dass er die damaligen Untersuchungen über die Massenverluste, welche die Kometen in der Sonnennähe durch die Ausstrahlungen in den Schweifen erleiden, mit dem Vorhandensein von kleinen Körperchen im Weltraume in

[1]) Es muss jedoch erwähnt werden, dass man hierbei wesentlich auf Annahmen über kosmische Geschwindigkeiten angewiesen ist, und durch Variation dieser Geschwindigkeiten entsprechende Coincidenzen herbeiführen kann; die angeführten Fälle können also durchaus nicht als wirklich zusammengehörig erklärt werden, sondern nur als unter gewissen Annahmen über die Geschwindigkeiten möglicherweise zusammengehörig.

[2]) l. c., pag. 140.

ammenhang zu bringen versuchte; der zweite Grund lag in der damals
ass angenommenen Hypothese, dass die vier bis dahin entdeckten
laneten: Ceres, Pallas, Juno und Vesta Trümmer eines grösseren Welt-
wären [1]). Auch die bereits erwähnte Meinung von LAPLACE, dass die
n Satelliten der Erde wären, gehört hierher.

liesem Stadium der Vermuthungen blieben die Beziehungen zwischen
eten und Meteoren lange Zeit, ohne dass man auch nur den ge-
Beweis für diese Zusammengehörigkeit gehabt hätte: die früher be-
worden Theilungen von Kometenkernen, mehrfachen Kernen, blieben
oder doch wenigstens unbeachtet.

erste auffällige Erscheinung, welche eine Bestätigung dieser Ansicht zu
schien, war die im Jahre 1846 beobachtete Theilung des BIELA'schen
. Als derselbe in den beiden folgenden Periheldurchgängen 1859 und
ıt zu sehen war, war die, ebenso unerwiesene Vermuthung naheliegend,
tere Theilungen stattgefunden hätten und die Theile sich in irgend
iso im Weltraume weiterbewegten, als Meteorschwärme, ähnlich den
ı und Leoniden.

ı die Frage nach der Berechnung der Bahnen der Schwärme war ihrer
noch nicht weit entgegengetreten, und nach den ersten Rechnungen
über die Perseiden wurde lange nichts wesentliches hinzugefügt. Erst
PLLI war durch seine weiteren Untersuchungen unter der Voraussetzung
ischen Ursprungs der Meteore auf die parabolische oder der paraboli-
nliche Bewegung der Meteore um die Sonne geführt worden, und hatte
1866 unter dieser Voraussetzung die Bahn der Perseiden berechnet.
ır nicht auch diese Rechnung resultatlos verlief, hat wohl hauptsächlich
nen Grund, dass vier Jahre vorher der für die Meteorastronomie deshalb
als epochemachend zu bezeichnende Komet 1862 III beobachtet
war. Die um dieselbe Zeit publicirten Resultate von v. OPPOLZER über
Kometen ergaben Elemente, deren Aehnlichkeit mit seinen Elementen
eiden SCHIAPARELLI auf den Gedanken eines Zusammenhangs des Stern-
nschwarmes der Perseiden mit dem Kometen 1862 III brachte. Die
o waren:

| e der Perseiden nach SCHIAPARELLI | Elemente d. Kometen (224) (1862 III) nach v. OPPOLZER |
|---|---|
| diant: $\mathfrak{A}' = 44°$, $\mathfrak{D}' = +56°$; | |
| num der Häufigkeit August 10·75 | |
| ng durch das Perihel: Juli 23·62 | $T$ = 1862 August 22·9 |
| ng durch d. niedersteigenden Knoten: August 10·75 | — |
| $\pi$ = 292° 54′ | $\pi$ = 290° 18′ |
| ☊ = 138 16 | ☊ = 137 27 |
| $i$ = 115 57 | $i$ = 113 34 |
| $q$ = 0·9643 | $q$ = 0·9626 |
| $U$ = 108 Jahre | $U$ = 121·5 Jahre. |

der Periode von 108 Jahren war SCHIAPARELLI auf die Identität der
von H. A. NEWTON erwähnten älteren Erscheinungen (vergl. pag. 185) ge-
enen er noch die Erscheinungen von 1029, 1779, 1784, 1789 hinzufügte.

---

[1]) Jahr Feuermeteore, pag. 412.

Schiaparelli und gleichzeitig Le Verrier hatten überdies die Bahn der Leoniden berechnet — und im selben Jahre noch erschien der zweite in dieser Richtung denkwürdige Komet (288), dessen Elemente, von v. Oppolzer berechnet, von C. W. F. Peters sofort als mit denjenigen des Schwarmes der Leoniden identisch erkannt wurden. Die Resultate waren:

| Elemente der Leoniden nach Schiaparelli[1]) | Elemente des Kometen (288) (1866 I) |
|---|---|
| Radiant: 𝔄' = 148° 12', 𝔇' = 10° 16'; Maximum der Häufigkeit: Nov. 13, 18h 11m | nach v. Oppolzer |
| $T$ = November 10·092 | $T$ = Januar 11·160 |
| $\pi$ = 46° 30'·5 | $\pi$ = 42° 24'·2 |
| ☊ = 231 28·2 | ☊ = 231 26·1 |
| $i$ = 162 15·5 | $i$ = 162 41·9 |
| $q$ = 0·9873 | $q$ = 0·9765 |
| $e$ = 0·9046 | $e$ = 0·9054 |
| $a$ = 10·340 | $a$ = 10·324 |
| $U$ = 33·25 Jahre | $U$ = 33·176 Jahre. |

H. A. Newton hatte schon früher gefunden, dass die Knotenbewegung des Schwarms jährlich 1'·711 direkt ist; indem auf die Präcession 0'·837 entfällt, verbleibt eine direkte Knotenbewegung von 0'·874; dass der Schwarm eine retrograde Bewegung besitzt, ergab sich übrigens aus der Bahnbestimmung von selbst, und so schloss Le Verrier[2]), dass der Schwarm nicht immer dem Sonnensystem angehört haben könne; da nun die einfache Sonnenattraction unter allen Umständen die Bahn eines aus dem Weltraume kommenden Körpers immer in eine hyperbolische Bahn lenkt, so kann nur durch die störende Wirkung eines Planeten diejenige Aenderung seiner Geschwindigkeit stattgefunden haben, welche seine Bahn in eine elliptische Form brachte, und Le Verrier fand, dass diese störende Wirkung auf den Novemberschwarm im Jahre 126 n. Chr. Geb. durch Uranus stattgefunden haben müsse. Dieser Schluss wurde nun durch die bald darauf gefundene Beziehung zu dem Kometen (288) stark erschüttert; allein ehe weitere Schlüsse gezogen werden, muss die im Jahre 1899 stattfindende Wiederkehr des Kometen abgewartet werden.

Es war schon früher erwähnt worden[3]) dass Newton für den Schwarm an der Umlaufszeit von nahe einem Jahre festhielt; er nahm für dieselbe 354·62 Tage, sodass 34 Umläufe des Schwarmes nahe gleich 33 Umläufen der Erde wären. Um über die Richtigkeit der einen oder anderen Annahme zu entscheiden, berechnete nun Adams die Secularstörungen des Kometen durch Jupiter, Saturn und Uranus nach der Gauss'schen Methode; die Störungen müssen natürlich verschieden sein, wenn die Umlaufszeit nahe 1 Jahr oder wenn dieselbe 33 Jahre ist; die Rechnung ergab eine Bestätigung der letzteren Annahme, indem sich mit dieser die Secularstörungen für die Dauer eines Umlaufs (33¼ Jahr) durch Jupiter 20', durch Saturn 7¼', durch Uranus 1¼', zusammen 29', also jährlich 0'·872, übereinstimmend mit den Beobachtungen ergab[4]).

---

1) Die Resultate von Le Verrier (Compt. rend. Bd. 64, pag. 248) sind ganz ähnlich, nur in der Neigung findet sich eine stärkere Abweichung.

2) Compt. rend. Bd. 64, pag. 94.

3) Vergl. pag. 180; die Elemente von Le Verrier und Schiaparelli gründen sich auf die Voraussetzung, dass die Umlaufszeit 33¼ Jahr wäre, aus welcher die Geschwindigkeit folgte.

4) Compt. rend., Bd. 64, pag. 651.

Im folgenden Jahre (1867) berechnete GALLE die Elemente der Lyraiden; bald nach dem Erscheinen des Kometen (220) hatte PAPE auf die ungemein grosse Annäherung des Kometen an die Erde aufmerksam gemacht[1]. Nach den definitiven Elementen von v. OPPOLZER ergiebt sich diese Entfernung zu 0·0022 Erdbahnhalbmessern, im aufsteigenden Knoten, dessen Länge 30°, also der Stellung der Erde am 20. April entspricht. Hiermit war der erste Anknüpfungspunkt für die Beziehungen zwischen den Lyraiden und diesem Kometen gegeben, und in der That ergab die Rechnung eine Uebereinstimmung der Bahnelemente. Diese sind:

Elemente der Lyraiden nach GALLE

Radiant $\mathfrak{L}' = 281°·6$, $\mathfrak{B}' = +57°·0$

$\pi = 236°$

$\Omega = 30$

$i = 89$

$\log q = 9·980$

$\log a = 1·746$

$e = 0·9829$

Elemente des Kometen (220) (1861 I) nach v. OPPOLZER

$\pi = 243°$

$\Omega = 30$

$i = 80$

$\log q = 9·964$

$\log a = 1·746$

$e = 0·9835$

Der im Jahre 1836 von HUMBOLDT und HERRICK erwähnte Strom vom 6. December hatte sich 1847 wieder am 6. December wiederholt; ausserdem wurde dann 1839 ein spärlicher Fall (nur 12 Sternschnuppen) aus demselben Radianten am 27. und 29. November von CAPOCCI beobachtet; ebenso 1850 zwischen dem 26. und 29. November von HEIS; 1852 November 28 und 1866 November 30 von HERSCHEL und 1867 November 30 von ZEZIOLI. 1872 und 1885 traten am 27. November ausserordentlich reiche Sternschnuppenfälle auf, und endlich 1892 dieses mal wieder mit 4 Tagen Verfrühung (am 23. November).

1867 wies nun D'ARREST auf den Zusammenhang dieses Schwarms mit dem BIELA'schen Kometen hin (daher der Name Bieliden), welcher seit 1852 verschwunden war. Auf pag. 199 ist für diesen Kometen der Radiant aus den Elementen berechnet; der Radiant der Andromediden ist: $\mathfrak{A}' = 24°$, $\mathfrak{D}' = +44°$, also sehr nahe der dort gefundene Radiant.

Es muss hier noch darauf aufmerksam gemacht werden, dass die Schwärme nicht an einem einzigen Tage erscheinen; CORRIGAN rechnete[2]) für die erwähnten vier Schwärme die folgenden Bahnen mit den den verschiedenen Tagen entsprechenden Radianten:

## Lyraiden.

| | April 18 | April 19 | April 20 | Komet 1861 I |
|---|---|---|---|---|
| Scheinbarer Radiant | $\mathfrak{A}' = 260°·0$; $\mathfrak{D}' = +33°·5$ | $\mathfrak{A}' = 267°·0$; $\mathfrak{D}' = +33°·0$ | $\mathfrak{A}' = 274°·0$; $\mathfrak{D}' = +33°·5$ | |
| Wahrer Radiant | $\mathfrak{A} = 210·5$; $\mathfrak{D} = +55·7$ | $\mathfrak{A} = 222·9$, $\mathfrak{D} = +58·1$ | $\mathfrak{A} = 238·3$; $\mathfrak{D} = +61·0$ | |
| $\pi$ | 255° 42′ | 248° 54′ | 240° 34′ | 243° 42′ |
| $\Omega$ | 29 5 | 30 4 | 31 3 | 30 16 |
| $i$ | 71 21 | 77 29 | 81 23 | 79 46 |
| $e$ | 0·8478 | 0·8944 | 0·9402 | 0·9270 |

[1]) Astron. Nachrichten, Bd. 55, pag. 206.

[2]) Sidereal Messenger, Bd. 5, pag. 146 und 147.

## Perseiden.

| | Juli 26 | August 10 | August 19 | Komet 1862 III |
|---|---|---|---|---|
| Scheinbarer Radiant | $\mathfrak{A}'$ = 27°·0; $\mathfrak{D}'$ = +55°·0 | $\mathfrak{A}'$ = 45°·0; $\mathfrak{D}'$ = +57°·0 | $\mathfrak{A}'$ = 68°·0; $\mathfrak{D}'$ = +57°·0 | |
| Wahrer Radiant | $\mathfrak{A}$ = 359·1; $\mathfrak{D}$ = +81·3 | $\mathfrak{A}$ = 35·2; $\mathfrak{D}$ = +83·8 | $\mathfrak{A}$ = 114·2; $\mathfrak{D}$ = +78·5 | |
| $\pi$ | 274° 27′ | 290° 48′ | 282° 35′ | 290° 32′ |
| ☊ | 124 4 | 138 26 | 147 5 | 137 46 |
| $i$ | 109 56 | 114 11 | 117 7 | 113 34 |
| $q$ | 0·9491 | 0·9555 | 0·8664 | 0·9626 |

## Leoniden.

| | November 13 | November 14 | November 16 | Komet 1866 I |
|---|---|---|---|---|
| Scheinbarer Radiant | $\mathfrak{A}'$ = 148°·0; $\mathfrak{D}'$ = +23°·0 | $\mathfrak{A}'$ = 149°·0; $\mathfrak{D}'$ = +21°·0 | $\mathfrak{A}'$ = 150°·0; $\mathfrak{D}'$ = +22°·0 | |
| Wahrer Radiant | $\mathfrak{A}$ = 150·8; $\mathfrak{D}$ = +23·9 | $\mathfrak{A}$ = 151·5; $\mathfrak{D}$ = +20·5 | $\mathfrak{A}$ = 151·8; $\mathfrak{D}$ = +23·5 | |
| $\pi$ | 49° 32′ | 50° 5′ | 57° 22′ | 42° 24′ |
| ☊ | 231 50 | 232 49 | 234 50 | 231 26 |
| $i$ | 164 17 | 166 21 | 164 11 | 162 42 |
| $q$ | 0·9884 | 0·9882 | 0·9876 | 0·0765 |

## Andromediden.

| | November 27 | BIELA'scher Komet |
|---|---|---|
| Scheinbarer Radiant | $\mathfrak{A}'$ = 23°·7; $\mathfrak{D}'$ = + 44°·3 | |
| Wahrer Radiant | $\mathfrak{A}$ = 352·0; $\mathfrak{D}$ = + 9·3 | |
| $\pi$ | 108° 16′ | 108° 58′ |
| ☊ | 245 57 | 245 53 |
| $i$ | 13 8 | 12 33 |
| $q$ | 0·8578 | 0·8606 |

In wieweit die Veränderlichkeit desselben Radianten innerhalb dieser weiten Grenzen thatsächlich den Beobachtungen entspricht, lässt sich allerdings durch den blossen Anblick nicht constatiren, und müsste Gegenstand einer besonderen Untersuchung sein.

Seither sind noch eine grosse Zahl von Kometenbahnen mit Radianten verglichen worden. Eine ausführliche Zusammenstellung gab HERSCHEL 1878[1]), welche im folgenden abgekürzt wiedergegeben wird.

In der ersten Columne ist der Name des Kometen in der üblichen Bezeichnung in der zweiten das Zeichen ☊ oder ☋ je nachdem er sich im aufsteigenden oder niedersteigenden Knoten der Erde stark nähert, nebst der Entfernung der Bahnen in Einheiten der Erdbahnhalbaxe, positiv oder negativ, je nachdem der Komet innerhalb oder ausserhalb der Erdbahn vorbeigeht; in der dritten und vierten Columne das Datum, zu welchem sich die Erde in dem Knoten der Kometenbahn befindet, nach welchem die Reihenfolge angeordnet ist, und der aus den Elementen berechnete Radiant $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{D}'$; in der fünften Columne die diesem Datum entsprechenden Daten von Sternschnuppenfällen; in der sechsten Columne der Radiant $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{D}'$, und in der letzten Columne die Berufung auf den Beobachter oder das Radiantenverzeichniss. Dabei bedeutet:

1) Monthly Notices, Bd. 38, pag. 369.

C: CORDER
D: DENZA
$D_1$: DENNING
$D_2$: Radianten von TUPMANN'schen und anderen Meteorbahnen nach DENNING
GR: GRUBER
H: HEIS
HK: HERRICK
N: NEUMEYER
SCH: SCHMIDT
T: TUPMANN
GH: Katalog von GREG und HERSCHEL.
HN: Katalog von HEIS und NEUMEYER
SZ: Katalog von SCHIAPARELLI nach Beobachtungen von ZEZIOLI.

| Name | Komet Erdnähe | Komet Datum | Komet Radiant | Meteore Datum | Meteore Radiant | Autorität |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1792 II | ☋ + 0·07 | Januar 5 | 194° + 24°·5 | Januar 11—12 | 188° + 28° | S. Z. |
| | | | | „ 4—31 | 180° + 35° | T. |
| | | | | „ 1—25 | 183° + 36° | G. H. |
| 1860 IV | ☊ — 0·045 | Januar 6 | 187° — 29° | Januar } Februar } | 188° — 26° | $D_1$. T. |
| 1840 I | ☊ — 0·04 | Januar 20 | 128°·5 — 23°·5 | Januar 5 | 145° — 25° | T. |
| | | | | „ | 145° — 40° | H. N. |
| 1746 | ☋ + 0·07 | Januar 16 | 60° + 40° | Januar 28 | 67° + 25° | S. Z. |
| | | | | Decemb. 20 (?) Februar 6 | 65° + 30° | G. H. |
| 1759 III | ☊ — 0·05 | Januar 19 | 210° — 15° | Januar 5—11 | 210° — 6° | T. |
| | | | | Februar 3—10 | 210° — 28° | T. |
| | | | | Februar 17 | 218° — 13° | T. |
| | | | | Januar } | 204° — 10° | $D_1$. T. |
| | | | | Februar } | 210° — 18° | $D_1$. |
| 1672 | ☋ + 0·04 | Januar 20 | 256° + 20° | Januar[1]) } | 251° + 23° | $D_1$. |
| 1857 I | ☋ + 0·08 | Februar 2 | 261° + 23° | Februar } | | |
| 1833 | ☋ + 0·04 | Januar 27 | 135° + 25° | Januar 28—31 | 135° bis 140°; + 40° | G. H. |
| | | | | „ 31 | 134° + 40° | S. Z. |
| 1833[2]) | ☋ — 0·21 | Februar 12 | 144° + 24° | Februar 3 | 158° + 21° | S. Z. |
| | | | | „ 13 | 138° + 26° | S. Z. |
| 1718 | ☊ + 0·04 | Januar 29 | 208°·5 — 31° | Februar 3—10 | 198° — 29° | T. |
| | | | | Jan. — Febr. | 218° — 32° | $D_1$. T. |
| 1699 I | ☋ + 0·12 | Februar 14 | 260° + 9° | Februar 13[3]) | 260° 0° | T. |
| 1797 | ☋ + 0·27 | Februar 18 | 211° + 9° | Februar 13 | 205° + 4° | T. |
| | | | | März 2—3 | 209° + 18° | T. |
| 1845 III | ☋ + 0·06 | Februar 26 | 233° — 4°·5 | Februar 10 | 200° — 12° | T. |
| 1748 | ☋ — 0·08 | Februar 25 | 33° + 33°·5 | Februar 20 bis März 1 } | 35° + 36° | $D_2$. |
| 1231 | ☋ + 0·06 | März 10 | 32° + 31° | Februar bis März 12 } | 28° + 35° | $D_1$. S. |
| 1590 | ☊ — 0·30 | März 8 | 275° — 33° | März 7[4]) | 270° — 29° | T. |

[1]) Weiter entfernt ist der Radiant für den Kometen 1863 V ☋ Januar 24: 272° + 25° und für den Kometen 1810 ☋ Januar 29: 277° + 21°.

[2]) Mit Verschiebung des Knotens.

[3]) In der Nähe noch für Februar 13—15 die Radianten für die Kometen 1858 IV, 272° + 12°, und 1799 II: 264° + 17°.

[4]) In der Nähe die Radianten für den Kometen: 1506 ☊ + 0·48; Februar 6; 266°·5—37° und für den Kometen 1877 I ☊ — 0·185; März 27: 278° — 40°.

| Name | Komet Erdnähe | Komet Datum | Komet Radiant | Meteore Datum | Meteore Radiant | Autorität |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1864 V | ☋ + 0·115 | März 1 | 250°·5 — 12°·5 | März 2—7 | 235° — 15° | T. |
| | | | | März 3—25 | 247° — 3° | S. Z., G. H. |
| 1862 IV | ☋ — 0·013 | März 16 | 249°·5 + 1° | März 7 | 246° 0° | T. |
| | | | | März 14, 15 | 266° + 6° | T. |
| | | | | März 2—7 | 246° + 16° | T. |
| 1683 | ☊ + 0·06 | März 16 | 207° — 48°·5 | März | 192° — 38° | H. N. |
| | | | | März 11—19 | 203°·5 — 30°·5 | T. |
| 1763 | ☋ + 0·02 | März 18 | 312°·5 + 21°·5 | März 15 bis [1]) April 20 | 305° + 37° | G. H. |
| 1790 III | ☋ — 0·06 | April 24 | 319° + 19° | | | |
| 1556 | ☊ + 0·20 | März 19 | 179° — 26° | März | 174° — 30° | H. N. |
| 1264 | ☊ — 0·02 | März 25 | 182°·5 — 23° | | | |
| 1877 I | ☊ — 0·185 | März 27 | 273° — 40° | April | 230° — 38° | H. N. |
| 961 | ☋ + 0·27 | März 23 | 303° + 12° | März [2]) 1—19 | 301°·5 + 12°·5 | $D_1$. |
| 1857 V | ☋ — 0·23 | April 4 | 302° + 11° | April 1—22 | 304° + 12° | $D_2$. |
| 1847 I | ☋ — 0·05 | April 11 | 231°·5 + 27° | April 13 | 231° + 27° | S. Z. |
| | | | | März 27—Mai 22 | 234° + 29° | S. Z. |
| | | | | März 12—Ap. 30 | 238° + 40° | G. H. |
| | | | | April 11—30 | 241°·5 + 24°·5 | $D_1$. |
| | | | | April 12 bis Juni 30 | 235 bis 240° + 25° | G. H. |
| | | | | April 1 — 13 | 235° + 25° | $D_1$; S. |
| 1830 I | ☊ — 0·03 | April 15 | 116°·5 — 36° | April | 126° — 42° | H. N. |
| | | | | März | 125° — 38° | H. N. |
| 1743 II | ☋ — 0·30 | März 26 | 296° + 1°·5 | März 25 [3]) bis April 30 | 290° — 10° | G. H. |
| 1808 III | ☋ — 0·27 | April 15 | 307° + 4° | | | |
| 1861 I | ☋ + 0·01 | April 20 | 270°·5 + 33° | April 19—21 | 277° + 34° | Lyraiden |
| | | | | April 20—22 | 272° + 32° | $D_1$. |
| 1748 II | ☋ — 0·11 | April 28 | 255°·5 + 27°·5 | April 23 | 260° + 40° | S. Z. |
| | | | | April 25 | 260° + 24° | S. Z. |
| | | | | März 15—Ap. 23 | 268° + 25° | G. H. |
| | | | | April 1—13 | 255° + 27° | $D_1$; S. |
| 1844 II | ☋ — 0·06 | April 21 | 263°·5 + 5° | April 19—23 | 287° + 22° | $D_1$. |
| | | | | Mai 2 | 235° + 12° | T. |
| | | | | Mai 2 | 293° + 5° | T. |
| 1853 II | ☋ — 0·07 | Mai 1 | 296°·5 + 13°·5 | April 19—27 | 286° + 5° | $D_1$. |
| 1737 I | ☊ — 0·13 | April 12 | 215° — 23° | Mai | 223° — 12° | Sch. |
| | | | | März 20—Mai 29 | 227° — 5° | G. H. |
| 837 I | ☊ + 0·03 | Mai 1 | 324°·5 — 16° | Apr. 30 bis Mai 2, 3. | 326° — 2°·5 | T. |
| 1835 III | ☋ — 0·06 | Mai 4 | 337° 0° | | | |
| 1618 III | ☋ + 0·10 | Juni 10 | 278°·5 + 0°·5 | Juni 10—13 | 278° — 8° | $D_1$; S. |
| | | | | Juni | 282° — 8° | Sch. |
| | | | | Juni | 266° — 12° | Sch. |
| | | | | Juni | 263° — 11° | H. N. |

[1]) In der Nähe auch die Radianten für die Kometen 1845 I und 1854 V (Februar 13 u. 25) und für die Kometen 1580 u. 1784 II (April 12 u. 26).

[2]) In der Nähe auch die Radianten für die Kometen 1763 (März 18); 961 (März 23); 1857 V (April 4) u. 1825 I (April 9).

[3]) In der Nähe auch der Radiant für den Kometen 1790 III (April 24): 319° + 19°.

| Name | Komet | | | Meteore | | Autorität |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Erdnähe | Datum | Radiant | Datum | Radiant | |
| 1781 I | ☋ − 0·19 | Juni 14 | 338° + 57° | Mai 26—Juni 13 | 337° + 59° | $D_1$.; S. |
| | | | | Mai 1—31 | 325° + 55° | H. |
| | | | | Juni | 333° + 42° | H. |
| 1850 I | ☋ + 0·065 | Juni 24 | 312°·5+60°·5 | Mai 26—Juni 13 | 312° + 68° | $D_1$.; S. |
| | | | | Juni 11—Juli 11 | 315° + 60° | G. H. |
| | | | | Juli 1—15 | 315° + 54° | H. |
| | | | | Juli 16—31 | 320° + 70° | H. |
| | | | | Juli 8 | 288° + 64° | S. Z. |
| | | | | Juli 13 | 338° + 65° | S. Z. |
| 1864 II | ☋ 0·00 | Juni 20 | 8° + 5° | Juli | 7° + 4° | Sch. |
| 1864 II[1] | ☋ − 0·05 | Juni 27 | 12° + 6° | Juli | 18° 0° | Sch. |
| | | | | Juli | 0° + 17° | Sch. |
| 1822 IV | ☋ + 0·14 | Juni 25 | 348°·5+ 28° | Juli | 345° + 25° | Sch. |
| | | | | Juli 18 | 342° + 28° | S. Z. |
| 1822 III | ☋ + 0·11 | Juni 30 | 342° + 14° | Juni 1—13 | 343° + 16° | $D_1$.; S. |
| 1770 II | ☋ − 0·00 | Juli 13 | 349° + 12° | Juni | 335° + 10° | Sch. |
| | | | | Juni 28 | 338° + 18° | T. |
| | | | | Juni 29 bis August 24 | 330° bis 345° + 14° | G. H. |
| | | | | Juli 1—6 | 337° + 1° | C. |
| | | | | Juni 1—13 | 35° + 47° | $D_1$.; S. |
| 770 | ☋ + 0·20 | Juli 8 | 39° + 45° | Juli 6—20 | 36° + 47° | $D_1$. |
| 1770 I | ☋ + 0·02 | Juli 8 | 276° — 21°·5 | Juni 29 bis Juli 6 | 283° — 13° | T. |
| 1770 I[1] | ☋ − 0·22 | August 6 | 283° — 20° | Juli — August | 266° — 12° | Sch. |
| | | | | Juli 18 bis August 31 | 285° — 25° | Sch. |
| 1737 II | ☋ − 0·025 | Juli 29 | 175° + 71° | Ende Juli | 165° + 62° | Sch., S. Z. G. H. |
| 568 | ☊ − 0·01 | Juli 23 | 262°·5 — 33° | Juli | 258° — 20° | N. |
| 568[1] | ☊ − 0·06 | August 5 | 259° — 36° | August | 250° — 35° | N. |
| | | | | August | 265° — 42° | Sch. |
| 1764 | ☋ − 0·11 | Juli 25 | 49° + 45°·5 | Juli 12—20 | 47° + 45° | D. |
| 1862 III | ☋ + 0·02 | August 10 | 43° + 57°·5 | August 7—12 | 44° + 56° | Perseiden |
| 1870 I | ☋ + 0·03 | August 12 | 43°·5+ 53° | | | |
| 1853 III | ☋ − 0·69 | August 12 | 299° + 80° | Juli 24—Aug. 11 | 315° + 87° | S. Z. |
| | | | | Juli 16—Aug. 31 | 315° + 84°·5 | H. |
| | | | | Juli 28—Sept. 10 | 359° + 89° | G. H. |
| | | | | August 10—22 | 270° + 83° | T. |
| 1877 II | ☊ + 0·30 | August 9 | 32° — 18°·5 | August 1—12 | 26° — 6° | Sch. |
| 1852 II | ☊ + 0·018 | August 10 | 40°·5—13°·5 | | | |
| 1827 II | ☊ − 0·16 | August 11 | 48° — 8° | August | 55° — 18° | Sch. |
| 1858 | ☊ − 0·11 | August 26 | 65° — 22° | | | |

[1]) Mit geändertem Knoten.

| Name | Komet | | | Meteore | | Autorität |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Erdnähe | Datum | Radiant | Datum | Radiant | |
| 1862 II | ☋ − 0·025 | August 7 | 41° + 11°·5 | August 10 | 47° + 18° | S. Z.; T. |
| 1862 II [1] | ☋ + 0·08 | August 19 | 47°·5 + 18° | August 4, 22 | 40° + 30° | T. |
| 1746 [2] | ☊ + 0·08 | August 22 | 57° + 21° | August 3—15 | 55° + 26° | G. H. |
| | | | | August 3—12 | 55° + 7° | Sch. |
| | | | | August 20—25 | 58° + 1° | Sch.; T. |
| | | | | Septemb. 3—30 | 51° + 14° | Sch. |
| 1780 II | ☋ − 0·18 | August 14 | 8°·5 + 33°·5 | Juli 28 — Sept. 3 | 1 bis 15° + 30° | G. H. |
| | | | | August 2—11 | 10° + 42° | D. |
| | | | | Juli 27—Aug. 23 | 7° + 32° | T. |
| | | | | August 8—13 | 2° + 20° | D.; T. |
| | | | | August 1—31 | 11° + 30° | Sch. |
| 1808 II | ☊ + 0·07 | August 16 | 89° + 6° | August 29 | 78° + 28° | T. |
| 1797 | ☊ − 0·09 | August 23 | 92°·5 0° | August 31 | 85° − 15° | T. |
| 1596 | ☊ − 0·25 | August 27 | 49° − 9° | August | 53° + 1° | Sch. |
| 1845 III | ☊ − 0·36 | August 31 | 47°·5 − 6° | August 20—25 | 58° + 1° | T. |
| 1854 IV | ☊ + 0·02 | September 10 | 58° − 16° | September | 55° − 6° | Sch. |
| | | | | Septemb. 3—27 | 66° − 22° | Sch. |
| 1858 VI | ☋ − 0·29 | September 8 | 100° + 59° | Aug., Sept., Octb. | 101° + 57° | D₁; T.; S. |
| | | | | Septb. 1—15 | 99° + 57° | D₁; S. |
| 1763 | ☊ − 0·08 | September 20 | 44°·5 − 24° | September | 40° − 8° | Sch. |
| 961 | ☊ − 0·08 | Septb. 26, 27 | 62° − 18° | Septb. 13—15 | 65° + 6° | T. |
| | | | | Septb. 3—27 | 66° − 22° | Sch. |
| 1769 | ☋ + 0·78 | September 19 | 17°·5 + 18° | Septb. 1—10 | 17° + 9° | Sch. |
| 1769 [1] | ☋ − 0·02 | September 28 | 24°·5 + 17°·5 | | 21° + 18° | Sch. |
| | | | | Sept. 17 bis Oct. 21 | 15° + 11° | D₁. |
| 1683 | ☋ + 0·175 | September 19 | 145° + 49°·5 | September | 142° + 67° | Sch. |
| 1830 III | ☋ − 0·15 | September 30 | 172°·5 + 68° | | | |
| 1847 VI | ☋ − 0·265 | October 4 | 54° + 62°·5 | Octb. 1—15 | 51° + 61° | H. |
| 1723 | ☊ + 0·065 | October 9 | 112°·5 − 7° | October | 115° − 10° | Sch. |
| | | | | Octb. 11—16 | 107°·1 − 2°·5 | T. |
| | | | | October 14 | 110° + 6° | T. |
| 1825 II | ☋ − 0·115 | October 7 | 184° + 77° | Octb. 1—15 | 105° + 81° | H. |
| | | | | Sept. 20—Oct. 29 | 161° + 84° | D₁. |
| 1580 | ☊ + 0·18 | October 16 | 61° − 7° | Octb. 5—6 | 54° − 14° | T. |
| | | | | Octb. 12, 13 | 76°·5 − 10° | T. |
| 1779 | ☊ − 0·02 | October 19 | 89° − 29°·5 | October | 40° − 30° | Sch. |
| 1850 II | ☋ − 0·22 | October 19 | 2° + 54° | Octb. 22—28 | 5° + 53° | Sch. |
| | | | | Octb., Novemb. | 15° + 52° | D₁. |
| 1842 II | ☋ − 0·14 | October 21 | 81° + 57° | September 28 | 83° + 54° | S. Z. |
| 1848 I | ☋ − 0·23 | October 25 | 78° + 60° | Octb. 14—25 | 90° + 58° | D₁. |
| | | | | Spt. 17—Nov. 24 | 88° bis 92°; + 50° bis 55° | G. H. |
| | | | | October 15, 16 | 86° + 45° | T. |

[1] Mit geändertem Knoten.

[2] Newton hat hier irrthümlich 1864 II.

| Name | Komet: Erdnähe | Komet: Datum | Komet: Radiant | Meteore: Datum | Meteore: Radiant | Autorität |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1739 | ☋ + 0·08 | October 22 | 157° + 39° | Octb. 3—20 | 142° + 44° | G. H. |
| | | | | November 7 | 160° + 40° | T. |
| 1757 | ☋ + 0·08 | October 8 | 19°·5 + 19° | October 17 | 24° + 20°·5 | Gr. |
| 1757 [1]) | ☋ − 0·88 | October 29 | 30° + 26° | Octb. 19—27 | 38° + 21° | Sch. |
| | | | | November 3 | 30° + 22° | T. |
| | | | | Nov. 9-10 | 28° + 10° | C. |
| 1857 IV | ☋ − 0·26 | October 14 | 278° + 58° | Sept. 17—Oct. 25 | 317° + 57° | $D_1$. |
| 1695 | ☋ − 0·12 | November 1 | 318° + 55° | Nov. 1—13 | 282° + 57°<br>307° + 58° | Sch. |
| | | | | Nov. 7—25 | 299° + 50° | $D_1$. |
| | | | | Nov. 1—15 | 279° + 56° | H. |
| 1864 IV | ☋ + 0·045 | October 16 | 209°·5 + 42°·5 | Nov. 13—Dec. 10 | 201° + 44° | $D_2$. |
| 1097 | ☋ − 0·06 | November 1 | 205° + 48° | Nov. 21—Dec. 20 | 208° + 43° | $D_1$. |
| 837 I | ☋ + 0·84 | November 4 | 101°·5 + 27° | Octb. 20—26 | 99° + 26° | He. |
| | | | | Octb. 22—27 | 109°·5 + 25°·2 | Gr. |
| | | | | Octb. 21—25 | 111° + 29° | S. Z. |
| | | | | Octb. 18—27<br>November | 108° + 12°<br>118° + 14° | Sch. |
| | | | | Oct. 25—Nov. 23 | 110° + 23° | $D_1$. |
| | | | | Nov. 16, 17 | 106° + 28° | C. |
| 1582 | ☋ 0·0(?) | November 9 | 89° + 36° | Octb. 16—31 | 72° + 44° | H. |
| | | | | Oct. 19—Nov. 10 | 71° + 48° | D. |
| | | | | October 24 | 77° + 45° | S. Z. |
| | | | | November 10 | 87° + 47° | S. Z. |
| | | | | Octb. 10—27<br>November | 71° + 31°<br>82° + 45° | Sch. |
| | | | | Nov. 7—17<br>Nov. 7—10 | 75° + 45°<br>80° + 36° | C. |
| 1821 | ☊ + 0·08 | November 11 | 86° + 19°·5 | Oct. 17—Nov. 13 | 90° + 15° | G. H. |
| | | | | Octb. 10—27 | 79° + 18° | Sch. |
| | | | | Octb. 18—27 | 98° + 17° | Sch. |
| | | | | Nov. 20—Dec. 8 | 80° + 23° | $D_1$. |
| 1866 I | ☋ − 0·015 | November 13 | 150°·5 + 23°·5 | Nov. 13, 14 | 149° + 23° | Leoniden |
| | | | | Nov. 19, 20 | 149° + 22° | $D_1$. |
| 1813 I | ☊ − 0·80 | November 24 | 147° 0° | Nov. 25—Dec. 21 | 148° + 2° | $D_1$. |
| | | | | Oct. 31—Dec. 12 | 184° + 6° | G. H. |
| | | | | December | 146° + 16° | Sch. |
| 1852 III | ☋ + 0·005 | November 28 | 23°·4 + 43° | November 27 | 25° + 43° | Andromediden |
| | | | | Nov. 16—17 | 24° + 43° | $D_1$. |
| | | | | November 30 | 17° + 48° | S. Z. |
| | | | | December 6 | 25° + 40° | H. |
| 1702 | ☋ − 0·07 | November 27 | 56° + 20° | Oct. 25—Nov. 21 | 64° + 18° | G. H. |
| | | | | Nov. 28—Dec. 24 | 57° + 26° | $D_1$. |
| | | | | November 10 | 70° + 20° | S. Z. |
| | | | | Nov. 22—Dec. 14 | 79° + 24° | $D_1$; C. |
| 1798 II | ☋ − 0·14 | December 2 | 162° + 34°·5 | Nov. 20—Dec. 13 | 155° + 36° | $D_1$. |
| | | | | December 9 | 154° + 26° | S. Z. |
| | | | | Dec. 5—14 | 108° + 39° | C. |

[1]) Mit geändertem Knoten.

| Name | Komet | | | Meteore | | Autorität |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Erdnähe | Datum | Radiant | Datum | Radiant | |
| 1818 I | ☋ − 0·20 | December 3 | 359° + 58° | Nov. Dec. | 342° + 62° | $D_1$. |
| 1812 | ☋ − 0·23 | December 6 | 200° + 68°·5 | Dec. Januar | 200° + 67° | $D_1$. |
| | | | | Nov. 25—Dec. 14 | 210° + 67° | C. |
| 1743 I | ☊ − 0·025 | November 13 | 21° + 4° | Oct. 18—Nov. 10 | 23° + 8° | Greg |
| 1743 I[1]) | ☊ − 0·14 | December 21 | 11° − 2°·5 | December | 4° + 4° | Sch. |
| 1846 VII | ☋ + 0·09 | Dec. 12—17 | 200°·5 + 4°·5 | Dec. Januar | 207° + 5° | $D_1$. |
| 1858 I | ☋ + 0·075 | December 20 | 221° + 77° | Dec. Januar | 240° + 70° | $D_1$. |
| | | | | Dec. 1—15 | 228° + 78° | H. |
| 1680 | ☋ − 0·05 | December 26 | 182° + 21°·5 | December 9 | 185° + 37° | S. Z. |
| | | | | December | 146° + 16° | Sch. |
| | | | | Dec.-Januar | 117° + 18° | Sch. |
| | | | | Dec. 21 — Jan. 5 | 180° + 20° | D. |
| | | | | December | 180° + 30° | Sch. |
| | | | | December 12 | 186° + 30° | H. |

Die Zahl der Kometen und Sternschnuppen, welche hier in einer Beziehung stehen, erscheint demnach ganz bedeutend; aber, wie dieses schon bei einer anderen Gelegenheit bei den Kometen bemerkt wurde, muss sich wohl die Zahl der anscheinend zusammengehörigen Bahnen und Radianten in dem Maasse erhöhen, als die Beobachtungen zahlreicher werden. Die Sicherheit der Kometenbahnen ist bis auf jenen Grad der Genauigkeit, welcher für diese Identifikation nothwendig ist, schon vorhanden; nicht dasselbe gilt von den Radiationspunkten. In vielen Fällen wird man auch in dem obigen Verzeichnisse Radianten nebeneinandergestellt finden, die um mehrere Grade von einander abweichen, und oft ist die Uebereinstimmung nur als eine sehr mässige zu bezeichnen. Erst wenn es möglich sein wird, genauere Bestimmungen für die Radianten zu erhalten, wozu, auch schon nach dem jetzigen Stande der Beobachtungen, die Reduction der Radianten verschiedener Nächte auf eine gemeinschaftliche Epoche unerlässlich ist, wobei man, zunächst von stellaren Schwärmen absehend, die Formeln von pag. 189 verwenden kann, wird man über die wirkliche Zusammengehörigkeit entscheiden können.

Ein unleugbarer Zusammenhang ist aber unter den vielen Strömen und Kometenbahnen doch bisher nur für vier nachgewiesen: für die Lyraiden, Perseiden, Leoniden und Bieliden; bei den anderen muss erst die Zukunft die Entscheidung bringen.

Sucht man aus der Tafel auf pag. 94 diejenigen Kometen heraus, die der Erde sehr nahe kommen, so erhält man die folgenden vierzehn:

| | | Grösste Erdnähe | | | | Grösste Erdnähe | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 19. — | Halley | 0·050 | | 195. 1853 II | Schweizer | 0·078 | |
| 46. 1680 | Kirch | 0·005 | | 201. 1854 IV | Klinkerfues | 0·016 | |
| 76. 1763 | Messier | 0·025 | | 220. 1861 I | Thatcher | 0·002 | Lyraiden |
| 84. — | Biela | 0·011 | Bieliden | 224. 1862 III | Tuttle | 0·005 | Perseiden |
| 186. 1822 IV | Pons | 0·180 | | 238. 1866 I | Tempel | 0·007 | Leoniden |
| 169. 1845 III | Colla | 0·050 | | 250. 1871 IV | Tempel | 0·068 | |
| 175. 1846 VII | Brorsen | 0·057 | | 308. 1889 IV | Davidson | 0·040 | |

[1]) Mit geänderten Knoten.

Der nachgewiesene Zusammenhang bezieht sich also auf vier Kometen, für welche die grösste Erdnähe kleiner als 0·015 bleibt; für den Kometen 1680 ist der Zusammenhang mit den Decembermeteoren sehr wahrscheinlich, aber immerhin bleibt dabei die Ursache der geringen Zahl der Sternschnuppen noch zu erörtern.

Wird die Entfernung wesentlich grösser, so kann ein Theil des Schwarms die Erde nur dann treffen, wenn dieser sehr ausgedehnt ist, dann wird aber der Radiant nicht fest bleiben, und es werden mehrere nahe bei einanderliegende Radianten an aufeinanderfolgenden Tagen beobachtet werden; sehr nahe liegende Radianten können dann demselben Schwarme angehören. Die Entfernung 0·01 Erdbahnhalbmesser ist noch etwa 233 Erdhalbmesser; der Schwarm muss also immerhin schon eine sehr beträchtliche Ausdehnung haben, wenn er sich selbst in dieser Bahn bewegend Theile in die Erdatmosphäre abgeben soll, die bis auf 150 *km* Höhe herabsteigen. So kann es wohl auch vorkommen, dass einzelne Sternschnuppen von minder ausgedehnten Schwärmen in den obersten Regionen der Atmosphäre die Erde streifen, und es wird kein ausgesprochener Sternschnuppenfall von grossem Reichthum zu sehen sein; dieser Fall mag bei dem Kometen (46) vorliegen. Nichtsdestoweniger wird die Wirkung der Erde auf den Schwarm in dieser Entfernung noch ziemlich beträchtlich sein, und es können auch Bahnänderungen für denjenigen Theil des Schwarms, der an der Erde vorübergeht, auftreten, während der übrige Theil nicht weiter berührt wird. Hat nun der Sternschnuppenschwarm an einzelnen Stellen eine grössere Ausdehnung in der Breite, so kann von dem Wulste, wenn dieser an der Erde vorübergeht, selbst ein neuer, kleinerer Schwarm abgetrennt werden.

Noch mehr ist dieses der Fall bei den Wirkungen der äusseren Planeten, deren Wirkungssphäre bedeutend grösser ist; dadurch kann es auch kommen, dass ein der Erde sehr nahe kommender Schwarm in den aufeinanderfolgenden Erscheinungen, inzwischen gestört durch einen anderen Planeten, ein verändertes Bild darbietet. Ein solcher Fall würde eintreten, wenn z. B. der Komet (201) als Theil eines grossen Schwarms gedacht wird. Dieser Schwarm müsste, da er sich dem Jupiter auf 0·18 nähert (vergl. die Tafel auf pag. 94), vollständig aufgelöst werden, und der aufgelöste Theil kann in die Gegend der Erde nur als sporadischer Schwarm kommen. Das Fehlen eines Sternschnuppenschwarms, welcher diesem sich der Erde ebenfalls stark nähernden Kometen entspricht, ist daher ebensowenig direkt ein Zeichen, dass dieser Komet eine Ausnahme gegen die anderen macht.

Diesem Kometen zunächst kommt, was Annäherung an einen grossen Planeten betrifft, der Komet (220), welcher sich dem Saturn auf 0·3 nähert, und der Komet (46), welcher sich dem Jupiter auf 0·4 nähert. Thatsächlich entspricht dem ersten Kometen der mit den Leoniden an Zahl kaum vergleichbare Strom der Lyraiden; für den zweiten Kometen ist hierin ein zweiter Grund für das schwache Auftreten des ihm entsprechenden Stroms vom 26. December gelegen.

CALLANDREAU[1]) hat auch den Fall in Untersuchung gezogen, dass durch die Anziehung eines Planeten die Bahn eines Sternschnuppenschwarms vollständig geändert würde, und die in der Invariante *K* der Bahn auftretenden Bahnelemente durch die Coordinaten des Radianten ersetzt, so dass man eine Bedingung

---

[1]) Compt. rend. Bd. 112, pag. 1303.

erhält, welche zwischen zwei Radianten erfüllt sein muss, wenn diese demselben Schwarm entsprechen sollen. Die Bedingung lautet:

$$0 = \left\{\left(1 + \frac{2}{a_1^{\frac{1}{2}}} - K\right)\left[\sin^2 \mathfrak{B}' + \cos^2 \mathfrak{B}' \sin^2 (\mathfrak{L}' - \odot)\right] + 1 - p\right\}^2$$
$$- 4 \cos^2 \mathfrak{B}' \sin^2 (\mathfrak{L}' - \odot) \left\{\left(1 - \frac{1}{a_1^{\frac{1}{2}}}\right)(1 - p) + \left(1 + \frac{2}{a_1^{\frac{1}{2}}} - K\right)\right\}$$
$$\left\{1 - \left(1 - \frac{1}{a_1^{\frac{1}{2}}}\right)\left[\sin^2 \mathfrak{B}' + \cos^2 \mathfrak{B}' \sin^2 (\mathfrak{L}' - \odot)\right]\right\}.$$

Bei der Unsicherheit der Radiantenbestimmung und der geringen Veränderlichkeit der Invariante wird diese Gleichung wohl nur ein rein theoretisches Interesse beanspruchen können.

Erscheinungen der erwähnten Art können nun die mitunter auffallende Aehnlichkeit zwischen den Radianten einzelner nicht periodischer Kometen mit Radianten von Sternschnuppen erklären, welche nur einmal oder wenigstens nicht oft und nicht auffällig genug hervortraten, und als grosse Schwärme im Sinne der vier zuerst angeführten nicht bezeichnet werden können.

Betrachtet man die Tabelle von Herschel etwas genauer, so findet man eine sehr bemerkenswerthe Aehnlichkeit mit einzelnen der dort angeführten beobachteten Sternschnuppenfälle bei den folgenden Kometen, die sich der Erde auf weniger als 0·06 Erdbahnhalbmesser nähern können[1]).

| Komet | Fallzeit | Komet | Fallzeit |
|---|---|---|---|
| 9. 1097 | November 1 | 87. 1779 | October 19 |
| 10. 1231 | März 10 | 138. 1821 | November 11 |
| 11. 1264 | März 25 | 158. 1833 | Januar 27 |
| 31. 1582 | November 9 | 206. 1857 I | Februar 2 |
| 48. 1672 | Januar 20 | 219. 1860 IV | Januar 6 |
| 58. 1718 | Januar 29 | 225. 1862 IV | März 16 |
| 65. 1743 I | November 13 | 233. 1864 II | Juni 20 |
| — 1746 | Februar 25 l. niedersteigenden u. August 22 l. aufsteigend. Knoten | 235. 1864 IV | October 16 |
| | | 245. 1870 I | August 12 |
| 78. 1759 III | Januar 19 | | |

Hingegen kann bei anderen Kometen, deren kleinste Entfernung von der Erde ebenfalls 0·06 nicht erreicht, der Zusammenhang mit den Sternschnuppen nicht behauptet werden, d. i. bei den Kometen[2]):

47: 1683 März 16 (d. Annäherung Sept. 19 ist nicht so bedeutend)
108: 1790 III April 24
156: 1840 I Januar 20
228: 1862 II August 7.

Andererseits findet sich eine bemerkenswerthe Aehnlichkeit zwischen den berechneten Radianten von Kometenbahnen und den beobachteten Sternschnuppenradianten bei den folgenden Kometen, die von der Erde ziemlich weit vorüber-

[1]) Zur Erleichterung des Auffindens in der Tabelle ist die Knotenlänge (Fallzeit) hinzugefügt.

[2]) Von den beiden Kometen von 668 und 961, deren Entfernungen —0·06 und —0·08 berechnet sind, kann natürlich abgesehen werden; für die Entfernung wurde hier 0·06 als Grenze angenommen, da dieselbe durch mässige Aenderung in den Elementen wesentlich geändert werden kann; so sind auch die ausserordentlichen Annäherungen der vier Kometen (218) (0·0), (228) (— 0·018) und (11) bezw. (87) je — 0·02) durchaus nicht sicher verbürgt.

gehen (wobei jedoch nur die Kometen nach 1500 berücksichtigt sind), und zwar bei den Kometen für welche elliptische Bahnen berechnet wurden:

| | | |
|---|---|---|
| 124. | 1812 | December 6 (kürzeste Entfernung — 0·23) |
| 136. | 1822 IV | Juni 25 |
| 175. | 1846 VII | December 12 |
| 208. | 1857 IV | October 14 (kürzeste Entfernung — 0·26) |
| 209. | 1857 V | April 4 (kürzeste Entfernung — 0·28). |

Bei dem Kometen (124) bemerkt LEHMANN-FILHÉS, dass die Abweichung im Radianten durch eine geringfügige Aenderung im Knoten beseitigt werden kann. Ferner bei den parabolischen Kometen:

| | | |
|---|---|---|
| 27: | 1556 | März 19 |
| 35: | 1596 | Februar 23 i. niedersteigend. Knoten, kürzeste Entf. +1·4 u. August 27 i. aufsteigenden Knoten, kürzeste Entf. —0·25 |
| 37: | 1618 | Juni 10 |
| 51: | 1695 | November 1 |
| 55: | 1702 | November 27 |
| 59: | 1723 | October 9 |
| 68: | 1739 | October 22 |
| 70: | 1748 II | April 22 |
| 71: | 1757 | October 29 |
| 81: | 1770 I | August 6 |
| 82: | 1770 II | Juli 13 |
| 89: | 1780 II | August 14 |
| 90: | 1781 I | Juni 14 |
| 111: | 1798 II | December 2 |
| 125: | 1813 I | November 24 (kürzeste Entfernung — 0·30) |
| 135: | 1822 III | Juni 30 |
| 160: | 1842 II | October 21 |
| 177: | 1847 I | April 11 (kürzeste Entfernung — 0·05) |
| 187: | 1850 I | Juni 24 |
| 188: | 1850 II | October 19 |
| 218: | 1858 VI | September 8 |
| 261: | 1877 I | März 27. |

Bei den Kometen (70) und (177) ist die Differenz in den Radianten kleiner als 1°, bei den Kometen (90) und (218) kleiner als 2°, und bei den Kometen (37), (135), (187) (kleinste Entfernung 0·065), und (209) kleiner als 3°.

In diesem Falle muss man wohl, wenn man den Zusammenhang aufrecht erhalten will, wie er z. B. bei den letzt erwähnten acht Kometen kaum zu leugnen ist, ausserordentlich breite Ströme annehmen; insbesondere mag der Strom hervorgehoben werden, der mit dem Kometen (177) jedenfalls zu identificiren ist. Der Komet geht an der Erde in der Entfernung von nahe einer Sonnenweite vorüber; hier wird man unmittelbar auf die Idee geführt, dass sich nicht der Schwarm in der Bahn des Kometen, sondern der Komet als ein besonderes Glied, allerdings als ein besonders hervorragendes Glied in der Bahn des ausgedehnten Schwarms bewegt, von welchem ausserdem trotz der grossen Entfernung noch immer sehr häufig kleinere Theile als Sternschnuppen in die Erdatmosphäre gelangen.

Ueber die Art des Zusammenhanges zwischen Kometen und Meteoren ist man vorläufig ebenfalls nur auf Vermuthungen angewiesen. Da sich Kometen

und Meteore in denselben Bahnen bewegen, so haben vorzugsweise zwei Hypothesen Platz gefunden: diejenige von der Bildung der Kometen aus Meteoren und von dem Zerfalle von Kometen zu Meteoren.

Gegenwärtig ist fast allgemein die Hypothese angenommen, dass die von Kometen weggestossenen Theile die Sternschnuppen bilden. An sich ist diese Hypothese gestützt nicht nur durch die Schweifbildung der Kometen, sondern auch durch den wirklich beobachteten Zerfall einzelner Kometen. Aber die Schwierigkeit ist dabei die, dass die Kometenschweife nicht in der Bahn, sondern, namentlich in der Sonnennähe nahe senkrecht zu derselben, in der Richtung des Radiusvectors sind. FAYE[1]) glaubt diese Schwierigkeit dadurch zu beheben, dass er annimmt, dass nicht alle Partikel von dem Kometen durch den Schweif in den Weltraum gehen, sondern einzelne Theile in der Nähe bleiben, welche dieselbe Bahn beschreiben. Dieses widerspricht aber geradezu der Annahme der abstossenden Kraft, wenn man nicht, was viel correkter ist, annimmt, dass sich die den Kometen entsprechenden Meteortheile von dem Kometenschweife selbst durchaus unterscheiden.

BREDICHIN löste diese Schwierigkeit in anderer Weise; er behauptete, dass die Sternschnuppen geradezu aus ganz bestimmten Theilen der Ausströmungen, nämlich aus den anomalen Kometenschweifen entstehen; eine Meinung, der sich später auch andere anschlossen. Man müsste aber hinzufügen: aus anomalen Kometenschweifen, die in der Richtung der Bahn liegen; da solche aber nur äusserst selten (insbesondere z. B. bei dem Kometen 1894 I) beobachtet wurden, so ist die Meinung BREDICHIN's wohl kaum in diesem Sinne zu verstehen. H. A. NEWTON, der noch 1865 die Sternschnuppen nicht als die Fragmente einer vergangenen Welt, sondern eher als das Material für eine zukünftige ansah[2]), sieht 1894 die Sternschnuppen als diejenigen Theile eines Kometen an, welche nicht in den Schweif gestossen werden, sondern dem Kometen in seiner Bahn folgen[3]). Endlich findet man auch die Meinung, dass wenn in einem Meteorstrom sich kein Komet bewegt, dieses ein Zeichen ist, dass der letztere schon ganz aufgelöst ist.

In dieser Allgemeinheit kann der Satz wohl nicht behauptet werden. Man kann wohl sagen, dass durch den Zerfall von Kometen jene Körperchen entstehen, die als Sternschnuppen in deren Bahnen um die Sonne kreisen: dass aber alle Sternschnuppen so entstanden sein müssen, ist unrichtig. Im Gegentheil scheinen grosse und kleine Körper in buntem Durcheinander um die Sonne zu schwärmen: von den kleinsten, unsichtbaren, die in die Erdatmosphäre gelangend, dort als teleskopische Meteore oder auch überhaupt gar nicht sichtbar werden, durch die Gruppe der Sternschnuppen von den verschiedenen Grössenklassen und den grossen Feuerkugeln, von denen oft trotz der ausserordentlichen Menge des verdampften Materials noch kolossale Stücke als Ueberreste zur Erde fallen, hindurch, bis zu den grössten, nicht mehr mit den Sternschnuppen selbst, sondern vielmehr mit den planetarischen Massen vergleichbaren Körpern, welche die Kometen bilden[4]). Dieser qualitativen Zusammengehörigkeit, welche nur einen Unterschied in der Grösse postulirt, hat KIRKWOOD durch die Wahl des Namens Ausdruck gegeben; ganz ähnlich, wie man die kleinen Planeten

---

[1]) Compt. rend., Bd. 64, pag. 553

[2]) American. Journ. of Sciences and Arts, II. Serie, Bd. 39, pag. 207.

[3]) Ibid. III. Serie, Bd. 47, pag. 152.

[4]) Non ad unam natura formam opus suum praestat, sed ipsa varietate se jactat (SENECA).

als Planetoïden bezeichnet, hat KIRKWOOD für die Meteore den sehr passenden Namen Kometoïden vorgeschlagen; doch hat sich dieser Name nicht eingebürgert.

Dabei ist eine Disgregation der Kometen zu Sternschnuppen ebenso wenig ausgeschlossen, wie eine Aggregation von Sternschnuppen zu Kometen, und dass in einzelnen Fällen periodische, früher nie gesehene Kometen sich durch Aggregation von in ihren Bahnen kreisenden Kometoïden gebildet haben, ist nicht unwahrscheinlich. Dass man die Kometoïden nicht sieht, hat seinen Grund darin, dass sie der Lage ihrer Bahn nach nicht in die Erdatmosphäre gelangen.

Diese Annahme wird auch wesentlich dadurch gestützt, dass sich in einer und derselben Bahn oft mehrere Kometen von ganz verschiedenem Aussehen: grosse und kleine Kometen bewegen, wie sich dieses in den »Kometensystemen« zeigt. Dass ihre Bahnen nicht identisch sind, hat seinen Grund in äusseren Störungen, Massenanziehungen der Sonne oder der Planeten, gegen welche dieselben ja eine verschiedene Lage und verschiedene Entfernungen haben. In solchen Kometensystemen erblickt man eben die grössten unter den zahlreichen kleinen Körperchen, welche sich in diesen Bahnen bewegen; Körper, deren Dimensionen jedenfalls so gross sind, dass sie unter einem für ihre Beleuchtungsintensität entsprechenden Gesichtswinkel erscheinen, um gesehen zu werden. Auch in den Sternschnuppenschwärmen muss die Umlaufszeit aller Meteore nicht dieselbe sein; für die aufgelösten Schwärme war dieses bereits erwähnt; in dem Schwarm der Leoniden hat KIRKWOOD überdies drei Concentrationscentra, drei zusammenhängende Schwärme mit etwas verschiedener Umlaufszeit erkannt, der Hauptschwarm hat eine Umlaufszeit von 33·25 Jahren, der zweite eine solche von 33·31 Jahren, der dritte von 33·11 Jahren. Zum ersten Schwarme gehört der Komet (238), welcher vielleicht ein Beispiel für die Aggregation eines Kometen aus Meteoren giebt. Dieser Komet, der sich in derselben Bahn, man könnte sagen, mitten unter dem Hauptschwarm der Leoniden bewegt, wurde vor 1866 nie gesehen; man kann daher auf seine Wiederkehr 1899 wohl gespannt sein. Der zweite Schwarm bewegt sich nahe 12 Jahre später, der dritte nahe 20 Jahre später in der Bahn. Eine Bestätigung dieser Ansicht bleibt noch abzuwarten.

Das Verschwinden des BIELA'schen Kometen wurde so gedeutet, dass aus ihm der Meteorschwarm der Bieliden entstand. Wieder aber kann man nur behaupten, ein Schwarm aus der Reihe der Andromediden; denn Andromediden wurden schon beobachtet, lange bevor der BIELA'sche Komet sich theilte, und dass die Andromediden von 1798 und 1838 von einem Fragmente des Kometen herrühren sollten, ist wohl möglich, aber nicht gerade nothwendig. SCHULHOF meint, dass diese beiden Schwärme von einem Fragmente herrühren müssten, welches dem Kometen im Jahre 1798 um 4 Monate, 1838 um 7 Monate voranging und sich wahrscheinlich 1772 (dem ersten Erscheinen der Bieliden) abgetrennt hat. Es bleiben aber noch die Kometoiden von 1830, 1847, welche von dem Kometen sehr weit entfernt waren, und selbst die grossen Fälle von 1872, 1885, 1892 können, wie SCHULHOF zugiebt, nicht von den beiden Kernen herrühren, in welche der Komet im Jahre 1846 und 1852 zerfallen war; diese bilden also offenbar, da ihre Umlaufszeit mit derjenigen des BIELA'schen Kometen stimmt[1]), einen selbständigen Schwarm, ein zweites Concentrationscentrum, das von dem BIELA'schen Kometen völlig unabhängig ist.

[1]) Bezüglich der ausserordentlich reichen Sternschnuppenfälle in den Jahren 1798 und 1838 hat bereits d'ARREST hervorgehoben, dass sie gerade um 6 Umlaufszeiten des BIELA'schen Kometen auseinanderliegen.

Aehnliche Verhältnisse zeigen sich nach SCHULHOF bei den Leoniden. NEWTON identificirte den Kometen vom Jahre 1366 mit dem Kometen (238) und HIND fand durch Discussion von chinesischen Beobachtungen diese Annahme gerechtfertigt. Im Jahre 1366 ging aber der Komet Anfangs October durch sein Perihel, 1866 im Januar. Daraus schliesst SCHULHOF auf die Möglichkeit, dass die Umlaufszeiten des Schwarms und des Kometen nicht genau gleich, und der Unterschied (33·25 Jahre für den Strom, und 33·18 Jahre für den Kometen) reell wäre. In der That können sich Schwarm und Komet von einander ganz unabhängig bewegen, und jedes Theilchen des Schwarms hat eigentlich für sich seine eigene Umlaufszeit. Immerhin aber ist es schwer, die Umlaufszeit eines Schwarms, der sich über ein Gebiet ausdehnt, welches nahe $\frac{1}{15}$ seiner ganzen Bahn ausfüllt, auf einen kleinen Bruchtheil des Jahres genau zu bestimmen. Je nachdem man dem Bereiche der grössten Verdichtung eine mehr oder weniger grosse Ausdehnung giebt, kann die Abweichung auch in weitere Grenzen eingeschlossen werden.

Das Verschwinden des BIELA'schen Kometen ist keine alleinstehende Thatsache, und ist nur deshalb als eine erwiesene Thatsache angesehen worden, weil man den Zerfall desselben in zwei Theile als den Beginn zu seiner Auflösung ansah. Es giebt aber eine grössere Anzahl von als periodisch erkannten Kometen, die nach einer oder nach einigen wenigen Erscheinungen nicht wieder gesehen wurden. Es sind diese (vergl. pag. 70) die Kometen (45), der nach seiner ersten Erscheinung verschwunden blieb, bis er nach 31 Umläufen neuerdings entdeckt wurde, dann wieder in den nächsten neun Umläufen nicht gesehen wurde; die Kometen (65), (79), (92), (182), (174), die nur einmal gesehen wurden (von den späteren Kometen, bei welchen nur die zweite Erscheinung nach ihrer Entdeckung nicht beobachtet werden konnte, kann natürlich vorläufig abgesehen werden), der Komet (171), der seit 1879 nicht wiedergefunden wurde, und endlich der Komet (189), der bei seiner letzten Erscheinung durch seine ausserordentliche Verminderung der Helligkeit auffiel. Hier scheint man es mit einem Zerfalle zu thun zu haben, der aber nicht vollständig ist, sondern mit einer partiellen Auflösung, welche eine bedeutende Schwächung der Lichtintensität zur Folge hat, und einer späteren neuerlichen Aggregation, mit Verstärkung der Lichtintensität.

In dieser Form offenbaren sich die Kometen, oder eigentlich einzelne Kometen als ephemere Erscheinungen einer anderen Art: sie entstehen nicht als ephemere Erscheinungen im Luftkreise, sondern als ephemere Erscheinungen im Weltraume, und unterscheiden sich von den Planeten durch ihre geringere Consistenz. Aus kleinen Körpern bestehend, über deren Kleinheit oder Grösse wir keinerlei sichere Anzeichen haben, bilden sich dieselben durch Vereinigung, vielleicht durch eine sehr lose Vereinigung von solchen kleinen Körpern, die erst durch äussere Kräfte, namentlich durch die Sonnenwärme in der Sonnennähe wesentlich gelockert, aufgehoben wird, so dass man einen Zerfall des Kometen in mehrere Kerne und selbst mehrere selbständige Kometen wahrnimmt, welche sich, je nach der Beschaffenheit und den weiterhin wirkenden Kräften bei der Entfernung von der Sonne wieder in einen einzigen Körper vereinigen, oder selbst in Theile zerfallen, in grössere, die selbständig ihre Bahnen als Kometen beschreiben, oder auch in ganz kleine Kometoiden.

Die Materie, aus welcher die Kometen bestehen, ist durch spectroskopische Untersuchungen schon genähert bekannt. Nicht dasselbe gilt von den Sternschnuppen. Für letztere hingegen kann man zwei verschiedene Gattungen an-

nehmen, welche nach den Meteoritenfällen unzweideutig erwiesen sind: die metallischen (Meteoreisen) und die nicht metallischen (Meteorsteine). Während nun die Massenanziehung der Sonne auf beide Klassen von Körpern gleichartig ist, kann die Wirkung der elektrischen Thätigkeit gewiss nicht die gleiche sein; von dieser werden die metallischen Körper mehr beeinflusst, und indem sie selbst in einen Zustand starker Ladung versetzt werden müssen, denn es ist vorerst kein Grund vorhanden, im Weltraume andere Wirkungen anzunehmen, als wie wir dieselben auf der Erde kennen, so werden die mit Elektricität und wahrscheinlich auch mit Magnetismus geladenen metallischen Kometoiden aufeinander wirken, und zwar lediglich in Folge ihres elektrischen und magnetischen Zustandes, während die Massenanziehung derselben gegenüber der weitaus überwiegenden Sonnenanziehung verschwindet: dadurch wird eine Aggregation von Meteoreisen zu grösseren Körpern stattfinden können. Damit stimmt auch überein, dass man im Kometenspectrum, wo man nicht bloss das charakteristische Kohlenwasserstoffspectrum fand, die Eisenlinien hervortreten sah. Umgekehrt wird es dann, wenn die elektrische Ladung in grösseren Entfernungen von der Sonne gegenüber der Massenanziehung zurücktritt, von der Intensität der letzteren, bezw. von der Massenanziehung äusserer Körper auf die zusammenhängenden Kometentheile abhängig sein, ob dieser Zusammenhang weiter bestehen kann, oder gelöst wird. So können innerhalb ausgedehnter Meteorschwärme mit Halbaxen, welche Umlaufszeiten von mehreren hundert Jahren entsprechen, Kometen entstehen und vergehen, und die Sternschnuppen sind gleichzeitig die Bausteine für eine neue Welt, und das Resultat des Zerfalles einer gewesenen.

Gleichzeitig ist hierbei nicht zu übersehen, dass wenn die elektrischen Ladungen die Ursachen dieser Aggregationen und Bildungen von Kometen sind, dieselben auch gleichzeitig zu Entladungen Anlass geben können und müssen, welche sich dem Auge in den Kometenschweifen darbieten.

Es ist nun allerdings keine absolute Bedingung für den Zusammenhang von Kometen und Meteoren, dass jeder Komet sich als ein Glied in einem Sternschnuppenschwarme bewege. Dehnt man aber diese Aggregation auch auf die kurz periodischen Kometen aus, so kommt man, da alle sich nahe in der Ebene der Ekliptik und in einem Gürtel von nicht zu grosser Breite bewegen, zu dem Resultate, dass sich ein einziger Ring von Meteoriten nahe in der Ekliptik und in dem Zwischenraum zwischen Mars und Jupiter bewegt. Dass dieses nicht ausgeschlossen ist, ist klar; hier liegt wieder ein Bindeglied zwischen den Kometen und den kleinen Planeten. Die Erhöhung der optischen Kraft der Fernröhre bringt immer neue Glieder dieses Ringes, kleine Planeten und kurz periodische Kometen, zu unserer Kenntniss.

Nicht anders aber steht es mit den nicht periodischen Kometen; wenn jeder dieser Kometen ein Aggregationscentrum von Meteoren wäre, so müssten sich den fortgesetzten aufmerksamen Beobachtungen, wenn auch nicht jetzt, so doch in späteren Zeiträumen und mit lichtstärkeren Instrumenten auch jene Fälle von Kometoiden offenbaren, die sich in den zugehörigen Bahnen bewegen, aber ihrer Unauffälligkeit wegen sich der planlosen Beobachtung entziehen. So werden bereits seit einigen Jahren für alle neu erscheinenden Kometen die Radianten gerechnet; wenn das Resultat bisher noch negativ ist, so kann deshalb noch nicht geschlossen werden, dass die Kometen, welche zu den Aggregationscentren zu zählen sind, zu den Ausnahmen gehören: denn vorläufig entziehen sich alle Meteore, welche nicht in die Atmosphäre gelangen, und welche von NEWTON mit dem Namen Meteoride belegt wurden, sofern sie nicht eine schon ziem-

lich beträchtliche Grösse haben, so dass sie mit den Kometen oder kleinen Planeten verglichen werden können, der Beobachtung.

Man darf nicht vergessen, dass man sich hier noch auf dem Gebiete der Spekulation bewegt. Die Meinung, welche die Kometen für primäre Körper erklärt, welche, durch äussere Kräfte affizirt, zerfallen, Sternschnuppenschwärme bilden, die durch die Erde oder irgend einen anderen Planeten gestört, aufgelöste, in die Länge und Breite gezogene Ströme geben, kann als durch zahlreiche Thatsachen der Beobachtung bestätigt angesehen werden. Nicht minder aber sprechen andere Thatsachen dafür, dass man, bei anderen Kometen, nicht von einem Zerfalle sprechen kann, sondern von einer Neubildung. Und die Frage, warum ist ein Komet nach seiner ersten Erscheinung oder nach einer Reihe von Erscheinungen nicht wiedergesehen worden, ist nicht mehr und nicht weniger berechtigt, als die Frage, warum ist er nicht früher gesehen worden? Bei der Beantwortung dieser Frage darf man sich jedoch nicht von dem Gedanken leiten lassen, dass dabei eine den Kometen specifische Erscheinung vorliegt. Eine Reihe von kleinen Planeten wurde nach ihrer ersten Opposition oder nach einigen Oppositionen nicht wiedergesehen, und trotz der Mannigfaltigkeit der Natur in den Details ist kein Grund vorhanden, hier eine für beide Klassen von Objecten verschiedene Ursache anzunehmen. Die nächstliegende Ursache bleibt aber die, dass man es mit einem Kreislauf der Erscheinungen zu thun hat, mit keiner fortwährenden Neubildung und keinem fortwährenden Zerfalle, sondern mit einem Wechsel von Erscheinungen theilweise constituirender, theilweise destruirender Art.

Auch die Planeten sind in diesen Kreislauf mit eingeschlossen, indem sie durch die Meteorfälle nothwendig Massen aufnehmen. Wenn auch nur die wenigsten Meteore zur Erde gelangen, so darf deshalb nicht übersehen werden, dass jede in den Dunstkreis der Atmosphäre gelangte Masse als mit der Erde vereinigt zu denken ist, und deren Masse vergrössert: denn sie lässt ihre ganze Masse in Dampfform oder in Form von kosmischem Staub, der sich langsam zur Erde niederschlägt, zurück. Man hat daher für die Massenvermehrung nicht nur die Gesammtzahl der Meteorfälle, sondern die Gesammtzahl der Sternschnuppenfälle zu berücksichtigen. Dass andererseits eine Ausstrahlung von Materie in den Weltraum stattfindet, stattfinden muss, folgt unmittelbar aus der jedem gasförmigen, flüssigen oder festen Körper eigenen Tension, vermöge deren er, wenn nicht ein gewisser äusserer Druck auf ihr lastet, Theile in Dampfform abgiebt, sich theilweise verflüchtigt. Dieser äussere Druck kann aber bei den Weltkörpern nur durch einen erfüllten Weltraum gedacht werden, und der nothwendige Druck regulirt sich durch die Menge der Ausstrahlung von selbst. Ob die Aufsaugung von Materie aus dem Weltraum oder die Ausstrahlung der Materie in den Weltraum sich gegenseitig das Gleichgewicht halten, oder ob eine derselben vorherrscht, kann nur durch astronomische Beobachtungen entschieden werden. Durch die Aufsaugung von Massen muss in erster Linie eine Verzögerung der Translations- und Rotationsbewegungen auftreten. Für die Erde speciell müsste sich die Verzögerung der Rotationsbewegung in Form einer Secularbeschleunigung der Translationsbewegungen der anderen Himmelskörper, in erster Linie beim Monde offenbaren. Auch wurde diese Erscheinung in glücklicher Weise von v. Oppolzer zur Erklärung des Umstandes herangezogen, dass die beobachtete Secularbeschleunigung des Mondes grösser ist, als die aus der Theorie der allgemeinen Anziehung sich ergebende. Doch ist man bei der numerischen Bestimmung, vorläufig wenigstens, auch nur auf Vermuthungen angewiesen.

Nicht minder wichtig ist die Betrachtung der zweiten Gattung von Strömen, der stellaren Ströme. Hier hat man es nicht mit Himmelskörpern zu thun, die dem Sonnensystem angehören; es sind Schwärme, welche an der Bewegung des Sonnensystems nicht theilnehmen, und durch die Anziehung der Sonne auf kurze Zeit dem Sonnensystem einverleibt, dasselbe wieder verlassen. Ein Unterschied bezüglich ihrer Stellung zu den Kometen kann jedoch nicht angenommen werden, denn sie stehen zu den sich in hyperbolischen Bahnen bewegenden Kometen in derselben Beziehung, wie die planetaren Schwärme zu den sich in elliptischen Bahnen bewegenden Kometen.

Bezüglich der stellaren Schwärme ist jedoch eine noch grössere Vorsicht geboten. Man hat in vielen Fällen bereits eine grössere Anzahl von identischen Radianten für lange Zeiträume, aber die erscheinenden Sternschnuppen tragen dabei doch den Charakter von sporadischen Sternschnuppen. Zumeist erscheinen während einer Nacht nur einige wenige Meteore aus einem gewissen Radianten, wenn auch durch längere Zeiträume hindurch, durch viele Nächte immer aus demselben Radianten; eigentlich stellare Schwärme, d. i. Sternschnuppen in grösserer Zahl, die aus einem stationären Radianten kommen, sind selten. Da ist es denn nicht ausgeschlossen, dass hin und wieder, wie schon erwähnt Radianten, die in Folge der zulässigen Beobachtungsfehler für identisch gehalten werden, bei genauerer Bestimmung derselben sich als verschiedene ergeben würden; überhaupt ist die zulässige Zahl der Radianten um so grösser, je mehr dieselben getrennt werden, d. h. je weiter die Genauigkeit der Beobachtung eine Differenzirung gestattet. Bei dem heutigen Stande der doch nur sehr rohen Sternschnuppenbeobachtungen ergiebt sich daher eine überwiegende Wahrscheinlichkeit zu Gunsten der Identität von beobachteten Radianten, und damit eine erhöhte Wahrscheinlichkeit für planetare oder stellare Sternschnuppenschwärme.

Nichtsdestoweniger muss das Vorhandensein von Radianten in Betracht gezogen werden, welche, nach Ausscheidung der den Schwärmen angehörigen Radianten, regellos nach allen Richtungen vertheilt sind, und den eigentlich sporadischen Meteoren angehören. Trotz der grossen Zahl der Radianten der ersten Klasse bleibt die von SCHIAPARELLI erkannte Thatsache im Grossen und Ganzen die, dass »der Apex als das hauptsächlichste Condensationscentrum der Meteorschauer anzusehen ist, und dass alle Anomalien in der Vertheilung der Ströme nicht hinreichen, dieses Merkmal zu verwischen«[1]).

Eine gewisse Rectifikation hat dieser Satz allerdings in der auffälligen Erscheinung der Verspätung des Maximums der Sternschnuppenfälle erfahren müssen, wodurch sich, wie schon SCHIAPARELLI erklärt, unleugbar nebst diesem optischen ein physisches Condensationscentrum offenbart. Allein es tritt hier nur eine theilweise Verschiebung, eine resultirende aus zwei Wirkungen auf, von denen die eine, die Wirkung des optischen Condensationscentrums, immerhin auf eine ausserordentlich grosse Zahl von sporadischen, regellos vertheilten Meteoren weist.

Dass diese Meteore, vereinzelt ohne Wirkung auf die grossen Himmelskörper, in ihrer ganzen Menge aber eine nicht unbeträchtliche Wirkung auf die Bewegung der Himmelskörper ausüben können, ist selbstverständlich. WALKER bemerkte schon 1864, dass man in den um die Sonne kreisenden Meteoren den Widerstand zu suchen hat, welcher die Anomalie in der Bewegung des ENCKE'schen Kometen erzeugt. FAYE hat diese Idee später dahin erläutert, dass man es in

---

[1]) l. c., pag. 131.

diesem Falle mit einem sich bewegenden wiederstehenden Mittel zu thun hat, mit dessen Theorie er sich übrigens schon früher (1860 und 1861) beschäftigt hatte. Dem widersprechen aber zwei Thatsachen: Dieses von FAYE supponirte widerstehende Mittel setzt nämlich eine durchweg rechtläufige Bewegung aller Sternschnuppen voraus, und zweitens eine Geschwindigkeit, welche kreisförmigen oder nahe kreisförmigen Bahnen entspricht. Beide Voraussetzungen sind durch die Erscheinungen widerlegt. Selbst wenn man Sternschnuppen sich in Strömen bewegend annimmt, so sind diese Schwärme ebenso wie die sie begleitenden Kometen nicht durchweg rechtläufig, und die Geschwindigkeit ist in allen Fällen weit grösser als die einer kreisförmigen Bahn entsprechende, in einer überaus grossen Zahl von Fallen auch grösser wie die einer parabolischen Bahn entsprechende. Will man also die Sternschnuppen als die das widerstehende Mittel bildenden Körperchen ansehen, so hat man sie als in regellosen Bahnen sich bewegend anzusehen, ähnlich den hypothetischen Bewegungen, welchen nach der Voraussetzung der kinetischen Gastheorie die Moleküle jedes Gases unterliegen. Die in diesen Bewegungen begriffenen, sporadischen Sternschnuppen stehen in keinem unmittelbaren Zusammenhang zu den Kometen; sie sind Theile desselben Weltganzen, und können zur Vergrösserung der Kometen wie der Planetenmassen und zur Beeinflussung ihrer Bewegungen führen, aber nur regellos, wie ihre Vertheilung ist: kosmisch derselben Art, sind sie immerhin in Rücksicht auf ihre Weltstellung von den Sternschnuppenschwärmen zu trennen. N. HERZ.

**Kosmogonie.** Einleitung. Wenn es auch zu keiner Zeit an Versuchen, über die Entstehung des Weltalls Klarheit zu gewinnen, gefehlt hat, so konnten diese doch so lange nur dichterischen oder geschichtlich-philosophischen Werth haben, als die Naturwissenschaft noch nicht über genügendes Beobachtungsmaterial und einwandsfreie Methoden, es zu bearbeiten, verfügte. Die in den Schöpfungsgeschichten und den philosophischen Systemen niedergelegten Weltbildungshypothesen gaben demnach den Aufschluss, den sie geben wollten, in keiner Weise und können höchstens, worauf FAYE[1]) zuerst aufmerksam gemacht hat, dazu dienen, den Umfang der naturwissenschaftlichen Kenntnisse, welche ihre Urheber besassen, bestimmen zu lassen. So ist denn auch noch die Kosmogonie des CARTESIUS[2]) trotz mancher brauchbarer Einzelheiten, viel zu sehr durch vorgefasste Meinungen beeinflusst, als dass sie jetzt noch Bedeutung haben könnte, und der erste Versuch dieser Art, mit dem wir uns hier zu beschäftigen haben, ist derjenige, welchen KANT[3]) 1755 in seiner anonymen,

[1]) FAYE, Sur l'hypothese de LAPLACE, Compt. rend. XC, pag. 566. — Sur l'origine du système solaire, Compt. rend. XC, pag. 637. — Sur l'origine du Monde, Théories cosmographiques des Anciens et des Modernes. 2. Ed. Paris 1885, pag. 8 ff.

[2]) RENATI CARTESII, Principia Philosophiae. Ult. Ed. Amstelodami 1692.

[3]) KANT, Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels oder Versuch von der Verfassung und dem mechanischen Ursprung des ganzen Weltgebäudes nach NEWTON'schen Grundsätzen abgehandelt. Königsberg und Leipzig J. FR. PETERSEN 1755. Im Auszuge von GENSICHEN 1791 nur bis pag. 94 der Originalausgabe nochmals abgedruckt unter Beifügung dreier Abhandlungen von W. HERSCHEL und Anmerkungen von SOMMER. (Von KANT durchgesehen und genehmigt.) Neu herausgegeben 1798 von M. F. In der Ausgabe der Werke KANT's von ROSENKRANZ und SCHUBERT befindet sie sich im 6. Bande. Sie bildet 1890 von H. EBERT herausgegeben das 12. Heft der Classiker der exakten Wissenschaften. — Einzig möglicher Beweisgrund zu einer Demonstration des Daseins Gottes. 1763. Sämmtliche Werke herausgegeben von HARTENSTEIN II, pag. 180 ff.

Friedrich dem Grossen gewidmeten »Naturgeschichte des Himmels« veröffentlicht hat. Nach ihrem ersten Auftreten freilich blieb diese merkwürdige Schrift so unbekannt, dass noch im Jahre 1761 LAMBERT[1]) in seinen »kosmologischen Briefen« eine Anzahl der von dem Königsberger Professor bereits behandelten Fragen nur nach Zweckmässigkeitsgründen, die nach des Verfassers eigenem Geständniss keine grosse Tragweite hatten, glaubte beantworten zu können, und erst nachdem LAPLACE's[2]) »Exposition du Système du Monde« die allgemeine Aufmerksamkeit auf kosmologische Ideen gelenkt hatte, entdeckte man, dass das Werk KANT's reich an solchen war, die mit denen des französischen Geometers zum Theil übereinkamen. Doch ist der Unterschied in den Anschauungen beider grossen Gelehrten immerhin ein so beträchtlicher, dass es nicht angemessen erscheint, sie als KANT-LAPLACE'sche Weltbildungshypothese zusammenzuwerfen, wie dies üblich geworden ist[3]).

Seit dem Bekanntwerden der Arbeit KANT's ist die Frage nach der Entstehung der Welt nicht wieder von der Tagesordnung verschwunden. Spätere Arbeiten haben Neues dem Vorhandenen zugefügt oder sie haben, namentlich seit HELMHOLTZ[4]) und RITTER[5]) das Princip von der Erhaltung der Energie und die kinetische Gastheorie auf die Lehren KANT's und LAPLACE's anwendeten, Unhaltbares ausgeschieden. Darüber hat man aber vielfach aus dem Auge verloren, dass eine gerechte Würdigung der Verdienste KANT's um die Weltbildungstheorie nicht den heutigen Standpunkt der Wissenschaft als Maassstab anlegen darf, sondern auf den der Mitte des vorigen Jahrhunderts zurückgehen muss.

Wir werden demnach am zweckmässigsten ein Bild der geschichtlichen Entwickelung der Lehre und ihres gegenwärtigen Standpunktes erhalten, wenn wir, stets von den Ansichten KANT's ausgehend, deren Fortbildung bis zur Gegenwart verfolgen und nacheinander das Wesen des Urstoffes, die Nebelmassen und Fixsternsysteme, die Fixsterne und unser Sonnensystem betrachten, um schliesslich auf die Quellen der Sonnenwärme noch etwas näher einzugehen.

Vorher jedoch sei die Bemerkung gestattet, dass Versuche, wie der DUPREL's[6]), die Lehre CH. DARWIN's auf die Entstehung der Himmelskörper anzuwenden, völlig aussichtslos erscheinen. Fehlen doch den Himmelskörpern und den sie zusammensetzenden Massentheilchen die Grundbedingungen aller individuellen Fortentwickelung, wie die Möglichkeit der Anpassung an gegebene Verhältnisse und die der Vererbung erworbener Eigenschaften. Wenn KANT[7]) (pag. 18)

---

[1]) LAMBERT, Kosmologische Briefe. Augspurg 1761, pag. 70 und 102.

[2]) LAPLACE, Oeuvres. Paris 1846 VI, Note VII. Die »Exposition du Système du Monde« erschien zuerst 1796.

[3]) So HELMHOLTZ. Populäre wissenschaftliche Vorträge. 3. Heft. Braunschw. 1876, pag. 101. — SCHOPENHAUER, Parerga II, pag. 117. — C. BRAUN, Die Kosmogonie vom Standpunkte christlicher Wissenschaft. 1889, pag. 49 ff. — LAMPA, Naturkräfte u. Naturgesetze, Wien 1895, pag. 117 ff. etc. Schematische Zusammenstellungen beider Hypothesen geben ZÖLLNER, Natur der Kometen. Leipz. 1872, pag. 460, und G. EBERHARD, die Kosmogonie von KANT, Publicationen der v. KUFFNER'schen Sternwarte in Wien, III. Bd. Herausg. von L. DE BALL, Wien 1894, pag. XXVIII ff.

[4]) HELMHOLTZ, Populäre Vorträge. Braunschw. 1871 und 1876. 2. Heft, pag. 120 u. 134. 3. Heft, pag. 101.

[5]) RITTER, Untersuchungen über die Höhe der Atmosphäre und die Constitution gasförmiger Weltkörper. WIED. Ann. V—VIII, X—XIV, XX.

[6]) DUPREL, Die Planetenbewohner und die Nebularhypothese. Leipzig 1880. Entwickelungsgeschichte des Weltalls. Leipzig 1882.

[7]) Ich citire nach dem Abdruck in Heft 12 der Classiker der exacten Naturwissenschaften:

sagt, »dass die Theilchen ihre Bewegung untereinander so lange einschränken, bis sie alle nach einer Richtung fortgehen«, so ist das gewiss doch etwas ganz Anderes, als eine solche Anpassung oder eine direkte Auslese im Sinne DARWIN's, wie EBERT (pag. 99) und EBERHARD (pag. VII) annehmen.

1) Das Wesen des Urstoffes.

Soll eine Weltbildungshypothese nicht von vornherein gegenstandslos sein, so darf sie nicht mit NEWTON[1]) die Welt, wie sie ist, aus der Hand des Schöpfers hervorgehen lassen. Aber ebenso wenig kann sie mit dem absoluten Nichts beginnen. Sie muss unter allen Umständen ein von Anfang Gegebenes voraussetzen. Darüber, dass dies der noch nicht differenzirte, mit Anziehungs- und Abstossungskräften ausgerüstete Stoff war, sind alle Forscher, welche sich mit dem Gegenstand beschäftigt haben, einig. Während nun KANT (pag. 17) als anziehende Kraft nur die Gravitation voraussetzte, fügte man später auch die molekularen Kräfte hinzu und brachte sie zugleich mit der Wärme in die Verbindung, die die kinetische Gastheorie fordert. Die Entdeckung der Fähigkeit der Wärme, chemische Verbindungen zu dissociiren, führte dann weiter zu der Annahme, dass der noch nicht differenzirte Stoff aus den unverbundenen Elementen bestanden haben möchte, ja, als die Fortschritte der Spectralanalyse es als möglich erscheinen liessen, dass die in gegenwärtiger Zeit als Elemente angesprochenen Körper noch zusammengesetzter Natur seien, da lag es nahe, sie als aus einem einzigen oder einigen wenigen Stoffen gebildet anzusehen, welche somit im eigentlichen Sinne des Wortes die Urstoffe wären. Zu der nämlichen Ansicht führten CROOKES[2]) Versuche, die er mit den »seltenen«, namentlich Yttrium und Samarium enthaltenden Erden im äusserst luftverdünnten Raum unter Anwendung des Inductionsfunkens und des Spektroskops anstellte und deren Ergebnisse er zum Gegenstand eines am 18. Februar 1887 in der Royal Institution gehaltenen Vortrag machte. Danach sollen die bisher als Elemente angesehenen Stoffe aus einem Grundstoff, dem »Protyle[3])« gebildet sein, aus dem sich die Atome zusammenballen, wie die Flocken aus den Niederschlägen oder die Wirbelringe aus Rauch. Indem die neuen Gebilde auf das Protyle weiter verdichtend wirkten, beschleunigten sie den Fortgang der Atombildung. Als erstes Element entstand der Wasserstoff, der die einfachste Structur bei niedrigstem Atomgewicht aufweist; ihm folgten der Reihe nach Lithium, Beryllium, Bor, Kohlenstoff, Stickstoff, Sauerstoff, Fluor, Natrium, Magnesium, Aluminium, Silicium, Phosphor, Schwefel, Chlor etc., so dass die Elemente, aus denen die organische Welt besteht, zu den am frühesten auftretenden gehören. Ging diese Atombildung hinreichend langsam vor sich, so entstanden scharf ausgeprägte Elemente, wurde sie durch irgend eine Ursache beschleunigt, so konnten Gruppen einander ähnlicher Stoffe zum Vorschein kommen, wofür die Eisen, Nickel und Kobalt enthaltende ein Beispiel ist. Die graphische Darstellungsweise REYNOLDS' (CROOKES a. a. O., pag. 24), welche die Atomgewichte als Abscissen, die Phasen der abnehmenden Schwingungsweite eines Pendels, dessen Schwingungsmittelpunkt auf der Abscisse fortschreitet, als

---

1) NEWTONI, Philosophiae naturalis Principia mathematica. Ed. altera. Colon. Allobrog. 1760. T. III, pag. 672.

2) CROOKES, Die Genesis der Elemente, ein Vortrag, gehalten in der Royal Institution zu London. Deutsch von DELISLE. Braunschw. 1888.

3) Nach der Ableitung aus πρό und ὕλη hätte man die Bezeichnung »die Prohyle« erwarten sollen.

Ordinaten benutzt, giebt zugleich über das elektrische, vielleicht auch magnetische Verhalten der Körper und ihre Stellung im NEWLAND-MENDELEJEFF'schen System Aufschluss. Dass GRÜNWALD[1]) zu ähnlichen Ergebnissen durch Untersuchung der Gasspectren kam, darf hier freilich nicht als Bekräftigung herangezogen werden, da nach KAISER's[2]) Kritik diese Ergebnisse schwerlich gerechtfertigt sind. Die Frage, was dem Protyle voranging, beantwortet CROOKES nicht, er deutet nur an, dass dies Elemente mit negativem Aequivalent gewesen sein könnten, vielleicht auch die Elektricität, die nach HELMHOLTZ[3]) möglichenfalls aus Atomen bestehe und aus dem Lichtäther gebildet sein könne. Dieser setze demnach in seinen abgeleiteten Formen das Weltall zusammen. Mehrere Entdeckungen der neuesten Zeit namentlich auf chemischem Gebiete dürften freilich eine Modifikation einiger dieser Annahmen fordern.

## 2) Die Nebelmassen und Fixsternsysteme.

Wenn CROOKES auch die Ursache, die das Protyle zur Verdichtung anregte, im Dunkeln liess, so hat er mit seiner Hypothese einen Schritt weiter zu thun versucht, als alle seine Vorgänger. Denn diese beschränken sich darauf, aus der Voraussetzung eines mit Kräften ausgestatteten Urnebels oder Feuernebels die Entstehung von Weltkörpern mit rotirender und in bestimmter Richtung fortschreitender Bewegung, wie es die Fixsterne sind, zu erklären.

Dass solche Nebelmassen, deren Theilchen gasförmig sind, in der That bestehen, ist durch die Spectroskopie bewiesen worden, dass der Weltraum »geradezu ausgefüllt ist mit mehr oder weniger ausgedehnten Gebilden sehr dünn verstreuter Materie,« die vermuthlich in physikalischer Beziehung sehr verschiedene Constitutionen aufweisen, hat die Himmelsphotographie über jeden Zweifel erhoben[4]). Aber es giebt auch eine Anzahl Nebel, welche sich bei genügend starker Vergrösserung in Sterne auflösen, und die Beobachtung solcher war es, welche WILLIAM HERSCHEL[5]) eine Ansicht wieder aufnehmen liess, die KANT bereits dreissig Jahre vorher auf eine Arbeit von WRIGHT[6]) gestützt ausgesprochen hatte (pag. 11). Danach sollen alle Nebelflecke Fixsternsysteme sein, die so weit von uns entfernt sind, dass die einzelnen Sterne nicht mehr als solche erkannt werden können, ihr Licht zu einem gemeinschaftlichen hellen Scheine zusammenfliesst. Diese wie Inseln im Weltall verstreuten Sternmassen sollten Systeme bilden, welche Räume von verschiedenster Form einnähmen. Auch unsere Sonne gehöre einem solchen von linsenförmiger Gestalt an. Für das in der Richtung seiner grössten Ausdehnung blickende Auge fliesse das Licht der dort befindlichen Sterne zusammen und erscheine am Himmel als eine Zone von grösserer Helligkeit, wie die Umgebung, erscheine als uns

---

[1]) GRÜNWALD, Ueber die merkwürdigen Beziehungen zwischen dem Spectrum des Wasserdampfes und den Linienspectren des Wasserstoffs und Sauerstoffs, sowie über die chemische Structur der beiden letzteren und ihre Dissociation in der Sonnenatmosphäre. Astron. Nachr. 1887. No. 2797. — Mathematische Spectralanalyse des Magnesiums und der Kohle. Sitzungsber. der Akademie der Wissenschaften zu Wien. 1887. XCVI. Abt. II, pag. 1154. — Spectralanalyse des Cadmiums. Ebenda. 1889. XCVIII. Abt. II. 967.

[2]) KAISER, Chemiker-Zeitung 1889, No. 100 und 102.

[3]) HELMHOLTZ, FARADAY-Vorlesung 1881.

[4]) H. SEELIGER, Ueber den neuen Stern im Sternbild Auriga. Astron. Nachr. 1892, No. 3118.

[5]) W. HERSCHEL, On some observations tending to investigate the construction of the heavens. Philosophical Transactions of the Royal Society. 1784.

[6]) WRIGHT, An original Theory of the Univers. London 1750.

Milchstrasse. Ein solches System besitze eine rotirende Bewegung, die einen Mittelpunkt voraussetze, und zwar sollte diese nach KANT's Vermuthung (pag. 7) für unser Sonnensystem im Sirius liegen. Wegen des grossen Radius erscheine uns diese Rotation nicht als solche, sondern sie mache sich in einer fortschreitenden Bewegung unserer Sonne bemerkbar, wie KANT bereits annahm. Wenn nun auch Sirius als Centralsonne nicht beibehalten werden konnte, so ist es bekannt, dass man erst in neuerer Zeit von den Bestrebungen zurückgekommen ist, ihn durch eine andere zu ersetzen.

Die Annahme KANT's und HERSCHEL's konnte in ihrer Allgemeinheit nicht beibehalten werden, nachdem die gasförmige Natur vieler Nebel unzweifelhaft dargethan worden war. Man hielt diese nun für in der Bildung begriffene Fixsternsysteme und wurde in diesem Glauben durch die von einigen von ihnen mit Hilfe der Photographie erhaltenen Bilder nur bestärkt. So zeigt der von ROBERTS[1]) am 26. November 1892 photographirte Nebel M 77 Ceti einen dichteren sternförmigen Kern mit einem ebenfalls starke Verdichtungen aufweisenden Ringe, der von demselben Astronomen[2]) am 14. April 1893 photographisch aufgenommene H 1 168 Ursae majoris Spiralform mit einem Stern in der Mitte und mit Windungen, von denen jede in Sterne aufgelost ist. Von diesen Sternen sind einige scharf begrenzt, während sich die anderen in allen Stadien der Entwickelung zu befinden scheinen. Auch im berühmten Sternhaufen im Hercules, in dem Nebel der Andromeda zeigen photographische Aufnahmen deutlich Sterne mit nebelartiger Umgebung, und Nebeltheile mit sternartiger Verdichtung, die die verschiedenen Stadien der Entwickelung darstellen mögen.

Soll ein Nebel über weite Raume ausgebreitet werden, so muss er eine grosse Menge von Energie zugeführt erhalten, die er dann bei seiner Verdichtung wieder ausgiebt. KANT und LAPLACE legten seinen Theilchen nur die Eigenschaft der Schwere bei, um die Möglichkeit seiner Verdichtung zu erklären, wenn auch der französische Forscher sich den Nebel als im höchsten Grade erhitzt vorstellt, während HELMHOLTZ in der von Anfang an vorhandenen beträchtlichen Wärmemenge in Uebereinstimmung mit dem Princip der Erhaltung der Energie den in Nebel enthaltenen Kraftvorrath sieht. Zur Erklärung dieser Wärme blieb nun nichts übrig, als die beim Zusammentreffen zweier Nebel auftretende Stosswirkung heranzuziehen. Das that zuerst 1870 LANE[3]), indem er aber zugleich darauf hinwies, dass die Contraction einer Nebelmasse, welche in Folge ihrer durch Stoss erzeugten Erhitzung weit über ihr früheres Volumen ausgedehnt worden sei, nachher keineswegs nur eine durch Abkühlung hervorgerufene Volumverminderung zeigen könne. Der 1877 von CROLL[4]) gemachte Versuch, durch dieselbe Annahme die kosmischen Nebeln inne wohnenden Wärmemengen zu erklären, scheiterte daran, dass er seinen Rechnungen Geschwindigkeiten zu Grunde legte, wie sie im Weltenraum nicht vorkommen. So blieb es RITTER vorbehalten, mit Vermeidung dieses Fehlers an der Hand der Errungenschaften der kinetischen Gastheorie das Problem in einer Weise zu behandeln, die bei grossem Reichthum ihrer Ergebnisse auch die Erklärung vieler an den kosmischen Nebeln gemachten Beobachtungen liefert. Danach muss sogleich nach dem Zusammenstoss

---

1) ROBERTS, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 1893. Vol. LIII, pag. 331.

2) ROBERTS, Ebendas. 1893. Vol. LIV, pag. 92.

3) LANE, On theoretical temperature of the Sun. Sillimans Journal, Juli 1870.

4) CROLL, Philosophical Magazine. 1878, Ser. V, T. VI, pag. 1. Quarterly Journal of Science 1877, LV. Ueber die Unhaltbarkeit der gemachten Annahme vergl. auch R. C. WOLF, Les hypothèses cosmogoniques. Bulletin astronomique 1884, T. I, 1885, T. II.

die innere Wärme so gross werden, dass die von ihr hervorgerufene Expansion die Massentheilchen des Nebels in heftige Bewegung versetzt. In Folge ihrer Trägheit überschreiten sie dabei ihre dem Zusammenwirken der Expansion und Cohäsion entsprechende Gleichgewichtslage und die so entstehende übermässige Ausdehnung muss Abkühlung hervorrufen. Dann tritt die Gravitation wieder in Wirkung, die Theilchen gehen aber wieder nach der anderen Seite über die Gleichgewichtslage hinaus, die innere Wärme und mit ihr die Leuchtkraft wird wieder erhöht, und so muss sich der geschilderte Vorgang in regelmässigen Schwingungen, Pulsationen, wiederholen. Weniger glücklich dürfte die Annahme LOCKYER's[1]) und G. H. DARWIN's[2]) sein, die einen Meteorschwarm voraussetzt, welcher sich durch Verdichtung bis zum Verdampfen erhitzte und so den kosmischen Nebel erzeugte.

Ein auf die obige Weise durch den Zusammenstoss eingeleiteter Neubildungsprocess kann nun auf doppelte Art seinen Abschluss finden. Je nachdem er in einer nach Innen oder nach Aussen gerichteten Bewegung der Massentheilchen endet, müssen centripetale und centrifugale Gebilde entstehen. Zu den letzteren gehören vielleicht die spiralförmigen Nebel, deren Eigenthümlichkeiten unter der Voraussetzung eines excentrischen Stosses sich erklären lassen. Ihre sich ausbreitenden Massentheilchen können sich im Raume zerstreuen und RITTER denkt daran, dass sie, wenigstens zum Theil, den Stoff für die Kometen und Meteore lieferte. Doch ist es auch denkbar, dass die nach Aussen gerichtete Bewegung der Massentheilchen eines centrifugalen Nebels bei zunehmender Entfernung vom Mittelpunkt auf umherschwärmende Stofftheilchen stossen, welche ihre Bewegung hemmen, so dass bei fortschreitender Verdünnung der im Innern gelegenen Regionen ringförmige Nebel entstehen können. Ebenso würde die Bildung strahlenförmiger Nebel und Sternhaufen verständlich werden, vielleicht auch die Existenz der Milchstrasse und das Verschwinden von Nebeln aus ähnlichen Vorgängen zu erklären sein. Noch in langsamen Schwingungen begriffene Gebilde sind vielleicht die zuerst von WINNECKE[3]) beobachteten periodischen Nebel (RITTER XII, 461.)

## 8) Die Fixsterne.

Sollten sich aus den kosmischen Nebelmassen Fixsternsysteme bilden, so mussten sich einzelne Partieen ablösen und ihr Verdichtungsprocess musste zur Bildung von Fixsternen führen. Diesen Vorgang denkt sich KANT, der übrigens weder Doppelsterne, noch vielfache Sterne kannte, folgendermaassen. Den solche Nebel bildenden Atomen kommen abstossende und anziehende Kräfte zu, die letzteren treten in verschiedener Stärke auf. Die in geringerer Menge vorhandenen, mit stärkerer Anziehung begabten Atome werden einerseits mit grösserer Kraft nach dem Mittelpunkt der Anziehung hinstreben, andererseits aber eine Anzahl anderer um sich sammeln und so zunächst zu kleineren Atomgruppen zusammentreten, die sich durch dieselbe Wirkung je länger, je mehr vergrössern. So kommen, wie KANT es ausdrückt, »Klumpen« zu Stande, welche sich nach dem Mittelpunkt zu bewegen suchen. Da aber die Zurückstossungskraft der auf ihrem Wege liegenden Theilchen und Gruppen sie hindert, dies in gerader Linie zu thun, so werden sie seitlich abgelenkt und ertheilen der

[1]) LOCKYER, The meteoric hypothesis. London 1890. Bulletin astronomique. T. V. pag. 408 und T. VIII, pag. 225.

[2]) G. H. DARWIN, Philosophical Transactions of the Royal Society. 1889, V. 180, pag. 1.

[3]) WINNECKE, Astron. Nachr. No. 2293.

ganzen chaotischen Masse mit der Zeit eine langsame Rotation um eine durch jenen Mittelpunkt gehende Axe. Das setzt allerdings voraus, dass die einzelnen Antriebe in einer bestimmten Drehungsrichtung überwiegen und dass das der Fall sein wird, ist in hohem Grade wahrscheinlich. Das geringste, nach einer Seite hin auftretende Uebergewicht muss aber eine Drehung in einem bestimmten Sinne hervorrufen und so eine Rotation des Nebels verursachen. Ist diese nun eingetreten, so werden eine Anzahl solcher Theilchen oder Gruppen in »freier Cirkelbewegung« in den Abständen vom Rotationsmittelpunkt verharren, in denen ihre Schwere der Centrifugalkraft gleich ist. Alle diejenigen aber, die nicht in diese Bewegung hinein gezogen sind, setzen ihre Bahn zum Mittelpunkte fort, bis auch sie eine rotirende Bewegung erhalten oder bis sie an der Bildung des Centralkörpers Theil nehmen. Die gegenseitige Anziehung der letzteren wird diesem eine Kugelform ertheilen, während sich die rotirenden Theilchen in eine flache Scheibenform ordnen, die ihr Entstehen dem Umstand verdankt, dass an alle diejenigen von ihnen, welche nicht in der Aequatorebene liegen, eine in diese sie zu ziehen strebende Kraftcomponente angreift.

Diese Entwickelung KANT's ist aber unannehmbar, weil sie gegen das Princip der Erhaltung der Flächen verstösst. Indessen darf man dessen Nichtberücksichtigung dem Königsberger Philosophen nicht zu hoch anrechnen. War auch das genannte Gesetz 1746 von EULER[1]) und DANIEL BERNOULLI[2]), sodann in einer 1750 veröffentlichten Abhandlung noch einmal von D'ARCY[3]) aufgestellt worden, so war dies in einer Form geschehen, welche seine Gültigkeit für den vorliegenden Fall nicht so ohne Weiteres hervortreten liess[4]). LAPLACE (pag. 471) vermied diesen Fehler, indem er die rotirende Bewegung des Urnebels als mit ihm gegeben voraussetzte. Ihm folgte HELMHOLTZ (II, pag. 119), der sich sonst eng an KANT anschliesst. RITTER (XII, pag. 459) ist dagegen der Ansicht, dass »so lange man an der KANT-LAPLACE'schen Hypothese festhält, nach welcher die Sonnenoberfläche ursprünglich bis über die Neptunsbahn hinaus sich erstreckt haben musste«, die Annahme nicht wohl umgangen werden kann, dass unser Sonnensystem »durch den Zusammenstoss von zwei oder mehreren kosmischen Wolken, welche vor dem Stosse bereits gewisse interstellare Anfangsgeschwindigkeiten besassen«, entstanden sei. Dieselbe Forderung stellt er mit der bereits für die veränderlichen Nebel ausgeführten Begründung auch für die Entstehung der veränderlichen Sterne, während er »gegen die Annahme, dass unter den unveränderlich leuchtenden Fixsternen der eine oder andere durch allmähliche Verdichtung einer einzelnen kosmischen Wolke entstanden sein könnte«, keinen wesentlichen Einwand zu erheben vermag.

Gegen diese Stosstheorie sind zweierlei Einwände gemacht worden, einmal der, dass die grösste Wärmemenge bereits ausgestrahlt gewesen sein müsse, ehe sich die Körper des betreffenden Systems ausbilden konnten, und sodann der andere, dass ein solches Zusammentreffen noch nie beobachtet worden sei. Bei dem ersten Einwand ist aber übersehen, dass die Bildung des Systemes und die

---

1) EULER, Solutio problematis mechanici de motu corporum tubis mobilibus inclusorum, Opuscula varii Argumenti. Bd. II. 1746.

2) D. BERNOULLI, Nouveau problème de mecanique résolu. Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Bd. I. 1746.

3) D'ARCY, Problème de Dynamique. Mémoires de l'Académie Française. Paris 1750, pag. 344—361.

4) DÜHRING, Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik. 3. Aufl. Leipzig 1887, pag. 281.

Wärmeausstrahlung ja der nämliche Vorgang ist. Gegen den zweiten führt RITTER an, dass die an der Erdoberfläche beobachteten Meteoritenfälle, die höchst wahrscheinlich auch auf der Sonne vorkommen, ja nichts anderes sind, als gelegentliche Zusammenstösse von Theilen der im Weltenraume zerstreuten Materie. Dem ist zuzufügen, dass wenn wir annehmen müssen, wie sogleich näher begründet werden soll, dass die Fixsterne gleichaltrig sind, solche Ereignisse überhaupt nicht mehr stattfinden werden. Indessen liegen auch Beobachtungen vor, die vielleicht auf einen zukünftigen oder aber auf einen thatsächlichen Zusammenstoss hindeuten. So sind möglichenfalls die Doppelnebel Gebilde, für welche eine solche Katastrophe in verhältnissmässig naher Aussicht steht, so hat man von verschiedenen Seiten das mehrmalige Wiederaufleuchten des neuen, im December 1891 erschienenen Sternes im Fuhrmann auf solche Zusammenstösse zurückgeführt. VOGEL[1]) macht darauf aufmerksam, dass die dabei beobachteten Erscheinungen sehr wohl ihre Erklärung in der Annahme finden würden, dass ein Körper von der Grössenordnung unserer Sonne durch das System eines andern ebensolchen gegangen und mit einigen von dessen Gliedern zusammengestossen sei, während SEELIGER[2]) meint, derselbe Zweck werde durch die Unterstellung erreicht, dass ein solcher Körper verschieden dichte Parthieen eines Nebels durchzogen habe. Dabei dürfen wir jedoch zu bemerken nicht unterlassen, dass HUGGINS[3]) und BERBERICH[4]) diese Annahmen nicht für nöthig erachten, sondern das mehrfache Aufleuchten der Nova Aurigae durch Gasausbrüche, die dort stattfanden, erklären zu können glauben.

Die Fixsterne werden als Endgebilde der sich verdichtenden centripetalen Nebel angesprochen werden müssen, es wird von deren Form und Grösse abhängen, ob sich ein einzelner oder mehrere bilden. Die Theilchen eines ursprünglich kugelförmigen Nebels können sich zu einer grossen Zahl kleiner Körper vereinigen und aus solchen sind vielleicht die kugelförmigen Sternhaufen im Hercules und in den Jagdhunden entstanden (FAYE). Hatte der Nebel von vornherein, oder in Folge seiner Rotation eine abgeplattete Gestalt erhalten, so konnten mehrere grössere Stoffanhäufungen zu Stande kommen, wie sie die doppelten und vielfachen Sterne zeigen, oder es trat im Mittelpunkt ein einziger Körper von grosser Masse auf, ausser ihm aber entstehen eine grössere oder geringere Anzahl rasch erlöschender Begleiter, welche der Centralkörper zwingt, ihn nach dem dritten KEPPLER'schen Gesetz zu umkreisen, es entstehen Sonnensysteme.

Fassen wir zunächst den Centralkörper ins Auge, der durch die Verdichtung der in die Mitte des Systemes gelangenden Nebelmassen sich bildete, so werden bei diesem Vorgange in derselben Weise, wie wir dies bei den Nebeln gesehen haben, pulsirende Bewegungen Platz greifen, die eine abwechselnde Erhitzung und Abkühlung und in Folge davon ein periodisches Aufleuchten zeigen müssen. Während die Dauer einer Pulsation im Laufe der Zeiten sich nicht ändert, nimmt ihre Amplitude, je nach der Menge der schwingenden Stofftheilchen, in kürzeren oder längeren Zeiträumen ab. Auf solche Weise würden die veränderlichen Sterne von nicht zu kurzen Perioden entstehen, die ihre Veränderlichkeit mit der Zeit verlieren müssen. Veränderliche Sterne von sehr langen Perioden würden vielleicht in manchen Fällen als plötzlich aufleuchtende erscheinen können

[1]) H. C. VOGEL, Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1893.

[2]) H. SEELIGER, a. a. O.

[3]) W. HUGGINS, Naturwissenschaftliche Rundschau. 1893. VIII, pag. 389.

[4]) BERBERICH, Ebendas. 1893. VIII, pag. 307.

(Ritter VIII, 181, XII, 459, XIII, 366), welche Annahme dem Ergebniss der spectralanalytischen Forschung wenigstens nicht widerspräche. Veränderliche Sterne von kurzer Periode werden dagegen nach den an Algol gemachten Beobachtungen vielfache oder Doppelsterne mit schwach leuchtenden oder dunkeln Begleitern sein. War die den Fixstern bildende Nebelmasse nicht gleichförmig vertheilt, so können im Innern der ihn bildenden Gaskugel noch untergeordnete Schwingungen der Massentheilchen eintreten, welche die Ursache von secundären Maximis und Minimis der Helligkeit würden.

Demnach zerfällt die Erscheinungsdauer eines Fixsterns in drei Abschnitte (Ritter XX, 158). Während der ersten wird nur ein Theil der durch die Gravitationsarbeit erzeugten Wärme ausgestrahlt; der Rest wird verwendet, um seine innere Wärme und Oberflächentemperatur zu erhöhen. Da alsdann die Dichtigkeit des Sterns noch gering ist, so werden Strahlen, die aus seinem Innern austreten, kaum Absorption erleiden, da aber auch seine Temperatur noch sehr niedrig ist, so wird die ausgesendete Lichtmenge nicht gross und namentlich arm an brechbaren Strahlen sein. Erfolgt nun die Zustandsänderung des Sterns am Anfange dieses Abschnittes sehr langsam, so nimmt sie gegen dessen Ende, wenn der Stern beginnt, helleres Licht auszustrahlen, an Geschwindigkeit zu, bis ein Maximum der Helligkeit und der Menge der ausgegebenen brechbareren Strahlen erreicht, der Stern in den zweiten Abschnitt seines Bestehens getreten ist. Dieser geht noch über den Zeitpunkt hinaus, in welchem sich ein centraler dichter Kern zu gestalten beginnt. In ihm nehmen zunächst die Oberflächentemperatur und die innere Wärme fortwährend zu, auch dann noch, wenn die Stärke des ausgestrahlten Lichts bereits abzunehmen beginnt und die anfangs noch erfolgende Zustandsänderung langsamer geworden ist. So lange die umgebenden Gasschichten noch immer heisser werden, ist es möglich, dass das Spectrum eines solchen in seiner Anfangsperiode befindlichen Sterns die Wasserstoff- und Heliumlinien hell zeigen kann. Je mehr sich aber nun jene Gasschichten abkühlen und gleichzeitig verdünnter werden, in um so reicherem Maasse durchdringen die vom Kern ausgehenden Strahlen die Hülle; indem diese aber Strahlen bestimmter Brechbarkeit absorbirt, zeigt der Stern nunmehr ein dem der Sonne ähnliches Spectrum. Dieser Zustand zeigt die längste Dauer und ist dadurch ausgezeichnet, dass sich, während er anhält, die Oberflächentemperatur des Fixsterns nicht merklich ändert. Ihr absoluter Werth ist um so grösser, je grösser die Masse des Sterns ist, und da ein Körper von höherer Temperatur brechbarere Strahlen in grösserer Menge aussendet, als ein solcher von weniger hoher, so müssen die weissen Sterne eine grössere Masse haben, wie die gelben, damit stimmt überein, dass die Masse des Sirius vierzehn Mal grösser ist, wie die der Sonne[1]). Erst wenn im dritten Abschnitt der Existenz eines Sterns Oberflächentemperatur und Wärmestrahlung in steter Abnahme begriffen sind, strahlt der Stern wieder, wie im Anfang, nur wenig brechbare Strahlen aus, das Spectrum seines Lichtes unterscheidet sich aber von dem, welches es damals zeigte, durch das Auftreten breiter Absorptionsbanden, die auf das Vorhandensein von Verbindungen in seiner Atmosphäre hinweisen. Auch die Zustandsänderung in diesem Abschnitte erfolgt nur langsam. Aus dem Spectrum des Lichtes, welches ein Stern ausstrahlt, lässt sich demnach auf sein Alter schliessen, freilich nur auf sein relatives, da er seine Zustandsänderungen um so rascher durchläuft, je kleiner seine Masse ist.

---

[1]) Newcomb, Populäre Astronomie. Deutsch von Engelmann. Leipzig 1881, pag. 498.

In den geschilderten Zuständen der Entwickelung eines Sterns erkennt man unschwer die vier Sterntypen, welche SECCHI[1]), oder die drei, welche VOGEL[2]) aus spectralanalytischen Beobachtungen abstrahirt haben. Auch liesse es sich mit dem beschriebenen Verlauf des Farbenwechsels in Einklang bringen, wenn die Schriftsteller des Alterthums den Sirius einen rothen Stern nennen. Aber auch das Zahlenverhältniss der Sterne der verschiedenen Klassen, welches VOGEL's Untersuchungen ergeben haben, stimmt damit überein. Unter 3702 Sternen einer bestimmten Himmelszone gehörten 2165 der ersten, 1240 der zweiten und nur 297 der dritten Klasse an. Bei der langen Zeit, während welcher der Stern in dem ersten Theil der ersten Periode seines Bestehens verharrt, werden eine grosse Menge Sterne gleichzeitig in ihrem ersten noch dunkeln Zustand sein, viel weniger in dem bereits zu grösserer Helligkeit fortgeschrittenen. Sie bilden die beiden Abtheilungen a und b der VOGEL'schen Klasse I, jene mit 2155, diese mit nur 10 Einzelkörpern. Aus demselben Grunde wird die zweite Periode, in der sich die Sterne der Klasse II nach VOGEL befinden, lange dauern, demnach reich an Beispielen sein. In der That wurden von solchen 1240 gefunden. Obgleich nun auch die dritte Periode oder die Klasse III VOGEL's eine grosse Zahl von Sternen enthalten muss, so kann ihre geringe Zahl von 279 nicht überraschen, da die meisten derselben in Folge ihrer vorgeschrittenen Abkühlung ihre Leuchtkraft mehr oder weniger eingebüsst haben. Vielleicht ist es dann auch nicht zu gewagt, die Fixsterne für nahezu gleichaltrig zu halten und in denen, welche ihrem Erlöschen nahe sind, solche von geringer Masse zu sehen. Die von PIERSON[3]) aus der Beobachtung der Farben von Doppelsternen gezogenen Schlüsse führen allerdings zu entgegengesetzten Anschauungen. Da sie aber mit den Erfahrungen der Physik in Widerspruch stehen, so werden sie einer erneuten Prüfung unterzogen werden müssen.

### 4) Unser Sonnensystem.

KANT und LAPLACE stimmen, wie wir gesehen haben, darin überein, dass der Nebel, aus welchem sich die Sonne und ihre Planeten bildeten, Rotation besass und eine flache Scheibe darstellte. Ehe er sich in einzelne Körper differenzirte, reichte er bis über die Neptunsbahn hinaus, die Frage RADAU's[4]) aber, ob sich die beiden Forscher ihn aus staubförmigen Theilchen oder aus Gasmolekülen bestehend dachten, ist aus ihren Schriften nicht zu beantworten. Doch sei bei dieser Gelegenheit erwähnt, dass sie für die Stosstheorie bedeutungslos ist. »Da die Verdampfungswärme der bekannten festen Substanzen nur wenige hundert Wärmeeinheiten pro Kilogramm beträgt, während die beim Zusammenstosse grosser kosmischer Massen pro Kilogramm entwickelte Wärmemenge nach Hunderttausenden oder Millionen von Wärmeeinheiten sich beziffert, so darf es bei der vorliegenden Untersuchung als gleichgültig betrachtet werden, ob die zusammenstossenden Massen im festen oder im gasförmigen Zustande sich befanden.« (RITTER XII, 452.) So würde die Sonne in derselben Weise gebildet sein, wie die übrigen Fixsterne auch.

Wenden wir uns nun zur Betrachtung der Entstehung der **Planeten**, so finden wir hinsichtlich dieser Frage zwischen den Lehren KANT's und LAPLACE'

---

[1]) SECCHI, Die Sonne. Deutsch von SCHELLEN. Braunschweig 1872, pag. 775.

[2]) H. C. VOGEL, Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. 188[?] III, pag. 127.

[3]) PIERSON, Bulletin astronomique 1891. T. VIII, pag. 559.

[4]) RADAU, Bulletin astronomique 1885. T. II, pag. 309.

wesentliche Unterschiede. Nach KANT (pag. 21) sind die Keime der Planeten die untergeordneten Centren der Anziehung, welche wir bereits erwähnten. Da bei ihrer Bildung die schwereren Theilchen durch die Menge der Widerstand leistenden andern zur Sonne hindurch dringen und nicht leicht von ihrem Wege abgebeugt werden, als die weniger schweren, so nehmen sie ihre kreisförmige Bewegung erst in grösserer Nähe der Sonne an. Die unteren Planeten sind also die dichteren, eine Thatsache, zu deren Erklärung NEWTON nur anzuführen wusste, dass sie in Folge dieser Eigenschaft die stärkere Erhitzung besser aushalten könnten. Wäre das der Grund, so müsste ja, wie KANT mit Recht bemerkt, die Sonne alle Planeten an Dichtigkeit übertreffen, was nicht der Fall sei und auch nicht der Fall sein könne, da der Centralkörper aus Theilchen aller Art bestehen müsse.

Nehmen nun die Dichtigkeiten der Planeten in der Richtung nach der Sonne zu, so müssen ihre Massen in derselben Richtung abnehmen, weil unter sonst gleichen Verhältnissen die Anziehungssphäre eines Planeten durch die Sonne um so weniger eingeschränkt wird, je weiter entfernt er sich von ihr befindet, weil ferner die Kreise, welche die Zonen der entfernteren begrenzen, grösser sind, und weil endlich aus demselben Grunde der Raum zwischen den zwei Flächen grösster Abweichung bei gleicher Anzahl der Grade, in grösserer Entfernung grösser ist. Diese zu erwartende Anordnung wird nun aber gestört durch die Einwirkung der entstehenden Körper aufeinander, die zur Folge haben muss, dass ein grösserer Planet in seiner Nachbarschaft die Bildung verhältnissmässig kleinerer bewirkt, wofür der mächtige Jupiter in Mitten seiner beiden kleineren Nachbarn Saturn und Mars — die Asteroiden und die beiden äussersten Planeten waren noch nicht entdeckt, als KANT seine Naturgeschichte des Himmels schrieb — ein einleuchtendes Beispiel liefern.

Wären alle materiellen Theilchen, welche von Anfang an sich in den äusseren Theilen des Nebels befanden, zur Bildung der Planeten verwendet worden, so müsste sich die Masse der Sonne zu der Gesammtmasse der Planeten, wie 17:1 verhalten. In Wahrheit aber ist dieses Verhältniss 650:1 (genauer 745:1). Es sind somit nicht alle Theilchen des Nebels in Rotation getreten, vielmehr haben sich solche aus allen, auch aus den obersten Regionen zur Sonne begeben. Daraus muss geschlossen werden, dass die Sonne und die Planeten aus denselben Stoffen bestehen, ein Schluss, den die Spectralanalyse bestätigt hat. Dabei ist jedoch nicht zu übersehen, dass der Verdichtungsprocess auch der Planeten keineswegs für abgeschlossen zu halten ist, und damit stimmt das Ergebniss der Untersuchung RITTER's (XX, pag. 619 ff.) überein, dass die kleinen Planeten in ihrer Zustandsänderung der Sonne vorangeeilt, die grösseren hinter ihr zurückgeblieben sind. Auch die Dichtigkeit, die der Urnebel gehabt haben müsse, berechnet KANT, doch gehen die von seinen Nachfolgern dafür erhaltenen Werthe noch weit über die seinigen hinaus.

Näher denkt sich der Königsberger Weise die Entstehung der Planeten so, dass sich durch den Zusammenlauf einiger Elemente, »welche sich durch die gewöhnlichen Gesetze des Zusammenhanges vereinigen«, der erste »Klumpen« bildet, sobald dieser eine solche Grösse erreicht hat, »dass die NEWTON'sche Anziehung an ihm vermögend geworden« ist, zieht er Theilchen auch aus grösserer Entfernung heran. Vor jedem möglichen Lehrbegriffe, findet KANT, hat der seinige das voraus, dass »der Ursprung der Massen zugleich den Ursprung der Bewegung und die Stellung der Kreise in eben demselben Zeitpunkt darstellt«. Denn »die Planeten bilden sich aus Theilchen, welche in der Höhe

da sie schweben, genaue Bewegungen zu Cirkelkreisen haben: also werden die aus ihnen zusammengesetzten Massen eben dieselben Bewegungen, in eben dem Grade, nach eben derselben Richtung fortsetzen«. (pag. 20.)

LAPLACE (pag. 473) stellt sich dagegen die Entstehung der Planeten folgendermaassen vor. Die Grenze der ursprünglichen Nebelmasse war da, wo die Centrifugalkraft und die Gravitation sich im Gleichgewicht hielten. Als sie sich abkühlte, zog sie sich zusammen, während im Einklang mit dem Princip der Flächen die Rotationsgeschwindigkeit der sich dem Mittelpunkt nähernden Theilchen wuchs. Dabei blieben diejenigen zurück, deren Schwerkraft durch die Centrifugalkraft aufgehoben wurde — bildeten sich eine Anzahl concentrischer Gasringe, welche um den gemeinschaftlichen Mittelpunkt kreisten. Bei regelmässig fortschreitender Abkühlung wären sie zu flüssigen, ja festen geworden, die geringste Störung aber verhinderte dies. Sie zerbrachen und die Bruchstücke vereinigten sich mit der Zeit zu Planeten.

Aus der Art ihrer Entstehung erklären nun KANT und LAPLACE die Rotation der Planeten um ihre Axen und deren Drehungssinn. Da nach des französischen Astronomen Ansicht der Centralkörper zur Zeit ihrer Bildung noch nicht vorhanden war, so musste die Anziehung im umgekehrten Verhältniss der ersten Potenz des Halbmessers des betreffenden Ringes erfolgen, seine inneren Theile also eine geringere Geschwindigkeit haben, als seine äusseren und die Rotation der aus ihnen entstehenden Planeten somit, wie es bei den sechs unteren in der That der Fall ist, rechtläufig sein. KANT aber hätte, da er bei der Entstehung der Planeten die NEWTON'sche Anziehung und somit das Vorhandensein des Centralkörpers voraussetzt, den entgegengesetzten Schluss ziehen müssen. Dass er gleichwohl die rechtläufige Rotation annimmt, ist offenbar ein Fehler, und selbst ZÖLLNER[1]) muss bei aller Bewunderung für den grossen Philosophen bekennen, dass er diese Schlussfolgerung nicht verstehe. Darin liegt auch wohl der Grund, dass man KANT's Ansicht vielfach dahin ausgelegt hat, dass die fertig gebildete Sonne die Nebelringe, welche die Geburtsstätten der Planeten wurden, abgeworfen habe. Wie HELMHOLTZ (III, pag. 123) diesen Theil der KANT'schen Hypothese auffasst, wird nicht recht klar.

An Einwendungen gegen die Ideen KANT's und LAPLACE's hat es nicht gefehlt. WOLF[2]) ist der Ansicht, dass die Ringe sich überhaupt nicht hätten bilden können, während KIRKWOOD[3]) glaubt, dass in der geschilderten Weise keine Planeten entstehen konnten, sondern nur eine grosse Menge kleiner Körperchen in dem die Sonne umgebenden Raum. RITTER (XX, pag. 918) wiederum hält dafür, dass nicht die Entstehung der Ringe, wohl aber die der Planeten aus den Ringen einer besonderen Erklärung bedürfe, die er, wie folgt, giebt. Während die in der Oberflächenschicht einer ruhenden Gaskugel von grosser Masse entstehenden Condensationsprodukte sofort in heissere Regionen herabsinken und sich hier wieder auflösen mussten, so mussten in dem rotirenden System diese Produkte schon vor der Abtrennung der Ringe vorhanden gewesen sein, weil sie sich durch starke Ausstrahlung von der Oberfläche in reichlicher Fülle bilden konnten, ihre Schwere aber durch die Condensationsprodukte aufgehoben wurde.

---

[1]) ZÖLLNER, Photometrische Untersuchungen. Leipzig 1865, pag. 224.

[2]) R. C. WOLF, Les Hypothèses cosmogoniques. Bulletin astronomique 1884. T. I. 1885. T. II, siehe T. I, pag. 590.

[3]) KIRKWOOD, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, T. XXIX, pag. 96. — Proceedings of the American philosophical Society April 1880.

Die condensirten Massen zogen aber noch nicht condensirte an sich heran und nur unter besonders günstigen Umständen konnte die Condensation der Ringmasse eine ziemlich vollständige werden und so zur Entstehung einer grösseren Menge kleiner Körper, wie die Asteroiden, Veranlassung geben. Dass bei der Bildung der letzteren die anziehende Wirkung des benachbarten grössten Planeten eine entscheidende Rolle spielte, indem er die Ausbildung eines hinreichend kräftigen Mittelpunktes der Anziehung verhinderte, nahm LAPLACE (pag. 474) an, der freilich nur vier Asteroiden kannte, hielt aber auch die von OLBERS zuerst ausgesprochene Ansicht, diese kleinen Weltkörper verdankten ihre Entstehung einem zersprungenen Planeten, keineswegs für unmöglich. Neuerdings haben sich KIRKWOOD und HORNSTEIN[1]) der Ansicht von LAPLACE angeschlossen.

Den wichtigsten Einwand gegen die Meinung, dass die Planeten früher wie die Sonne entstanden sein müssten, bildet die aller Wahrscheinlichkeit nach vorhandene rückläufige Bewegung des Neptun und Uranus. Es ist FAYE's Verdienst, diese Schwierigkeit gehoben zu haben. Nach seiner Schilderung gestaltete sich die Bildung des Planeten in der folgenden Weise (pag. 266). Die Bewegung der Ringe in ihrer Gesammtheit liess den Molekülen genügend lange Zeit, ihrer gegenseitigen Anziehung zu gehorchen und sich nach einem in der Meridianschicht gelegenen Mittelpunkte hinzubewegen. Endlich aber hatten die in den Ringen vorhandenen Bedingungen zur Hervorbringung von Wirbeln zur Folge, dass sie sich in solche auflösten. Von diesen nahmen die stärkeren die schwächeren auf, sei es durch Attraction, sei es, dass sie sie vermöge ihrer grösseren Geschwindigkeit einholten. Da aber die Centrifugalkraft der in ihnen rotirenden, noch homogenen Masse immerhin nur gering war, so bildeten die Wirbel sich zu Kugeln aus, deren Axe mehr oder weniger senkrecht zu der Ebene des Ringes lag. Unterdessen setzten die Theilchen, welche von jenen Wirbeln nicht ergriffen wurden, ihren Weg langsam zum Mittelpunkte fort, und wuchsen dort zur Sonne heran, welche je länger, je mehr ihre Anziehung auf ihre Umgebung geltend machte. Nun ist allgemein die die Theilchen nach dem Mittelpunkt ziehende Kraft

$$k = ar + \frac{b}{r^2},$$

wo $r$ den Abstand vom Mittelpunkt, $a$ und $b$ Constante bedeuten. Ist hier $b = 0$, so wird $k = ar$, und dieser Ausdruck giebt die Grösse der Kraft für die Zeiten vor der Ausbildung des Centralkörpers. Wird dagegen $a = 0$, so wird $k = \frac{b}{r^2}$ und hierdurch ist die Kraft nach dem Auftreten der Sonne bestimmt. In den Zeiträumen nun, wo $k = ar$ war, entstanden die sechs untersten Planeten und die Asteroiden, die Bildung des Neptun und möglicherweise des Uranus erfolgte dagegen, nachdem $k$ den Werth von $\frac{b}{r^2}$ erhalten hatte. Die Rotationsverhältnisse des Uranus sind freilich noch nicht genügend aufgeklärt. Haben doch die Bestrebungen SCHIAPARELLI's[2]) und YOUNG's[3]), eine Abplattung des Planeten nachzuweisen, zu keinem Resultate geführt, während SEELIGER[4]) und

[1]) HORNSTEIN, Sitzungsberichte der Academie der Wissenschaften zu Wien, Mathem. Naturw. Classe, II. Abt. LXXXIV, pag. 7.

[2]) SCHIAPARELLI, Astron. Nachr. No. 2526.

[3]) YOUNG, Astron. Nachr. No. 2545.

[4]) H. SEELIGER, Sitzungsber. der Academie der Wissenschaften in München. 1864, pag. 261

MEYER[1]) keine, LAMEY[2]) eine sehr veränderliche Abplattung fanden. Man wird demnach einstweilen die aus der Rotationsebene der Satelliten gefolgerte Lage der Axe beibehalten müssen, wonach sie in die Ebene seiner Bahn fällt. Diese aber erklärt FAYE's Theorie leicht, indem sie die Entstehung des Uranus in die Zeit setzt, wo weder $a$ noch $b$ Null waren. Die zu dem Planeten zusammentretenden Theilchen mussten alsdann in sich mehr und mehr verstärkendem Maasse den Sinn seiner Axendrehung ändern und dabei seine Aequatorebene nach und nach in ihre jetzige Axe heben. Sollte sich die noch sehr unwahrscheinliche Bestimmung der Neigung der Uranusaxe zu 68° bei rechtläufiger Rotation durch HENRY[3]) bestätigen, so würde man nur die Annahme machen müssen, dass die Bildung des Uranus ebenfalls in die Periode vor Entstehung der Sonne falle, der FAYE'schen Theorie aber würde daraus durchaus keine Schwierigkeit erwachsen. ‚In jedem Fall würde sie das abweichende Verhalten des Uranus zwangloser erklären, als dies die Annahme RADAU's (pag. 315) zu thun im Stande ist, welcher die zur Sonne sich langsam bewegenden Theilchen dazu heranzieht. Ist es doch nicht einzusehen, warum ähnliche Einwirkungen die übrigen Planeten nicht erfahren haben sollten. Die sehr complicirte Theorie ROCHE's[4]) wird durch die FAYE'sche vollends unnöthig gemacht.

Die Neigungen und Excentricitäten der Planetenbahnen finden in den vorgeführten Theorieen ihre Erklärungen nicht. Den Grund der ersteren sieht KANT in Störungen, welche die sich bildenden Anziehungscentren aufeinander ausgeübt haben sollen. Nach TROWBRIDGE[5]) dagegen soll sich, während sich die Planeten bildeten, auf der einen Seite der Aequatorebene des Nebels mehr Masse befunden haben, wie auf der andern, und dadurch soll seine Rotationsaxe dauernd langsam gedreht worden sein. Dieselbe Einwirkung habe dann die Axen der zurückgelassenen Ringe ein wenig gegen einander geneigt. Da aber auf solche Weise die starke Neigung der Mercursbahn, sowie diejenigen der Bahnen einiger Asteroïden nicht entstanden sein können, so suchen LEVERRIER[6]) und TISSANDIER[7]) den Grund für diese in den Störungen, welche die Sonne und Venus auf Merkur, Jupiter, Saturn, Mars, Erde und Venus auf die Asteroïden ausüben mussten.

Um die Excentricitäten der Planetenbahnen zu erklären, ging KANT (pag. 31) von der Ansicht aus, dass sie mit der Entfernung von der Sonne wüchsen. Die kleineren der unteren Planeten wollte er aus der Breite der Zonen, ‚welche zu deren Bildung das Material geliefert hätten, herleiten, während die grösseren der oberen ihren Grund zumeist in der stark excentrischen Bewegung der zur Sonne sinkenden schwereren Theilchen haben sollten. Die ausnahmsweise grossen Excentricitäten des Merkur und Mars leitete er aus der Wirkung der Sonne und des Jupiter her. LAPLACE (pag. 475) schreibt die Abweichung von der Kreisbahn zufälligen Verschiedenheiten in der Temperatur und der Dichtigkeit der Massen der Ringe zu. FAYE (pag. 263) glaubt dagegen, dass unter den ursprünglichen Bedingungen unseres Sonnensystemes eine gewesen sei, welche die Excentricität verursacht habe, da es nach den Grundsätzen der Mechanik gleichgültig wäre,

[1]) MEYER, Astron. Nachr. No. 2524.
[2]) LAMEY, Compt. rend. T. C., pag. 1372.
[3]) HENRY, Bulletin astronomique, T. II, pag. 321.
[4]) ROCHE, Essai sur la constitution du Système Solaire. Montpellier 1873.
[5]) TROWBRIDGE, SILLIMAN's Journal, Ser. 2, T. XXXVIII, pag. 358.
[6]) LEVERRIER, Annales de l'observatoire de Paris. T. II, pag. 365.
[7]) TISSANDIER, Compt. rend. T. XCIV, pag. 947.

ob die ursprüngliche Form der Ringe kreisförmig oder elliptisch wurde, setzt also als gegeben voraus, was erklärt werden soll. EBERHARD (pag. VIII) beruft sich ohne weiteres auf das Gravitationsgesetz, was nur statthaft sein würde, wenn die Sonne früher, wie alle Planeten entstanden wäre.

Für die Neigung der Axen der Planeten macht KANT (pag. 69) Unregelmässigkeiten verantwortlich, die zur Zeit ihrer Erstarrung vorhanden waren. Namentlich hätten sich seiner Meinung nach in der Gegend des Aequators Hohlräume bilden müssen, in welche die Rinde mit der Zeit einsank. Das so gestörte Gleichgewicht hätte sich dann nur durch eine Drehung der Axe wieder herstellen können. Dagegen hat aber G. H. DARWIN[1]) geltend gemacht, dass die Grösse der Axenneigung durch diese Wirkung der Gebirge sich allein nicht erklären lasse. DARWIN und SIMON[2]) ziehen deshalb zur Erklärung der Axenneigung die Anziehung der Sonne auf die zur Zeit ihrer Bildung noch sehr abgeplatteten, vielleicht gar noch mit Ringen umgebenen Planeten heran. Dann müssen sie freilich die weiteren Annahmen machen, dass Jupiter damals bereits zur Kugel ausgebildet war, während die Wirkung der Sonne auf das complicirte System des Saturns trotz dessen grosser Entfernung besonders stark auftrat. Ueber die Lagen der Axen von Uranus und Neptun liegen noch nicht genügend genaue Bestimmungen vor, um über sie eine Entscheidung treffen zu können. Warum jedoch der jetzt wohl noch flüssige Jupiter mit seiner raschen Axendrehung und bedeutenden Abplattung eine Kugelgestalt so frühe erhalten haben soll, ist nicht einzusehen.

Um die Entstehung der Satelliten zu erklären, setzt KANT (pag. 34 ff.) eine weitere Sphäre der Anziehungskraft der Planeten voraus, welche den ihr folgenden Theilchen eine genügende Fallgeschwindigkeit ertheilen konnte, um zu freiem Umschwung zu gelangen, dann aber auch eine zur Bildung dieser Weltkörper ausreichende Stoffmenge. LAPLACE (pag. 477) erörtert seine Ideen am Beispiel des Erdmondes. Bereits im gasförmigen Zustand musste dieser ein Sphäroïd bilden, dessen grosse Axe sich bei der leichten Verschiebbarkeit der Theilchen stets gegen den Planeten richtete. Wenn nun auch Anfangs Revolution und Rotation nicht genau gleich waren, so wurden sie es je länger je mehr, da die Anziehungskraft des Planeten unausgesetzt auf dies Verhältniss hinarbeitete und mit um so grösserer Geschwindigkeit, je mehr auf dem sich verflüssigenden Planeten die Wirkung der Fluth auf seine Rotation hervortrat. Die merkwürdige Beziehung zwischen den Jupitersmonden, dass die mittlere Bewegung des zweiten vermehrt um die doppelte des ersten so gross ist, wie die dreifache des dritten, leitet LAPLACE aus dem Widerstand her, den unmittelbar nach ihrer Entstehung die in ihrer Umgebung in sehr verdünntem Zustand noch vorhandene Materie diesen Bewegungen entgegensetzte. Da jener Widerstand auf die einzelnen Monde in verschiedener Weise einwirkte, so musste sich das angegebene, durch ihre Anziehung geforderte Verhältniss ausbilden und immer mehr festigen. Gegen diese Annahme wendet ROCHE (pag. 123) jedoch ein, dass die Monde erst hätten entstehen können, als ihre Planeten bereits in ihrer Bildung weit fortgeschritten waren. Wäre das nicht der Fall, so müssten ihre Abstände von den Planeten grösser sein. Nur der Erdmond bilde eine Ausnahme. Er verdanke seine Entstehung Nebelmassen, welche von dem grossen ursprünglichen Erdnebel abgelöst, in einem Zustand vorgeschrittener Erkaltung in die dabei

---

[1]) G. H. DARWIN, »The Observatory«. T. I, pag. 135.

[2]) SIMON, Annales de l'École Normale. 1869. I. T. VI, pag. 73.

um die Erde gebildete Nebelringmasse eingetreten und hier der Kern einer Verdichtung geworden sei, welche je länger je mehr an der Bewegung der Erde theilgenommen und sie nach deren vollständiger Verdichtung beibehalten habe. Auch hier wird wohl die Ansicht FAYE's die annehmbarste sein, wonach sich die Vorgänge bei Bildung der Planeten lediglich wiederholen. Wie diese Weltkörper sogleich, nachdem sie entstanden waren, ihre früher viel weiteren Bahnen in Folge der Gravitation und des Widerstandes der übrigens zur Sonne sinkenden Theilchen einschränkten, bis der Raum von solchen gesäubert war, so auch die Monde, ja es ist neuerdings die Ansicht ausgesprochen worden, dass dieser Process noch nicht beendigt sei, dass jetzt vielmehr kosmischer Staub und Meteore die Rolle des widerstehenden Mittels übernommen hätten[1]. Die abweichende Bewegung der Marsmonde lässt sich freilich auf solche Weise nicht erklären, während die Entdeckung SCHIAPARELLI's[2], dass Rotation und Revolution des Merkur und vielleicht der Venus von gleicher Dauer sind, geeignet sein dürfte, jene Annahme zu stützen.

Die Forschungen der jüngsten Zeit haben, eine Idee CASSINI's wieder aufnehmend, das merkwürdigste Gebilde des Planetensystemes, den **Ring des Saturn**, in die engste Beziehung zu den Satelliten der Planeten gebracht[3]. Sie haben gezeigt, dass er nur dann sich im Gleichgewicht halten kann, wenn er aus einer grossen Anzahl kleiner Satelliten besteht, und so stellt ihn RITTER in Parallele mit dem Ringe der Asteroïden. FAYE glaubt zwar, dass ihn seine Rotationsgeschwindigkeit, die verhältnissmässig grosse Masse des Saturn und die Leichtigkeit, mit der sich seine concentrischen Schichten gegen einander verschieben können, in den Stand setzen würde, den störenden Wirkungen der Saturnsmonde Widerstand zu leisten, auch wenn er aus gleichmässig vertheiltem Stoffe bestehe und sieht in ihm einen der ursprünglichen Nebelringe, der durch besonders günstige Umstände der Zerstörung entgangen sei. Er schliesst sich damit LAPLACE's Ansicht an, während KANT (pag. 42), von der Annahme ausgehend, dass die äussersten Planeten Uebergänge zu den Kometen darstellten und erst im Laufe der Zeiten ihre ursprünglich stark elliptischen Bahnen in mehr kreisförmige verwandelt hätten, ihn für einen vom Planeten aufgestiegenen, so zu sagen stabil gewordenen Kometenschweif erklärt, der Form und Lage der Umdrehung des Planeten verdankt. Die eigenthümlichen Rotations- und Grössenverhältnisse des Planeten im Gegensatz zu andern erklärten, warum sich nur an ihm ein Ring gebildet habe. Es ist KANT und LAPLACE immer zu grossem Verdienst angerechnet worden, dass sie vor HERSCHEL aus den beobachteten Umlaufszeiten eines Saturnstrabanten die Umlaufszeit der Theile des Ringes berechnet hätten. Unter Anwendung der Formel

$$t = T\frac{\rho}{R}\sqrt{\frac{r}{R}},$$

wo $T$ die Umlaufszeit eines Saturnstrabanten, $R$ den Halbmesser von dessen

[1] OPPOLZER, Astron. Nachr. No. 2573. — KLEIBER, Ebendas. No. 2657 und 2664. — NEWTON, »Naturforscher« 1885, XVIII, pag. 427.

[2] SCHIAPARELLI, Astron. Nachr. 1889, No. 2944. — Atti della Reale Accademia dei Lincei 1889, Ser. 4, Vol. V, pag. 283. — Reale Institute Lombardo. Rendiconti 1890, pag. 2, Vol. XXIII. — Bulletin de l'Académie Royale Belgique 1890, Ser. 3, T. XX, pag. 535, T. XXI, pag. 452.

[3] MAXWELL, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1859. — HIRN, Mémoire sur les conditions de l'équilibre sur la nature probable de Saturne, pag. 31. — MEYER, Archives des Sciences physiques et naturelles. Sér. 3, T. X, pag. 73.

Bahn, $\rho$ den Halbmesser des Saturn und $r$ den des inneren Ringes bedeutet, findet KANT (pag. 44 ff.) die Umlaufszeit des inneren Ringes zu etwa 10, die des äusseren zu etwa 15 Stunden. Dabei darf man freilich nicht übersehen, dass er mittelst derselben Formel unter Benutzung CASSINI'scher Beobachtungsdaten die Umlaufszeit des Saturns selbst zu $6^h\ 23^m\ 53^s$ erhielt, dass aber die obige Formel einen von dem wirklichen viel stärker abweichenden Werth giebt, wenn man die Ergebnisse neuerer Beobachtungen zu Grunde legt.

Die Kometen hielt LAPLACE (pag. 475) für Körper, welche unserem Planetensystem fremd sind und von System zu System irren. Dadurch erklärt es sich, dass sie in jedem Sinne und unter den verschiedensten Neigungen ihrer Bahnen zum Sonnenäquator sich bewegen, und dass ihre Excentricität eine sehr grosse ist. KANT (pag. 33) und FAYE (pag. 271) sehen dagegen in den Kometen Reste des Urnebels, welche aus so weit vom Centrum gelegenen Gegenden stammen, dass ihre Bahnen Ellipsen von grosser Excentricität wurden und sie dieselben sowohl im Sinne der Planetenbewegung, als auch im umgekehrten durchlaufen können. Durch Einwirkung der Planeten können ihre Umlaufszeiten verkürzt, sie selbst zu periodischen Kometen verwandelt werden. So ordnen beide Forscher die Entstehung und Bewegungsart der Kometen zwanglos in das Ganze ihrer Hypothesen ein, ohne dass sie wie LAGRANGE[1]) die Annahme machen müssten, die Kometen seien von den Planeten abgeschleudert. Die Wahrscheinlichkeit dieser Annahme prüfte FAYE[2]) zum Ueberfluss noch dadurch, dass er untersuchte, ob die Kometenbahnen mit solchen von Planeten irgend welche Uebereinstimmung zeigen. Das negative Resultat dieser Untersuchung macht auch PROCTOR's Annahme der Abstammung der periodischen Kometen von den Planeten unannehmbar.

Dagegen glaubt der französische Akademiker die Ansicht LAGRANGE's für den Ursprung der Aerolithen festhalten zu sollen. Ihrer Zusammensetzung nach sind sie Bruchstücke, die aus den tieferen Schichten einer der Erde ähnlich zusammengesetzten Kugel stammen. Sie können also nur von der Erde oder dem Monde abgeleitet werden. Namentlich die Krater des letzteren scheinen in früheren Perioden Explosionskrater gewesen zu sein, die vulkanischen Ausbrüchen von der grössten Heftigkeit ihren Ursprung verdanken. Haben sie doch die Mondrinde auf weite Strecken hin gespalten! Jetzt ist ihre Thätigkeit längst erloschen. Das Ergebniss der Untersuchungen von Aerolithenbahnen, welche NEWTON[3]) anstellte, lässt sich mit FAYE's Ansicht wohl vereinigen. Von 265 solcher Fälle konnten 116 zu Bahnbestimmungen benutzt werden, und diese ergaben sämmtlich rechtläufige Bewegungen. Freilich wären dann die Aerolithen von den Meteoren scharf zu unterscheiden, von denen die periodischen, die sich in Kometenbahnen bewegen, diesen Weltkörpern angeschlossen werden müssen.

Mehr Uebereinstimmung zeigen die Ansichten der Forscher, die sich darüber ausgesprochen haben, hinsichtlich des Zodiakallichtes. KANT (pag. 53) hielt dasselbe für einen die Sonne umgebenden Ring, der entweder in ähnlicher Weise, wie der Ring des Saturn von diesem aufstieg, sich von der Sonne, vielleicht als Verbrennungsprodukt, losgelöst habe, oder aus Theilchen bestehe, welche nach vollendeter Bildung des Sonnensystemes mit geschwächter, aber

---

[1]) LAGRANGE, Mémoire lu au Bureau des Longitudes dans la Séance du 29. Janv. 1812.
[2]) FAYE, Compt. rend. 1888, T. CVI, pag. 1703.
[3]) NEWTON, American Journal of Science. 1888, Ser. 3, V, 36, pag. 1.

an seiner Rotation theilnehmenden Bewegung herabsanken und durch eine abstossende Wirkung der Sonnenstrahlen an ihrem gegenwärtigen Orte gehalten werden. Die letztere Ansicht theilen LAPLACE (pag. 476) und HELMHOLTZ (II, pag. 119). Der erstere spricht sich zwar vorsichtig dahin aus, dass wenn in den von der Sonnenatmosphäre verlassenen Zonen Theilchen von so grosser Flüchtigkeit zurückgeblieben seien, dass sie sich weder mit dem Centralkörper, noch mit einem der Planeten hätten vereinigen können, diese die Erscheinungen des Zodiakallichtes bieten mussten, ohne der Planetenbewegung einen merklichen Widerstand entgegenzusetzen, entweder weil ihre Dichtigkeit eine zu geringe sei, oder weil ihre Bewegung mit der der Planeten übereinstimme. Danach würde die Substanz, die der Träger des Zodiakallichtes ist, einen etwa linsenförmigen Raum in der Umgebung ausfüllen und nach HELMHOLTZ aus staubförmig zerstreuten Theilchen bestehen, welche sich nach dem Gravitationsgesetz bewegen.

Von der Zusammenstellung einiger das absolute Alter der Sonne und der Planeten gebenden Zahlen sehe ich ab, da sie allzu grosse Unterschiede zeigen. Namentlich bieten die für das Alter der Erde aus kosmogonischen Voraussetzungen erhaltenen Bestimmungen viel kleinere Zeiträume, als sie die Geologen aus der Dicke der abgelagerten Schichten gefolgert haben. Wenn auch FAYE's Theorie (pag. 279) diese Schwierigkeit zu heben im Stande sein dürfte, so ist es doch fraglich, ob eine solche in Wirklichkeit besteht, und ob die seinen geologischen Zeitbestimmungen zu Grunde liegende Voraussetzung, zu allen Erdperioden seien gleiche Zeiten zur Ablagerung gleich dicker Schichten nothwendig gewesen, genügend begründet ist.

### 5) Die Quellen der Sonnenwärme.

Wenn auch die Annahmen der Entstehung der Sonne aus dem Urnebel ihre hohe Anfangstemperatur erklärt, so bleibt doch noch die weitere Frage zu beantworten, aus welcher Quelle sie die enorme Wärmemenge, die sie Jahr für Jahr ausstrahlt und ausgestrahlt hat, deckt. Mit dieser Aufgabe haben sich eine Anzahl der berühmtesten Gelehrten in eingehender Weise beschäftigt. KANT (pag. 70) sah die Quelle der Sonnenwärme, ohne jedoch viel Gewicht auf diese Annahme zu legen, in einem Verbrennungsvorgang[1]). Er dachte sich, dass in dem ursprünglichen Gemenge der den Nebel bildenden Theilchen jeder Art sich auch befänden »heranschwebende Sorten vorzüglicher Leichtigkeit, die durch die Widerstrebung des Raumes gehindert durch ihren Fall zu der gehörigen Schnelligkeit der periodischen Umwendungen nicht durchdringen und die folglich in der Mattigkeit ihres Schwunges insgesammt zu dem Centralkörper herabgestürzt werden.« Diese sind die feuernährenden Bestandtheile, welche auf der Oberfläche der Sonne verbrennen, während die Vermengung mit schwereren und dichteren Sorten von Elementen die Heftigkeit des Verbrennungsvorganges mildern. Die aus den Höhlungen des Sonnenkörpers nachdrängenden Theilchen des brennbaren Stoffes sollen die Flammen nähren, während die durch die Heftigkeit der Hitze zerstreuten vielleicht, wie bereits erwähnt wurde, den Stoff zum Zodiakallicht liefern. Folgt hieraus einerseits, dass dieses »unschätzbare Feuer, das die Natur zur Fackel der Welt aufgesteckt« hat, nicht ewig währen kann, so wird auch andererseits klar, warum der Mittelpunkt eines jeden Planetensystems von einem flammenden Körper eingenommen wird. Diese Hypothese

---

[1]) KANT, Naturgeschichte des Himmels. Ausgabe von 1798, pag. 71. Anm. a.

KANT's, zu deren gerechter Würdigung man wohl im Auge behalten muss, dass sie fast 80 Jahre vor LAVOISIER's Erklärung der Verbrennung ersonnen wurde, ist freilich in entsprechend abgeänderter Form von WILLIAM SIEMENS[1]) neuerdings wieder aufgenommen worden. Als Wärmequelle der Sonne betrachtet Sir WILLIAM die Verbrennung von Wasserstoff und von Kohlenwasserstoffen in Sauerstoff, dessen Vorhandensein auf der Sonne er voraussetzt. Indem die Produkte dieser Verbrennung vom Sonnenäquator in anhaltendem Strome weggeschleudert werden, werden sie durch die Wirkung der sie in einiger Entfernung von ihrem Ausgangsort treffenden Sonnenstrahlen wieder dissociirt und strömen in diesem Zustand wieder an den Polen der Sonne ein, um von Neuem verbrannt zu werden und denselben Kreislauf abermals zu durchlaufen. Das hohe elektrische Potential, welches die Sonne durch die Reibung der sich an ihrer Oberfläche bewegenden Gasmassen, auf deren Weg die die Sonnenflecken enthaltenden Zonen liegen, erhält, wird dann vielleicht Ursache des Zodiakallichtes. Ohne das Gewicht mancher gegen die Hypothese seines Bruders geltend gemachter Gründe zu verkennen, ist WERNER VON SIEMENS[2]) geneigt, sie anzunehmen. Indessen unterlässt er nicht, den wichtigsten Einwand dagegen dadurch zu beseitigen, dass er wie LAPLACE den Theilchen, welche von der Sonne ausgestossen in die Nähe von Planeten gelangen, eine nach den KEPPLER'schen Gesetzen geregelte Umdrehung um den Centralkörper zuschreibt. Er benutzt alsdann das sich ergebende hohe Potential der Sonne, um die elektrischen und magnetischen Eigenschaften des Erdkörpers, die Elektricität der Gewitterwolken etc. zu erklären.

Die Stosswirkung hat zuerst BUFFON[3]) zur Deckung des Wärmeverbrauchs der Sonne herangezogen, die nämliche Ansicht vertrat neuerdings ROBERT MAYER[4]). Danach sollen eine solche Wirkung meteorische Körper ausüben, die in dauerndem Strome auf die Sonne stürzen. Wenn nun auch aus den irdischen Zählungen der Meteore gezeigt werden konnte, dass die Menge der in der Umgebung der Sonne vorhandenen derartigen Körperchen hinreichen würde, um deren gewaltigen Wärmeheerd zu speisen, und sich deshalb auch Lord KELVIN (WILLIAM THOMSON) anfänglich dieser Annahme zuneigte, so schloss der berühmte englische Gelehrte sich doch später dem dritten in Vorschlag gebrachten Erklärungsversuche an, der in der immer fortschreitenden Verdichtung die Vorrathskammer sieht, aus welcher die Sonne ihren Wärmebedarf deckt. Hatte doch HELMHOLTZ gezeigt, dass diese Annahme als nothwendige Folgerung der Weltbildungshypothese das Vorhandensein der Sonnenwärme am zwanglosesten erklärte. Nach seiner Rechnung (II, pag. 135) würde eine Verkürzung des Halbmessers der Sonne um 60 *m* hinreichen, um deren Wärmeverbrauch für den Zeitraum eines Jahres zu decken, eine Verkürzung des Sonnenhalbmessers um 0·0001 denselben Zweck für 2289 Jahre erfüllen. Der Ansicht HELMHOLTZ's hat sich RITTER angeschlossen und sie weiter geführt (XI, pag. 993). Unter der Voraussetzung, dass die Sonne aus einem einatomigen Gase bestehe, welches die Eigenschaften eines idealen Gases besitzt, erhält er statt des obigen Werthes

---

[1]) WILLIAM SIEMENS, Ueber die Erhaltung der Sonnenenergie. Deutsch von WORMS, Berlin 1885.

[2]) WERNER SIEMENS, WIED. Ann. 1883, XX, pag. 108.

[3]) BUFFON, Histoire naturelle générale et particulière. T. I und Suppl. T. IX und X, Paris 1778.

[4]) MAYER, Die Mechanik der Wärme in gesammelten Schriften. 3. Aufl. herausg. von WEYRAUCH. Stuttgart 1893, pag. 160 ff.

von 60 *m* sogar nur einen solchen von 50 *m*, wobei der davon verschiedene Zustand der chemischen Elemente in der jedenfalls nur dünnen Oberflächenschicht jedoch vernachlässigt worden ist. Die aus allen diesen Annahmen sich ergebenden Verkürzungen des Sonnenhalbmessers sind so klein, dass sie sich der direkten Beobachtung entziehen mussten. Mit der von Ritter, wie bereits oben erwähnt wurde, gezogenen Folgerung einer gegenwärtig unveränderlichen Oberflächentemperatur der Sonne stimmt auch Aitken's[1]) Annahme über die Quelle der Sonnenwärme überein, nur begründet sie der englische Forscher wohl weniger zwingend mit der sich im Laufe der Zeiten ändernden chemischen Constitution der Sonne.

Aus allen diesen Theorieen ergiebt sich der für die Zukunft unserer Erde wenig erfreuliche Schluss, dass der Energievorrath der Sonne ein beschränkter ist, also mit der Zeit ihre Wärmestrahlung eine immer geringere werden muss. Man hat ihn auf verschiedene Weise zu entkräften gesucht. Poisson[2]) liess zu diesem Zwecke das Sonnensystem durch verschieden warme Theile des Weltenraumes wandern, von denen der eine wieder ersetzen sollte, was der andere zurückbehalten hätte. Riemann[3]) weist darauf hin, dass möglicher Weise der Raum nicht allseitig in geraden, sondern in krummen, in sich zurücklaufenden Linien ausgebreitet sei, auf denen die ausgestrahlte Wärme zu ihrer Quelle wohl zurückkehren könne. Rankine[4]) endlich denkt sich den vom Aether erfüllten Raum von einem ätherleeren umgeben. Indem die an der Grenze beider ankommenden Aetherwellen zurückgeworfen werden, kehren sie auf demselben Wege zurück, auf dem sie ausgestrahlt werden. Indessen sind das Hypothesen, mit denen die exakte Naturwissenschaft schwerlich sich befreunden dürfte. Da sie über die Grenzen der Kosmogonie hinausgehen, so genügt es hier, auf sie hingewiesen zu haben.

E. Gerland.

**Längenbestimmung.** Die Länge eines Ortes auf der Erdoberfläche kann als der Winkel definirt werden, welchen der Meridian desselben mit einem als Anfangsmeridian gewählten anderen Meridian am Pol bildet; der Längenunterschied zweier Orte als der Winkel, welchen die Meridiane der beiden Orte am Pol mit einander bilden, und dieser ist gleich dem Unterschied der Zeiten, welche an den beiden Orten in demselben Augenblick beobachtet werden. Sind *PS*, *PM*, *PO*, *PM'* (die Figur ist leicht herzustellen) eine Anzahl Stundenkreise oder Meridiane, und sei in *S* der Sonnenmittelpunkt, so sind die Winkel am Pol *P SPM*, *SPO*, *SPM'*, die Stundenwinkel der Sonne oder die Sonnenzeit für die durch *M*, *O*, *M'* bezeichneten Orte. Es ist also der Winkel *MPO* gleich dem Unterschied der im gleichen Augenblick stattfindenden Zeiten in *M* und *O*, gleich der Länge des Ortes *M* gegen den Ort *O*. Nehmen wir den Meridian *PO* als Anfangsmeridian, so ist damit jener Winkel schlechthin die Länge des Ortes *M*. Nehmen wir ferner an, dass *M*, *S* westlich von *O*, dagegen *M'* östlich von *O* liegt, so ist der Winkel *MPO* als westliche Länge des Ortes *M* gegen *O*, der Winkel *OPM'* als östliche Länge des Ortes *M'* gegen

---

[1]) Aitken, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. 1888. Vol. XIV, pag. 118.

[2]) Poisson, Théorie mathématique de la Chaleur. Paris 1835.

[3]) Riemann, Gesammelte mathematische Werke. Leipzig 1876, pag. 226, vergl. Newcomb, pag. 583.

[4]) Rankine, Annales de Chimie et de Physique. Sér. 5, T. XXVII 1882, pag. 548.

$O$ zu bezeichnen. Nennen wir die Ortszeiten für $M$, $O$, $M'$ der Reihe nach $T$, $T_o$, $T'$, und $L_w$ die westliche Länge, $L_o$ die östliche, so ist

$$L_w = T_o - T$$

und

$$L_o = T' - T_o$$

oder wenn wir die östliche Länge negativ nehmen, können wir allgemein $L = T_o - T$ setzen, wo nun mit $T$ allgemein die Ortszeit eines östlich oder westlich vom Anfangsmeridian gelegenen Ortes ist und wobei dann auch die Zeiten immer westlich und astronomisch, d. h. von $0^h$ bis $24^h$ gezählt werden.

Dieser Ausdruck $L = T_o - T$ ist übrigens, wie leicht ersichtlich, nicht nur gültig für Sonnenzeit, sondern für jede beliebige Zeit. Mit $S$ bezeichnen wir dann einfach irgend einen Punkt der Sphäre und $T_o$ und $T$ sind die Stundenwinkel dieses Punktes für die beiden Meridiane, deren Längendifferenz $L$ ist.

Was den nullten Meridian betrifft, so wird allgemein bekanntlich jetzt der Greenwicher als solcher angesehen, wenngleich die verschiedenen astronomischen Tafeln und Ephemeridensammlungen auch verschiedene Nullmeridiane zu Grunde legen, für welche die betreffende Sammlung berechnet ist, so nimmt das »Berliner Astron. Jahrbuch« Berlin, die »Connaissance des Temps« Paris u. s. w. als Anfangsmeridian an.

Aus der obigen Definition der Länge ergiebt sich, dass die Bestimmung derselben in einer doppelten Operation zu bestehen hat, 1) in der Ermittelung der Zeit an den Orten, deren Längendifferenz zu ermitteln ist, mag nun der nullte Meridian direkt oder ein anderer in Betracht kommen, und 2) in der Vergleichung der Zeit an den beiden Orten.

Diese Aufgabe lässt sich in sehr verschiedener Weise lösen. Man kann Signale, Erscheinungen, die für beide Orte in dem gleichen absoluten Zeitmoment sichtbar sind, an beiden Orten beobachten und die Zeitangaben der genau berichtigten Uhren mit einander vergleichen, der Unterschied dieser Zeitangaben liefert sofort die Längendifferenz. Als solche Signale kann man terrestrische, die aber nur auf kurze Entfernungen sichtbar sein werden, annehmen, oder himmlische, und für letztere ist wieder nicht immer die gleichzeitige Beobachtung nöthig, wenn nämlich an Stelle der einen die Berechnung treten kann, wann ein solches Phänomen am nullten Meridian eintreffen muss, und wenn man sich auf Grund der astronomischen Theorieen auf diese Vorausberechnung verlassen kann. Insbesondere eignen sich hierfür verschiedene Erscheinungen, die die Satelliten des Jupiter und unser Mond verursachen, sowie sich auch die rasche Bewegung des Mondes für die Längenbestimmung verwenden lässt. Die wichtigsten dieser Methoden sollen hier später angeführt werden, sie liefern aber sämmtlich nicht den höchsten Grad der Genauigkeit und können nur zur Anwendung kommen, wenn zwei andere Methoden durch die Umstände nicht benutzt werden können. Diese Methoden beruhen darauf, dass man an der einen Station den Stand und Gang einer tragbaren Uhr, eines Chronometers, so genau als möglich nach Sternbeobachtungen ermittelt, darauf unter Inachtnahme aller Vorsichtsmaassregeln, wie sie auch in dem Artikel »Chronometer« angegeben sind, mit dem Chronometer an die andere Station reist, und hier wiederum den Stand und Gang des Chronometers durch Sternbeobachtungen ermittelt. Hat sich der Gang nicht in der Zwischenzeit geändert, so wird der nach dem Stand an der ersten Station und dem daselbst ermittelten Gang für die Beobachtungszeit an der zweiten Station berechnete Stand verglichen mit dem hier direkt beobachteten, sofort die Längendifferenz ergeben. Diese Methode der Chronometer-

übertragung führt, namentlich unter Anwendung einer grossen Zahl von Chronometern, zu guten Resultaten. Die äusserste Genauigkeit, wie sie z. B. bei den Langenbestimmungen unter ständigen Sternwarten oder für die Zwecke der internationalen Erdmessung gefordert wird, ergiebt die Benutzung der telegraphischen Uhrvergleichung, indem man an den beiden Stationen die Correctionen der Uhren genau beobachtet und dann unmittelbar nach oder zwischen diesen Beobachtungen die Uhren unter direkter Einschaltung in die Linie mit einander vergleicht, indem die Beobachter an beiden Stationen sich gleichsam zurufen, welche Zeit für genau verabredete Momente die genau berichtigten Uhren zeigen.

Zunächst mag nun mit der Besprechung dieser genauesten Methode, die zugleich die einfachste ist, sobald Telegraphenleitung zur Verfügung steht, begonnen werden.

Auch hier kann man in verschiedener Weise vorgehen, denn wenn auch die telegraphische Methode darauf beruht, dass an beiden Orten die Correction der Uhren aufs genaueste ermittelt und diese durch elektrische Signale mit einander verglichen werden, so ist doch in der Verbindung dieser beiden Operationen und in der Anordnung jeder einzelnen eine gewisse Mannigfaltigkeit möglich. Man kann nämlich entweder beide Operationen so zusammenlegen, dass eine eigentliche Signalabgabe ganz fortfällt, indem die Sternbeobachtungen selbst hierzu verwandt werden, oder man kann bei einer Trennung beider Operationen die Signale als Coincidenzbeobachtungen zwischen der Stationsuhr und einer eingeschalteten Hilfsuhr auffassen, oder sie unabhängig als registrirte Signale abgeben. Alle Methoden haben Anwendung gefunden, die letzte ist diejenige, welche sich als die zweckmässigste herausgearbeitet hat und demgemäss in neuester Zeit fast ausschliesslich gebraucht wird.

Für alle diese Methoden wird vorausgesetzt, dass an jeder Station ein Registrirapparat vorhanden ist, dessen doppelte Elektromagnete einmal mit der Beobachtungsuhr verbunden sind, sodass diese von Secunde zu Secunde ein Zeichen auf dem sich abrollenden Papierstreifen oder Bogen markirt, sodann mit einem Handtaster, mit dem der Beobachter auf demselben Streifen oder Bogen ober- oder unterhalb der Uhrsignale ein Zeichen für den Moment des Sterndurchganges durch einen Faden des Passageninstrumentes giebt. Ferner muss die Telegraphenleitung zwischen beiden Beobachtungsstationen zur Verfügung stehen, und zwar als vollkommen direkte, bei der keine Uebertragung irgend welcher Art stattfindet.

Man kann nun in solchem Falle dieselben Sterne in der Art an beiden Stationen beobachten, dass zunächst an der östlich gelegenen, wo der Stern früher in den Meridian tritt als an der westlichen, die Durchgänge registrirt werden, die sich dann auf beiden Registrirapparaten verzeichnen; sodann wird an der westlichen Station, sobald die Sterne in diesen Meridian eintreten, jeder Fadendurchgang registrirt und zwar wieder mit Markirung auf beiden Apparaten. Man hat in dieser Weise eine doppelte Bestimmung der Längendifferenz, indem einmal auf der östlichen Station, bezw. dem östlichen Registrirapparat unter Einschaltung der östlichen Uhr allein nach dieser der Durchgang desselben Sternes über die beiden Meridiane verzeichnet ist, sodann dasselbe auf der westlichen Station.

Nennen wir die auf den Mittelfaden reducirten Fadendurchgänge, die für die Instrumentalfehler des östlichen Passageninstrumentes corrigirt sein sollen, $T_o$, die an der westlichen Station beobachteten und ebenso behandelten Durchgänge

$T_w$, so würde die Differenz $T_w - T_o$ die Längendifferenz sein, wenn der Uhrgang null wäre und keine Zeit für die Uebertragung des Stromes verloren ginge. Der Uhrgang muss aber, wenn er besteht, was meistens der Fall sein wird, in Rechnung gezogen werden, da die Durchgangszeiten ja in einem um die Längendifferenz verschiedenen Zeitmoment wahrgenommen werden. Nennen wir den stündlichen Uhrgang $y_o$ (für die östliche Station) und drücken die Längendifferenz $L$ in Stunden aus, so haben wir, um auf $T_o$ zu reduciren, von $T_w$ noch $Ly_o$ abzuziehen, oder die entsprechende Grösse zu $T_o$ zu addiren, um auf $T_w$ zu reduciren. Ferner ist zu beachten, dass wenn wir wieder Apparat und Uhr auf der östlichen Station annehmen, dass dann die Beobachtungen an der westlichen Station in Folge der endlichen Stromgeschwindigkeit (worunter hier überhaupt die Zeit bis zum Ansprechen des Apparates verstanden wird) zu spät markirt werden müssen, es wird also $T_w$ und ebenso die Längendifferenz um eine Grösse $\tau$ zu gross erscheinen, sodass die an der östlichen Station gewonnene Längendifferenz

$$L_o = T_w - T_o + Ly_o = L + \tau$$

ist. Nun liefert aber der westliche Apparat ebenfalls eine Längenbestimmung, nennen wir das hier gewonnene Resultat $L_w$, so haben wir

$$L_w = T_w - T_o + Ly_w = L - \tau,$$

wo dann mit $y_w$ der stündliche Gang der westlichen Stationsuhr bezeichnet wird. Hier werden nämlich in Folge der »Stromzeit« die Signale der östlichen Station zu spät und daher die Längendifferenz zu klein erhalten. Nimmt man nun aus beiden Bestimmungen das Mittel, so hat man

$$L = \tfrac{1}{2}(L_o + L_w),$$

es ist dasselbe also von der Stromzeit vollkommen frei.

Bei allen Methoden spielt die sogen. »persönliche Gleichung« des Beobachters eine grosse Rolle. Das beste ist natürlich dieselbe zu eliminiren, was dadurch geschieht, dass die Beobachter die Stationen austauschen, d. h. einige Abende etwa in der Combination $A_{\text{Ost}}$, $B_{\text{West}}$ beobachten, dann einige, ungefähr die doppelte Zahl der Abende erster Combination in der Combination $A_{\text{West}}$, $B_{\text{Ost}}$, dann wieder, wie anfangs $A_{\text{Ost}}$, $B_{\text{West}}$. Das Mittel aus allen diesen Bestimmungen wird frei von der persönlichen Gleichung sein. Es ist aber bei dem Wechsel der Beobachter zugleich von Wichtigkeit, dass die Beobachter auch ihr Instrument mitnehmen, da sich herausgestellt hat, dass die persönliche Gleichung in Abhängigkeit vom Instrument, vom Fadennetz, des Sternbildes, der Beleuchtung u. s. w. steht. Kann man nicht diese Elimination bewerkstelligen, so bleibt nur übrig, die persönliche Gleichung durch gemeinschaftliche Beobachtungen zu bestimmen, was aber dann vor und nach der Längenbestimmung selbst zu geschehen hat, um eine etwaige Veränderung derselben in der Zwischenzeit in Rechnung ziehen zu können. Uebrigens wird unter Anwendung der REPSOLD-schen Registrirooculare (s. den Artikel »persönliche Gleichung«) diese Fehlerquelle auf ein Minimum reducirt.

So bequem die Methode scheint, so haftet ihr doch ein wesentlicher Uebelstand an, der auch zur Folge hatte, dass man von ihrer häufigen Anwendung abgekommen ist. Man gebraucht nämlich die Telegraphenleitung während eines grossen Theils des Abends, was in der Regel mit Schwierigkeiten des allgemeinen Verkehrs wegen, dem die Leitungen zu dienen haben, verbunden ist. Für vollständige Zeitbestimmungen zu einer Längenbestimmung muss in der Regel auf 16—20 Zeit- und einige Polsterne gerechnet werden, letztere zur Ermittelung

der Instrumentalfehler, und hierzu sind wieder etwa zwei Stunden nöthig, so lange muss also unter allen Umständen die Leitung verfügbar sein. Es kommt aber noch ferner hinzu, dass wenn die Längendifferenz gross ist, die Zeit für die Leitungsbenutzung noch um eben soviel vergrössert wird, da die Sterne um die Längendifferenz später in den westlichen Meridian eintreten. Ist die Längendifferenz aber nicht sehr bedeutend, so wird es schwer werden, die zu beobachtenden Sterne derartig auszuwählen, dass die Beobachtungen an den beiden Stationen sich nicht gegenseitig auf dem Registrirstreifen stören. Endlich wird man von dem Ort des Sternes nur dann unabhängig, wenn es gelingt, an beiden Stationen dieselben Sterne zu beobachten; misslingt dagegen an einer Station die Beobachtung eines Sternes, so hat auch die gelungene Beobachtung auf der andern Station keinen Werth, vorausgesetzt, dass man nicht ein anderes Reductionsverfahren anwenden will, indem man unter Berücksichtigung der Rectascension des Sternes aus jedem einzelnen Stern einen Uhrstand ableitet und aus dem Mittel dieser dann die Längendifferenz berechnet, ein Verfahren, welches aber auf einen der Hauptvorzüge dieser Methode, der vollständigen Elimination der Rectascension der Sterne, von vornherein verzichtet.

Beispiel. Im Jahre 1863 wurde zwischen der Sternwarte Leipzig und dem temporären Observatorium Dablitz bei Prag eine Längenbestimmung unter Anwendung verschiedener Methoden, auch der eben besprochenen Registrirmethode ausgeführt. In der folgenden Tabelle werden die Beobachtungen vom 5. October mitgetheilt, und zwar unter I die Beobachtungen nach dem Dablitzer, unter II die nach dem Leipziger Registrirstreifen. Die Bedeutung der in den einzelnen Columnen befindlichen Ziffern ist durch die Ueberschriften klar, nur sei bemerkt, dass die in der 3. und 6. Columne gegebenen Correctionen des Instrumentes aus der hier nicht mitgetheilten Verbindung der Zeitsterne und Polsterne abgeleitet wurden.

| Numm. des Sternes | Durchgangszeit Dablitz | Corr. des Instr. | Stern im Meridian | Durchgangszeit Leipzig | Corr. des Instr. | Stern im Meridian | Dablitz minus Leipzig |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1863 October 5 | | | | |
| | I. Dablitzer Instrum. Kreislage Ost; | | | Leipziger Instrum. Kreislage West. | | | |
| 1 | 22h 44m 31s·06 | −1s·19 | 29s·87 | 22h 52m 48s·48 | −0s·50 | 47s·98 | −8m 18s·11 |
| 2 | 22 48 24·95 | −0·96 | 23·99 | 22 56 43·07 | −0·92 | 42·15 | 18·16 |
| 3 | 22 58 10·67 | −0·95 | 9·72 | 23 6 28·99 | −0·94 | 28·05 | 18·33 |
| 4 | 23 0 36·06 | −1·04 | 35·02 | 23 8 54·01 | −0·76 | 53·25 | 18·23 |
| 5 | 23 3 36·03 | −0·99 | 35·04 | 23 11 53·87 | −0·86 | 53·01 | 17·97 |
| 11 | 23 45 17·41 | −0·85 | 16·56 | 23 53 35·60 | −1·17 | 34·43 | 17·87 |
| 12 | 23 50 8·03 | −1·17 | 6·86 | 23 58 25·65 | −0·54 | 25·11 | 18·25 |
| | | | | | | Mittel | −8m 18s·131 |
| | Dabl. Instr. Kreisl. West; | | | Leipz. Instr. Kreisl. Ost. | | | |
| 6 | 23h 14m 57s·45 | −0s·26 | 57s·19 | 23h 22m 14s·95 | +0s·50 | 15s·45 | −8m 18s·26 |
| 7 | 23 16 50·06 | −0·27 | 49·79 | 23 25 7·90 | +0·05 | 7·95 | 18·16 |
| 8 | 23 19 36·92 | −0·27 | 36·65 | 23 27 54·87 | −0·13 | 54·74 | 18·09 |
| 9 | 23 22 42·75 | −0·27 | 42·48 | 23 30 0·87 | −0·16 | 0·71 | 18·23 |
| 10 | 23 33 25·49 | −0·26 | 25·23 | 23 41 42·95 | +0·38 | 43·33 | 18·10 |
| | | | | | | Mittel | −8m 18s·168 |

| Numm. des Sternes | Durchgangszeit Dablitz | Corr. des Instr. | Stern im Meridian | Durchgangszeit Leipzig | Corr. des Instr. | Stern im Meridian | Dablitz minus Leipzig |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | II. Dabl. Instr. Kreisl. Ost; Leips. Instr. Kreisl. West. | | | | |
| 1 | 22$^h$ 31$^m$ 49$^s$·80 | −1$^s$·19 | 48$^s$·61 | 22$^h$ 40$^m$ 7$^s$·17 | −0$^s$·50 | 6$^s$·67 | −8$^m$ 18$^s$·06 |
| 2 | 22 35 43·68 | −0·96 | 42·72 | 22 44 1·75 | −0·92 | 0·83 | 18·11 |
| 3 | 22 45 29·36 | −0·95 | 28·41 | 22 53 47·60 | −0·94 | 46·66 | 18·25 |
| 4 | 22 47 54·72 | −1·04 | 53·68 | 22 56 12·63 | −0·76 | 11·87 | 18·19 |
| 5 | 22 50 54·73 | −0·99 | 53·74 | 22 59 12·43 | −0·86 | 11·57 | 17·83 |
| 11 | 23 32 35·75 | −0·85 | 34·90 | 23 40 53·90 | −1·17 | 52·73 | 17·83 |
| 12 | 23 37 26·33 | −1·17 | 25·16 | 23 45 43·94 | −0·54 | 43·40 | 18·24 |
| | | | | | | Mittel | −8$^m$ 18$^s$·073 |
| | | | Dabl. Instr. Kreisl. West; Leips. Instr. Kreisl. Ost. | | | | |
| 6 | 23$^h$ 1$^m$ 16$^s$·01 | −0$^s$·26 | 15$^s$·75 | 23$^h$ 9$^m$ 33$^s$·45 | +0$^s$·50 | 33$^s$·95 | −8$^m$ 18$^s$·20 |
| 7 | 23 4 8·61 | −0·27 | 8·34 | 23 12 26·36 | +0·05 | 26·41 | 18·07 |
| 8 | 23 6 55·42 | −0·27 | 55·15 | 23 15 13·38 | −0·18 | 13·20 | 18·05 |
| 9 | 23 17 1·20 | −0·27 | 0·93 | 23 25 19·27 | −0·16 | 19·11 | 18·18 |
| 10 | 23 20 43·92 | −0·26 | 43·66 | 23 29 1·34 | +0·38 | 1·72 | 18·06 |
| | | | | | | Mittel | −8$^m$ 18$^s$·112 |

Mittel aus beiden Kreislagen I −8$^m$ 18$^s$·149, Corr. f. Uhrgang +0$^s$·032
II −8 18·092 −0·018

$L_I$ − 8$^m$ 18$^s$·117
$L_{II}$ − 8 18·110

In diesen Werthen für $L$ steckt nun noch der Unterschied der persönlichen Gleichungen der Beobachter und die Stromzeit; wenn man erstere mit $p$, letztere mit $s$ bezeichnet, so würde man haben

$$-8^m\,18^s\cdot117 = l + p + s$$
$$-8\;\;18\cdot110 = l + p - s,$$

sodass das Mittel aus beiden Werthen, — 8$^m$ 18$^s$·113 von der Stromzeit, nicht aber von der persönlichen Gleichung frei ist. Letztere ist durch Wechsel der Beobachter bei dieser Längenbestimmung eliminirt.

Die beiden anderen Methoden, bei denen der elektrische Telegraph zur Anwendung kommt, können als Coincidenz- und Signalmethode bezeichnet werden. Der Unterschied liegt nur in der Vergleichung der Uhren.

Für die Coincidenzmethode gebraucht man auf jeder Station noch eine Hilfsuhr, deren Gang so regulirt ist, dass sie im Zeitraum von etwa 2 bis 3 Minuten einen Schlag gegen die Beobachtungsuhr gewinnt bezw. verliert. Hat man nämlich z. B. zwei Secundenuhren, von denen die eine nach mittlerer Zeit, die andere nach Sternzeit regulirt ist, so gewinnt die letztere in einem Tag gegen die erstere 3$^m$ 56$^s$ = 236$^s$ oder Pendelschläge. Fallen also in einem gegebenen Augenblick die Schläge beider Uhren genau zusammen, so werden sie bald auseinander gehen, um nach etwas weniger als 6 Minuten wiederum zusammen zu fallen, wobei dann die Sternzeituhr eine Secunde gegen die mittlere Zeituhr gewonnen hat. Will man zwei solche Uhren mit einander vergleichen, so geschieht dies am schärfsten durch die Beobachtung einer sogen. Coincidenz, d. h. des Momentes, wo die Schläge zusammenfallen. Mit einiger Uebung lässt sich diese Beobachtung sehr genau machen, man hört nämlich bei der Coincidenz

nur einen Schlag, wogegen das Auseinandergehen der Schläge sehr auffallend hervortritt. Da nun aber auf ca. 350 Secunden der Unterschied zwischen beiden Uhren eine Secunde beträgt, so würde bei 35 Secunden die Abweichung nur 0ˢ·1 betragen, es lässt sich aber namentlich bei präcisem metallischem Schlage der Uhren das Auseinandergehen schon nach einigen Secunden deutlich hören, sodass der Fehler einer einzelnen Coincidenzbeobachtung kaum 0ˢ·02 betragen kann. Es ist daher in der Astronomie bei Uhrenvergleichungen die Coincidenzbeobachtung die gebräuchlichste. Das seltene Eintreffen einer Coincidenz, nach jeweils 6 Minuten, wird durch die grosse Sicherheit aufgewogen, da andere Vergleichungsarten, z. B. indem man Signale nach der zu vergleichenden Uhr auf dem mit der Normaluhr verbundenen Registrirapparat giebt, wobei in weit kürzerer Zeit die Vergleichung bewirkt wird, oder indem man besondere Coincidenzzwischenuhren verwendet, die (s. weiter unten) in geringen Intervallen in 6 bis 12 Secunden Coincidenzen geben, entweder mit starken systematischen und für die gerade vorliegende Beobachtungsreihe constanten Fehlern, oder mit starken sonstigen Unsicherheiten behaftet sind.

Diese Coincidenzbeobachtungen hat man nun bei den Längenbestimmungen in der folgenden Weise verwandt. Sei auf der einen Station $A$ neben der Hauptuhr $U$ die Hilfsuhr $C$ aufgestellt und diese in der Art mit der Telegraphenleitung verbunden, dass jeder ihrer Schläge ein Relais auf der Station $B$ zum Ansprechen bringt, wo sich die Hauptuhr $U'$ befindet. Zu gewisser Zeit wird nun der Stromschluss auf $A$ hergestellt und hier (zu wiederholten Malen, um die Sicherheit der Beobachtung zu erhöhen) das Zusammenfallen der Schläge der Uhren $U$ und $C$ beobachtet und notirt, zu gleicher Zeit wird auch auf $B$ das Zusammenfallen der Schläge des die Uhr $C$ vertretenden Relais' mit denen der Uhr $U'$ beobachtet und notirt. Es ist ohne Weiteres ersichtlich, dass wenn die Uhren $U$ und $U'$ genau richtig gehen, oder ihre Fehler genau ermittelt sind, die auf die gleichen Zeitmomente reducirten Coincidenzen in ihrer Differenz den Längenunterschied geben müssen. In dieser ist nun noch die oben erwähnte sogen. Stromzeit enthalten, indem die Schläge von $C$ um die Stromzeit verspätet in $B$ eintreffen. Man wird daher auch in $B$ neben $U'$ noch eine Coincidenzuhr aufstellen, und diese ebenso wie in $B$ mit $U'$ auch in $A$ mit $U$ vergleichen

Was die Beobachtung der Coincidenzen betrifft, so kann man diese auch anstatt nach dem Gehör durch Selbstregistrirung ermitteln, indem man die Coincidenzuhr mit dem Tasterelectromagneten des Registrirapparates verbindet. Hat man bei der Zeitbestimmung die Registrirmethode angewandt, so wird auf diese Weise die Einführung einer Beobachtung, bei der das Gehör die Hauptrolle spielt, vermieden. Denn wenn auch starke persönliche Fehler bei der Erfassung der Coincidenz nicht in Betracht kommen, so wird doch jede nu mögliche Quelle solcher Fehler zu umgehen oder zu eliminiren sein.

Wenn der gegenseitige Stand der beiden Hauptuhren nahe bekannt ist, was in der Regel sehr bald der Fall sein wird, so kann man dann von einem beliebigen Schlage der Coincidenzuhr ausgehen und leicht die den folgenden Coincidenzen zwischen Haupt- und Coincidenzuhr entsprechenden Secunden nach letzterer durch Weiterzählen angeben, ohne Gefahr zu laufen, etwa die eine Secunde zu einer falschen der Hauptuhr zu zählen. Es ist dann einfach, die Coincidenzen eines jeden Abends auf ein nahe der Mitte sämmtlicher Coincidenzen gelegenes Zeitmoment zu reduciren. Wenn nämlich $T$ dieses Zeitmoment, $t$ die Secunde der beobachteten Coincidenz nach der Coincidenzuhr bezeichnet, und $T'$ und $t'$ die entsprechenden Momente nach der Hauptuhr, ferner $\mu$ das Ver-

hältniss der Secunde der Coincidenzuhr zu der der Hauptuhr, also die Länge einer Coincidenzuhrsecunde ausgedrückt in Hauptuhrsecunden, so ist

$$T' = t' + (T - t)\,\mu.$$

Hier lässt sich $\mu$ aus der beobachteten Zwischenzeit zwischen der ersten und letzten Coincidenz bestimmen.

Ein Uebelstand dieser Methode liegt ebenfalls in der langen Benutzung der Leitungen, da zur erforderlichen Genauigkeit eine grössere Anzahl Coincidenzen beobachtet werden müssen, und in dem Zeitverlust, der durch die zwischen den Coincidenzen nutzlos verfliessenden Pausen, entsteht, endlich in der Schwierigkeit, den Relaisanschlag zu einem scharf zu beobachtenden Uhrschlag zu gestalten.

Beispiel. Bei der schon vorher erwähnten Längenbestimmung Leipzig-Dablitz wurde auch die Methode der Coincidenzen angewandt. Am 5. October fanden folgende Beobachtungen statt:

I. Die Coincidenzuhr in Dablitz.

| a) Dablitz: Coincidenzen gehört nach der Hauptuhr | a) Dablitz: Coincidenzen gehört nach der Coincidenzuhr | b) Leipzig: Coincidenzen gehört nach der Hauptuhr | b) Leipzig: Coincidenzen gehört nach der Coincidenzuhr |
|---|---|---|---|
| $1^h\ 0^m\ 45^s$ | $-23^s$ | $0^h\ 48^m\ 31^s$ | $0^s$ |
| 1 3 13 | +121 | 0 50 53 | 148 |
| 1 5 36 | 265 | 0 53 21 | 292 |
| 1 8 9 | 410 | 0 55 47 | 439 |
| 1 10 30 | 557 | 0 58 13 | 586 |
| 1 13 0 | 712 | 1 0 38 | 732 |

II. Die Coincidenzuhr in Leipzig

| a) Dablitz: Coincidenzen gehört nach der Hauptuhr | a) Dablitz: Coincidenzen gehört nach der Coincidenzuhr | b) Leipzig: Coincidenzen gehört nach der Hauptuhr | b) Leipzig: Coincidenzen gehört nach der Coincidenzuhr |
|---|---|---|---|
| $1^h\ 15^m\ 13^s$ | $-11^s$ | $1^h\ 2^m\ 42^s$ | $0^s$ |
| 1 18 18 | +175 | 5 45 | 184 |
| 1 21 17 | 355 | 8 47 | 367 |
| 1 24 15 | 534 | 11 47 | 548 |
| 1 27 19 | 719 | 14 46 | 728 |
| 1 30 22 | 903 | 17 46 | 909 |

Werden nun diese Angaben mit dem Reductionsfactor, der sich z. B. aus den Beobachtungen unter Ia ergiebt, wenn man die erste und letzte Beobachtung von einander abzieht, nämlich $12^m\ 15^s = 735^s$ der Hauptuhr gleich 740 Schlägen der Coincidenzuhr, auf eine bestimmte Zeit reducirt, so erhält man

| | I reducirt auf 350s für Dablitz | I reducirt auf 350s für Leipzig | II reducirt auf 450s für Dablitz | II reducirt auf 450s für Leipzig |
|---|---|---|---|---|
| | $1^h\ 7^m\ 0^s{\cdot}45$ | $0^h\ 54^m\ 18^s{\cdot}61$ | $1^h\ 22^m\ 51^s{\cdot}47$ | $1^h\ 10^m\ 9^s{\cdot}53$ |
| | 0·46 | 18·62 | 51·49 | 9·54 |
| | 0·43 | 18·60 | 51·48 | 9·54 |
| | 0·47 | 18·61 | 51·46 | 9·54 |
| | 0·47 | 18·62 | 51·48 | 9·53 |
| | 0·44 | 18·62 | 51·48 | 9·52 |
| Mittel | $1^h\ 7^m\ 0^s{\cdot}45$ | $0^h\ 54^m\ 18^s{\cdot}61$ | $1^h\ 22^m\ 51^s{\cdot}48$ | $1^h\ 10^m\ 9^s{\cdot}53$ |
| Leipzig-Dablitz | | $-12^m\ 41^s{\cdot}84$ | $-12^m\ 41^s{\cdot}95$ | |

Zu diesen Unterschieden Leipzig-Dablitz hat man nun noch den durch die Zeitbestimmungen gefundenen Unterschied der Uhrzeiten in Dablitz und Leipzig unter Berücksichtigung des Ganges hinzuzufügen. Derselbe ist für den Unterschied I ($1^h{\cdot}12$) + $4^m\ 24^s{\cdot}10$, für den Unterschied II ($1^h{\cdot}41$) + $4^m\ 24^s{\cdot}17$, sodass darnach für die Längendifferenz die Werthe

$$L\,\mathrm{I} - 8^m\ 17^s{\cdot}74$$
$$L\,\mathrm{II} - 8\ \ 17\ \ 78$$

folgen.

Die in neuester Zeit am allgemeinsten zur Anwendung kommende Methode ist, wie schon vorher angedeutet, die Signalmethode, der vorigen ähnlich in der Anwendung der Operationen. Der Unterschied liegt in der Art der Uhrenvergleichung. An Stelle der einzuschaltenden Coincidenzuhr tritt der Handtaster, mit dem eine Reihe auf einander folgender Signale gegeben werden, die an beiden Stationen gleichzeitig gehört und nach den Schlägen der Hauptuhr aufgefasst werden. In der Regel wird dies Signal nicht mehr nach dem Gehör mit der Hauptuhr beobachtet, sondern es wird auf dem Registrirapparat beider Stationen aufgefangen, wo es sich dann neben den Secundenpunkten der Hauptuhr verzeichnet. Mit aller wünschenswerthen Schärfe kann dann dies Signal abgelesen werden. Es liegt auf der Hand, dass dies Verfahren dasjenige ist, welches in der allerkürzesten Zeit und unter Vermeidung aller persönlichen Auffassungsfehler ausgeführt werden kann. Man kann die Signale in 1—2 Secundenintervall geben, erhält also im Zeitraum einer Minute ohne Schwierigkeit 30 Signale. Und da zur Elimination der Stromzeit die Signale von beiden Stationen gegeben werden müssen, wird man in 2 Minuten die Vergleichung vollenden können, also für die ganze Operation der elektrischen Vergleichung, wenn sonst alle Maassnahmen gut getroffen und verabredet sind, die Telegraphenleitung kaum länger als 5 Minuten benöthigen.

Es sind nun aber hier noch eine Reihe von Vorsichtsmaassregeln zu treffen, welche das vollkommene Gelingen dieser Operation erst gewährleisten. Vorausgesetzt wird, dass die Zeitbestimmungen registrirt werden, und zwar local, dass der Beobachter in *A* die Fadenantritte der Sterne auf dem eigenen Registrirapparat verzeichnet, wie der in *B* seine Beobachtungen auf dem in *B* befindlichen Apparat. Zu einer vollkommenen Zeitbestimmung gehören nach der Methode der Beobachtung im Meridian etwa 6—8 gleichmässig auf beide Kreislagen vertheilte Zeit- (Süd-)sterne und ein Polstern mit Umlegung, und zwar wird man die Sterne so anordnen, dass der Polstern in die Mitte fällt, also erst 3—4 Zeitsterne in einer Kreislage beobachtet werden, dann ein Polstern zur Hälfte in der gleichen Lage, zur zweiten Hälfte in der anderen, in welcher dann die übrigen 3—4 Zeitsterne angeschlossen werden. Nach einer solchen vollständigen Zeitbestimmung erfolgt darauf die Uhrvergleichung beider Stationen durch elektrische Signale unter Benutzung der Telegraphenleitung. Um nun von einem Uhrgang der beiden Stationsuhren unabhängig zu sein, ist es nothwendig, gleich nach dem Signalaustausch eine zweite Zeitbestimmung in gleicher Anordnung wie die erste vorzunehmen, sodass die Uhrvergleichung gerade von zwei unabhängigen Zeitbestimmungen eingeschlossen ist. Hiermit ist dann eine Längenbestimmung durchgeführt. Man wird aber in der Praxis zur Erhöhung der Genauigkeit eine nochmalige Bestimmung an diese erste unmittelbar anschliessen, indem man nach der zweiten Zeitbestimmung einen zweiten Signalwechsel vornimmt, dem dann zum Schluss eine dritte Zeitbestimmung zu folgen hat. Da bei dieser Anordnung die zweite Zeitbestimmung in beide Resultate

eingeht, so ist es nothwendig, durch Hinzufügung einiger Sterne ihre Sicherheit zu erhöhen, wenn man es nicht überhaupt vorzieht, um zwei ganz unabhängige Endresultate zu erhalten, an die zweite Zeitbestimmung sofort, oder nach kleiner Pause, eine dritte anzuschliessen, auf welche dann erst der zweite Signalwechsel mit der unmittelbar anschliessenden vierten Zeitbestimmung zu folgen hat. Es hat also ein mehrfacher Uebergang vom Localregistriren auf den Signalwechsel stattzufinden, und da hierbei entsprechend der kurzen Leitung im Beobachtungsraum und der langen zwischen beiden Stationen mit sehr verschiedenen Stromquellen gearbeitet werden muss, so ist es unbedingtes Erforderniss, dass die zur Erzielung gleicher Wirkungen auf die Empfangsapparate nöthigen Operationen leicht und rasch auszuführen sind. Es müssen sowohl beim Localregistriren als auch beim Signalwechsel und zwar bei letzterem sowohl bei ankommenden als abgehenden Strom stets Ströme ganz gleicher Intensität durch das mit einer Localbatterie und dem Signalanker des Registrirapparates verbundene Relais gehen. Wenn dies nämlich nicht der Fall ist, so ist das gleichmässige Ansprechen des Signalankers bei den verschiedenen Operationen nicht gesichert, und nur unter dieser Annahme wird das Resultat der Längenbestimmungen im Mittel aus den entsprechend angeordneten Beobachtungen als frei angesehen werden dürfen von den unter der Bezeichnung der Stromzeit inbegriffenen Verzögerungen, die zwischen dem Stromschluss und dem Signalempfang vorkommen. Es ist, um diese gleiche Relaisthätigkeit zu erzielen, übrigens auch nothwendig, dass der abgehende und ankommende Strom das Relais in gleicher Richtung durchläuft, was erreicht wird, wenn an den beiden Stationen die entgegengesetzten Pole der Linienbatterie mit dem »Erddraht verbunden werden. In den »Veröffentlichungen des Königl. Preuss. Geodätischen Instituts« sind die Hauptnormen mitgetheilt, welche sich auf Grund der bei den zahlreichen Längenbestimmungen gemachten Erfahrungen als nothwendig zu beachtende Regeln ergeben haben, und die ausserordentliche Genauigkeit, welche genannte Behörde bei ihren Arbeiten erreicht hat, ist ein Beweis für die Richtigkeit solcher Regeln.

Um die Stromstärke jeweils festsetzen und controliren zu können, ist die Einschaltung einer Tangentenbussole und zur Regulirung der Stromstärke die eines Rheostaten erforderlich. Die sonstigen Hilfsapparate, Galvanoskop, Blitzableiter, ein Schreibapparat mit getrenntem Taster gehören selbstredend in den Stromkreis, wie die Uhr und der Chronograph. Die Linienbatterie ist am besten getrennt von der Localbatterie zu halten, doch kann man natürlich auch als letztere eine Anzahl Elemente von der Linienbatterie abzweigen. Um rasch von der einen Operation auf die andere übergehen zu können, bedarf es ferner eines dreifachen Kurbelumschalters, dessen einfache Drehung die Leitung für Localregistrirung, für Signalwechsel und für die geschäftliche Correspondenz schaltet.

Bei der raschen Veränderlichkeit der Stromstärke, die nicht allein von Tag zu Tag zu bemerken ist, müssen für den abgehenden und ankommenden Strom die einzuschaltenden Widerstandsgrössen jedes Mal neu bestimmt werden, was in der Weise geschieht, dass erst die eine Station den Strom 1—2 Minuten lang beständig schliesst und beide Stationen während dieser Zeit die Widerstandsgrössen so lange variiren, bis die Tangentenbussole den Normalausschlag giebt. Hierauf wird man von der anderen Station aus ebenso verfahren, und man kann nun jedes Mal bei Abgang und Ankunft der Signale den so ermittelten Widerstand einschalten. In gleicher Weise muss auch vor der Zeitbestimmung für die Localregistrirung die Widerstandsgrösse ermittelt werden.

Die galvanischen Apparate sind nun erfahrungsgemäss so zu wählen, dass die Tangentenbussole bei Anwendung eines MEIDINGER'schen Elementes von mittlerer Grösse und bei Einschaltung von 10 *km* Widerstand einen Nadelausschlag von 45—60° zeigt, dass der Rheostat von 1—10000 Ohm (0·1—1200 *km* Leitungslänge) von Einheit zu Einheit regulirbar ist. Die Linienbatterie muss unter allen Umständen sehr kräftig genommen werden, die Localbatterie entsprechend schwächer, jedoch so, dass bei der ersten Berührung der Relaiscontacte die Signale auf dem Registrirapparat erfolgen; für den Durchgang durch die Uhr ist ein möglichst schwacher Strom zu nehmen.

Was die Stromzeit betrifft, so haben die von TH. ALBRECHT am Kön. Preuss. Geodät. Institut angestellten Untersuchungen zu dem Resultat geführt, dass man für dieselbe angenähert den Ausdruck

$$0 = 0^s{\cdot}0000208\,L + 0^s{\cdot}0000000206\,L^2$$

annehmen kann, wo $L$ die Leitungslänge in Kilometern bedeutet. Es ist abgeleitet aus sämmtlichen Längenbestimmungen, die 1874—1884 vom Geodätischen Institut unter Anwendung gleicher Apparate und gleicher Beobachtungsmethoden ausgeführt wurden, und wo Leitungen von 146 *km*—1230 *km* Länge in Benutzung kamen. Die Einzelwerthe für diese Längenbestimmungen und die Darstellung der Stromzeit durch obige Formel giebt folgende Tabelle:

| Längenbestimmung | Jahr der Ausführung | Länge der Leitung | Stromzeit | | Beob.-Rechn. |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | Beobachtung | Rechnung | |
| Brocken-Göttingen . . . | 1874 | 146 km | + 0s·002 | + 0s·004 | — 0s·002 |
| Mannheim-Strassburg . . | 1876 | 157 | 0·003 | 0·004 | — 0·001 |
| Brocken-Leipzig . . . . | 1874 | 229 | 0·010 | 0·006 | + 0·004 |
| Altona-Wilhelmshaven . . | 1878 | 234 | 0·006 | 0·006 | 0·000 |
| Berlin-Swinemünde . . . | 1883 | 245 | 0·008 | 0·006 | + 0·002 |
| Berlin-Göttingen . . . . | 1874 | 403 | 0·011 | 0·012 | — 0·001 |
| Bonn-Wilhelmshaven . . | 1878 | 416 | 0·016 | 0·013 | + 0·003 |
| Kiel-Swinemünde . . . . | 1883 | 446 | 0·013 | 0·014 | — 0·001 |
| Strassburg-Bonn . . . . | 1876 | 467 | 0·016 | 0·014 | + 0·002 |
| Altona-Bonn . . . . . | 1878 | 536 | 0·019 | 0·017 | + 0·002 |
| Berlin-Warschau . . . . | 1884 | 666 | 0·024 | 0·023 | + 0·001 |
| Swinemünde-Königsberg . | 1884 | 678 | 0·022 | 0·024 | — 0·002 |
| Berlin-Bonn . . . . . | 1877 | 680 | 0·023 | 0·024 | — 0·001 |
| Bonn-Paris . . . . . . | 1877 | 706 | 0·024 | 0·025 | — 0·001 |
| Königsberg-Warschau . . | 1884 | 766 | 0·020 | 0·028 | — 0·008 |
| Berlin-Strassburg . . . . | 1876 | 778 | 0·030 | 0·029 | + 0·001 |
| Berlin-Paris . . . . . | 1877 | 1230 | 0·059 | 0·057 | + 0·002 |

Die Darstellung der Beobachtungen durch die obige Formel ist also eine sehr gute, so dass man nicht zweifeln kann, dass letztere als empirischer Ausdruck der Wirklichkeit entspricht. Es ist aber doch hervorzuheben, dass sie bei der Abhängigkeit der Stromzeit von den benutzten Apparaten immerhin nur für die hier angewandten gilt, dass bei Benutzung anderer Apparate wohl die Formel sich anders gestalten kann, wenngleich anzunehmen ist, dass die hier gegebene auch für andere Fälle einen Anhaltspunkt liefert. Das in der Formel auftretende quadratische Glied wird aber als die Wirkung der Verzögerung angesehen werden können, die durch das allmähliche Anwachsen der Stromstärke bis zur vollen Intensität an der Endstation gegenüber den Verhältnissen an der Abgangsstation

entsteht. Denn wenn wir mit $U_w$ und $U_o$ die Uhrdifferenzen bezeichnen, die sich aus den Ablesungen der von der westlichen und östlichen Station gegebenen Signale auf den Registrirstreifen ergeben, mit $r_o$ und $r_w'$ die Verzögerung der Relais auf der östlichen und westlichen Station bei den von der östlichen Station, mit $r_o'$ und $r_w$ bei den von der westlichen Station gegebenen Signalen, so ist der Ausdruck für die Fortpflanzungszeit des elektrischen Stromes

$$t = \frac{U_w - U_o}{2} + \frac{r_o - r_o'}{2} + \frac{r_w - r_w'}{2}.$$

Bei langen Leitungen wird nun die durch vorgenommenen Ausgleich der Stromstärken möglichst erstrebte Gleichheit von $r_o$ und $r_o'$, $r_w$ und $r_w'$ doch nicht in Strenge erreicht werden, und es werden wegen der allmählich ansteigenden Stromstärke die Werthe von $r_o'$ und $r_w'$ stets grösser sein als die $r_o$ und $r_w$, und zwar desto mehr, je länger die Leitung ist.

Es mag nicht unerwähnt bleiben, dass ALBRECHT auch darüber gelegentlich Untersuchungen anstellte, in wiefern sich eine Abhängigkeit dieser Stromzeit von der Stärke der in Anwendung gekommenen Batterie zeigte. Bei zwei Längenbestimmungen zwischen Berlin und Bonn, und Bonn und Paris war die eigentliche Linienbatterie aus 140 MEIDINGER'schen Elementen mittlerer Grösse zusammengesetzt. Sie wurde dann auf das möglichst geringe Maass reducirt, sodass aber der Signalwechsel noch in normaler Weise vorgenommen werden konnte. Bei möglichst empfindlicher Relaisstellung genügten noch 15 Elemente zum Signalwechsel, es bestand aber dabei nur ein ganz geringer Spielraum für die Stellung der Relais, sodass sich die Bedingung, diese Stellung so zu wählen, dass sie bereits im ersten Stadium des Anwachsens des Stromes functionirte, nicht ganz erfüllen liess. Im Uebrigen wurde auch hier für thunlichsten Ausgleich der Stromstärken bei abgehendem und ankommendem Strom gesorgt. Es ergaben sich folgende 4 bezw. 6 Bestimmungen an verschiedenen Tagen:

| | 140 Elemente | 15 Elemente | Differenz |
|---|---|---|---|
| Berlin-Bonn, Stromzeit | = + 0ˢ·024 | + 0ˢ·030 | + 0ˢ·006 |
| | 0·021 | 0·028 | + 0·007 |
| | 0·032 | 0·032 | 0·000 |
| | 0·026 | 0·035 | + 0·009 |
| Bonn-Paris | + 0·029 | + 0·045 | + 0·016 |
| | 0·030 | 0·047 | + 0·017 |
| | 0·035 | 0·044 | + 0·009 |
| | 0·027 | 0·040 | + 0·013 |
| | 0·030 | 0·049 | + 0·019 |
| | 0·024 | 0·057 | + 0·023 |

Im Mittel findet sich also bei Berlin-Bonn eine Verzögerung von 0ˢ·006, bei Bonn-Paris eine solche von 0ˢ·016. Da beide Leitungen sehr nahe gleich lang waren, spricht sich in diesem Unterschied zwischen beiden Resultaten nicht eine Abhängigkeit von der Länge der Leitung aus, sie wird vielmehr, da die Versuche gleichzeitig von Bonn ausgingen, in der Verschiedenheit der in Berlin und Paris angewandten Apparate liegen. Sie liefern aber vor allem das wichtige Resultat, dass wenn bei einer Abschwächung der Batterie auf den 9. Theil die Differenz der Stromzeit nur etwa 0ˢ·01 beträgt, von den vorübergehenden Einflüssen der Witterung auf die Leitungswiderstände unter Beobachtung möglichster Ausgleichung der Stromstärken, wie oben angegeben, kein nennenswerther, schädlicher Einfluss auf die Resultate der Längenbestimmungen selbst

zu befürchten ist. (Vergl. hierüber ALBRECHT's Mittheilungen in den »Astron. Nachr.«, in den »Veröffentlichungen des Geodät. Instituts 1883—84«, und seine »Formeln und Hilfstafeln für geograph. Ortsbestimmungen«.)

Soll schliesslich der Ausdruck für die Berechnung der Längendifferenz unter Anwendung der telegraphischen Methode gegeben werden, so folgt derselbe in einfacher Weise. Es seien dazu $U_e$ und $U_w$ die aus den Zeitbestimmungen hervorgegangenen Uhrstande auf der östlichen und westlichen Station mit dem event. Uhrgang reducirt auf die Zeit der Mitte des Signalwechsels oder auf einen sonstigen gleichen Zeitmoment, $R_e$ und $R_w$ die Verzögerung der Relais beim Localregistriren, $r_e$ und $r_w'$ die bei den von der östlichen Station aus gegebenen Signalen, $r_e'$ und $r_w$ die auf die westliche Station bezüglichen Grössen, sodass der Index für den ankommenden Strom gilt, endlich seien die Uhrdifferenzen bei den von der östlichen und der westlichen Station aus gegebenen Signalen $d_e$ und $d_w$, so ist die Längendifferenz $L$

$$L = \frac{d_e + d_w}{2} + U_e - U_w + \left(R_e - \frac{r_e + r'_e}{2}\right) - \left(R_w - \frac{r_w + r'_w}{2}\right).$$

Ist nun durch den Ausgleich der Stromstärken $R_e = r_e = r_e'$ und $R_w = r_w = r_w'$ und wird die Stromzeit überhaupt durch das Hin- und Herregistriren eliminirt, so fallen damit ja die letzten beiden Glieder fort. Will man dagegen noch die persönliche Gleichung berücksichtigen, oder dieselbe andererseits aus den Abendwerthen ermitteln, so findet sich

$$L = \frac{d_e + d_w}{2} + U_e - U_w + P,$$

wo dann $P$, die persönliche Gleichung, so zu verstehen ist, dass man Beobachter auf der östlichen Station, weniger Beobachter auf der westlichen Station nimmt. Treten nun die Einzelwerthe verschiedener Abende zusammen, so wird man in der Regel letztere nicht als gleichwerthig ansehen dürfen, da auf der einen oder anderen Station oder auf beiden die Uhrstände nicht immer mit gleicher Sicherheit erhalten werden, indem der eine oder andere Stern verloren geht, oder durch die Luftbeschaffenheit und sonstige Störungen Unsicherheiten hinzutreten können; dabei ist noch zu beachten, dass die Beobachtungen der Polsterne zur Ermittelung des Azimuthfehlers der benutzten Instrumente führen, also ebensowohl wie die Zeitsterne, welche direkt zur Bestimmung des Uhrstandes führen, bei einer Gewichtsbestimmung hinsichtlich der abendlich erreichten Sicherheit herangezogen werden müssen. Nach OPPOLZER kann man für die Bestimmung des Gewichtes der Uhrstände die Formel

$$G = \frac{pz}{0{\cdot}7p + 0{\cdot}8z}$$

verwenden, wo $p$ und $z$ die Zahl der beobachteten Pol- bezw. Zeitsterne bezeichnen. Das Gewicht der Längenbestimmung selbst setzt sich dann aus den so ermittelten Gewichten der Zeitbestimmung an der östlichen und westlichen Station zusammen, und lautet

$$G = \frac{g_e g_w}{g_e + g_w}$$

und das Endresultat der Längenbestimmung aus allen Abenden wird das unter Berücksichtigung dieser Gewichte gebildete Mittel sein.

Die Längenbestimmung aus Chronometerübertragungen, auf welche Methode nun im folgenden näher eingegangen werden soll, wurde zuerst von

Schumacher zur Ausführung gebracht, indem er im Jahre 1817 die Längendifferenz zwischen Hamburg und Kopenhagen auf diesem Wege zu bestimmen versuchte. Das Resultat, welches er mit Benutzung zweier Chronometer erhielt, zeigte aber noch von einem im Jahre 1820 wiederholten Versuch mit drei Chronometern eine Abweichung von etwa 8 Secunden. Auch eine Reise im Jahre 1821 mit 5 Chronometern liess grosse Unsicherheiten in den Ergebnissen der einzelnen Uhren. Indessen lag die Unsicherheit ersichtlich in der Schwierigkeit der Reise, welche theils zu Wagen, theils mit Segelschiff bei stürmischem Wetter viele Tage in Anspruch nahm, Umstände, welche die gegen jeden Stoss empfindlichen Chronometer nicht vertragen konnten. Es trat dies deutlich hervor, als Schumacher noch in dem gleichen Jahre durch Zahrtmann eine Reise mit sechs Chronometern unter Benutzung des Dampfschiffes von Kiel nach Kopenhagen, und anderweitiger Uebertragung von Kiel nach Hamburg ausführen liess. Hier waren die grössten Abweichungen unter den sechs Chronometern nur eine Secunde, wogegen die Rückreise mit vier der gleichen Chronometer aber unter Benutzung einer um Skagen herumgehenden Brigg, die 11 Tage unterwegs war, zu Einzelresultaten führte, die fast 18 Secunden von einander differirten. Es geht schon aus diesen ersten grösseren Versuchsreisen hervor, dass man auf genaue Längenbestimmungen nur rechnen kann, wenn die Reisen schnell und unter grosser Schonung der Chronometer bewirkt werden können. Selbstverständlich wird man auch nur ausgesucht gute Uhren und eine grosse Anzahl verwenden, ausserdem die Reisen thunlichst mehrmals wiederholen. Diese Bedingungen haben Veranlassung zu sehr ausgedehnten Chronometerexpeditionen gegeben. Die erste derartige kam im Jahre 1824 zur Ausführung, wo die englische Admiralität ein Dampfschiff ausrüsten liess, um einestheils die Längendifferenzen zwischen dänischen und englischen Dreieckspunkten und einigen sonst wichtigen Häfen der Nordsee zu bestimmen, sodann zur Untersuchung anderer für die Marine wichtiger Fragen, die hier nicht in Betracht kommen. Das Schiff erhielt 28 Chronometer, und da Helgoland eine Referenzstation bildete, wo ein passageres Observatorium zur gleichen Verbindung mit Altona errichtet war, so wurden jenen 28 englischen Chronometern noch 9 dänische hinzugefügt, von denen sich aber im Laufe der Reise 2 unbrauchbar erwiesen, sodass im ganzen 35 Chronometer zur Verfügung standen. Das Schiff war vom 30. Juni bis 10. September unterwegs, und wiederholte in dieser Zeit die Vergleichungen an den einzelnen in Betracht kommenden Häfen häufiger, sodass z. B. die Längendifferenz Altona-Helgoland achtmal durch die 7 dänischen, viermal durch die 28 englischen Chronometer bestimmt wurde, und die zwischen Helgoland und Greenwich viermal durch die 7 dänischen und sechsmal durch die 28 englischen. Die hierbei erreichte Genauigkeit entsprach, was die Uebereinstimmung der einzelnen Reisen und Chronometer betrifft, allen Wünschen und Erwartungen.

Eine zweite grosse Chronometerexpedition wurde in Russland unter der Leitung des Generals Schubert ausgeführt, um die Längen der für die Schifffahrt wichtigsten Häfen der Ostsee zu bestimmen. Auch Preussen, Dänemark und Schweden waren durch die Antheilnahme der auf ihren Gebieten belegenen Sternwarten an diesem Unternehmen betheiligt. Ein russisches Kriegsdampfschiff war besonders dazu ausgerüstet und machte während eines Zeitraums von 115 Tagen im Jahre 1833 eine dreimalige Reise mit Anlaufen aller im Programm aufgenommenen Häfen. Nicht weniger als 56 Chronometer kamen zur Verwendung. Zum ersten Mal wurde bei diesen Längenbestimmungen auch auf die Ermittelung der persönlichen Gleichung Bedacht genommen, denn auch diese

muss, was schon SCHUMACHER gelegentlich der ersten Expedition erwähnte, in sofern von Bedeutung sein, als die Chronometer vor der Abreise mit der nach den daselbst erhaltenen Beobachtungen regulirten Pendeluhr und nach der Ankunft an dem nächsten Ort mit der dortigen Zeit verglichen werden, die im Allgemeinen wenigstens von einem anderen Beobachter bestimmt wurde. Zu einem ganz genauen Resultat gehört übrigens auch noch streng genommen die Anstellung einheitlicher Zeitbestimmungen, d. h. unter Anwendung derselben Sterne und gleicher Rectascensionen.

Hiernach sind vielfach kleinere Verbindungen vorgenommen worden, da diese Methode ohne Zweifel zu den besten Ergebnissen führt, so lange nicht die telegraphische Längenbestimmung möglich ist und wenn die Benutzung terrestrischer Signale versagt. Die grössten derartigen Unternehmungen gingen aber von Russland aus, wo nach der Gründung der grossen Centralsternwarte Pulkowa die Anschlüsse an andere Hauptsternwarten mit äusserster Genauigkeit zu erstreben waren. Die hauptsächlichsten Bestimmungen der Art waren die Chronometerexpeditionen zwischen Pulkowa und Altona im Jahre 1843, sodann die sich fast unmittelbar anschliessende zwischen Altona und Greenwich im Jahre 1844, wodurch Pulkowa mit Greenwich verbunden wurde. Später, im Jahre 1854, folgte dann die zur grossen russischen Breitengradmessung gehörige Verbindung zwischen Pulkowa und Dorpat. In den drei auf diese Unternehmungen bezüglichen ausführlichen Werken ist alles gesagt, was zur Ausführung einer Längenbestimmung auf dem Wege der Chronometerübertragung gehört. In neuester Zeit hat die Methode auch noch Anwendung gefunden, so bei Gelegenheit der Expeditionen zur Beobachtung der Venusvorübergänge, wo insbesondere von Lord LINDSAY eine Längenbestimmung zwischen Mauritius und Aden durch 50 Chronometer ermittelt wurde, wogegen an anderen Stationen nur eine geringe Zahl Chronometer zur Verfügung stand, wo denn auch durch mehrfache Reisen die erforderliche Genauigkeit erreicht werden musste, die aber nicht den Resultaten an die Seite gestellt werden kann, welche auf den genannten russischen Expeditionen erlangt wurde.

Für die erste der genannten russischen Expeditionen waren insgesammt 86 Chronometer zur Verfügung, von denen aber einige ausgeschieden wurden oder zur Vergleichung der Chronometer unter einander dienten, sodass im Ganzen 81 verblieben. Die Vergleichung bei einer so ungeheuren Zahl von Uhren erforderte eine beträchtliche Zeit und wäre kaum mit genügender Genauigkeit durchführbar gewesen, wenn man die gewöhnlichen Coincidenzen zwischen Sternzeit und mittlerer Zeit hätte anwenden wollen. Es kam daher hier ein 180-Schläger, eine Uhr, die 180 Schläge in einer Minute macht, wo sich also die Coincidenzen sehr rasch folgen, zur Verwendung. Die ganze Vergleichung war damit in etwa einer Stunde vollendet und konnte auch täglich während der Reise gemacht werden, sodass man über etwaige Sprünge im Gang Aufschluss erhielt. Die Reise selbst wurde natürlich mit der erdenklichsten Sorgfalt unternommen, sie setzte sich aus mehreren Theilen zusammen und bestand erstens aus einer Wagenfahrt von etwa 40 *km* von Pulkowa nach dem Hafen Oranienbaum, zweitens aus einer Bootfahrt von dem Hafen nach Kronstadt, wo ein Dampfschiff nach Travemünde bereit lag; drittens folgte die Seefahrt von Kronstadt nach Travemünde und viertens wieder eine Wagenfahrt von etwa 80 *km* von Travemünde nach Altona. Der Vorgang war folgender. Unmittelbar vor der Abreise von Pulkowa wurden die Chronometer mit der dortigen Normalpendeluhr verglichen; sofort nach Ankunft an Bord des Schiffes geschah eine

Vergleichung durch einen in Kronstadt an einer dortigen temporären Sternwarte angestellten Astronomen. Auch in Lübeck befand sich ein kleines Observatorium, wo die Vergleichungen aufs Neue vorgenommen wurden; endlich geschah unmittelbar nach der Ankunft in Altona die Vergleichung mit der dortigen Normaluhr. Nach kurzem Aufenthalt in Altona von etwa 1—2 Tagen erfolgte die Rückreise, auf welcher die Vergleichungen ebenso, nur natürlich in umgekehrter Reihenfolge, vorgenommen wurden. Kein Tag verging ohne Vergleichung, selbst wenn sich die Chronometer an demselben Ort und in Ruhe befanden. Diese Reise, welche hin und her mit der Pause in Altona und einer etwas längeren in Pulkowa 14 Tage erforderte, wurde vom 19. Mai bis 8. September achtmal wiederholt, sodass jedes Chronometer 16 Bestimmungen lieferte, oder, wenn man die Hin- und Rückreisen zusammen nimmt, 8 Einzelbestimmungen.

Den Zeitbestimmungen in Pulkowa und Altona wurde selbstredend grösste Aufmerksamkeit zugewandt, hängt doch von der Ermittelung der absoluten Zeit an den betreffenden Orten und den daraus abgeleiteten Gängen der Hauptuhren die Genauigkeit des Endresultates ab. Da ja in der Regel nicht im Augenblick der Ankunft die Zeitbestimmung zu erhalten ist, so kommt es darauf an, mit möglichster Zuverlässigkeit die Uhrcorrection für den Moment der Vergleichung interpoliren zu können.

Die Berechnung der Längendifferenz aus den Vergleichungen bildet eigentlich eine Interpolation, die sich aber nur unter der Annahme gewisser Hypothesen über den Gang oder überhaupt das Verhalten der Chronometer in der Zwischenzeit durchführen lässt. Denn an und für sich ist die Berechnung in sofern eine unbestimmte, als bei einer gewissen Anzahl von Reisen eine Gleichung weniger vorhanden ist als Unbekannte, welche letztere die jeweiligen Gänge und die Längendifferenz sind, während die Gleichungen durch jede Reise geliefert werden. Die Unsicherheit des Ganges wird aber um so grösser, als sich derselbe zusammensetzt aus dem Gang der Uhr zwischen Beginn der Reise und Ankunft an der zweiten Station, sodann aus der Zeit des ruhigen Aufenthalts an der zweiten Station und endlich dem Gang zwischen der Abreise von der zweiten Station und der Ankunft an dem Ausgangsort. Wenn ein Unterschied zwischen dem Reise- und Ruhegang nicht vorhanden wäre, so würde man einfach die Uhrcorrection vor Abgang vom ersten Ort und bei Rückkehr an denselben verbinden, und durch Division mit der Zwischenzeit den mittleren Gang erhalten. Eine solche Constanz ist aber keinesfalls, selbst bei aller Sorgfalt in der Behandlung der Chronometer anzunehmen. Und wenn wirklich ein Chronometer diese Annahme rechtfertigte, so dürfte dieselbe darum für ein anderes Chronometer noch nicht gemacht werden. W. STRUVE hat nun den folgenden Weg eingeschlagen:

Nennen wir den Abgang von der ersten Station $A$, die Ankunft an der zweiten $B$, den Abgang von der zweiten $B'$, die Ankunft an dem ersten Ort $A'$, sodass diese Hin- und Herreise als eine vollständige Reise betrachtet wird. Es seien die betreffenden Zeiten $t$, $t'$, $t''$, $t'''$, die beobachteten Uhrcorrectionen $c_1$, $k_1$, $k_2$, $c_2$, die Zwischenzeiten $\tau_1$, $\rho_1$, $\tau_2$, sodass mit $\rho_1$ die Zeit des Aufenthalts am zweiten Ort gemeint wird, endlich $\gamma_1$, $\gamma_2$ . . . die mittleren Uhrgänge in der Zeiteinheit während das Chronometer sich auf der Reise befindet, dann ist, wenn wir annehmen, dass der Gang des Chronometers während der Hin- und Herreise $\tau_1$, $\tau_2$ derselbe blieb, und wenn mit $\lambda$ die westliche Länge bezeichnet wird

$$\frac{c_1 - k_1 - \lambda}{\tau_1} = \frac{k_2 - c_2 + \lambda}{\tau_2},$$

woraus

$$\lambda = \frac{(c_1 - k_1)\tau_2 + (c_2 - k_2)\tau_1}{\tau_1 + \tau_2}.$$

Für die Rechnung kann man diesen Ausdruck noch wesentlich einfacher machen, wenn man zu den Grössen $k_2$ und $c_2$ die Differenz $k_1 - k_2$ hinzufügt, um so den Ruhegang zu eliminiren. Dann hat man die 4 Uhrcorrectionen $c_1$, $k_1$, $k_1$, $c_2 + k_1 - k_2 = c_2'$ mit den Zeitintervallen $\tau_1$ und $\tau_2$. Nennt man jetzt

$$r = (c_2' - c_1)\frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2} \qquad (c) = c_1 + r,$$

so ist die Länge

$$\lambda = (c) - k_1,$$

Beispiel. Bei Gelegenheit des Venusdurchganges im Jahre 1874 wurden Längenbestimmungen der Beobachtungsstationen auch nach der Methode der Chronometerübertragung ausgeführt, so z. B. wurde die Station Tschifu in China mit Nagasaki in Japan durch mehrmalige Reisen mit mehreren Chronometern verbunden. Auf einer der Reisen lieferte das Chronometer Nieberg No. 562 folgende Daten: Abreise von Tschifu December 12, Ankunft in Nagasaki December 18, Abreise von Nagasaki December 25, Ankunft in Tschifu Januar 2. Darnach ist

| | | |
|---|---|---|
| $t$ = Decemb. 12·08 | $c_1 = 8^h\,21^m\,36^s{\cdot}72$ | |
| $t'$ = „ 18·33 | $k_1 = 8\;\;55\;\;32{\cdot}65$ | $k_1 - k_2 = -7^s{\cdot}53$ |
| $t''$ = „ 25·83 | $k_2 = 8\;\;55\;\;40{\cdot}18$ | $c_2' = 8^h\,21^m\,44^s{\cdot}48$ |
| $t'''$ = Januar 2·92 | $c_2 = 8\;\;21\;\;52{\cdot}01$ | |

$$\tau = 6^d{\cdot}25 = 150^h{\cdot}0 \qquad \tau' = 8^d{\cdot}09 = 194^h{\cdot}1$$

$$c_2' - c_1 = +7^s{\cdot}76$$

$$r = +7{\cdot}76\cdot\frac{150{\cdot}0}{344{\cdot}1} = +3^s{\cdot}38$$

$$(c) = c_1 + r = 8^h\,21^m\,40^s{\cdot}10$$

$$\lambda = (c) - k_1 = -33^m\,52^s{\cdot}55.$$

Nun wird aber diese einfache Interpolation in der Regel nicht genau genug sein, man wird vielmehr suchen müssen, zweite Differenzen zu berücksichtigen, da der Gang des Chronometers kein so constanter ist. Selbst eine regelmässig zunehmende Beschleunigung oder Verlangsamung des Ganges wird nur als eine weitere Annäherung anzusehen sein, bei der man aber in Ermangelung genauer Gesetze über den Gang eines Chronometers, und bei möglichster Inachtnahme der Symmetrie in den Reisen stehen bleiben kann. Wenn man die Rechnung so anordnet, dass man nicht beständig von derselben Station ausgeht, sondern vielmehr abwechselnd von der einen und anderen und so zuerst die zweite Station zwischen die Beobachtungen an der ersten Station einschliesst, dann die an der ersten zwischen zwei an der zweiten, so gestaltet sich die Rechnung nach Struve wie folgt:

Nehmen wir vier Beobachtungsepochen $t$, $t'$, $t''$, $t'''$ und die zugehörigen Correctionen $c_1$, $k_1$, $c_2$, $k_2$ mit den Zwischenzeiten $\tau$, $\tau'$, $\tau''$, wobei also die Ruhepausen ausser Betracht bleiben. Wenn nun der Gang ein gleichmässig beschleunigter oder verzögerter ist, so folgt

$$\begin{aligned} c_1 &= c_1 \\ k_1 &= c_1 + \alpha\tau + \beta\tau^2 - \lambda \\ c_2 &= c_1 + \alpha(\tau + \tau') + \beta(\tau + \tau')^2 \\ k_2 &\phantom{=} c_1 + \alpha(\tau + \tau' + \tau'') + \beta(\tau + \tau' + \tau'')^2 - \lambda. \end{aligned}$$

Bilden wir nun den Werth von $(c)$, der für die Zeit $t'$, also für $k_1$ gültig wäre, indem wir einfach für diese Zeit zwischen $c_2$ und $c_1$ interpoliren, so erhalten wir

$$c_1 + \frac{c_2 - c_1}{\tau + \tau'}\,\tau$$

und indem für $c_2$ der obige Ausdruck gesetzt wird

$$(c) = c_1 + \alpha\tau + \beta\tau(\tau + \tau')$$

und darnach würde die Länge herauskommen

$$\lambda' = (c) - k_1 = \lambda + \beta\tau\tau',$$

sodass die sich so ergebende Länge den Fehler $\beta\tau\tau'$ enthielte. Wenn wir nun aber die Ausdrücke berechnen, indem wir vom zweiten Ort, $k$, ausgehen und den ersten, $c$, einschliessen, so wird sich für $(k)$ durch einfache Interpolation zwischen $k_1$ und $k_2$ entsprechend $c_2$ ergeben

$$(k) = k_1 + \frac{k_2 - k_1}{\tau' + \tau''}\,\tau'$$

$$= c_1 + \alpha(\tau + \tau') + \beta(\tau^2 + 2\tau\tau' + \tau'^2 + \tau'\tau'') - \lambda,$$

woraus die Länge

$$\lambda'' = c_2 - (k) = \lambda - \beta\tau'\tau''.$$

Es erleidet also die wahre Länge das eine Mal den Fehler $-\beta\tau\tau'$, das andere Mal $+\beta\tau'\tau''$, und wenn wir beide Resultate zusammenfassen, so wird dann der Fehler

$$\beta\tau'(\tau'' - \tau)$$

sein, der vollkommen verschwindet, wenn die Zwischenzeiten $\tau''$ und $\tau$ einander gleich sind, eine Bedingung, die allerdings schwerlich je strenge erfüllt sein wird, der man sich aber zu nähern nach Kräften bemüht sein wird, und jedenfalls sieht man, dass ein solches Vorgehen in der Rechnung den Einfluss der regelmässigen Veränderung des täglichen Ganges auf ein Minimum herabdrückt.

Beispiel. Wir setzen obiges Beispiel fort, indem wir von Nagasaki ausgehen und folgende Angaben zu Grunde legen. Die Abreise von Nagasaki erfolgte December 25, die Ankunft in Tschifu Januar 2, die Abreise von Tschifu Januar 6, die Ankunft in Nagasaki Januar 10. Darnach ist

| | | | |
|---|---|---|---|
| $t$ = Decemb. 25·83 | $c_1 = 8^h\,55^m\,40^s{\cdot}18$ | | |
| $t'$ = Januar 2·92 | $k_1 = 8\;\;21\;\;52{\cdot}01$ | $k_1 - k_2 = -1^s{\cdot}19$ | |
| $t''$ = Januar 6·92 | $k_2 = 8\;\;21\;\;53{\cdot}20$ | | |
| $t'''$ = Januar 10·92 | $c_2 = 8\;\;55\;\;49{\cdot}50$ | $c_2' = 8^h\,55^m\,48^s{\cdot}31$ | |

$$\tau = 194^h{\cdot}1 \qquad \tau_1 = 96^h{\cdot}0$$

$$c_2' - c_1 = +8^s{\cdot}13 \qquad r = +5^s{\cdot}44 \qquad (c) = 8^h\,55^m\,45^s{\cdot}62$$

$$\lambda = -33^m\,53^s{\cdot}61.$$

Von grosser Wichtigkeit ist nun aber die Berücksichtigung der Gewichte der einzelnen Reisen. Es ist von vornherein klar, dass wo der Uhrgang von solcher Bedeutung für das Endresultat ist, die einzelnen Reisen je nach ihrer Länge, nach den Vorgängen auf derselben, ihrer Art u. s. w. von verschiedener Genauigkeit und Sicherheit sein werden. Indessen ist es nicht möglich, diese Genauigkeit durch eine gewisse Gesetzmässigkeit gegen einander auszudrücken. Immerhin wird die Länge der Reise das Hauptkriterium abgeben, und wenn man nach obigen Bezeichnungen für die Länge $\lambda$ bei einfacher Interpolation zwischen $c_1$ und $c_2$

$$\lambda = (c) - k_1$$

fand, so liegt die Hauptunsicherheit gerade in dem interpolirten Werth $(c)$. STRUVE hat nun bei anderer Gelegenheit gefunden, dass für zwei Pulcowaer

Pendeluhren der wahrscheinliche Fehler eines zwischen zwei beobachteten Werthen der Uhrcorrection interpolirten sich in folgender Weise ergiebt. Es seien die durch die Beobachtungen gegebenen Uhrcorrectionen $u$ und $u'$ gültig für die Epochen $T$, $T'$ mit den wahrscheinlichen Fehlern $\varepsilon$. Es werde für die zwischen $T$ und $T'$ liegende Epoche $x$ die Uhrcorrection $w$ gesucht, deren vom wahrscheinlichen Fehler $\varepsilon$ herrührender wahrscheinlicher Fehler dann mit $dw$ bezeichnet wird, während der wahrscheinliche Fehler, der aus den Unregelmässigkeiten im Gange der Uhren entsteht $d'w$, und der gesammte wahrscheinliche Fehler von $w$ $\Delta w$ ist. Dann ist, wenn mit $\tau$ und $\tau'$ die Zwischenzeiten $x - T$ und $T' - x$ bezeichnet sind

$$dw = \frac{\sqrt{\tau^2 + \tau'^2}}{\tau + \tau'}\,\varepsilon$$

$$d'w = \frac{\tau\tau'}{\tau + \tau'}\,\sigma$$

$$\Delta w = \frac{\sqrt{(\tau^2 + \tau'^2)\,\varepsilon^2 + \tau^2\tau'^2\sigma^2}}{\tau + \tau'},$$

wo dann $\sigma$ eine von $d'w$ abhängige, für die betreffende Uhr zu ermittelnde Constante ist.

Wir werden also hier für die berechnete Länge den aus der Unregelmässigkeit des Uhrganges herrührenden wahrscheinlichen Fehler $f = \frac{\sigma\tau\tau'}{\tau + \tau'}$ und das Gewicht

$$g = \frac{\varkappa\,(\tau + \tau')^2}{\tau^2\,\tau'^2}$$

haben, wo $\varkappa$ eine willkürliche Constante ist. Nun ist aber hierbei die Zeit der Ruhe während der Reise ausser Betracht gelassen. Nehmen wir diese Zeit, die ja die Reisedauer verlängert, mit, so kann man, immer unter Annahme gleicher Verhältnisse bei den Chronometern und den in Pulcowa untersuchten Uhren, folgendermaassen verfahren.

Es war

$$\lambda = \frac{(c_1 - k_1)\,\tau_2 + (c_2 - k_2)\,\tau_1}{\tau_1 + \tau_2}.$$

Die in $c_1 - k_1$ und $c_2 - k_2$ bestehenden Ungenauigkeiten werden ausgedrückt durch

$$d\lambda = \frac{d\,(c_1 - k_1)\,\tau_2 + d\,(c_2 - k_2)\,\tau_1}{\tau_1 + \tau_2},$$

und sehen wir die $d\,(c_1 - k_1)$ und $d\,(c_2 - k_2)$ als die Unregelmässigkeiten im Uhrgang in den Zeiten $\tau_1$ und $\tau_2$ an, so finden sich hierfür nach obigem für

$$d\,(c_1 - k_1) = \frac{\tau_1\,(\rho + \tau_2)}{\tau_1 + \rho + \tau_2}\,\sigma$$

und

$$d\,(c_2 - k_2) = \frac{\tau_2\,(\rho + \tau_1)}{\tau_1 + \rho + \tau_2}\,\sigma,$$

wo dann $\rho$ die Zeit der Ruhe der Chronometer an der zweiten Station zwischen Ankunft und Abgang daselbst bedeutet. Diese Werthe in $d\lambda$ eingesetzt kommt:

$$d\lambda = \frac{\tau_1\,\tau_2\,(\tau_1 + \tau_2 + 2\,\rho)}{(\tau_1 + \rho + \tau_2)\,(\tau_1 + \tau_2)}\,\sigma$$

und als Gewicht

$$g = \left(\frac{K(\tau_1 + \tau_2)\,T}{\tau_1\,\tau_2 \cdot S}\right)^2,$$

wo

$$T = \tau_1 + \rho + \tau_2$$
$$S = T + \rho$$

und $K$ eine willkürliche Constante ist, welche so zu wählen ist, dass die Gewichte bequeme Werthe für die Rechnung erhalten.

Dieser Ausdruck für das Gewicht hat aber den Nachtheil, auf den Struve selbst aufmerksam wurde, dass er nämlich bei der Verbindung einer Hin- und Rückreise von sehr ungleicher Dauer das gleiche Gewicht geben wird, wie für eine Hin- und Rückreise von gleicher, allerdings beiderseits längerer Dauer. Da nun die längeren Reisen in der Regel durch stürmisches Wetter auf der See und entsprechendes Schwanken des Schiffes oder ähnliche Verhältnisse hervorgerufen werden, so wird die daraus entspringende Unsicherheit im Uhrgang kaum genügend durch eine besonders günstige Reise aufgewogen werden. Struve hat daher an Stelle dieses Ausdruckes eine rein empirische Formel gesetzt, nämlich

$$g' = \frac{K}{T\sqrt{\tau_1\,\tau_2}},$$

welche noch den Vorzug sehr grosser Einfachheit hat und welche bei der Diskussion der Altona-Pulcowaer Expedition im Allgemeinen die gleichen Gewichte wie der obige Ausdruck gab, aber dabei solchen besonders extremen Fällen thatsächlich mehr Rechnung trug.

Bei Gelegenheit einer später wieder von Pulcowa ausgegangenen Expedition zur Ermittelung der Länge zwischen Pulcowa und Dorpat hat Lindelöf die Berechnung in anderer Weise behandelt. Er geht davon aus, dass die Aufgabe, aus einer Reihe Correctionen eines Chronometers, die abwechselnd für zwei Oerter gegeben sind, die Längendifferenz zwischen beiden zu bestimmen, eigentlich eine unbestimmte ist, indem selbst, wenn die Uhrcorrectionen fehlerlos sind, doch die Länge zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zeitbestimmungen an beiden verschiedenen Orten mit der Längendifferenz vermischt, oder bei Elimination der Längendifferenz nicht der einzelne Gang, sondern die Summe zweier aufeinanderfolgender bekannt sind. Es wird daher eine Gleichung weniger vorhanden sein als Unbekannte, und es bleibt die Aufgabe, die fehlende Gleichung durch eine möglichst wahrscheinliche Annahme zu ersetzen.

Sei der Längenunterschied $l$ zwischen $A$ und $B$ zu ermitteln, sei eine gerade Anzahl Reisen gemacht, wobei wie vorher die Correctionen eines Chronometers $c_1$, $k_1$, $k_2$, $c_2$, $c_3$, $k_3$ .... abwechselnd in $A$ und $B$ bestimmt sind. Die Zwischenzeiten zwischen den einzelnen Epochen der Zeitbestimmungen seien $\tau_1$, $\rho_1$, $\tau_2$, $\rho_2$ .. (wo mit $\rho$ .. die Ruhegänge bezeichnet sind), endlich seien die zu $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau_3$ ... gehörigen mittleren Gänge in der Zeiteinheit $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$, .. Man hat also folgendes Schema

| Reise | | Correct. d. Uhr | Zwischenzeit | Mittl. Gang in der Zeiteinheit |
|---|---|---|---|---|
| I. | $A$ | $c_1$ | | |
| | $B$ | $k_1$ | $\tau_1$ | $\gamma_1$ |
| II. | $B$ | $k_2$ | $\rho_1$ | |
| | $A$ | $c_2$ | $\tau_2$ | $\gamma_2$ |
| III. | $A$ | $c_3$ | $\rho_2$ | |
| | $B$ | $k_3$ | $\tau_3$ | $\gamma_3$ |
| | . | . | . | |
| | . | . | . | |

Zwischen den $n+1$ Unbekannten $l, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \ldots$ bestehen dann folgende $n$ Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} l &= c_1 - k_1 + \tau_1 \gamma_1 \\ &= c_2 - k_2 - \tau_2 \gamma_2 \\ &= c_3 - k_3 + \tau_3 \gamma_3 \\ &\quad \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Um nun also hier die passende Gleichung zu ersetzen, verführt LINDELOEF wie folgt: Unter Annahme eines constanten Ganges wird aus den Reisen I, II die Länge berechnet und man erhält dann den Werth

$$A = l + \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} (\gamma_2 - \gamma_1).$$

Ebenso geben die Reisen II, III, die III, IV ... u. s. w.

$$B_1 = l - \frac{\tau_2 \tau_3}{\tau_2 + \tau_3} (\gamma_3 - \gamma_2)$$

$$A_3 = l + \frac{\tau_3 \tau_4}{\tau_3 + \tau_4} (\gamma_4 - \gamma_3)$$

u. s. w. Das Mittel aus allen Bestimmungen ist, unter Zufügung der Gewichte $p_1, p_2, p_3 \ldots$

$$(l) = l + \frac{1}{\Sigma p} \Big[ p_1 \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} (\gamma_2 - \gamma_1) - p_2 \frac{\tau_2 \tau_3}{\tau_2 + \tau_3} (\gamma_3 - \gamma_2) + \ldots + p_{n-1} \frac{\tau_{n-1} \tau_n}{\tau_{n-1} + \tau_n} (\gamma_n - \gamma_{n-1}) . \Big].$$

Nimmt man also $(l) = l$, so macht man damit den Ausdruck in der Parenthese $= 0$ und die Gewichte müssen so bestimmt werden, dass diese Annahme möglichst erfüllt ist. Nennt man

$$\begin{aligned} \tau_1 + \rho_1 + \tau_2 &= T_1 \\ \tau_2 + \rho_2 + \tau_3 &= T_2 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

und setzt

$$a_1 = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{T_1 + \rho_1} \qquad a_2 = \frac{\gamma_3 - \gamma_2}{T_2 + \rho_2} \qquad a_3 = \frac{\gamma_4 - \gamma_3}{T_3 + \rho_3},$$

so wird der Ausdruck in der Parenthese

$$a_1 p_1 \frac{\tau_1 \tau_2 (T_1 + \rho_1)}{T_1 - \rho_1} - a_2 p_2 \frac{\tau_2 \tau_3 (T_2 + \rho_2)}{T_2 - \rho_2} + \ldots + a_{n-1} p_{n-1} \frac{\tau_{n-1} \tau_n (T_{n-1} + \rho_{n-1})}{T_{n-1} - \rho_{n-1}} = 0.$$

Bei einem gleichförmig accelerirten oder retardirten Gange ist $a_1 = a_2 = a_3 = a_{n-1}$. Wenn aber die Beschleunigung gleichförmig zu- oder abnimmt, so sind bei einer symmetrischen Anordnung der Reisen (d. h. wenn $\tau_1 = \tau_3 = \tau_5 \ldots\ldots$ und $\rho_1 = \rho_3 = \rho_5 \ldots$) die Differenzen dieser Grössen constant, d. h. $a_3 - a_1 = a_5 - a_3 = a_4 - a_2 = \ldots\ldots$ Darnach wird also die Annahme

$$\frac{a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{n-1}}{\frac{1}{2} n} = \frac{a_2 + a_4 + \ldots + a_{n-2}}{\frac{1}{2} n - 1}$$

berechtigt sein, da sie bei constanter Beschleunigung ganz genau, bei einer gleichförmig zu- oder abnehmenden Beschleunigung sehr nahe richtig ist. Dann aber müssen die Gewichte $p_1, p_2, p_3 \ldots$ sein:

$$p_1 = \frac{T_1 - \rho_1}{(T_1 + \rho_1) \tau_1 \tau_2} \frac{K}{\frac{1}{2} n} \quad p_2 = \frac{T_2 - \rho_2}{(T_2 + \rho_2) \tau_2 \tau_3} \frac{K}{\frac{1}{2} n - 1} \ldots\ldots,$$

wo $K$ eine willkürliche Constante ist.

Man wird also in der Praxis das Gewicht einer jeden Länge $A_1$, $B_1$, $A_2$, $B_2$ . . . nach der Formel

$$p = \frac{K(T-\rho)}{\tau\tau_1(T+\rho)}$$

berechnen und unter Berücksichtigung dieser Gewichte das Mittel aus allen $A$ und das aus allen $B$ nehmen und darnach den Mittelwerth aus beiden, womit die Länge gegeben ist.

Uebrigens muss erwähnt werden, dass gerade bei der Dorpater Längenbestimmung, welche mit 29 Chronometern durch 10 Reisen zwischen Dorpat und Pulcowa ausgeführt wurde, Struve mit Rücksicht auf die kurze Dauer jeder einzelnen Reise (im Mittel nur 45 Stunden) ausser der obigen Ableitung noch eine andere Methode anwandte, indem er für jedes Chronometer einen an sich constanten Gang annahm, der nur durch die Temperatur beeinflusst wurde. Er ermittelte für jedes Chronometer die Temperaturcoëfficienten und bestimmte so die Längendifferenz. Es ist auffallend, ein wie verschiedenes Verhalten die einzelnen Chronometer nach diesen zwei Methoden zeigen. Das Chronometer, welches nach Struve's Methode das grösste Gewicht hat, steht nach Lindeloef's Rechnung an 25. Stelle, ist also dort fast das schlechteste, umgekehrt ein Chronometer, welches nach Lindeloef an 5. Stelle steht, kommt nach Struve erst an 22. u. s. w. Es spricht sich hierin aus, dass ein Chronometer, welches einen starken Temperaturcoefficienten hat, im übrigen seinen mittleren Gang längere Zeit beibehält, dass dagegen ein andres einen mit der Zeit stark veränderlichen Gang hat. Beide Methoden ergänzen sich daher in gewisser Weise. Nach Lindeloef wird den Ganganderungen mehr Rechnung getragen, aber die Temperatureinflüsse weniger berücksichtigt, welches letztere bei Struve vorzugsweise geschieht. Was übrigens das Endresultat, das auf beiden Wegen erhalten wurde, betrifft, so ist der Unterschied äusserst gering, indem sich im Mittel aus allen Chronometern und Reisen nach Lindeloef findet 14$^m$ 24$^s$·86, nach Struve 14$^m$ 24$^s$·90 mit dem wahrscheinlichen Fehler ± 0$^s$·038.

Die nun folgenden Methoden können sich an erreichbarer Genauigkeit nicht mit den oben besprochenen messen, indessen ist aus dem Gesagten genugsam klar geworden, dass jene nur an festen Observatorien oder sonst unter günstigen Verhältnissen anwendbar sind. Es werden aber oft genug Fälle eintreten, wo man nur auf geringe instrumentelle Hilfsmittel angewiesen, fern von jeglichem Anschlussort, überhaupt in entlegenen Gegenden auf Reisen die Länge zu ermitteln hat. Dann ist man fast ausschliesslich auf die Beobachtung des Mondes angewiesen, der in Folge seiner raschen Bewegung, insbesondere in Rectascension seinen Ort am Himmel in kurzer Zeit merkbar verändert. Kennt man also seinen Ort für einen bestimmten Zeitpunkt, für den Durchgang durch einen bestimmten Meridian, und weiss wie viel er sich in einer Stunde oder einem sonst beliebigen Zeitintervall weiter bewegt, beobachtet man schliesslich seinen Ort beim Durchgang durch einen andern unbekannten Meridian, so kann man daraus die Lage dieses Meridians gegen den bekannten berechnen. Da nun die absoluten Ortsbestimmungen zu viele unsichere Elemente in sich bergen, so verfährt man in der Weise, dass man den Rectascensionsunterschied gegen einige bekannte Sterne ermittelt. In den astronomischen Tafelsammlungen finden sich nun für jeden Tag vier Sterne angegeben, von denen zwei kurz vor dem Mond, zwei kurz nach dem Mond culminiren, und deren Deklination im Mittel mit der Deklination des Mondes an dem betreffenden Tag übereinstimmen. Ist nämlich $\theta$, $\theta'$ die

wahre Sternzeit der Culmination von Mond und Stern, d. h. sind die beobachteten Sternzeiten wegen der bekannten Instrumental- und Uhrfehler verbessert und sind $\alpha$, $\alpha'$ die Rectascension von Mond und Stern für den Augenblick des Monddurchgangs, so ist natürlich die Rectascension des Mondes ausgedrückt durch die des Sternes und die beobachteten Momente

$$\alpha = \alpha' + \vartheta - \vartheta'.$$

Durch die Gleichheit der Deklination des Mondes und des Mittels der Sterne werden die Aufstellungsfehler des Instrumentes in nahe gleicher Weise auf die Durchgangszeiten des Mondes und des Sternmittels wirken, immerhin ist doch der Fehlerbestimmung grosse Sorgfalt zu widmen, da die durch die fehlerhafte Aufstellung in der Zeit des Durchgangs verursachte Grösse die Länge um genau den gleichen Betrag fehlerhaft giebt.

Sind nun an zwei Orten correspondirende Beobachtungen erhalten, so ergiebt sich die Längendifferenz zwischen beiden in einfacher Weise. Hat man nämlich nach obiger Weise die Rectascension des Mondes an beiden Orten erhalten und bezeichnen wir dieselben mit $\alpha_1$, $\alpha_2$, sei $\lambda$ die wahre Längendifferenz und $H_0$ die Variation der Mondrectascension für 1 Stunde in Länge, während der Mond von dem einen Meridian zum andern geht, so ist

$$\lambda = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{H_0},$$

wo dann, wenn $\alpha_2 - \alpha_1$ und $H_0$ in Secunden gegeben sind, $\lambda$ in Stunden und deren Bruchtheilen erhalten wird. Hier kann nun für Längenunterschiede, die kleiner als zwei Stunden sind, $H_0$ als constant angenommen werden, wenn man den Wert für das Mittel der Längen der beiden Orte annimmt. Ist die Längendifferenz grösser als zwei Stunden, so kann man in der Weise verfahren, dass man für jeden Ort die beobachtete Rectascension berechnet, dass man dann für eine genäherte Länge der beiden Orte aus den astronomischen Jahrbüchern die Rectascension berechnet und die Differenzen der Rectascensionen mit einander vergleicht. Würde der Ephemeridenort fehlerhaft, aber für die Stunden des Längenunterschiedes constant fehlerhaft sein, so kommt ein solcher Fehler doch nicht in Betracht, denn man würde statt der berechneten Rectascension für den einen Ort statt $A$, $A + \epsilon$ (wenn $\epsilon$ den Fehler bezeichnet) haben, für den andern Ort statt $A_1$, $A_1 + \epsilon$, sodass die Differenz wieder $A_2 - A_1$ wäre. Wenn nun weiter die beobachtete Rectascensionsdifferenz gleich der berechneten ist, so ist, vorausgesetzt dass die angenommene Länge des einen Ortes nahe richtig ist, auch die Differenz richtig. Ist dies nicht der Fall, so kann man die Correction der Längendifferenz $\Delta L$ erhalten, wie vorher, indem man setzt

$$\Delta L = \frac{\gamma}{H},$$

wo dann $\gamma$ der Unterschied der beiden Rectascensionsdifferenzen ist, und $H$ die stündliche Rectascensionsänderung, die der Mitte zwischen den Meridianen des unbekannten Ortes und dem durch $\Delta L$ gegebenen entspricht. Streng genommen wird man, da $\Delta L$ noch unbekannt ist, nur eine erste Näherung erhalten, indessen wird bei kleinen Grössen von $\Delta L$ eine nochmalige Rechnung kaum nöthig sein. Sonst wird man zuerst für $H$ den zur (genähert bekannten) Länge des zweiten Ortes gehörigen Werth nach $\Delta L = \frac{\gamma}{H}$ berechnen, daraus dann $\Delta L$ genau genug erhalten, um nun $H$ für jene Länge $+ \frac{1}{2}\Delta L$ zu berechnen und damit den definitiven Werth von $\Delta L$ abzuleiten. Will man $\Delta L$ in Secunden

statt nach obigem Ausdruck in Bruchtheilen der Stunde haben, so hat man zu setzen

$$\Delta L = \frac{3600\,\gamma}{H}.$$

Es ist hier zu bemerken, dass stets der eine oder andere Rand des Mondes beobachtet wird, während in den Ephemeriden die Rectascensionen des Mondes auf seinen Mittelpunkt bezogen sind. Man muss daher die Culminationszeit des Mittelpunktes aus der Beobachtung berechnen. Beobachtet man nun den ersten Rand, so beobachtet man vor der Culmination des Mittelpunktes, man muss also eine Grösse der beobachteten Zeit hinzufügen, welche gleich der Zeit ist, die der Mondhalbmesser gebraucht, um durch den Meridian zu gehen. Beobachtet man den zweiten Rand, so beobachtet man entsprechend später, und hat jene Zeit von der beobachteten abzuziehen. Die Zeit aber, welche der Mondhalbmesser zum Durchgang durch den Meridian gebraucht, ist gleich dem Stundenwinkel, welcher dem Mondhalbmesser entspricht und für diesen findet sich ohne Weiteres (aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck zwischen Pol, Mondrand im Meridian und geocentrischem Mondmittelpunkt)

$$\sin\tau = \frac{\sin R}{\cos\delta} \quad \text{oder} \quad \tau = \tfrac{1}{15} R \sec\delta,$$

wo $\tau$ den Stundenwinkel des Mittelpunkts, $R$ und $\delta$ den geocentrischen Halbmesser und die Deklination des Mondes bedeutet und wo der zweite Ausdruck $\tau$ unmittelbar in Zeitsecunden giebt.

Wie an anderer Stelle (s. d. Art. Passageninstrument) näher ausgeführt ist, hat man nun bei der Reduction des im Meridian beobachteten Mondrandes auf seinen Mittelpunkt zu berücksichtigen, dass die Rectascension des Mondes beständig zunimmt, es ist daher die Zeit, die der Mond gebraucht, um den Stundenwinkel $\tau$ zu durchlaufen, gleich $\frac{\tau}{1-\lambda}$, wo $\lambda$ die Zunahme der Rectascension in einer Zeitsecunde bedeutet, oder unter Benutzung der in den Jahrbüchern gegebenen Bewegung für 1 Stunde mittlerer Zeit

$$\lambda = \frac{0{\cdot}9972693}{3600}\,h',$$

indem durch 0·9972693 das Verhältniss des Sterntages zum mittleren Tage, und durch $h'$ die Bewegung in einer mittleren Stunde ausgedrückt wird. Es ändern sich aber beim Mond auch $R$ und $\delta$ und so hat man die Zeiten, in denen der Rand des Mondes an den beiden Orten beobachtet wurde um

$$\pm\,(R'\sec\delta' - R\sec\delta)\,\frac{1}{1-\lambda}$$

zu corrigiren, wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem der erste oder zweite Rand beobachtet wurde.

Eine Schwierigkeit in der Anwendung dieser sonst so einfachen Methode liegt darin, dass es nur in relativ seltenen Fällen gelingen wird, dass der Mond gleichzeitig an den beiden Orten, deren Längendifferenz ermittelt werden soll, beobachtet werden kann. Wäre die Mondephemeride, wie sie in den Jahrbüchern gegeben wird, fehlerfrei, so würde man an Stelle der einen Beobachtung den der Ephemeride entnommenen Mondort, der also für den Meridian der Ephemeride gilt, setzen können, und erhielte so ohne Weiteres aus der beobachteten Mondculmination die Längendifferenz gegen den Meridian des betreffenden Jahrbuchs. Es würde dann sogar der wahrscheinliche Fehler des

Endresultats erheblich geringer sein, nämlich einfach $= \varepsilon$, während er sonst $= \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon'^2}$ wäre, wo $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ die wahrscheinlichen Fehler der Beobachtungen an beiden Orten sind. Diese Annahme eines genau richtigen Mondortes ist aber nach dem Stand der Mondtheorie unzulässig, und kann man die stündliche Veränderung der Mondrectascension für die bei Längendifferenzen in Frage kommenden kurzen Zeitintervalle als richtig annehmen, so kann man das nicht mit den absoluten Rectascensionen. Ein geringer Fehler in derselben ruft sehr erhebliche Fehler in der Längendifferenz hervor. PEIRCE hat vorgeschlagen, die Mondephemeride gleichsam von Fall zu Fall zu corrigiren und zwar in folgender Weise. Die Fehler der Mondtheorie können für jede Lunation in zwei Glieder zusammengefasst werden, von denen das eine constant, das andere eine Periode einer halben Lunation hat, und man kann mit genügender Genauigkeit die Ephemeridencorrection für jede Halblunation in die Form

$$X = A + Bt + Ct^2$$

bringen, wo $A$, $B$, $C$ Constante sind, die aus den Gesammtbeobachtungen des Mondes an allen Hauptsternwarten während der betreffenden halben Lunation zu bestimmen sind, und wo $t$ die Zeit bezeichnet, welche von einer passend gewählten Epoche in Tagen gezählt wird.

Seien dann

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ die Rectascensionen, welche an einer Sternwarte an den Daten $t_1, t_2, t_3$ von der angenommenen Epoche aus beobachtet wurden,

$\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3' \ldots$ die Rectascensionen, wie sie die Ephemeride für dieselben Daten giebt,

$\alpha_1 - \alpha_1', \alpha_2 - \alpha_2', \alpha_3 - \alpha_3', = n_1, n_2, n_3$ u. s. w.,

dann sind diese $n_1, n_2, n_3$ die Verbesserungen, welche die Ephemeride an den betreffenden Daten fordert und daraus entstehen dann die Bedingungsgleichungen

$$A + Bt_1 + Ct_1^2 - n_1 = 0$$
$$A + Bt_2 + Ct_2^2 - n_2 = 0$$
$$A + Bt_3 + Ct_3^2 - n_3 = 0$$

mit den Endgleichungen der Form

$$nA + TB + T_2C - N_1 = 0$$
$$TA + T_2B + T_3C - N_2 = 0$$
$$T_2A + T_3B + T_4C - N_3 = 0$$

wo $n$ die Zahl der Beobachtungen gleich der Zahl der Bedingungsgleichungen ist, $T$ die algebraische Summe aller $t$, $T_2$ die aller $t^2$, $T_3$ die aller $t^3$, $T_4$ die aller $t^4$, $N$ die aller $n$, $N_1$, $N_2$, u. s. w. die der Produkte von $n$ und $t$, bezw. $n$ und $t^2$. Aus diesen Gleichungen bestimmen sich dann $A$, $B$, $C$.

Was den Grad der Genauigkeit betrifft, den man mit einer solchen Verbesserung der Ephemeride erreicht, gegenüber der Benutzung correspondirender Beobachtungen, so kann man den wahrscheinlichen Fehler der Längenbestimmung nach erster Methode auf Grund plausibler Annahmen zu etwa $\frac{2}{3}$ des wahrscheinlichen Fehlers letzterer Methode schätzen; kann man aber correspondirende Beobachtungen an zwei oder gar drei Sternwarten verwenden, so wird man darnach ein Resultat erhalten, welches dem der verbesserten Ephemeride mindestens gleichwerthig ist. Die Sicherheit, die sich überhaupt in der Längenbestimmung durch Mondculminationen erreichen lässt, ist aber nicht besonders gross, und man hat jedenfalls eine sehr beträchtliche Anzahl von Beobachtungen anzustellen, wenn man den wahrscheinlichen Fehler des Resultats auf eine halbe

Secunde herabdrücken will. Für die eingehende Behandlung von Mondculminationen, die zu Längenbestimmungen unter zum Theil selbst ungünstigen Verhältnissen auf Reisen beobachtet wurden, ist das Auwers'sche Werk über die deutschen Venusexpeditionen Bd. VI zu vergleichen.

Auf Reisen namentlich kann es sich treffen, dass man auf die exakte Aufstellung des Instruments in der Ebene des Meridians verzichten muss, oder dass man möglichst rasch eine Längenbestimmung ausführen will und nicht die für die Mondculminationen günstigen Zeiten abwarten kann. Dann führt auch die Beobachtung in beliebigen Azimuthen zum Ziel. Allerdings wird diese Methode nur dann zu angenähert genauen Resultaten, wie die Mondculminationen führen, wenn man in möglichst gleichen und kleinen Azimuthen östlich und westlich vom Meridian beobachtet, wo also in der Regel auch die Mondculmination selbst wahrzunehmen ist. Für solche Beobachtungen dient dann das Universalinstrument und es kann auf die ausführliche Besprechung der Behandlung dieses Instrumentes in dem betreffenden Artikel verwiesen werden. An dieser Stelle mag eine kurze Darstellung des Ganges der Beobachtungen genügen.

Auch hier kommt es darauf an, den Mond möglichst genau an andere Sterne, die auf demselben Parallel sind und als welche am besten auch die »Mondsterne« benutzt werden, anzuschliessen. Man berechnet sich dann Zenithdistanz und Azimuth für Mond und Stern für einen passend angenommenen Zeitpunkt, oder umgekehrt für ein als passend angenommenes Azimuth die Zenithdistanz und die Zeit aus der Rectascension und Deklination nach bekannten Formeln, nämlich, bei üblicher Bezeichnung (vergl. Bd. I pag. 659)

| für den Mond | für den Stern |
|---|---|
| $t = T + \Delta T - \alpha$ | $t' = T' + \Delta T' - \alpha'$ |
| $tang\, M = tang\, \delta\, sec\, t$ | $tang\, M' = tang\, \delta'\, sec\, t'$ |
| $tang\, A = cos\, M\, tang\, t\, cosec(\varphi - M)$ | $tang\, A' = cos\, M'\, tang\, t'\, cosec(\varphi - M')$ |
| $tang\, h = cotang\, (\varphi - M)\, cos\, A$ | $tang\, h' = cotang\, (\varphi - M')\, cos\, A'$, |

wo $sin\, A$ dasselbe Zeichen hat wie $sin\, t$. Hier braucht $h$ nur genähert berechnet zu werden, $A$ dagegen mit aller Schärfe. An die so berechneten Azimuthe sind nun die Instrumentalcorrectionen anzubringen, wie sie für das Universalinstrument abgeleitet werden, nämlich wenn $c$ und $b$ den Collimationsfehler und die Neigung der Horizontalaxe in dem an betreffender Stelle angegebenen Sinn bedeuten

$$\mp c\, sec\, h \mp b\, tang\, h,$$

das obere und untere Zeichen je nach der Kreislage der Beobachtung und $h$ als Höhe des Mondes bezw. des Sternes genommen. Ferner ist noch zu berücksichtigen, dass man beim Mond stets den Rand beobachtet, man also je nach der Beobachtung des ersten oder zweiten Randes $r\, sec\, h$ ($r$ der geocentrische Halbmesser des Mondes) zu addiren bezw. zu subtrahiren hat, dass endlich hier die Parallaxe nach dem Ausdruck $\rho\pi\, (\varphi - \varphi')\, sin\, 1''\, sin\, A'\, sec\, h$ zu addiren ist. Man würde darnach die Instrumentalazimuthe für Mond und Stern wie folgt erhalten:

$$A_1\ (\text{Mond}) = A \pm r\, sec\, h + \rho\pi\, (\varphi - \varphi')\, sin\, 1''\, sin\, A'\, sec\, h \mp c\, sec\, h_1 \mp b\, tang\, h_1$$
$$A_1'\ (\text{Stern}) = A' \mp c\, sec\, h_1' \mp b'\, tang\, h_1',$$

wo $h_1$ und $h_1'$ die scheinbaren, um Refraction, bezw. auch Parallaxe verbesserten Höhen sind. Aus einer etwaigen Abweichung zwischen beiden Werthen ist dann die Correction der angenommenen Länge zu ermitteln. Hierbei ist zunächst die Veränderung zu suchen, welche die Aenderung der Rectascension

und Deklination des Mondes (in der Zeiteinheit) auf das Azimuth ausübt, und dazu hat man die Bd. I, pag. 667 gegebene Differentialformel

$$dA = \cos\delta \cos q \sec h\, dt + \sin q \sec h\, d\delta$$

zu benutzen. In derselben ist $q$, der parallactische Winkel, zu berechnen nach

$$\tang q = \tang t \sin\nu \sec(\delta + \nu)$$
$$\tang \nu = \cos t \cotang \varphi.$$

Ist dann $v$ und $w$ die Zunahme der Rectascension und Deklination des Mondes in einer Sternzeitsecunde, $\Delta L$ der Fehler der Länge, so wird der Ausdruck für $dA$

$$dA = -\cos\delta \cos q \sec h\, v\, \Delta L + \sin q \sec h\, w\, \Delta L,$$

woraus dann $\Delta L$ sofort folgt.

Ueber die Genauigkeit der Methode kann man im Allgemeinen annehmen, dass eine doppelte Beobachtung des Mondazimuths, symmetrisch zu beiden Seiten des Meridians der einfachen Mondculmination gleich zu achten ist; man könnte also durch Vermehrung der symmetrischen Mondazimuthe das Endresultat eines Abends genauer machen als durch Beobachtung der Culmination. Indessen wird die Einfachheit der Berechnung der Letzteren doch die Veranlassung sein, dass man, wo es sich nicht um besondere Fälle, z. B. auf Reisen, handelt, die Beobachtungen der Culmination vorzieht.

In ganz ähnlicher Weise kann man durch die Beobachtung von Mondhöhen die Länge bestimmen, und zwar durch Bestimmung der absoluten Höhe des Mondes, wobei aber mit den gewöhnlichen Instrumenten genaue Resultate nicht zu erwarten sind, oder durch Anschluss an Mondsterne, indem man Mond und Sterne zur Zeit der gleichen Höhe beobachtet. Im Princip ist diese Methode ganz ähnlich der vorher besprochenen, wo Azimuthe beobachtet werden, es mag daher genügen, hier nur auf dieselbe hinzuweisen und einige Punkte hervorgehoben zu haben. Man berechnet für den Mond unter Annahme nur genäherter Länge nach den in den astronomischen Jahrbüchern gegebenen Oertern, sowie für den Mondstern (der dem Mond möglichst nahe ist) Zenithdistanz und (zur Einstellung genähert) Azimuth, und vergleicht die Zeiten, zu denen diese Zenithdistanz erreicht wurde, mit den berechneten. Nur wenn die Längendifferenz richtig angenommen wurde, kann die berechnete Zenithdistanz der beobachteten Zeit entsprechen. Im anderen Falle hat man die Beziehung zwischen der Veränderung der Zenithdistanz und der Länge abzuleiten. Streng genommen hängt auch hier die Aenderung der Zenithdistanz nicht allein von der Länge, sondern auch von den Fehlern der Ephemeride und Beobachtung selbst ab. Diese von Kaiser herrührende Methode wird mit Vortheil nur in der Nähe des ersten Verticals und in niederen geographischen Breiten, also in beschränkten Fällen anzuwenden sein; durch Beobachtung gleicher Höhen zu beiden Seiten des Meridians werden dabei die Fehler der Ephemeride im Ganzen eliminirt.

Es muss nun noch einer Methode gedacht werden, die freilich fast ausschliesslich auf Reisen und namentlich auf der See, hier aber besonders oft, angewandt wird, die Methode der Monddistanzen. Das Princip ist, dass man den Abstand der Sonne oder eines Sterns, Planeten oder Fixsterns vom Mond misst und dass man aus den Jahrbüchern und Ephemeriden berechnet, für welchen Zeitpunkt des Nullmeridians dieser Abstand stattfand. Es sind zu diesem Zweck die Monddistanzen von der Sonne, den Hauptplaneten und einer Anzahl heller Fixsterne in engen Zeitintervallen in den Ephemeridensammlungen angegeben. Die Methode ist darnach im Princip auch einfach, erfordert aber

in Wirklichkeit eine zusammengesetzte Berechnung, da die beobachteten scheinbaren Distanzen durch die Refraction und die Parallaxe afficirt sind und diese Correctionen berechnet werden müssen, dazu tritt dann noch die Berücksichtigung des Mond- und event. Sonnenhalbmessers, um den auf den Mittelpunkt bezogenen Abstand zu erhalten, da man direkt nur die Entfernungen der Ränder misst. Es haben sich viele Astronomen mit dem Problem beschäftigt, bei dem es sich vor Allem darum handelt, bequeme Näherungsausdrücke zu erhalten, die doch im einzelnen Fall die genügende Genauigkeit im Resultat ergeben.

Sei (in leicht herstellbarer Figur) $Z$ das Zenith des Beobachtungsortes, sei $M'$ der scheinbare, $M$ der wahre Ort des Mondes, $S'$ der scheinbare, $S$ der wahre Ort der Sonne oder des Sterns, so ist $M'S'$ der Bogen grössten Kreises, der die scheinbare Distanz des Mondes von der Sonne darstellt, $MS$ die wahre Distanz. Die Höhenparallaxe wirkt der Refraction entgegen, letztere ist beim Mond geringer als erstere, bei der Sonne findet das entgegengesetzte statt, es wird daher der scheinbare Ort des Mondes geringere Höhe, der der Sonne grössere Höhe haben als der wahre. Es kommt nun darauf an, aus der scheinbaren Monddistanz die wahre herzuleiten. Nennen wir dafür

$$ZM = 90 - h \qquad ZM' = 90 - h'$$
$$ZS = 90 - H \qquad ZS' = 90 - H'.$$

Zuerst mag die Erde als kugelförmig angesehen werden, sodass $M$ und $S$ auf der Ebene des betreffenden Vertikalkreises, auf $ZM'$ und $ZS'$ liegen. Es kann dann auch der Winkel $MZS = M'ZS'$ gesetzt werden. Nennen wir ferner $M'S' = d'$ die gemessene Distanz zwischen den Mittelpunkten beider Objecte, und $MS = d$ die wahre, die berechnet werden soll. Aus den Dreiecken $ZMS$ und $ZM'S'$ folgt dann

$$\cos d = \sin h \sin H + \cos h \cos H \cos MZS$$
$$\cos d' = \sin h' \sin H' + \cos h' \cos H' \cos MZS$$

oder für

$$\cos MZS = 2\cos^2 \tfrac{1}{2} MZS - 1$$

gesetzt

$$\cos d = -\cos(h + H) + 2\cos^2 \tfrac{1}{2} MZS \cos h \cos H$$
$$\cos d' = -\cos(h' + H') + 2\cos^2 \tfrac{1}{2} MZS \cos h' \cos H',$$

woraus

$$\frac{\cos d + \cos(h + H)}{\cos h \cos H} = \frac{\cos d' + \cos(h' + H')}{\cos h' \cos H'}.$$

Wird $d' + h' + H' = 2s$ gesetzt, so ist

$$\cos d' + \cos(h' + H') = 2\cos\tfrac{1}{2}(d' + h' + H')\cos\tfrac{1}{2}[d' - (h' + H')] = 2\cos s \cos(s - d'),$$

woraus

$$\frac{\cos^2 \frac{1}{2}(h + H) - \sin^2 \frac{1}{2} d}{\cos h \cos H} = \frac{\cos s \cos(s - d')}{\cos h' \cos H'}$$

oder

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} d = \cos^2 \tfrac{1}{2}(h + H) - \frac{\cos h \cos H}{\cos h' \cos H'} \cos s \cos(s - d'),$$

welcher Ausdruck die Grundformel ist, die nun in verschiedenster Weise umgeformt worden ist. Zunächst kann man, da die linke Seite stets positiv und folglich auf der rechten Seite das zweite Glied kleiner als das erste sein muss, einen Hilfswinkel $M$ in der Weise einführen, dass

$$\sin M = \frac{1}{\cos\frac{1}{2}(h + H)} \sqrt{\frac{\cos h \cos H}{\cos h' \cos H'} \cos s \cos(s - d')}$$

ist, dann wird

$$\sin \tfrac{1}{2} d = \cos \tfrac{1}{2}(h + H) \cos M$$

eine schon von BORDA gegebene und durchaus bequeme Formel. Indessen ist die Genauigkeit sehr von der Grösse der Distanz und der Summe der Höhen abhängig. Wird die Distanz und die Summe der Höhen klein, so rückt der Winkel $M$ nahe an 90° und der Uebergang vom Sinus auf den Cosinus wird unsicher. Wenn z. B. die Summe der Höhen = 20° und die Distanz = 5°, so wird eine mit sieben Decimalstellen geführte Rechnung noch ganz unsicher werden. ENCKE hat dieser BORDA'schen Formel eine etwas andere Gestalt gegeben, indem er einen Winkel $C$ derart bestimmt, dass

$$\sin^2 C = \frac{\cos H \cos h}{\cos H' \cos h'} \cos \tfrac{1}{2}(h' + H' + d') \cos \tfrac{1}{2}(h' + H' - d')$$

ist, woraus dann

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} d = \cos \tfrac{1}{2}(h + H + C) \cos \tfrac{1}{2}(h + H - C)$$

wird. Aber auch hier ist wenig gewonnen. Ganz erheblich einfacher ergiebt sich die Rechnung, wenn man zwei Fälle von einander trennt, wo die Distanz nämlich kleiner als 90° und grösser als 90° ist. In ersterem Falle, wo die Distanz kleiner als 90° ist, wird gesetzt

$$\frac{\cos h \cos H}{\cos h' \cos H'} \sin \tfrac{1}{2}(d' + h' - H') \sin \tfrac{1}{2}[d' - (h - H')] = c^2$$

und

$$\frac{\sin \tfrac{1}{2}(h - H)}{c} = \tang \mu,$$

so ist

$$\sin \tfrac{1}{2} d = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(h - H)}{\sin \mu} = \frac{c}{\cos \mu}.$$

Im anderen Fall, wo die Distanz grösser als 90° ist, wird dagegen gesetzt

$$\frac{\cos h \cos H}{\cos h' \cos H'} \cos \tfrac{1}{2}(H' + h' + d') \cos \tfrac{1}{2}(H' + h' - d') = c'^2$$

und

$$\frac{\sin \tfrac{1}{2}(h + H)}{c'} = \tang \mu',$$

so ist

$$\cos \tfrac{1}{2} d = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(h + H)}{\sin \mu'} = \frac{c'}{\cos \mu'}.$$

In beiden Ausdrücken geht man von $\tang \mu$ und $\tang \mu'$ auf den Sinus oder Cosinus der Winkel über, wählt also für $\sin \frac{1}{2} d$ oder $\cos \frac{1}{2} d$ die erste, bezw. zweite Formel, je nachdem $\mu$ und $\mu'$ grösser oder kleiner als 45° sind. Die Winkel $\mu$, $\mu'$ selbst werden nicht gebraucht. Wenn auch diese Umformung die grösste Schärfe in der Rechnung gestattet, so ist es doch stets unbequem Fälle unterscheiden zu müssen, und besonders bei dem am ersten in Betracht kommenden Zweck die Länge zur See zu ermitteln. BREMIKER hat daher eine andere Umformung gegeben, die ebenfalls ausreichende Schärfe der Rechnung gewährt und dabei höchst einfach ist, sodass selbst fünfstellige Rechnung genügt.

Man kann die Grundgleichung auch so schreiben:

$$\cos d = \cos (h - H) + \frac{\cos h \cos H}{\cos h' \cos H'} [\cos d' - \cos (h' - H')].$$

Setzt man hier den Faktor

$$\frac{\cos h \cos H}{\cos h' \cos H'} = \frac{1}{C},$$

so wird $C$ in den meisten Fällen grösser als 1 sein. Nur wenn die Höhe der Sonne sehr gering und zugleich die Höhe des Mondes sehr gross ist, wird

$C < 1$ sein, z. B. wenn $H = 2°$ und $h$ über 70° ist. Ist also $C > 1$, so kann man setzen

$$\frac{\cos d}{C} = \cos d'' \quad \text{und} \quad \frac{\cos D}{C} = \cos D'$$

und erhalt, wenn $H - h = d$ und $H' - h' = d'$ gesetzt wird

$$\cos D'' - \cos D' = \cos d' - \cos d''.$$

Wird nun hier die Differenz der Cosinus durch die Produkte der Sinus der halben Summen und Differenzen ersetzt und als einzige Näherung der Bogen statt des Sinus der kleinen Bögen genommen, so ist

$$D'' - D' = (d' - d'') \frac{\sin \frac{1}{2}(d' + d'')}{\sin \frac{1}{2}(D' + D'')}.$$

Hier kann schliesslich mit seltenen, im Laufe der Rechnung leicht kenntlichen Ausnahmen $\sin \frac{1}{2}(D' + D)$ statt $\sin \frac{1}{2}(D' + D'')$ genommen werden. Setzt man dann noch $D'' - D' = s$, so ist

$$s = (d' - d'') \frac{\sin \frac{1}{2}(d' + d'')}{\sin \frac{1}{2}(D' + D)}$$

und $D' + s$ gleich der reducirten Distanz. Sollte aber $D'$ von $D''$ erheblich abweichen, so muss die letzte Rechnung wiederholt werden, indem mit dem zuerst gefundenen Werth von $D$ nochmals $s$ berechnet wird.

Es kommt nun aber bei der Berechnung der Monddistanzen in Betracht, dass man nicht vom Erdmittelpunkt aus beobachtet, dass die Höhen durch die Refraction beeinflusst sind, dass die Ränder der Mond- event. Sonnenscheibe zur Berührung gebracht werden und dass endlich die Scheiben der Gestirne durch die Refraction eine Verzerrung erleiden. Hieraus ergeben sich folgende noch anzubringende Correctionen.

1) Parallaxe. Für die Sonne hat man einfach $p = \pi \cos h$ zu rechnen, wo $\pi$ die mittlere Aequatoreal-Horizontalparallaxe der Sonne ist. Für den Mond hat man dagegen

$$\tang p' = \tang(z' - z) = \frac{\rho \sin p \frac{\cos(\varphi - \varphi')}{\cos \gamma} \sin(z - \gamma)}{1 - \rho \sin p \frac{\cos(\varphi - \varphi')}{\cos \gamma} \cos(z - \gamma)},$$

wo

$$\tang \gamma = \frac{\cos \frac{1}{2}(A' + A)}{\cos \frac{1}{2}(A' - A)} \tang(\varphi - \varphi')$$

ist, oder genähert

$$\gamma = \cos A(\varphi - \varphi')$$

und

$$\tang p' = \tang(z' - z) = \frac{\rho \sin p \sin[z - (\varphi - \varphi') \cos A]}{1 - \rho \sin p \cos[z - (\varphi - \varphi') \cos A]},$$

worin die Bezeichnungen bekannte Bedeutung haben, nämlich $\rho$ der Erdradius für den Beobachtungsort, $\varphi$ die geographische, $\varphi'$ die geocentrische Breite des Ortes, $A$ das Azimuth (bezw. wahres und scheinbares), $z$ die Zenithdistanz (wahre und scheinbare), $p$ die Aequatoreal-Horizontalparallaxe des Mondes.

2) Refraction. Man sucht für die mit der Parallaxe behaftete Höhe die Refraction mit Rücksicht auf die meteorologischen Instrumente, bringt dieselbe an und hat damit die scheinbaren Höhen der Gestirne. Da man aber für die Berechnung der Refraction schon die scheinbare Höhe haben muss, so ist diese Rechnung doppelt zu führen. Um überhaupt die Höhe zu erhalten, wird sie auf der See vor und nach der Beobachtung der Monddistanz direkt beobachtet.

Sicherer ist jedoch, sie nach den Bd. I, pag. 659 gegebenen Formeln aus $t$, $\delta$, $\varphi$ für die Zeit der Beobachtung unter Annahme einer genäherten Länge zu berechnen.

8) Distanz der Mittelpunkte. Da man nicht die Mittelpunkte, sondern die Ränder beobachtet, so muss man daher noch die Summe der scheinbaren Halbmesser addiren oder subtrahiren, je nachdem man die näheren oder entfernteren Ränder nimmt. Nun ist aber der Mondhalbmesser durch die Parallaxe vergrössert und zwar ist der vergrösserte Halbmesser

$$r' = r\frac{\Delta}{\Delta'},$$

wo $\Delta$, $\Delta'$ die Entfernung des Mondmittelpunktes vom Erdmittelpunkt bezw. dem Beobachtungsort auf der Erdoberfläche ist, und da

$$\Delta' \sin p' = \rho \sin (z - p')$$
$$\Delta' \cos p' = \Delta - \rho \cos (z - p'),$$

so ist

$$\Delta' = \Delta \cos p' - \rho \cos (z - p') \cos p' + \rho \sin (z - p') \sin p' = \Delta \cos p' - \rho \cos z$$
$$\Delta \cos p' = \rho \cos z + \Delta'$$
$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \sec p' + \frac{\rho}{\Delta} \cos z \sec p' = 1 + p \sin h,$$

also

$$r' = r(1 + p \sin h),$$

wo $p$ die Horizontalparallaxe ist.

Die Refraction verkürzt den Verticaldurchmesser, während der horizontale derselbe bleibt. Diese Verkürzung, die die Scheibe in eine Ellipse verwandelt, lässt sich aus der Refraction finden. Ist $\pi$ der Winkel, den die Richtung der Distanz mit dem durch das eine Gestirn gehenden Verticalkreis macht, $h'$ die Höhe des anderen Gestirns, $\Delta$ die Distanz beider, so ist

$$\sin \pi \sin \Delta = \cos h' \sin (A' - A),$$

woraus

$$\sin \pi = \frac{\cos h' \sin (A' - A)}{\sin \Delta}$$

und da

$$\sin h' = \sin h \cos \Delta + \cos h \sin \Delta \cos \pi,$$

so ist

$$\cos \pi = \frac{\sin h' - \sin h \cos \Delta}{\cos h \sin \Delta}$$

mithin

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\pi = \frac{\sin (\Delta + h) - \sin h'}{\sin (\Delta - h) + \sin h'} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\Delta + h + h') \sin \frac{1}{2}(\Delta + h - h')}{\sin \frac{1}{2}(\Delta + h' - h) \cos \frac{1}{2}(h + h' - \Delta)}.$$

Setzen wir dann in der Gleichung der Ellipse $x = r \sin \pi$ und $y = r \cos \pi$, so haben wir

$$r^2 b^2 \sin^2 \pi + r^2 a^2 \cos^2 \pi = a^2 b^2$$

daraus

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \cos^2 \pi + b^2 \sin^2 \pi}$$

und

$$r = \frac{b}{\sqrt{\cos^2 \pi + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \pi}}.$$

Zur Erleichterung der Rechnung giebt es auch hierfür in den nautischen und anderen Tafelsammlungen Hilfstafeln.

Es ist nun noch zu beachten, dass in der ersten Entwickelung die Erde als kugelförmig angesehen wurde, was aber nicht der Fall ist, in Folge dessen ist der Winkel $MZS$ nicht gleich dem Winkel $M'ZS'$, denn die Parallaxe wirkt auf das Azimuth, sodass der Unterschied der scheinbaren Azimuthe des Mondes und der Sonne nicht gleich dem Unterschied der wahren Azimuthe der beiden Gestirne ist. Wir haben daher, wenn wir mit $\Delta A$ die Aenderung des Azimuthes des Mondes durch die Parallaxe bezeichnen,

$$tang\,(A' - A) = \frac{\frac{\rho \sin p \sin(\varphi - \varphi')}{\sin z} \sin A}{1 - \frac{\rho \sin p \sin(\varphi - \varphi') \cos A}{\sin z}}$$

oder

$$\Delta A = \frac{\rho \sin p \sin(\varphi - \varphi') \sin A}{\cos h},$$

wo $h$ die wahre Höhe bedeutet; statt des Winkels $MZS$ haben wir dann in der ersten Formel, pag. 274, $MZS - \Delta A$ zu setzen. Differenziren wir

$$\cos d = \sin h \sin H + \cos h \cos H \cos MZS,$$

so giebt dies

$$\Delta d = -\frac{\cos H \cos h \sin MZS}{\sin d}\Delta A$$
$$= -\frac{\rho \sin p \sin(\varphi - \varphi') \sin A \cos H \sin MZS}{\sin d}$$

ein Ausdruck, der aber gewöhnlich $= 0$ ist.

In Betreff der Verwendung der Sonnenfinsternisse und verwandter Erscheinungen zur Längenbestimmung kann auf den Art. Finsternisse um so eher verwiesen werden, als diese Erscheinungen ja doch zu den seltenen gehören und ihre Benutzung für vorliegende Zwecke daher eine beschränkte bleibt.

VALENTINER.

## Mechanik des Himmels.

1. **Allgemeine Begriffe.** Obzwar in der »Allgemeinen Einleitung in die Astronomie« im wesentlichen ein kurzer historischer Abriss gegeben wurde, so wurden doch auch, wenigstens im Princip, die Hauptfragen, welche die wissenschaftliche Astronomie der Gegenwart beschäftigen, berührt. Seitdem am Ende des vorigen Jahrhunderts NEWTON das Gesetz der allgemeinen Gravitation aufstellte, ist es die Aufgabe der theoretischen Astronomie geworden, alle Bewegungserscheinungen, welche die Himmelskörper dem Beobachter darbieten, aus diesem Gesetze einheitlich abzuleiten und in jenen Fällen, wo nach sorgfältiger Berücksichtigung aller Umstände eine Uebereinstimmung mit den Beobachtungen nicht zu erzielen ist, jene accessorischen Ursachen zu suchen, welche die beobachteten Wirkungen zu erklären ermöglichen: Die theoretische Astronomie wurde **Mechanik des Himmels**.

Die allgemeine Gravitation sowie auch alle anderen eventuell auftretenden Bewegungsursachen werden unter dem Begriffe der **Kraft** subsumirt. Die Natur, das Wesen der Kraft bleibt dabei völlig gleichgültig. Ganz unwesentlich ist es, ob man sich die Anziehung als eine »natürliche Verwandtschaft«, als einen »Willen« oder in irgend welcher Form vorstellen wolle, oder ob man sich eine »unvermittelte Anziehung« überhaupt nicht denken könne: wesentlich ist nur das **Wirkungsgesetz**, der **mathematische Ausdruck**, d. h. das Verhältniss der Wirkungen für verschiedene gegebene Elementarzustände.

Die der Erfahrung entnommenen Elemente, welche einen Zustand mechanisch bestimmen, sind zunächst die Massen der aufeinander wirkenden Körper, ihre Entfernungen von einander und die Richtungen ihrer Verbindungslinien.

Die Masse eines Körpers kann nur aus der Wirkung selbst durch die Erfahrung erschlossen werden; man sagt, die Masse eines Körpers ist die doppelte, dreifache . . . $n$fache, wenn ihre Wirkung (z. B. die bei einem und demselben zweiten Körper erzeugte Geschwindigkeit oder Beschleunigung) die doppelte, dreifache . . . $n$ fache ist. Sind in verschiedenen Fällen gleiche Massen in verschiedenen Räumen enthalten, so sagt man, die Körper haben verschiedene Dichten, und nennt Dichte das Verhältniss der Masse zum Volumen. Das Wesen der die Räume ausfüllenden Massen, die Materie, bleibt uns dabei ebenso verborgen, wie die Kraft, und es ist vom philosophischen Standpunkte eine Inconsequenz, von der Unvorstellbarkeit einer »Wirkung in die Ferne« zu sprechen, wenn man nicht ebensowohl von der Unvorstellbarkeit »verschieden dichter Massen« spricht.

Eine nothwendige Folge der gemachten Annahme ist die Proportionalität der Kraft mit der Masse[1]).

Weitere Erfahrungselemente sind: das Gesetz der Trägheit, das Gesetz von der Zusammensetzung der Bewegungen, Geschwindigkeiten und Kräfte nach dem Bewegungs-, Geschwindigkeits- und Kräfteparallelogramme, und das Gesetz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung[2]).

Die Intensität der Kraft wird gemessen durch die erzeugte Bewegung: Geschwindigkeit oder Beschleunigung, und ist dieser proportional. Da andererseits die erzeugte Beschleunigung $g$ (bei continuirlichen Kräften) verkehrt proportional der bewegten Masse $m$ ist, so wird

$$g = c\frac{P}{m} \quad \text{oder} \quad m\frac{d^2 s}{dt^2} = cP.$$

Kennt man das Gesetz, nach welchem sich die Kraft $P$ ändert in analytischer Form, so wird man die Bewegung der Masse $m$ durch analytische Operationen verfolgen d. h. die Bewegung beschreiben können.

Hat man es mit der Anziehung zweier Massen zu thun, so wird $P$ proportional den beiden wirkenden Massen $M$ und $m$, und überdies eine Function der Entfernung sein, also

$$P = Mmf(r);$$

für den Fall des NEWTON'schen Attractionsgesetzes ist die Intensität der Kraft bestimmt durch

$$f(r) = \frac{1}{r^2}.$$

Die Richtung der Kraft fällt erfahrungsgemäss (s. I. Band, pag. 100) mit der Richtung der Verbindungslinie der wirkenden Massen zusammen, und unter

---

[1]) Dass auch Entfernung und Richtung Erfahrungselemente sind, mag nur beiläufig erwähnt werden. Zu Grunde gelegt muss nach unserer Erfahrung der EUCLID'sche Raum werden in dem sich durch jeden Punkt zu einer gegebenen Geraden nur eine sie nicht schneidende Gerade legen lässt, und in welchem Strecken ohne Grössenänderungen verschoben werden können. Die Beweise für das Kräfteparallelogramm sind ebenso Scheinbeweise wie diejenigen für die Winkelsumme des Dreiecks.

[2]) Der Vollständigkeit halber mag erwähnt werden, dass der in philosophischen Schriften öfter wiederkehrende Einwurf gegen die Möglichkeit einer »Wechselwirkung« nur auf eine falsche Deutung des Wortes zurückzuführen ist, indem es sich dabei nicht um eine »abwechselnde«, sondern um »Simultanwirkungen« der Massen auf einander handelt.

diesen Voraussetzungen sind nun die aus der gegenseitigen Wirkung aller Himmelskörper[1]) auftretenden Erscheinungen zu erklären.

Die Erscheinungen selbst sind nun doppelter Natur:

1) Translationserscheinungen: Die Ortsveränderungen der Gestirne gegeneinander, bei deren Untersuchung dieselben im allgemeinen als Massenpunkte angenommen werden.

2) Rotationserscheinungen: Die Drehung der Gestirne um Axen, bei deren Untersuchung auf individuelle Eigenthümlichkeiten des untersuchten Objektes Rücksicht genommen werden muss.

**2. Orthogonale Transformation.** Um im Folgenden den Gang der Entwickelungen nicht zu unterbrechen, mögen vorerst einige allgemeine, immer wieder verwandte Beziehungen angeführt werden.

Seien die Coordinaten eines Punktes im Raume, bezogen auf ein rechtwinkliges Axensystem $x, y, z$; die Coordinaten desselben Punktes bezogen auf ein anderes, ebenfalls rechtwinkliges Axensystem $x', y', z'$, so bestehen zwischen diesen Coordinaten die Beziehungen:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z' \\ y &= \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z' \\ z &= \alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z'. \end{aligned} \quad (1) \qquad \begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \\ y' &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z \\ z' &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z. \end{aligned} \quad (2)$$

Die dabei auftretenden Coëfficienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \gamma_3$ sind die Richtungscosinus der Axen des einen Systems bezogen auf diejenige des anderen, und zwar sind $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Cosinus der Winkel, welche die $X'$-, $Y'$-, $Z'$-Axe mit der $X$-Axe einschliessen; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ die Cosinus der Winkel mit der $Y$-Axe; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ die Cosinus der Winkel mit der $Z$-Axe. Von diesen neun Richtungscosinus sind natürlich nur drei von einander unabhängig, es müssen daher Bedingungsgleichungen zwischen denselben bestehen. Aus der grossen Menge der Relationen, welche im folgenden angeführt werden, sind aber nur sechs von einander unabhängig.

Man hat zunächst für die Determinante der Coëfficienten

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 1. \quad (3)$$

Eine Substitution (1) oder (2), für welche die Determinante der Substitutionscoëfficienten gleich der Einheit ist, nennt man eine **orthogonale Substitution.** Für diese bestehen die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 &= 1 \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 &= 1 \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1 \end{aligned} \quad (4) \qquad \begin{aligned} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1 \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 &= 1 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 &= 0 \\ \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 &= 0 \\ \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3 &= 0 \end{aligned} \quad (6) \qquad \begin{aligned} \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 &= 0 \\ \alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 &= 0 \\ \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2 \\ \beta_1 &= \gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2 \\ \gamma_1 &= \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \end{aligned} \quad (8) \qquad \begin{aligned} \alpha_2 &= \beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3 \\ \beta_2 &= \gamma_3\alpha_1 - \gamma_1\alpha_3 \\ \gamma_2 &= \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 \end{aligned} \quad (9) \qquad \begin{aligned} \alpha_3 &= \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 \\ \beta_3 &= \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1 \\ \gamma_3 &= \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1. \end{aligned} \quad (10)$$

---

[1]) Unter dem Ausdruck Körper ist dabei eine auf einen endlichen Raum vertheilte oder auch in einem Punkte concentrirt gedachte Masse zu verstehen, ohne dass hiermit irgend welche metaphysische Voraussetzungen zu verbinden wären.

In den Untersuchungen über die Bewegungen der Körper kommt es wiederholt vor, dass man eines der beiden Axensysteme beweglich annimmt; dann werden die sämmtlichen neun Coefficienten als mit der Zeit $t$ veränderlich anzusehen sein, und man erhält aus (4):

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \frac{d\alpha_1}{dt} + \alpha_2 \frac{d\alpha_2}{dt} + \alpha_3 \frac{d\alpha_3}{dt} &= 0 \\
\beta_1 \frac{d\beta_1}{dt} + \beta_2 \frac{d\beta_2}{dt} + \beta_3 \frac{d\beta_3}{dt} &= 0 \\
\gamma_1 \frac{d\gamma_1}{dt} + \gamma_2 \frac{d\gamma_2}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma_3}{dt} &= 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned}
\beta_1 \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_2 \frac{d\alpha_2}{dt} + \beta_3 \frac{d\alpha_3}{dt} &= r \\
\gamma_1 \frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_2 \frac{d\beta_2}{dt} + \gamma_3 \frac{d\beta_3}{dt} &= p \\
\alpha_1 \frac{d\gamma_1}{dt} + \alpha_2 \frac{d\gamma_2}{dt} + \alpha_3 \frac{d\gamma_3}{dt} &= q,
\end{aligned} \tag{12}$$

so ergiebt sich aus (6):

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \frac{d\beta_1}{dt} + \alpha_2 \frac{d\beta_2}{dt} + \alpha_3 \frac{d\beta_3}{dt} &= -r \\
\beta_1 \frac{d\gamma_1}{dt} + \beta_2 \frac{d\gamma_2}{dt} + \beta_3 \frac{d\gamma_3}{dt} &= -p \\
\gamma_1 \frac{d\alpha_1}{dt} + \gamma_2 \frac{d\alpha_2}{dt} + \gamma_3 \frac{d\alpha_3}{dt} &= -q.
\end{aligned} \tag{13}$$

Die drei Gruppen (11), (12), (13) liefern durch entsprechende Combination[1])

$$\begin{aligned}
\frac{d\gamma_1}{dt} &= \alpha_1 q - \beta_1 p & \frac{d\beta_1}{dt} &= \gamma_1 p - \alpha_1 r & \frac{d\alpha_1}{dt} &= \beta_1 r - \gamma_1 q \\
\frac{d\gamma_2}{dt} &= \alpha_2 q - \beta_2 p & \frac{d\beta_2}{dt} &= \gamma_2 p - \alpha_2 r & \frac{d\alpha_2}{dt} &= \beta_2 r - \gamma_2 q \\
\frac{d\gamma_3}{dt} &= \alpha_3 q - \beta_3 p & \frac{d\beta_3}{dt} &= \gamma_3 p - \alpha_3 r & \frac{d\alpha_3}{dt} &= \beta_3 r - \gamma_3 q
\end{aligned} \tag{14}$$

Bildet man hieraus die links in (15) angegebenen Summen von Produkten, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha_1}{dt}\frac{d\beta_1}{dt} + \frac{d\alpha_2}{dt}\frac{d\beta_2}{dt} + \frac{d\alpha_3}{dt}\frac{d\beta_3}{dt} &= -pq \\
\frac{d\alpha_1}{dt}\frac{d\gamma_1}{dt} + \frac{d\alpha_2}{dt}\frac{d\gamma_2}{dt} + \frac{d\alpha_3}{dt}\frac{d\gamma_3}{dt} &= -pr \\
\frac{d\beta_1}{dt}\frac{d\gamma_1}{dt} + \frac{d\beta_2}{dt}\frac{d\gamma_2}{dt} + \frac{d\beta_3}{dt}\frac{d\gamma_3}{dt} &= -qr.
\end{aligned} \tag{15}$$

Setzt man ferner

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\alpha_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha_3}{dt}\right)^2 &= \Delta_1 \\
\left(\frac{d\beta_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta_3}{dt}\right)^2 &= \Delta_2 \\
\left(\frac{d\gamma_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2 &= \Delta_3,
\end{aligned} \tag{16}$$

so erhält man aus (11) durch Differentiation:

---

[1]) Multiplicirt man z. B. die dritte Gleichung in (12) mit $\alpha_1$, die zweite in (13) mit $\beta_1$ und die dritte in (11) mit $\gamma_1$ und addirt, so folgt die erste Gleichung von (14).

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \alpha_2 \frac{d^2\alpha_2}{dt^2} + \alpha_3 \frac{d^2\alpha_3}{dt^2} &= -\Delta_1 \\
\beta_1 \frac{d^2\beta_1}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2\beta_2}{dt^2} + \beta_3 \frac{d^2\beta_3}{dt^2} &= -\Delta_2 \\
\gamma_1 \frac{d^2\gamma_1}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2\gamma_2}{dt^2} + \gamma_3 \frac{d^2\gamma_3}{dt^2} &= -\Delta_3 .
\end{aligned} \tag{17}$$

Die Differentiation der Ausdrücke (12), (13) liefert mit Berücksichtigung von (15):

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \frac{d^2\beta_1}{dt^2} + \alpha_2 \frac{d^2\beta_2}{dt^2} + \alpha_3 \frac{d^2\beta_3}{dt^2} &= -\frac{dr}{dt} + pq \\
\beta_1 \frac{d^2\gamma_1}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2\gamma_2}{dt^2} + \beta_3 \frac{d^2\gamma_3}{dt^2} &= -\frac{dp}{dt} + qr \\
\gamma_1 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2\alpha_2}{dt^2} + \gamma_3 \frac{d^2\alpha_3}{dt^2} &= -\frac{dq}{dt} + pr \\
\beta_1 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2\alpha_2}{dt^2} + \beta_3 \frac{d^2\alpha_3}{dt^2} &= +\frac{dr}{dt} + pq \\
\gamma_1 \frac{d^2\beta_1}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2\beta_2}{dt^2} + \gamma_3 \frac{d^2\beta_3}{dt^2} &= +\frac{dp}{dt} + qr \\
\alpha_1 \frac{d^2\gamma_1}{dt^2} + \alpha_2 \frac{d^2\gamma_2}{dt^2} + \alpha_3 \frac{d^2\gamma_3}{dt^2} &= +\frac{dq}{dt} + pr .
\end{aligned} \tag{18}$$

Endlich erhält man aus (14):

$$\begin{aligned}
p\frac{d\alpha_1}{dt} + q\frac{d\beta_1}{dt} + r\frac{d\gamma_1}{dt} &= 0 \\
p\frac{d\alpha_2}{dt} + q\frac{d\beta_2}{dt} + r\frac{d\gamma_2}{dt} &= 0 \\
p\frac{d\alpha_3}{dt} + q\frac{d\beta_3}{dt} + r\frac{d\gamma_3}{dt} &= 0
\end{aligned} \tag{19}$$

und aus (16), wenn man die Werthe der Differentialquotienten aus (14) einführt:

$$\Delta_1 = q^2 + r^2 \qquad \Delta_2 = r^2 + p^2 \qquad \Delta_3 = p^2 + q^2 . \tag{20}$$

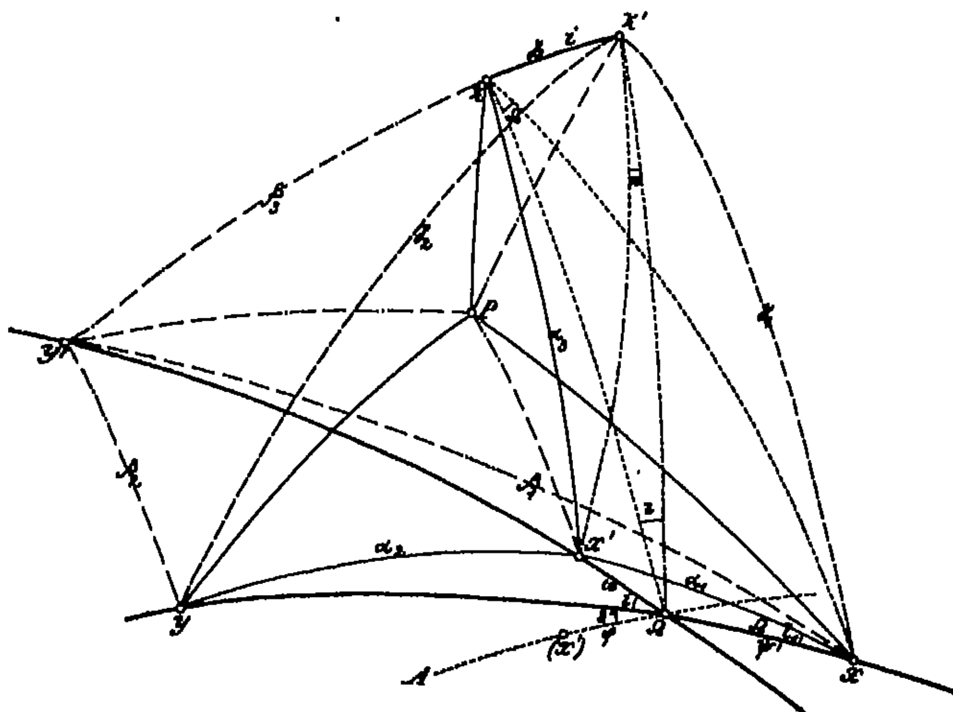
Seien die Schnittpunkte der sechs Axen mit einer aus dem Coordinatenanfangspunkt als Mittelpunkt beschriebenen Kugel $X$, $Y$, $Z$, $X'$, $Y'$, $Z'$, (Fig. 270), sei der Schnittpunkt der Bögen $XY$, $X'Y'$ in ☊, so wird die Lage des zweiten Axensystems bestimmt durch den Abstand $X☊ = ☊$, durch den Neigungswinkel $i$ der beiden Ebenen und den Abstand $☊X' = \omega$. Nun ist

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \cos XX' & \beta_1 &= \cos XY' & \gamma_1 &= \cos XZ' \\
\alpha_2 &= \cos YX' & \beta_2 &= \cos YY' & \gamma_2 &= \cos YZ' \\
\alpha_3 &= \cos ZX' & \beta_3 &= \cos ZY' & \gamma_3 &= \cos ZZ' .
\end{aligned}$$

Man findet nun leicht aus den sphärischen Dreiecken, von denen zwei Ecken in den Endpunkten der Axen, die dritte immer in ☊ ist, sofort die Formeln:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= +\cos ☊ \cos\omega - \sin ☊ \sin\omega \cos i \\
\beta_1 &= -\cos ☊ \sin\omega - \sin ☊ \cos\omega \cos i \\
\gamma_1 &= +\sin ☊ \sin i \\
\alpha_2 &= +\sin ☊ \cos\omega + \cos ☊ \sin\omega \cos i \\
\beta_2 &= -\sin ☊ \sin\omega + \cos ☊ \cos\omega \cos i \\
\gamma_2 &= -\cos ☊ \sin i \\
\alpha_3 &= +\sin\omega \sin i \\
\beta_3 &= +\cos\omega \sin i \\
\gamma_3 &= +\cos i ,
\end{aligned} \tag{21}$$

durch deren Differentiation sich die Folgenden ergeben:



(A. 272.)

$$
\begin{aligned}
\frac{d\alpha_1}{dt} &= -\alpha_2 \frac{d\Omega}{dt} + \beta_1 \frac{d\omega}{dt} + \gamma_1 \sin\omega \frac{di}{dt} \\
\frac{d\beta_1}{dt} &= -\beta_2 \frac{d\Omega}{dt} - \alpha_1 \frac{d\omega}{dt} + \gamma_1 \cos\omega \frac{di}{dt} \\
\frac{d\gamma_1}{dt} &= -\gamma_2 \frac{d\Omega}{dt} + \gamma_3 \sin\Omega \frac{di}{dt} \\
\frac{d\alpha_2}{dt} &= +\alpha_1 \frac{d\Omega}{dt} + \beta_2 \frac{d\omega}{dt} + \gamma_2 \sin\omega \frac{di}{dt} \\
\frac{d\beta_2}{dt} &= +\beta_1 \frac{d\Omega}{dt} - \alpha_2 \frac{d\omega}{dt} + \gamma_2 \cos\omega \frac{di}{dt} \qquad (22) \\
\frac{d\gamma_2}{dt} &= +\gamma_1 \frac{d\Omega}{dt} - \gamma_3 \cos\Omega \frac{di}{dt} \\
\frac{d\alpha_3}{dt} &= +\beta_3 \frac{d\omega}{dt} + \gamma_3 \sin\omega \frac{di}{dt} \\
\frac{d\beta_3}{dt} &= -\alpha_3 \frac{d\omega}{dt} + \gamma_3 \cos\omega \frac{di}{dt} \\
\frac{d\gamma_3}{dt} &= -\sin i \frac{di}{dt}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 &= (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + 2\gamma_3 \frac{d\Omega}{dt}\frac{d\omega}{dt} - 2\beta_3 \sin\omega \frac{d\Omega}{dt}\frac{di}{dt} + \left(\sin\omega \frac{di}{dt}\right)^2 \\
\Delta_2 &= (\beta_1^2 + \beta_2^2)\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + 2\gamma_3 \frac{d\Omega}{dt}\frac{d\omega}{dt} + 2\alpha_3 \cos\omega \frac{d\Omega}{dt}\frac{di}{dt} + \left(\cos\omega \frac{di}{dt}\right)^2 \qquad (23) \\
\Delta_3 &= (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2 + \left(\frac{di}{dt}\right)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p &= \alpha_3 \frac{d\Omega}{dt} + \cos\omega \frac{di}{dt} \\
q &= \beta_3 \frac{d\Omega}{dt} - \sin\omega \frac{di}{dt} \\
r &= \gamma_3 \frac{d\Omega}{dt} + \frac{d\omega}{dt}\,.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Da die Cosinus der Neigungswinkel der Flächennormale der $X'$-$Y'$-Ebene gegen die $X$-, $Y$-, $Z$-Axe, bezw. $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ sind, so wird die Projection eines in der $X'$-, $Y'$-Ebene gelegenen Flächenstückes $f$ auf die drei Ebenen der $X$-$Y$, $Y$-$Z$ und $Z$-$X$ sein:

$$
\begin{aligned}
f_{xy} &= \gamma_3 f = f\cos i \\
f_{yz} &= \gamma_1 f = f\sin i \sin\Omega \\
f_{zx} &= \gamma_2 f = -f\sin i\cos\Omega
\end{aligned}
\tag{25}
$$

## I. Abschnitt. Die Translationsbewegungen.

**3. Kräftefunction.** Die Dimensionen der betrachteten Himmelskörper sind gegenüber den von denselben beschriebenen Bahnen so klein, dass dieselben zunächst als verschwindend angesehen werden können, d. h. dass man sich auf die Betrachtung der Bewegungen von Massenpunkten beschränken kann[1]). Seien demnach ganz allgemein $n$ Massenpunkte gegeben, die sich gegenseitig mit Kräften anziehen, welche proportional ihren Massen und einer gewissen Function $f(r)$ der Entfernung sind. Diese in verschiedenen Richtungen wirkenden Kräfte müssen, um vereinigt werden zu können, in drei auf einander senkrechte Richtungen zerlegt werden. Die Anziehung, welche ein Massenpunkt $m$ mit den rechtwinkligen Coordinaten $x_1$, $y_1$, $z_1$ von einem andern Massenpunkte $m_2$ erfährt, dessen Coordinaten $x_2$, $y_2$, $z_2$ sind, wird $m_1 m_2 f(r_{12})$ sein, wenn $r_{12}$ die Entfernung der beiden Massenpunkte bezeichnet. Da die Cosinus der Winkel, welche die Richtung $r_{12}$ mit den drei Axen bilden, $\frac{x_2 - x_1}{r_{12}}$, $\frac{y_2 - y_1}{r_{12}}$, $\frac{z_2 - z_1}{r_{12}}$ sind, so werden die drei Componenten der Anziehung

$$
m_1 m_2 f(r_{12})\frac{x_2 - x_1}{r_{12}}\,; \qquad m_1 m_2 f(r_{12})\frac{y_2 - y_1}{r_{12}}\,; \qquad m_1 m_2 f(r_{12})\frac{z_2 - z_1}{r_{12}}\,.
$$

Zerlegt man in derselben Weise die Componenten der Anziehung der übrigen Massenpunkte $m_3$, $m_4$, ... und summirt die sämmtlichen in derselben Richtung wirkenden Componenten, so erhält man in der Richtung der $X$-Axe die Kraft

$$
X_1 = m_1 m_2 f(r_{12})\frac{x_2 - x_1}{r_{12}} + m_1 m_3 f(r_{13})\frac{x_3 - x_1}{r_{13}} + \ldots,
$$

daher in kürzerer Form die drei Componenten:

$$
\begin{gathered}
X_1 = m_1 \sum_\iota m_\iota f(r_{1\iota})\frac{x_\iota - x_1}{r_{1\iota}}\,; \qquad Y_1 = m_1 \sum_\iota m_\iota f(r_{1\iota})\frac{y_\iota - y_1}{r_{1\iota}}\,; \\
Z_1 = m_1 \sum_\iota m_\iota f(r_{1\iota})\frac{z_\iota - z_1}{r_{1\iota}}\,; \\
\iota = 2, 3, \ldots, n.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

[1]) Die Berücksichtigung der Abweichungen von diesem Umstande folgt später in 63 und 81.

Aehnliche Ausdrücke erhält man für die Componenten der auf die Massenpunkte $m_2, m_3, \ldots$ wirkenden Kräfte, und allgemein für den Massenpunkt $m_p$

$$X_p = m_p \sum_\iota m_\iota f(r_{p\iota}) \frac{x_\iota - x_p}{r_{p\iota}}; \qquad Y_p = m_p \sum_\iota m_\iota f(r_{p\iota}) \frac{y_\iota - y_p}{r_{p\iota}};$$

$$Z_p = m_p \sum_\iota m_\iota f(r_{p\iota}) \frac{z_\iota - z_p}{r_{p\iota}}; \tag{2}$$

$$\iota = 1, 2, \ldots, n^{1)},$$

wobei

$$r_{\iota\varkappa}^2 = r_{\varkappa\iota}^2 = (x_\iota - x_\varkappa)^2 + (y_\iota - y_\varkappa)^2 + (z_\iota - z_\varkappa)^2.$$

Zwischen diesen Kräften bestehen einige allgemeine Beziehungen. Man hat

$$\sum_\iota X_\iota = 0; \qquad \sum_\iota Y_\iota = 0; \qquad \sum_\iota Z_\iota = 0, \tag{3}$$

denn ein von $r_{\iota\varkappa}$ abhängiges Glied kann nur in $X_\iota$ und $X_\varkappa$ enthalten sein[2]) und ist in ersteren $m_\iota m_\varkappa f(r_{\iota\varkappa}) \frac{x_\varkappa - x_\iota}{r_{\iota\varkappa}}$, in letzterem $m_\varkappa m_\iota f(r_{\varkappa\iota}) \frac{x_\iota - x_\varkappa}{r_{\iota\varkappa}}$, deren Summe verschwindet. Weiter ist

$$\sum_\iota (X_\iota y_\iota - Y_\iota x_\iota) = 0; \qquad \sum_\iota (Y_\iota z_\iota - Z_\iota y_\iota) = 0; \qquad \sum_\iota (Z_\iota x_\iota - X_\iota z_\iota) = 0 \tag{4}$$

Sucht man zum Beweise der ersten Formel wieder die von $r_{\iota\varkappa}$ abhängigen Glieder, so findet man:

$$m_\iota m_\varkappa f(r_{\iota\varkappa}) \frac{x_\varkappa - x_\iota}{r_{\iota\varkappa}} y_\iota - m_\iota m_\varkappa f(r_{\iota\varkappa}) \frac{y_\varkappa - y_\iota}{r_{\iota\varkappa}} x_\iota +$$
$$+ m_\varkappa m_\iota f(r_{\iota\varkappa}) \frac{x_\iota - x_\varkappa}{r_{\iota\varkappa}} y_\varkappa - m_\varkappa m_\iota f(r_{\iota\varkappa}) \frac{y_\iota - y_\varkappa}{r_{\iota\varkappa}} x_\varkappa$$

also gleich Null.

Sei

$$-\int f(r)\,dr = F(r) \tag{5}$$

und bildet man die Function

$$\begin{aligned} U = \Sigma m_\iota m_\varkappa F(r_{\iota\varkappa}) = m_1 m_2 F(r_{12}) + m_1 m_3 F(r_{13}) + \ldots\ldots + m_1 m_n F(r_{1n}) \\ + m_2 m_3 F(r_{23}) + \ldots\ldots + m_2 m_n F(r_{2n}) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + m_{n-1} m_n F(r_{n-1,n}), \end{aligned} \tag{6}$$

so lassen sich die drei Componenten $X_p, Y_p, Z_p$ als die partiellen Differentialquotienten dieser Function $U$ nach den zugehörigen Variabeln $x_p, y_p, z_p$ darstellen; es ist

$$X_p = \frac{\partial U}{\partial x_p}; \qquad Y_p = \frac{\partial U}{\partial y_p}; \qquad Z_p = \frac{\partial U}{\partial z_p}. \tag{7}$$

Für die Differentiation nach $x_p$ kommen nur jene Glieder von $U$ in Betracht, die von $r_{p\nu}$ abhängen, also ein Theil $m_p U_p$, wenn

$$U_p = m_1 F(r_{1p}) + m_2 F(r_{2p}) + \ldots + m_n F(r_{np}). \tag{8}$$

Da aber

$$\frac{\partial F(r_{p\varkappa})}{\partial x_p} = \frac{\partial F(r_{p\varkappa})}{\partial r_{p\varkappa}} \frac{\partial r_{p\varkappa}}{\partial x_p} = -f(r_{p\varkappa}) \frac{x_p - x_\varkappa}{r_{p\varkappa}}$$

---

[1]) Eigentlich wäre $\iota = p$ auszuschliessen; man sieht aber leicht, dass die auf $\iota = p$ bezüglichen Ausdrücke verschwinden.

[2]) Wo ganz ähnliche Betrachtungen für alle drei Coordinaten gelten, wird Kürze halber nur eine erwähnt.

ist, so sind die Beziehungen (7) unmittelbar ersichtlich. Die Function $U$ nennt man die Kräftefunction, Potentialfunction, oder das Potential[1]).

Die Translationsbewegungen der $n$ Massenpunkte $m_1, m_2, \ldots m_n$ werden nun nach (1) durch die Gleichungen bestimmt:

$$m_p \frac{d^2 x_p}{dt^2} = X_p \qquad\qquad m_p \frac{d^2 x_p}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_p}$$
$$m_p \frac{d^2 y_p}{dt^2} = Y_p \qquad (9) \qquad \text{oder} \qquad m_p \frac{d^2 y_p}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_p} \qquad (10)$$
$$m_p \frac{d^2 z_p}{dt^2} = Z_p \qquad\qquad m_p \frac{d^2 z_p}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_p}.$$

Durch die Integration dieser Differentialgleichungen gelangt man zur Kenntniss der Werthe von $x_p$, $y_p$, $z_p$ als Functionen der Zeit. Die $3n$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung führen vollständig integrirt auf $6n$ allgemeine Integrale ($3n$ Coordinaten und $3n$ Geschwindigkeiten); aber die Ausführung dieser Integrationen stösst auf zur Zeit noch unüberwindliche Schwierigkeiten, und es ist bisher nur gelungen, zehn Integrale in geschlossener Form anzugeben, während die $6n - 10$ übrigen nur in einigen wenigen speziellen Fällen bestimmt werden konnten.

**4. Bewegung des Schwerpunktes.** Die Coordinaten $\xi$, $\eta$, $\zeta$ des Schwerpunktes des gegebenen Systemes von $n$ Massenpunkten sind bekanntlich bestimmt durch die Gleichungen:

$$\Sigma m_i = M; \quad M\xi = \Sigma m_i x_i; \quad M\eta = \Sigma m_i y_i; \quad M\zeta = \Sigma m_i z_i.$$

Durch zweimalige Differentiation folgt

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \Sigma X_i; \qquad M\frac{d^2\eta}{dt^2} = \Sigma Y_i; \qquad M\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \Sigma Z_i,$$

folglich mit Rücksicht auf die Beziehung §. 3[2])

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0; \qquad M\frac{d^2\eta}{dt^2} = 0; \qquad M\frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0. \qquad (1)$$

Diese Gleichungen geben integrirt:

$$\frac{d\xi}{dt} = a_1; \qquad \frac{d\eta}{dt} = b_1; \qquad \frac{d\zeta}{dt} = c_1 \qquad (2)$$

$$\xi = a_1 t + a_2; \qquad \eta = b_1 t + b_2; \qquad \zeta = c_1 t + c_2. \qquad (3)$$

Die sechs Integrale (2), (3) geben den Satz, dass der Schwerpunkt des Systemes in einer geradlinigen, gleichförmigen Bewegung begriffen ist. (Princip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes.)

**5. Princip der Flächen.** Drei weitere Integrale erhält man auf folgende Art: Multiplicirt man die die Bewegung des Massenpunktes $m_i$ bestimmenden

---

[1]) Sehr häufig findet man den Namen Potential nur für den Fall angewendet, dass das Kraftgesetz das Newton'sche Attractionsgesetz ist, doch spricht man auch von logarithmischem Potential u. s. w. Auch findet man mitunter das Potential als Werth der Potentialfunction für die Masseneinheit, d. h. ohne einen von der Masse abhängigen Faktor, doch spricht man hinwieder auch von einem Potential auf die Masseneinheit u. s. w. Nach der obigen Darstellung tritt das Potential als eine blosse Function der Entfernung auf; doch können immerhin auch die Coordinaten selbst eintreten, nur muss es dann, wie zu sehen, die Invarianteneigenschaft besitzen, d. h. der Ausdruck für das Potential darf durch eine orthogonale Substitution seine Form nicht ändern.

[2]) Kürze halber wird im Folgenden stets durch die beiden Ziffern die Nummer des Paragraphen und der Formel angegeben; es bedeutet also z. B. 3. 9: Paragraph 3, Formel 9.

Gleichungen der Reihe nach mit: 1) $-y_i$, $+x_i$, 0; 2) 0, $-z_i$, $+y_i$; 3) $+z_i$, 0, $-x_i$, und addirt die für die einzelnen Massenpunkte erhaltenen Produkte, so folgt:

$$\begin{aligned}
\Sigma m_i\left(-y_i\frac{d^2x_i}{dt^2}+x_i\frac{d^2y_i}{dt^2}\right) &= \Sigma(-X_iy_i+Y_ix_i)\\
\Sigma m_i\left(-z_i\frac{d^2y_i}{dt^2}+y_i\frac{d^2z_i}{dt^2}\right) &= \Sigma(-Y_iz_i+Z_iy_i)\qquad(1)\\
\Sigma m_i\left(-x_i\frac{d^2z_i}{dt^2}+z_i\frac{d^2x_i}{dt^2}\right) &= \Sigma(-Z_ix_i+X_iz_i).
\end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen 3. 4 werden aber jetzt die rechten Seiten verschwinden, und da die linken Seiten vollständige Differentiale sind, so erhält man durch einmalige Integration:

$$\begin{aligned}
\Sigma m_i\left(y_i\frac{dz_i}{dt}-z_i\frac{dy_i}{dt}\right) &= A\\
\Sigma m_i\left(z_i\frac{dx_i}{dt}-x_i\frac{dz_i}{dt}\right) &= B\qquad(2)\\
\Sigma m_i\left(x_i\frac{dy_i}{dt}-y_i\frac{dx_i}{dt}\right) &= C.
\end{aligned}$$

Sind $r$, $l$ die Polarcoordinaten eines Punktes in einer Ebene, dessen rechtwinklige Coordinaten $m$, $n$ sind, sodass

$$r\cos l = m,\qquad r\sin l = n$$

ist, so findet man leicht

$$m\frac{dn}{dt}-n\frac{dm}{dt}=r^2\frac{dl}{dt}=2\frac{df}{dt},$$

wenn $df$ das Element der von dem Radiusvector überstrichenen Fläche bedeutet. Werden nun für den Massenpunkt $m_i$ die Projectionen des Radiusvectors $r_i$ auf die Ebenen der $Y$-$Z$, $X$-$Z$, $Z$-$X$ mit $r_i'$, $r_i''$, $r_i'''$ und die von diesen Projectionen beschriebenen Winkel mit $v_i'$, $v_i''$, $v_i'''$ bezeichnet, so sind

$$2df_i' = r_i'^2dv_i';\quad 2df_i''=r_i''^2dv_i'';\quad 2df_i'''=r_i'''^2dv_i'''$$

die Projectionen der von dem Radiusvector $r_i$ in der Zeit $dt$ beschriebene Elementarfläche (wobei nicht zu übersehen ist, dass der Radiusvector im Raume keine Ebene, sondern die Mantelfläche eines Kegels beschreibt), und man hat daher

$$\Sigma m_i df_i' = \tfrac{1}{2}A\,dt;\qquad \Sigma m_i df_i''=\tfrac{1}{2}B\,dt;\qquad \Sigma m_i df_i'''=\tfrac{1}{2}C\,dt,\qquad(3)$$

daher integrirt:

$$\Sigma m_i f_i' = \tfrac{1}{2}At+A_1\quad \Sigma m_i f_i''=\tfrac{1}{2}Bt+B_1\quad \Sigma m_i f_i'''=\tfrac{1}{2}Ct+C_1,\qquad(4)$$

welche Gleichungen zeigen, dass die Summe der Projectionen der sämmtlichen, von den einzelnen Radienvectoren aller Massenpunkte des Systemes überstrichenen Mantelflächen, auf eine beliebige Ebene im Raume genommen, der Zeit proportional wachsen. Diesen Satz nennt man das Princip der Erhaltung der Flächen, und die Constanten $A$, $B$, $C$ die Constanten des Flächensatzes für die drei betrachteten Ebenen.

Ueber den Anfangspunkt des Coordinatensystemes wurde keinerlei Voraussetzung gemacht, man kann diesen daher auch in den gemeinsamen Schwerpunkt aller Massenpunkte verlegen, da die Bewegung aller Punkte des Systemes um diesen so erfolgt, als wenn dieser sich im Zustande absoluter Ruhe befinden würde (die Constanten $a_1$, $b_1$, $c_1$ in 4. 2 und 3 gleich Null).

Für verschiedene Ebenen werden die Constanten $A$, $B$, $C$ verschieden sein; da dieselben aber bei einer endlichen Anzahl von Körpern nicht über alles Maass wachsen werden, so wird es nothwendig eine Ebene geben, bezüglich welcher

diese Constante ein Maximum sein wird. Diese Ebene, sowie der Maximalwerth selbst bieten ein besonderes Interesse, um sie zu finden muss das System der Massen auf ein anderes festes Coordinatensystem bezogen werden. Man erhält zunächst aus den Gleichungen 2. 1, 2 mit Berücksichtigung der Relationen 3. 4 bis 10 (mit Weglassung des Index $i$):

$$x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt} = \gamma_1\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) + \gamma_2\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + \gamma_3\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right),$$

daher

$$\begin{aligned}
\Sigma\left(y_i'\frac{dz_i'}{dt} - z_i'\frac{dy_i'}{dt}\right) &= \alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C = A' \\
\Sigma\left(z_i'\frac{dx_i'}{dt} - x_i'\frac{dz_i'}{dt}\right) &= \beta_1 A + \beta_2 B + \beta_3 C = B' \qquad (5)\\
\Sigma\left(x_i'\frac{dy_i'}{dt} - y_i'\frac{dx_i'}{dt}\right) &= \gamma_1 A + \gamma_2 B + \gamma_3 C = C'
\end{aligned}$$

Definirt man eine Grösse $k$ durch die Bedingung

$$k^2 = A^2 + B^2 + C^2,$$

so wird gemäss den letzteren Beziehungen auch

$$k^2 = A'^2 + B'^2 + C'^2$$

sein, und es können $A, B, C$ nach den Gleichungen (5) als die Projectionen der Grösse $k$ auf die drei ursprünglichen, $A', B', C'$ auf die neuen Projectionsebenen angesehen werden. Hieraus folgt unmittelbar, dass $k$ der grösstmögliche Werth aller Flächenconstanten ist, und wählt man das neue Coordinatensystem so, dass die Constante für die $X'Y'$-Ebene $k$ sei, so wird $C' = k$, $A' = B' = 0$ sein, und die Lage der Ebene, für welche die Constante des Flächensatzes ein Maximum sein soll, wird durch die Gleichungen bestimmt:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C &= 0 \\
\beta_1 A + \beta_2 B + \beta_3 C &= 0 \\
\gamma_1 A + \gamma_2 B + \gamma_3 C &= \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = k,
\end{aligned}$$

aus denen man

$$\gamma_1 = \frac{A}{k}; \qquad \gamma_2 = \frac{B}{k}; \qquad \gamma_3 = \frac{C}{k} \qquad (6)$$

erhält. Die Lage dieser Ebene ist daher von der gegenseitigen Lage der Massenpunkte völlig unabhängig, und nur abhängig von den Constanten $A$, $B$, $C$. LAPLACE hat daher diese Ebene die **unveränderliche Ebene** genannt, indem, solange die Constanten der Flächengeschwindigkeiten ungeändert bleiben, d. h. insolange nur innere Kräfte wirken, und keine äusseren, nicht dem Weltsystem angehörigen Ursachen hinzutreten, die Lage dieser Ebene im Weltraume unverändert bleiben muss.

**6. Erhaltung der lebendigen Kraft.** Multiplicirt man die Differentialgleichungen der Bewegung der Reihe nach mit $\frac{dx_i}{dt}, \frac{dy_i}{dt}, \frac{dz_i}{dt}$ und addirt, so erhält man einerseits:

$$\Sigma m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\frac{d^2x_i}{dt^2} + \frac{dy_i}{dt}\frac{d^2y_i}{dt^2} + \frac{dz_i}{dt}\frac{d^2z_i}{dt^2}\right) = \tfrac{1}{2}\Sigma m_i\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right] = \frac{dT}{dt},$$

andererseits aus 3. 9:

$$\Sigma\left(X_i\frac{dx_i}{dt} + Y_i\frac{dy_i}{dt} + Z_i\frac{dz_i}{dt}\right)$$

oder aus 3. 10:

$$\Sigma\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z_i}\frac{dz_i}{dt}\right) = \frac{dU}{dt}.$$

Da nun

$$\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2 = v_i^2$$

ist, wenn man mit $v_i$ die Geschwindigkeit des Massenpunktes $m_i$ bezeichnet, und $\frac{1}{2} m_i v_i^2$ die lebendige Kraft dieses Massenpunktes ist, so wird

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2 \tag{1}$$

die Summe der lebendigen Kräfte aller Massenpunkte sein, welche Summe man als die lebendige Kraft des Systemes bezeichnet. Wird nach $t$ integrirt, so folgt aus 8. 9:

$$T = \int\left(X_i \frac{dx_i}{dt} + Y_i \frac{dy_i}{dt} + Z_i \frac{dz_i}{dt}\right) dt, \tag{2}$$

welcher Ausdruck jedoch nur in speziellen Fällen integrabel ist, z. B. wenn $X_i$ eine blosse Function von $x_i$, $Y_i$ eine blosse Function von $y_i$, $Z_i$ eine blosse Function von $z_i$ ist, ein Fall, der in der Natur nicht vorkommt. Für die in der Natur vorkommenden Fälle bestehen jedoch die Gleichungen 8. 7, daher die Bewegungsgleichungen 8. 10, aus welchen man

$$T = U + h \tag{3}$$

erhält, wenn $h$ eine Integrationsconstante bedeutet. Dieses ist das zehnte Integral[1]) der Bewegungsgleichungen; es besagt, dass, so oft das Massensystem einen Zustand erlangt, den es bereits früher einmal inne hatte (die Coordinaten, und daher auch die Kräftefunction die früheren Werthe erlangen), auch die lebendige Kraft des Systemes denselben Werth erhält. Dieser Satz heisst der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft.

7. HAMILTON'sches Princip. Wenn es auch durch weitere Transformationen nicht möglich ist, ein weiteres Integral zu erhalten, so lassen sich doch einige allgemeine Sätze aufstellen, welche von besonderem Interesse sind und eine vielfache Anwendung gestatten. Hierher gehört das HAMILTON'sche Princip; es besagt, dass

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T + U)dt = 0 \tag{1}$$

ist, wo die Variationen $\delta$ sich auf Verschiebungen der Coordinaten beziehen, die mit den Bedingungen des Problems vereinbar sind[2]). Die Richtigkeit lässt sich leicht durch die Ausführung der Variationen erweisen. Es ist, wenn man Kürze halber

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i'; \qquad \frac{dy_i}{dt} = y_i'; \qquad \frac{dz_i}{dt} = z_i'$$

setzt:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} T dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta T \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} \Sigma m_i [x_i' \delta x_i' + y_i' \delta y_i' + z_i' \delta z_i'] dt.$$

[1]) Es muss hervorgehoben werden, dass die in 4 und 5 gegebenen neun Integrale in dieser Form nur gelten, wenn die Bedingungen 8. 8, 4 erfüllt sind, wenn also z. B. in dem System nur innere Kräfte wirken, und dass ferner das zehnte Integral in 6 an die Bedingung der Existenz einer Kräftefunction gebunden ist. Es ist noch zu bemerken, dass sich bei den mechanischen Problemen, wenn es gelungen ist, alle Integrale bis auf eines anzugeben, das letzte in Form von Quadraturen finden lässt. S. JACOBI: »Theoria nova multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi.« (Werke, 4. Bd.).

[2]) Die Variationen erstrecken sich nur auf die abhängig Veränderlichen, die Coordinaten, nicht aber auf die Zeit.

Nun findet man durch theilweise Integration:

$$\int_{t_1}^{t_2} x_i' \delta x_i' dt = \int_{t_1}^{t_2} x_i' \frac{d\delta x_i}{dt} dt = \Big[x_i'\delta x_i\Big]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta x_i \frac{dx_i'}{dt} dt = -\int_{t_1}^{t_2} \delta x_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} dt,$$

da die Variationen für die festen Grenzen des Integrales verschwinden. Da weiter

$$\delta U = \Sigma \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial U}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial U}{\partial z_i}\delta z_i\right)$$

ist, weil die Kräftefunction von den Geschwindigkeiten unabhängig ist, so erhält man:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T + U)dt =$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2}\Sigma\left[\left(m_i\frac{d^2x_i}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial x_i}\right)\delta x_i + \left(m_i\frac{d^2y_i}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial y_i}\right)\delta y_i + \left(m_i\frac{d^2z_i}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial z_i}\right)\delta z_i\right] dt = 0 \qquad (2)$$

Für den Fall, dass die Variationen $\delta x_i$, $\delta y_i$, $\delta z_i$ keinen weiteren Bedingungen[1]) unterworfen, d. h., dass sie völlig willkürlich sind, zerfällt diese Summe in die Gleichungen 3. 10, da jeder Klammerausdruck für sich verschwinden muss.

8. LAGRANGE's Form der Bewegungsgleichungen. Nimmt man an, dass in den Ausdrücken für die lebendige Kraft und die Kräftefunction beliebige andere Variable $\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_{3n}$ substituirt worden sind, so werden sich die Differentialgleichungen der Bewegung für diese neuen Variabeln aus dem Ausdrucke 7. 1 unmittelbar ergeben. Es wird wieder:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} T dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta T \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2}\sum_i\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_i}\delta\xi_i + \frac{\partial T}{\partial \xi_i'}\delta\xi_i'\right) dt,$$

wenn $\xi_i' = \frac{d\xi_i}{dt}$ gesetzt wird. Man hat weiter wie in 7:

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial T}{\partial \xi_i'}\delta\xi_i' dt = \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial T}{\partial \xi_i'}\frac{d\delta\xi_i}{dt} dt = \left[\frac{\partial T}{\partial \xi_i'}\delta\xi_i\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\delta\xi_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_i'}\right) dt,$$

wo wieder der erste Ausdruck verschwindet, weil $\delta\xi_i$ für die festen Grenzen verschwindet. Ebenso wird:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} U dt = \int_{t_1}^{t_2}\sum_i\frac{\partial U}{\partial \xi_i}\delta\xi_i,$$

folglich erhält man

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T + U)dt = \int_{t_1}^{t_2}\sum_i\left[\frac{\partial U}{\partial \xi_i} + \frac{\partial T}{\partial \xi_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_i'}\right)\right]\delta\xi_i = 0. \qquad (1)$$

Für den Fall der freien Bewegung aller Punkte (wenn keine beschränkenden Bedingungen auftreten) sind die $\delta\xi_i$ völlig willkürlich, weshalb jede einzelne Summe verschwinden muss, und man hat:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_i'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi_i} - \frac{\partial U}{\partial \xi_i} = 0 \qquad i = 1, 2 \ldots 3n, \qquad (2)$$

---

[1]) Der Fall, dass für das Problem gewisse Bedingungen zu erfüllen sind (Auftreten von Bedingungsgleichungen), ist hier nicht weiter zu betrachten.

welches die von LAGRANGE gegebene allgemeine Form der Differentialgleichungen der Bewegung ist[1]).

9. Differentialgleichungen der Bewegung in rechtwinkligen Coordinaten. Zur Bestimmung der rechtwinkligen Coordinaten der Himmelskörper dienen die Differentialgleichungen 8. 9 oder 10. Für die praktische Anwendung wird es aber bequemer, jeden einzelnen Massenpunkt für sich zu verfolgen. In Anbetracht des Umstandes, dass im Sonnensystem stets die Anziehung eines Centralkörpers überwiegt, empfiehlt es sich, die relative Bewegung eines Planeten um diesen Centralkörper zu betrachten.

Seien die Coordinaten des Centralkörpers $\xi$, $\eta$, $\zeta$, die Masse desselben $M$; die Coordinaten des Massenpunktes $m$, dessen Bewegung betrachtet wird, des sogenannten gestörten Körpers $x'$, $y'$, $z'$, dessen Entfernung von der Sonne $r$; die Coordinaten der übrigen anziehenden, störenden Körper mit den Massen $m_\iota$ seien $x_\iota'$, $y_\iota'$, $z_\iota'$; $r_\iota$ die Entfernung der Masse $m$, $r_\iota'$ diejenigen der Massen $m_\iota$ von der Sonne, und $r_{0\iota}$ die Entfernung des Massenpunktes $m_\iota$ von $m$. Die Bewegungsgleichungen für die Sonne werden, wenn der gemeinschaftliche Faktor $M$ weggelassen wird

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = mf(r)\frac{x'-\xi}{r} + \sum m_\iota f(r_\iota)\frac{x_\iota'-\xi}{r_\iota}. \tag{1}$$

Die Gleichungen, welche die Bewegung des Körpers $m$ bestimmen, werden:

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = Mf(r)\frac{\xi-x'}{r} + \Sigma m_\iota f(r_{0\iota})\frac{x_\iota'-x'}{r_{0\iota}}. \tag{2}$$

Subtrahirt man (1) von (2), so erhält man:

$$\frac{d^2(x'-\xi)}{dt^2} = -(M+m)f(r)\frac{x'-\xi}{r} + \Sigma m_\iota\left[f(r_{0\iota})\frac{x_\iota'-x'}{r_{0\iota}} - f(r_\iota)\frac{x_\iota'-\xi}{r_\iota}\right]. \tag{3}$$

Nun sind

$$x = x'-\xi;\quad y = y'-\eta\quad z = z'-\zeta$$
$$x_\iota = x_\iota'-\xi;\quad y_\iota = y_\iota'-\eta\quad z_\iota = z_\iota'-\zeta$$

die rechtwinkligen Coordinaten der Massenpunkte $m$ und $m_\iota$ bezogen auf ein zweites Coordinatensystem, dessen Axen parallel den Richtungen des ersten Systems sind, dessen Ursprung aber in den Centralkörper fällt; die durch diese Substitution aus (3) entstehenden Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(M+m)f(r)\frac{x}{r} + \Sigma m_\iota\left[f(r_{0\iota})\frac{x_\iota-x}{r_{0\iota}} - f(r_\iota)\frac{x_\iota}{r_\iota}\right] \tag{4}$$

bestimmen daher die relative Bewegung der Masse $m$ um die Masse $M$. Setzt man daher

---

[1]) Es muss erwähnt werden, dass auch die Gleichungen (1), (2) in dieser Form die Existenz einer von der Geschwindigkeit unabhängigen Kräftefunction voraussetzen.

Bezüglich der canonischen Form der Differentialgleichungen, so wie der Einführung canonischer Elemente, aus denen sich dann die LAGRANGE'schen Gleichungen für die Variation der Constanten ebenso einfach ergeben, muss auf die Abhandlung von JACOBI: »Nova methodus aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi« und »Ueber diejenigen Probleme der Mechanik, in welchen eine Kräftefunction existirt, und über die Theorie der Störungen« (Werke, 5. Band) und »Dynamik« (24. und 36. Vorlesung) verwiesen werden. Ueber eine explicite Form dieser Differentialgleichungen, welche bei theoretischen Untersuchungen sehr fruchtbar scheint, s. STÄCKEL »Ueber die analytische Aequivalenz dynamischer Probleme«, CRELLE, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 107, pag. 323.

$$X_0 = -(M+m)f(r)\frac{x}{r}; \quad X_1 = \Sigma m_\iota\left[f(r_{0\iota})\frac{x_\iota - x}{r_{0\iota}} - f(r_\iota)\frac{x_\iota}{r_\iota}\right]; \quad X = X_0 + X_1$$
$$Y_0 = -(M+m)f(r)\frac{y}{r}; \quad Y_1 = \Sigma m_\iota\left[f(r_{0\iota})\frac{y_\iota - y}{r_{0\iota}} - f(r_\iota)\frac{y_\iota}{r_\iota}\right]; \quad Y = Y_0 + Y_1 \quad (5)$$
$$Z_0 = -(M+m)f(r)\frac{z}{r}; \quad Z_1 = \Sigma m_\iota\left[f(r_{0\iota})\frac{z_\iota - z}{r_{0\iota}} - f(r_\iota)\frac{z_\iota}{r_\iota}\right]; \quad Z = Z_0 + Z_1$$

so werden die Differentialgleichungen für die Bewegung des Massenpunktes $m$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X; \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = Y; \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = Z. \qquad (A)$$

Ist wieder

$$F(r) = -\int f(r)\,dr,$$

so findet man

$$X_0 = \frac{\partial \Omega_0}{\partial x} \qquad X_1 = \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} \qquad X = \frac{\partial \Omega}{\partial x}$$
$$Y_0 = \frac{\partial \Omega_0}{\partial y} \qquad Y_1 = \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} \qquad Y = \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \qquad (6)$$
$$Z_0 = \frac{\partial \Omega_0}{\partial z} \qquad Z_1 = \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} \qquad Z = \frac{\partial \Omega}{\partial z}$$

wenn

$$\Omega_0 = +(M+m)F(r); \quad \Omega_1 = \Sigma m_\iota\left[F(r_{0\iota}) - f(r_\iota)\frac{xx_\iota + yy_\iota + zz_\iota}{r_\iota}\right]; \quad \Omega = \Omega_0 + \Omega_1 \quad (7)$$

ist. In den Ausdruck für $U$ treten nur die Entfernungen ein; es ist daher sofort klar, dass der Differentialquotient nach irgendeiner Richtung die in dieser Richtung wirkende Kraft giebt. Allein in $\Omega$ treten auch die Coordinaten selbst ein, und es wäre zunächst zu erweisen, dass man die Kraft in einer beliebigen Richtung $x'$ erhält, wenn man $\Omega$ nach dieser Richtung differenzirt. Da $\Omega_0$ nur von den Entfernungen abhängt, so genügt es, dieses für $\Omega_1$ nachzuweisen. Nun ist

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial x'} = \Sigma m_\iota\left\{\frac{\partial}{\partial x'}F(r_{0\iota}) - (xx_\iota + yy_\iota + zz_\iota)\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{f(r_\iota)}{r_\iota}\right]\right.$$
$$\left. - \frac{f(r_\iota)}{r_\iota}\left[x_\iota\frac{\partial x}{\partial x'} + y_\iota\frac{\partial y}{\partial x'} + z_\iota\frac{\partial z}{\partial x'}\right]\right\}.$$

Nimmt man $x'$ als Axe eines zweiten Systems, in dem die beiden anderen Axen willkürlich sind, so hat man nach 2. 1, 2:

$$x_\iota\frac{\partial x}{\partial x'} + y_\iota\frac{\partial y}{\partial x'} + z_\iota\frac{\partial z}{\partial x'} = \alpha_1 x_\iota + \alpha_2 y_\iota + \alpha_3 z_\iota = x_\iota'.$$

Transformirt man aber $\Omega_1$ auf das neue Axensystem, so wird

$$xx_\iota + yy_\iota + zz_\iota = x'x_\iota' + y'y_\iota' + z'z_\iota',$$

woraus man sofort sieht, dass die oben angegebene Differentiation nach $x'$ die Kraft nach dieser Richtung giebt.

**10. Differentialgleichungen der Bewegung in polaren Coordinaten.** Es mögen die folgenden Bezeichnungen gelten: Sei $r$ der Radiusvector, $\mathfrak{r}$ seine Projection auf eine feste Ebene ($XY$-Ebene), $b$ der Winkel zwischen $r$ und $\mathfrak{r}$ (Breite des Himmelskörpers); $l$ der Winkel von $\mathfrak{r}$ gegen eine feste Richtung in der $XY$-Ebene, der $X$-Axe (Länge des Himmelskörpers); $z$ sein linearer Abstand von der Projectionsebene; $u$ der reciproke Werth von $\mathfrak{r}$ und $s$ die Tangente der Breite, und bezeichnet man die Differentialquotienten durch angefügte Striche, also: $\frac{df(x)}{dt} = f'(x)$, so ist:

$$\mathfrak{r} = r \cos b, \qquad z = r \sin b = \mathfrak{r} \tang b = \mathfrak{r} s$$
$$s = \tang b \qquad u = \frac{1}{\mathfrak{r}} = \frac{1}{r \cos b} = \frac{\sqrt{1+s^2}}{r}. \tag{1}$$

1) Wählt man als Polarcoordinaten $\mathfrak{r}$, $l$, $z$, und behält dabei $z$ als dritte Variable, so wird:

$$\begin{aligned} x &= \mathfrak{r} \cos l & \frac{dx}{dt} &= \mathfrak{r}' \cos l - \mathfrak{r} \sin l \cdot l' \\ y &= \mathfrak{r} \sin l & \frac{dy}{dt} &= \mathfrak{r}' \sin l + \mathfrak{r} \cos l \cdot l' \end{aligned} \tag{2}$$
$$T = \tfrac{1}{2} \Sigma m_i [\mathfrak{r}_i'^2 + \mathfrak{r}_i^2 l_i'^2 + z_i'^2]$$
$$\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{r}'} = m\mathfrak{r}'; \qquad \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{r}} = m\mathfrak{r} l'^2; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{r}'}\right) = m\mathfrak{r}''$$

und ebenso für die beiden anderen Coordinaten $l$, $z$; man erhält daher aus den Gleichungen 8. 9 unmittelbar[1]).

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} - \mathfrak{r}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 &= \frac{\partial\Omega}{\partial\mathfrak{r}} = X \cos l + Y \sin l \\ \frac{d}{dt}\left(\mathfrak{r}^2 \frac{dl}{dt}\right) &= \frac{\partial\Omega}{\partial l} = -X\mathfrak{r}\sin l + Y\mathfrak{r}\cos l. \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= Z \end{aligned} \tag{B}$$

2) Wählt man als Polarcoordinaten $r$, $l$, $b$, so folgt:

$$\begin{aligned} x &= r\cos b\cos l & x' &= r'\cos b\cos l - r\sin b\cos l\, b' - r\cos b\sin l\, l' \\ y &= r\cos b\sin l & y' &= r'\cos b\sin l - r\sin b\sin l\, b' + r\cos b\cos l\, l' \\ z &= r\sin b & z' &= r'\sin b + r\cos b\, b' \end{aligned}, \tag{3}$$
$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma m_i [r_i'^2 + r_i^2 b_i'^2 + r_i^2 \cos^2 b_i\, l_i'^2]$$

folglich

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} - r\cos^2 b\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 - r\left(\frac{db}{dt}\right)^2 &= \frac{\partial\Omega}{\partial r} = X\cos b\cos l + Y\cos b\sin l + Z\sin b \\ \frac{d}{dt}\left(r^2\cos^2 b\frac{dl}{dt}\right) &= \frac{\partial\Omega}{\partial l} = -Xr\cos b\sin l + Yr\cos b\cos l. \\ \frac{d}{dt}\left(r^2\frac{db}{dt}\right) + r^2\sin b\cos b\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 &= \frac{\partial\Omega}{\partial b} = -Xr\sin b\cos l - Yr\sin b\sin l + Zr\cos b \end{aligned} \tag{C}$$

3) Führt man in (B) an Stelle von $z$ die Variable $s$ ein, so tritt an Stelle der dritten Gleichung die folgende:

$$\frac{d^2(\mathfrak{r}s)}{dt^2} = Z. \tag{B'}$$

4) Die Einführung der Variablen $u$, $l$, $s$, führt auf sehr häufig mit Vortheil verwendete Formeln, wenn die unabhängig veränderliche $l$ an Stelle der Zeit $t$ eingeführt wird[2]). Setzt man Kürze halber

---

[1]) In $T'$ treten Werthe für den betrachteten Massenpunkt $m$ natürlich auch ein; es ist daher für $i$ auch der Werth $i = 0$ zu setzen, wobei jedoch der Index Null weggelassen ist. Die Ausdrücke für die Differentialquotienten von $\Omega$ folgen unmittelbar aus

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\mathfrak{r}} = \frac{\partial\Omega}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\mathfrak{r}} + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\mathfrak{r}}.$$

[2]) Die Ableitung der Formeln aus der lebendigen Kraft führt hier auf sehr ausgedehnte Rechnungen.

$$\frac{1}{u^2}\frac{dl}{dt} = V, \tag{4}$$

so giebt die zweite Gleichung (C):

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial l}.$$

Multiplicirt man beiderseits mit $2Vdt$ und integrirt, so folgt:

$$V^2 = h^2 + 2\int\frac{\partial\Omega}{\partial l}\frac{dl}{u^2} \tag{5}$$

und dann aus (4):

$$dt = \frac{dl}{u^2\sqrt{h^2 + 2\int\frac{\partial\Omega}{\partial l}\frac{dl}{u^2}}}. \tag{6}$$

Aus den Formeln (1) folgt:

$$b = \operatorname{arc\,tang} s, \qquad \frac{db}{dt} = \frac{1}{1+s^2}\frac{ds}{dt}; \qquad r^2\frac{db}{dt} = \frac{1}{u^2}\frac{ds}{dt},$$

womit man aus der dritten Gleichung (C) findet[1]):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u^2}\frac{ds}{dt}\right) + \frac{s}{u^2}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = \frac{\partial\Omega}{\partial b}$$

$$\frac{d}{dl}\left(\frac{1}{u^2}\frac{ds}{dt}\right) + \frac{s}{u^2}\frac{dl}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial b}\frac{dt}{dl}$$

$$\frac{d}{dl}\left(V\frac{ds}{dl}\right) + sV = V\frac{d^2s}{dl^2} + \frac{ds}{dl}\frac{dV}{dt}\frac{dt}{dl} + sV = \frac{\partial\Omega}{\partial b}\frac{dt}{dl}$$

$$\frac{d^2s}{dl^2} + s = \frac{1}{V^2u^2}\left[\frac{\partial\Omega}{\partial b} - \frac{ds}{dl}\frac{dV}{dt}\right] = \frac{1}{V^2u^2}\left[(1+s^2)\frac{\partial\Omega}{\partial s} + su\frac{\partial\Omega}{\partial u} - \frac{ds}{dl}\frac{\partial\Omega}{\partial l}\right]. \tag{7}$$

Um auch eine Differentialgleichung für $u$ zu erhalten, wird der Ausdruck für $1 : u$ zweimal differenzirt; man erhält:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u}\right) = \cos b\frac{dr}{dt} - r\sin b\frac{db}{dt}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{u}\right) = \cos b\frac{d^2r}{dt^2} - 2\sin b\frac{dr}{dt}\frac{db}{dt} - r\cos b\left(\frac{db}{dt}\right)^2 - r\sin b\frac{d^2b}{dt^2}$$

$$= \cos b\frac{d^2r}{dt^2} - r\cos b\left(\frac{db}{dt}\right)^2 - \frac{\sin b}{r}\left[\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{db}{dt}\right)\right]$$

$$= \cos b\left[\frac{\partial\Omega}{\partial r} + r\cos^2 b\left(\frac{dl}{dt}\right)^2\right] - \frac{\sin b}{r}\left[\frac{\partial\Omega}{\partial b} - r^2\sin b\cos b\left(\frac{dl}{dt}\right)^2\right]$$

$$= \cos b\frac{\partial\Omega}{\partial r} - \frac{\sin b}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial b} + r\cos b\left(\frac{dl}{dt}\right)^2.$$

Da aber

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dl}\frac{dl}{dt} = -V\frac{du}{dl}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{dV}{dt}\frac{du}{dl} - V\frac{d^2u}{dl^2}\frac{dl}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial l}\frac{du}{dl} - V^2u^2\frac{d^2u}{dl^2}$$

$$r\cos b\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = V^2u^3$$

ist, so wird

[1]) Behufs Einführung der Differentialquotienten von $\Omega$ nach $u$, $s$, an Stelle derjenigen nach $r$, $b$ hat man

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{u^2}{\sqrt{1+s^2}}; \qquad \frac{\partial u}{\partial b} = us; \qquad \frac{\partial s}{\partial b} = 1+s^2$$

und, da $l$ beibehalten wird,

$$\frac{\partial\Omega}{\partial b} = \frac{\partial\Omega}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial b} + \frac{\partial\Omega}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial b} = (1+s^2)\frac{\partial\Omega}{\partial s} + us\frac{\partial\Omega}{\partial u}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial r} = \frac{\partial\Omega}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{u^2}{\sqrt{1+s^2}}\frac{\partial\Omega}{\partial u}.$$

$$-V^2 u^2 \frac{d^2 u}{dl^2} - \frac{\partial \Omega}{\partial l}\frac{du}{dl} = -\frac{u^2}{1+s^2}\frac{\partial \Omega}{\partial u} - \frac{su}{1+s^2}\left[us\frac{\partial \Omega}{\partial u} + (1+s^2)\frac{\partial \Omega}{\partial s}\right] + V^2 u^2$$

$$\frac{d^2 u}{dl^2} + u = \frac{1}{V^2 u^2}\left[u^2 \frac{\partial \Omega}{\partial u} + su\frac{\partial \Omega}{\partial s} - \frac{\partial \Omega}{\partial l}\frac{du}{dl}\right]. \tag{8}$$

Setzt man daher

$$\begin{aligned} S &= (1+s^2)\frac{\partial \Omega}{\partial s} + su\frac{\partial \Omega}{\partial u} - \frac{ds}{dl}\frac{\partial \Omega}{\partial l} \\ U &= su\frac{\partial \Omega}{\partial s} + u^2\frac{\partial \Omega}{\partial u} - \frac{du}{dl}\frac{\partial \Omega}{\partial l} \\ V^2 &= h^2 + 2\int \frac{dl}{u^2}\frac{\partial \Omega}{\partial l}, \end{aligned} \tag{9}$$

so wird

$$\begin{aligned} dt &= \frac{dl}{Vu^2} \\ \frac{d^2 u}{dl^2} + u &= \frac{1}{V^2 u^2} U \\ \frac{d^2 s}{dl^2} + s &= \frac{1}{V^2 u^2} S \end{aligned} \tag{D}$$

An Stelle der Ableitungen der Kräftefunction $\Omega$ können hier die folgenden Kräfte eingeführt werden: Die Kraft $P$, welche in der Richtung des Radiusvectors wirkt, die Kraft $Q$, senkrecht zu dieser in der Projectionsebene, und die Kraft $Z$ senkrecht auf die Projectionsebene. Für diese hat man

$$\begin{aligned} P &= X\cos l + Y\sin l \\ Q &= Y\cos l - X\sin l \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial r} &= +P\cos b + Z\sin b & \frac{\partial \Omega}{\partial u} &= -\frac{P}{u^2} - \frac{Zs}{u^2} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial l} &= +Qr\cos b & \frac{\partial \Omega}{\partial l} &= +\frac{Q}{u} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial b} &= -Pr\sin b + Zr\cos b & \frac{\partial \Omega}{\partial s} &= +\frac{Z}{u}. \end{aligned} \tag{11}$$

Hiermit gehen die Differentialgleichungen (B) und (D) in die folgenden über:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 &= P & \frac{dt}{dl} &= \frac{1}{Vu^2} \\ r\frac{d^2 l}{dt^2} + 2\frac{dl}{dt}\frac{dr}{dt} &= Q \quad (B_1) & \frac{d^2 u}{dl^2} + u &= -\frac{1}{V^2 u^2}\left(P + \frac{Q}{u}\frac{du}{dl}\right) \quad (D_1) \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= Z & \frac{d^2 s}{dl^2} + s &= \frac{1}{V^2 u^2}\left(Z - Ps - Q\frac{ds}{dl}\right). \end{aligned}$$

Die hier auftretenden Formeln, in denen $X, Y, Z, P, Q$ enthalten sind, behalten auch ihre Gültigkeit, wenn eine Kräftefunction nicht besteht, wenn also z. B. beim Hinzutreten von accessorischen Kräften, diese sich nicht als Differentialquotienten einer einzigen Function angeben lassen. Bei der Verwendung der Differentialquotienten der Störungsfunction hat man jedoch noch folgendes zu beachten. Die durch die störenden Kräfte bewirkten Incremente der Coordinaten, die Störungen werden von den Coordinaten der störenden Körper abhängen, und es wird

$$\begin{aligned} x &= x^{(0)} + f_1(x_1, y_1, z_1) \\ y &= y^{(0)} + f_2(x_1, y_1, z_1) \\ z &= z^{(0)} + f_3(x_1, y_1, z_1) \end{aligned} \tag{12}$$

sein, wenn $x^{(0)}$, $y^{(0)}$, $z^{(0)}$ die ungestörten Coordinaten bedeuten. Sind nun $x_1$, $y_1$, $z_1$ von den Coordinaten $x$, $y$, $z$ unabhängig, so wird offenbar

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = \frac{\partial\Omega}{\partial x^{(0)}}; \quad \frac{\partial\Omega}{\partial y} = \frac{\partial\Omega}{\partial y^{(0)}}; \quad \frac{\partial\Omega}{\partial z} = \frac{\partial\Omega}{\partial z^{(0)}}. \tag{12}$$

Berücksichtigt man in $\Omega$ die ungestörten Coordinaten $x^{(0)}$, $y^{(0)}$, $z^{(0)}$, so erhält man die Störungen mit Rücksicht auf die ersten Potenzen der Massen; diese geben dann zunächst $f_1$, $f_2$, $f_3$ von der Ordnung von $m_1$; verwendet man nun in $\Omega$ die Ausdrücke (12), so werden die von $m_1$ abhängigen Glieder $f_1$, $f_2$, $f_3$ neuerdings mit $m_1$ multiplizirt, also in $\Omega$ Glieder zweiter Potenz der Massen auftreten. Für $x_1$, $y_1$, $z_1$ sind aber auch die gestörten Coordinaten zu verwenden, die selbst von $x$, $y$, $z$ abhängen werden; bei der completen Differentiation nach $x$ wäre auch nach den in $x_1$, $y_1$, $z_1$ enthaltenen Coordinaten $x$, $y$, $z$ zu differenziren, und man sieht sofort, dass dann das Resultat der Differentiation nicht mehr die störenden Kräfte sind. Sei z. B. die von $x$ abhängige Störung von $x_1$ gleich $\varkappa x$, wobei $\varkappa$ von der Ordnung von $m$ ist, so wird der zweite Ausdruck in $\Omega$,

$$f(r_1)\,\frac{x\,(x_1^{(0)} + \varkappa x) + y y_1 + z z_1}{r_1}$$

durch dessen Differentiation nach $x$ man

$$\frac{f(r_1)}{r_1}(x_1^{(0)} + 2\varkappa x) + [x(x_1^{(0)} + \varkappa x) + y y_1 + z z_1]\,\frac{d}{dt}\left[\frac{f(r_1)}{r_1}\right]$$

erhält, einen Ausdruck der von den störenden Kräften verschieden ist. Es folgt daraus, dass man bei der Berücksichtigung der von den zweiten und den höheren Potenzen der Massen abhängigen Glieder in der Function $\Omega$ stets die ungestörten Coordinaten der störenden Himmelskörper zu verwenden und erst nach allen vorgenommenen Differentiationen die gestörten Coordinaten der störenden Körper einzuführen hat.

11. Differentialgleichungen für die Variation der Elemente. In allen diesen Formeln wird man in der praktischen Anwendung die wirkenden Kräfte in zwei Theile zerlegen, so dass der eine zunächst betrachtete analytisch und numerisch überwiegt und den allgemeinen Charakter der Bahn bestimmt, während der übrige Theil die Abweichung der wahren Bewegung von der zunächst bestimmten, genäherten, giebt. Sei für die Gleichungen ($A$) in 9 eine solche Zerlegung

$$X = X_0 + X_1; \quad Y = Y_0 + Y_1; \quad Z = Z_0 + Z_1,$$

wobei diese Zerlegung mit der dort vorgenommenen identisch sein kann, aber auch nicht identisch zu sein braucht. Führt man Kürze halber die Bezeichnung der Differentialquotienten wie in 10 ein, so wird

$$\frac{dx'}{dt} = X_0 + X_1; \quad \frac{dy'}{dt} = Y_0 + Y_1; \quad \frac{dz'}{dt} = Z_0 + Z_1. \tag{1}$$

Angenommen man habe die Differentialgleichungen unter der Annahme integrirt, dass $X_1 = Y_1 = Z_1 = 0$ sei; dann wird

$$\left[\frac{dx'}{dt}\right] = X_0; \quad \left[\frac{dy'}{dt}\right] = Y_0; \quad \left[\frac{dz'}{dt}\right] = Z_0 \tag{2}$$

und seien die Integrale dieser Gleichungen:

$$[x] = \Phi(t, a, b, c, f, g, h); \quad [y] = \Psi(t, a, b, c, f, g, h); \quad [z] = X(t, a, b, c, f, g, h) \tag{3}$$

Functionen der Zeit und der sechs Elemente $a$, $b$, $c$, $f$, $g$, $h$; aus diesen findet man durch Differentiation:

$$[x'] = \left[\frac{dx}{dt}\right] = \varphi(t, a, b, c, f, g, h); \quad [y'] = \left[\frac{dy}{dt}\right] = \psi(t, a, b, c, f, g, h);$$
$$[z'] = \left[\frac{dz}{dt}\right] = \chi(t, a, b, c, f, g, h), \tag{4}$$

wobei

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \varphi; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \psi; \quad \frac{\partial X}{\partial t} = \chi$$

ist, welche durch nochmalige Differentiation die Gleichungen (2) geben.

Man kann nun annehmen, dass die Integrale der Differentialgleichungen (1)

$$x = [x] + \xi; \quad y = [y] + \eta; \quad z = [z] + \zeta \tag{5}$$

seien, und kann $\xi, \eta, \zeta$, d. i. die Störungen in den rechtwinkligen Coordinaten ermitteln. Man kann in derselben Weise aus den Gleichungen $(B)$, $(C)$, $(D)$ Störungen in den polaren Coordinaten ableiten. Man kann jedoch auch annehmen, dass sich unter Berücksichtigung der störenden Kräfte $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ die Coordinaten (rechtwinklige sowie polare) in derselben Weise ergeben, dass also

$$x = \Phi; \quad y = \Psi; \quad z = X$$

sein wird, unter der Voraussetzung jedoch, dass die Elemente $a, b, c, f, g, h$ nicht mehr constant, sondern veränderlich seien. Dann wird:

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{dx}{dt} = \varphi(t, a, b, c, f, g, h) + X' & \frac{dx'}{dt} &= X_0 + X_1 \\
y' &= \frac{dy}{dt} = \psi(t, a, b, c, f, g, h) + Y' & \frac{dy'}{dt} &= Y_0 + Y_1 \\
z' &= \frac{dz}{dt} = \chi(t, a, b, c, f, g, h) + Z' & \frac{dz'}{dt} &= Z_0 + Z_1,
\end{aligned} \tag{6}$$

wobei $X'$, $Y'$, $Z'$ ebenfalls Functionen der Zeit und der sechs Elemente sein werden, welche von der Differentiation der Functionen $\Phi$, $\Psi$, $X$ nach den veränderlichen Elementen herrühren. Es ist nämlich

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial a}\frac{da}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial b}\frac{db}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial c}\frac{dc}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial f}\frac{df}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial g}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial h}\frac{dh}{dt},$$

folglich:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial a}\frac{da}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial b}\frac{db}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial c}\frac{dc}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial f}\frac{df}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial g}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial h}\frac{dh}{dt} &= X' \\
\frac{\partial \Psi}{\partial a}\frac{da}{dt} + \frac{\partial \Psi}{\partial b}\frac{db}{dt} + \frac{\partial \Psi}{\partial c}\frac{dc}{dt} + \frac{\partial \Psi}{\partial f}\frac{df}{dt} + \frac{\partial \Psi}{\partial g}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial \Psi}{\partial h}\frac{dh}{dt} &= Y' \\
\frac{\partial X}{\partial a}\frac{da}{dt} + \frac{\partial X}{\partial b}\frac{db}{dt} + \frac{\partial X}{\partial c}\frac{dc}{dt} + \frac{\partial X}{\partial f}\frac{df}{dt} + \frac{\partial X}{\partial g}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial X}{\partial h}\frac{dh}{dt} &= Z'.
\end{aligned} \tag{7}$$

Ebenso wird:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial a}\frac{da}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{db}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial c}\frac{dc}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial f}\frac{df}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial g}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial h}\frac{dh}{dt}$$
$$+ \frac{\partial X'}{\partial t} + \frac{\partial X'}{\partial a}\frac{da}{dt} + \frac{\partial X'}{\partial b}\frac{db}{dt} + \frac{\partial X'}{\partial c}\frac{dc}{dt} + \frac{\partial X'}{\partial f}\frac{df}{dt} + \frac{\partial X'}{\partial g}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial X'}{\partial h}\frac{dh}{dt}.$$

Da nun $\frac{d\varphi}{dt} = X_0$ ist, so wird man, wenn man Kürze halber

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial X'}{\partial a} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial a}\right), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial b} + \frac{\partial X'}{\partial b} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial b}\right) \dots \quad X_1 - \frac{\partial X'}{\partial t} = (X), \\
&\frac{\partial \psi}{\partial a} + \frac{\partial Y'}{\partial a} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial a}\right) \dots \quad Y_1 - \frac{\partial Y'}{\partial t} = (Y), \quad Z_1 - \frac{\partial Z'}{\partial t} = (Z)
\end{aligned} \tag{8}$$

setzt, die Beziehungen erhalten:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a}\right)\frac{da}{dt}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial b}\right)\frac{db}{dt}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial c}\right)\frac{dc}{dt}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial f}\right)\frac{df}{dt}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial g}\right)\frac{dg}{dt}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial h}\right)\frac{dh}{dt}&=(X)\\
\left(\frac{\partial\psi}{\partial a}\right)\frac{da}{dt}+\left(\frac{\partial\psi}{\partial b}\right)\frac{db}{dt}+\left(\frac{\partial\psi}{\partial c}\right)\frac{dc}{dt}+\left(\frac{\partial\psi}{\partial f}\right)\frac{df}{dt}+\left(\frac{\partial\psi}{\partial g}\right)\frac{dg}{dt}+\left(\frac{\partial\psi}{\partial h}\right)\frac{dh}{dt}&=(Y)\\
\left(\frac{\partial\chi}{\partial a}\right)\frac{da}{dt}+\left(\frac{\partial\chi}{\partial b}\right)\frac{db}{dt}+\left(\frac{\partial\chi}{\partial c}\right)\frac{dc}{dt}+\left(\frac{\partial\chi}{\partial f}\right)\frac{df}{dt}+\left(\frac{\partial\chi}{\partial g}\right)\frac{dg}{dt}+\left(\frac{\partial\chi}{\partial h}\right)\frac{dh}{dt}&=(Z).
\end{aligned}\tag{9}$$

Die Gleichungen (7) und (9) sind sechs Gleichungen zwischen den Veränderungen der sechs Elemente mit der Zeit; diese lassen sich daher daraus bestimmen. Die Elimination würde im Allgemeinen auf sehr complicirte Ausdrücke führen; es ist jedoch nicht schwer, zunächst sechs andere Gleichungen abzuleiten, von denen jede nur fünf Differentialquotienten enthält, und die in der Folge Verwendung finden werden. Multiplicirt man die Gleichungen der Reihe nach mit

$$-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial k}\right),\quad -\left(\frac{\partial\psi}{\partial k}\right),\quad -\left(\frac{\partial\chi}{\partial k}\right);\quad +\frac{\partial\Phi}{\partial k},\quad +\frac{\partial\Psi}{\partial k},\quad +\frac{\partial X}{\partial k}$$

und addirt, und führt die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\Phi}{\partial l}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial k}\right)-\frac{\partial\Phi}{\partial k}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right)+\frac{\partial\Psi}{\partial l}\left(\frac{\partial\psi}{\partial k}\right)-\frac{\partial\Psi}{\partial k}\left(\frac{\partial\psi}{\partial l}\right)+\frac{\partial X}{\partial l}\left(\frac{\partial\chi}{\partial k}\right)-\frac{\partial X}{\partial k}\left(\frac{\partial\chi}{\partial l}\right)=[lk]\\
(X)\frac{\partial\Phi}{\partial k}+(Y)\frac{\partial\Psi}{\partial k}+(Z)\frac{\partial X}{\partial k}-X'\left(\frac{\partial\varphi}{\partial k}\right)-Y'\left(\frac{\partial\psi}{\partial k}\right)-Z'\left(\frac{\partial\chi}{\partial k}\right)=R_k,
\end{gathered}\tag{10}$$

$l$, $k$ irgend zwei der sechs Elemente,

so wird

$$[ka]\frac{da}{dt}+[kb]\frac{db}{dt}+[kc]\frac{dc}{dt}+[kf]\frac{df}{dt}+[kg]\frac{dg}{dt}+[kh]\frac{dh}{dt}=R_k. \tag{E}$$

wobei zu bemerken ist, dass

$$[kk]=0;\qquad [lk]=-[kl].$$

Für irgend eines der Elemente folgt hieraus

$$\frac{dk}{dt}=F_k(t,\ a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h) \tag{11}$$

und durch Integration dieser Gleichungen erhält man die Elemente als Functionen der Zeit. Diese Methode, welche man die Methode der Variation der Constanten nennt, wurde theilweise schon von NEWTON, später in consequenterer Durchführung von EULER verwendet; die Principien der hier gegebenen Ableitung rühren in dieser Form jedoch erst von LAGRANGE her. (Vergl. Bd. I, pag. 108 und 135).

Die Auflösung der Gleichungen ist im Allgemeinen nicht sehr einfach[1]. Legt man jedoch der Rechnung osculirende Elemente (s. Bd. I, pag. 133) zu Grunde, so hat das Gleichungssystem ($E$) die Eigenschaft, in leicht auflösbare Gruppen zu zerfallen.

Osculirende Elemente sind solche, aus denen nicht nur der Ort des Himmelskörpers, sondern auch die Geschwindigkeit ihrer Grösse und Richtung nach in jedem Augenblicke durch die Formeln der ungestörten Bahn gegeben werden; es ist daher

$$X'=Y'=Z'=0;\qquad (X)=X_1;\qquad (Y)=Y_1;\qquad (Z)=Z_1$$
$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial k}\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial k},\qquad \left(\frac{\partial\psi}{\partial k}\right)=\frac{\partial\psi}{\partial k},\qquad \left(\frac{\partial\chi}{\partial k}\right)=\frac{\partial\chi}{\partial k},$$

folglich

[1]) Die inverse Lösung: direkte Bestimmung des Differentialquotienten jedes einzelnen Elementes gab später (1808) POISSON; doch reicht man zumeist mit den obigen Formeln aus.

$$[i\,k] = \frac{\partial\Phi}{\partial i}\frac{\partial\varphi}{\partial k} - \frac{\partial\Phi}{\partial k}\frac{\partial\varphi}{\partial i} + \frac{\partial\Psi}{\partial i}\frac{\partial\psi}{\partial k} - \frac{\partial\Psi}{\partial k}\frac{\partial\psi}{\partial i} + \frac{\partial X}{\partial i}\frac{\partial\chi}{\partial k} - \frac{\partial X}{\partial k}\frac{\partial\chi}{\partial i}$$

$$R_k = X_1\frac{\partial\Phi}{\partial k} + Y_1\frac{\partial\Psi}{\partial k} + Z_1\frac{\partial X}{\partial k}, \qquad (12)$$

welche Werthe in die Gleichungen $E$ einzusetzen sind. Lassen sich $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ als die Differentialquotienten einer Function $\Omega$ nach den drei Coordinaten $x$, $y$, $z$, darstellen, so wird, wie man sofort sieht

$$R_k = \frac{\partial\Omega}{\partial k}.$$

Die Coëfficienten $[i\,k]$ haben die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass sie von der Zeit unabhängig sind, was bei ihrer Berechnung (vergl. 18) mit Vortheil verwendet werden kann. Denn es ist

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial i}\frac{\partial x'}{\partial k} - \frac{\partial x}{\partial k}\frac{\partial x'}{\partial i}\right) = \frac{\partial x}{\partial i}\frac{\partial x''}{\partial k} + \frac{\partial x'}{\partial i}\frac{\partial x'}{\partial k} - \frac{\partial x}{\partial k}\frac{\partial x''}{\partial i} - \frac{\partial x'}{\partial k}\frac{\partial x'}{\partial i}$$
$$= \frac{\partial x}{\partial i}\frac{\partial X}{\partial k} - \frac{\partial x}{\partial k}\frac{\partial X}{\partial i}.$$

Besteht nun eine Kräftefunction, so wird:

$$\frac{d[i\,k]}{dt} = \left(\frac{\partial X}{\partial k}\frac{\partial x}{\partial i} + \frac{\partial Y}{\partial k}\frac{\partial y}{\partial i} + \frac{\partial Z}{\partial k}\frac{\partial z}{\partial i}\right) - \left(\frac{\partial X}{\partial i}\frac{\partial x}{\partial k} + \frac{\partial Y}{\partial i}\frac{\partial y}{\partial k} + \frac{\partial Z}{\partial i}\frac{\partial z}{\partial k}\right)$$
$$= +\left\{\frac{\partial}{\partial k}\left[\frac{\partial\Omega}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial i} + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial i} + \frac{\partial\Omega}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial i}\right] - \left[\frac{\partial\Omega}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial i\partial k} + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial i\partial k} + \frac{\partial\Omega}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial i\partial k}\right]\right\}$$
$$- \left\{\frac{\partial}{\partial i}\left[\frac{\partial\Omega}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial k} + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial k} + \frac{\partial\Omega}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial k}\right] - \left[\frac{\partial\Omega}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial i\partial k} + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial i\partial k} + \frac{\partial\Omega}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial i\partial k}\right]\right\}$$

daher, weil die Kräftefunction von den Geschwindigkeiten unabhängig ist, folglich die Ausdrücke der eckigen Klammern die partiellen Differentialquotienten von $\Omega$ nach den betreffenden Elementen sind:

$$\frac{d[i\,k]}{dt} = \frac{\partial}{\partial k}\frac{\partial\Omega}{\partial i} - \frac{\partial}{\partial i}\frac{\partial\Omega}{\partial k} = 0,$$

also $[i\,k]$ von der Zeit unabhängig.

12. Erste Näherung. Bewegung in Kegelschnittslinien. Ehe an die weiteren Entwickelungen geschritten werden kann, müssen nunmehr die Coordinaten als Functionen der Elemente ausgedrückt werden. Sind die störenden Massen genügend klein, so wird man in erster Linie von denselben vollständig absehen können und die Bahn des Himmelskörpers unter der Voraussetzung der alleinigen Attraction des Centralkörpers bestimmen[1]. In diesem Falle werden die Differentialgleichungen (A):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(M+m)f(r)\frac{x}{r}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -(M+m)f(r)\frac{y}{r} \qquad (1)$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = -(M+m)f(r)\frac{z}{r}.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man auf dem in 5 eingeschlagenen Wege die drei Flächenintegrale:

[1]) Ueber eine andere Art der Zerlegung, bei welcher auch gewisse Hauptglieder der störenden Kräfte in der ersten Näherung berücksichtigt werden, siehe 71.

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = A; \quad z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = B; \quad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C, \tag{2}$$

aus denen sofort folgt:

$$Ax + By + Cz = 0. \tag{3}$$

Diese Gleichung zeigt, dass sich der Himmelskörper in einer Ebene bewegt, die durch das Attractionscentrum geht. Legt man zur Vereinfachung die $XY$-Ebene in diese Bahnebene, so entfällt die dritte Differentialgleichung; es bleiben noch zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren vollständige Integration vier Constante einführt, während die zwei übrigen durch die Lage der Bahnebene (Länge des Knotens und Neigung gegen eine feste Ebene) ersetzt sind. Die beiden Differentialgleichungen in $x$, $y$ geben, entsprechend transformirt, die Gleichungen $(B)$ aus 10, in denen nur $\mathrm{r} = r$, $z = 0$ zu setzen ist, und es wird:

$$\begin{gathered}\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = P = -(M+m)f(r)\\ \frac{d}{dt}\left(r^2\frac{dl}{dt}\right) = 0.\end{gathered} \tag{4}$$

Aus der zweiten Gleichung erhält man das Flächenintegral

$$r^2\frac{dl}{dt} = 2\frac{df}{dt} = c, \tag{5}$$

und daraus

$$f - f_0 = \tfrac{1}{2}c\,t.$$

Beschreibt der Himmelskörper eine geschlossene Curve, und sei die Umlaufszeit in derselben $T$, die von der Linie eingeschlossene Gesammtfläche $F$, so ist

$$F = \tfrac{1}{2}c\,T; \qquad c = \frac{2F}{T} \tag{6}$$

Führt man (5) in die erste Gleichung (4) ein, so folgt:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{c^2}{r^3} + (M+m)f(r) = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $2\frac{dr}{dt}$, so wird sie integrabel, und giebt integrirt

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2} - 2(M+m)F(r) = c_1,$$

und daraus

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{c_1 + 2(M+m)F(r) - \frac{c^2}{r^2}}}. \tag{7}$$

Führt man den Werth von $dt$ in (5) ein, so wird

$$dl = \frac{c\,dr}{r^2\sqrt{c_1 + 2(M+m)F(r) - \frac{c^2}{r^2}}}. \tag{8}$$

Für die Geschwindigkeit $V$ erhält man

$$V^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = c_1 + 2(M+m)F(r),$$

welche Gleichung auch aus dem Satze von der Erhaltung der lebendigen Kraft unmittelbar folgt.

Sei nun $f(r) = \frac{k^2}{r^2}$, also die Anziehung der Massen bestimmt durch $\frac{k^2 Mm}{r^2}$, so ist $k^2$ die Anziehungskraft zweier Masseneinheiten in der Einheit der Entfernung; der numerische Werth dieser Constanten wird daher von der Wahl der Einheiten abhängen. Dann ist

$$F(r) = \frac{k^2}{r}.$$

Der Werth von $r$ wird ein Maximum oder Minimum, wenn $\frac{dr}{dl} = 0$ ist, d. h. wenn

$$c_1 + 2\frac{k^2(M+m)}{r} - \frac{c^2}{r^2} = 0,$$

$$r = -\frac{1}{c_1}\left[+ k^2(M+m) \pm \sqrt{k^4(M+m)^2 + c^2 c_1}\right]$$

ist. Sei das Maximum $a(1+e)$, das Minimum $a(1-e)$, so dass $a$ der mittlere Werth und $2ae$ die Differenz zwischen dem Maximum und Minimum ist, so folgt:

$$a = -\frac{k^2}{c_1}(M+m); \qquad ae = -\frac{1}{c_1}\sqrt{k^4(M+m)^2 + c^2 c_1},$$

und daraus:

$$c_1 = -\frac{k^2(M+m)}{a}; \qquad c^2 = a(1-e^2)k^2(M+m).$$

Durch Substitution dieser Werthe folgt:

$$dl = \frac{a\sqrt{1-e^2}\,dr}{r\sqrt{2ar - r^2 - a^2(1-e^2)}}; \qquad dt = \frac{r^2\,dl}{\sqrt{k^2(M+m)}\,\sqrt{a(1-e^2)}}, \quad (9)$$

und für die Geschwindigkeit die bereits vielfach angewendete Formel (vergl. den Artikel »Kometen und Meteore«, II. Bd., pag. 65 u. 83)

$$V^2 = k^2(M+m)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Integrirt man die erste Gleichung nach bekannten Methoden (Integration von Wurzelgrössen aus Polynomen zweiten Grades) so erhält man:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos(l-\omega)},$$

wo $\omega$ die Integrationsconstante bedeutet. Für das Minimum von $r$, Pericentrum[1]), muss $l - \omega$ gleich Null sein; es ist also $\omega$ die Länge des Pericentrums und $l - \omega = v$ die wahre Anomalie. Für den Fall $e < 1$ beschreibt der Massenpunkt eine Ellipse; in diesem Falle ist $F = ab\pi = a^2\sqrt{1-e^2}\,\pi$, folglich:

$$\sqrt{a(1-e^2)}\,\sqrt{k^2(M+m)} = \frac{2a^2\sqrt{1-e^2}\,\pi}{T}$$

und damit

$$k = \frac{2a^{\frac{3}{2}}\pi}{T\sqrt{M+m}}. \quad (10)$$

Euler lässt den Faktor 2 im Zähler weg, nimmt die Sonnenmasse $M = 1$ vernachlässigt die Erdmasse ($m = 0$), setzt $T = 365{\cdot}256$ Tage, $a = 100000$ und

[1]) Ist das Attractionscentrum die Sonne, Erde, Jupiter, Saturn, . . . so nennt man die kleinste Entfernung Perihel, Perigeum, Perijovium, Perisaturnium u. s. w.

findet $\log k_1 = 5{\cdot}4845525189$[1]). LAMBERT setzt $a = 1$, $T = 365{\cdot}25659$, führt aber den reziproken Werth $k_2$ durch die Beziehung $T = k_2 \pi a^{\frac{3}{2}}$ ein; er findet $\log k_2 = 2{\cdot}0654481$[2]). GAUSS setzt $a = 1$, $T = 365{\cdot}2563835$ Tage, $m = 1:354710$ und findet

$$\log k = 8{\cdot}235\,5814\,414 - 10$$
$$k = 0{\cdot}017\,2020\,9895$$
$$\log k'' = \log \frac{k}{arc\, 1''} = 3{\cdot}550\,0065\,746.$$

Diese Constante $k$ ist seither unverandert beibehalten worden; bei derselben wird als Einheit der Masse die Sonnenmasse, als Einheit der Zeit der mittlere Sonnentag, als Einheit der Entfernung die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne zu Grunde gelegt. Da aber ebensowohl die Jahreslänge, als auch die Erdmasse einer Verbesserung bedürfen, so würde man im Laufe der Zeiten immer andere, allerdings nur wenig geänderte Werthe dieser Constanten zu Grunde zu legen haben. Statt dessen behält man diese sogenannte GAUSS'sche Constante des Sonnensystemes unverändert bei, und genügt den veränderten Rechnungselementen, indem man für eine der Grössen eine andere Einheit wählt. Legt man als Einheit der Masse stets die Sonnenmasse, als Einheit der Zeit stets den mittleren Sonnentag zu Grunde, so wird sich für die jeweiligen besten Werthe von $T$, $m$, und dem festen Werthe von $k$ ein gewisser, von der Einheit verschiedener Werthe von $a$ ergeben. Nimmt man z. B. nach LE VERRIER die mittlere siderische Bewegung der Sonne in einem julianischen Jahre ($365{\cdot}25^d$) gleich $1295977''{\cdot}4427$ an, so wird $T = 365{\cdot}2563574^d$; dann wird mit $m = 1:330000$

$$\log a = 0{\cdot}000\,0000\,099$$

d. h. als Einheit der Entfernung ist eine Strecke zu wählen, welche gleich ist $0{\cdot}9999999772$ der Erdbahnhalbaxe. Wählt man, wie dies für manche Fälle, z. B. bei der Berechnung der speziellen Störungen, vortheilhaft erscheint, eine andere Einheit für $T$, so wäre auch für $k$ ein geänderter Werth zu setzen. Sei als Einheit der Zeit $w$ mittlere Sonnentage, so wird in dieser Einheit $T_1 = T:w$ folglich $k_1 = (wk)$.

Führt man in den Ausdruck für $r$ die wahre Anomalie $v$ und den Parameter $p$, oder die kleinste Distanz (Distanz im Pericentrum, Periheldistanz) $q$ ein, so wird:

$$a(1 - e^2) = p; \qquad a(1 - e) = q; \qquad p = q(1 + e) \tag{11}$$

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v} = \frac{q(1 + e)}{1 + e \cos v} = \frac{p}{1 + e \cos v} \tag{12}$$

und damit der Ausdruck für die Zeit aus (9):

$$\frac{k_0}{q^{\frac{3}{2}}(1 + e)^{\frac{1}{2}}}\, dt = \frac{dv}{(1 + e\cos v)^2}.$$

wo Kürze halber $k_0 = k\sqrt{M + m}$ gesetzt wurde. Es ist also

$$k_0 = k\sqrt{M}\cdot\sqrt{1 + \frac{m}{M}}. \tag{13}$$

Für die Bewegung von Körpern, z. B. der Satelliten um die Hauptplaneten wird hiernach die Constante $k_0$ verschieden sein, und zwar ist nach (13) für

[1]) Theoria motuum planetarum et cometarum. Berolini 1744, pag. 3.

[2]) Insigniores orbitae cometarum proprietates. Augustae vindelicorum 1761, § 73. Es ist also $k_1 = \frac{1}{4}k(100\,000)^{\frac{3}{2}}$; $k_2 = \frac{2}{k}$ ohne Rücksicht auf die Erdmasse und die geänderten Werthe des siderischen Jahres.

irgend einen Planeten, wenn man als Einheit der Zeit den mittleren Sonnentag, als Einheit der Entfernung die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne wählt:

$$k_p = k_{\odot}\sqrt{m},$$

wobei $m$ die Masse des Planeten in Einheiten der Sonnenmasse ist, wenn $k_{\odot} = k$ die GAUSS'sche Constante (für die Sonnenmasse = 1) bedeutet. Dabei ist jedoch die Masse des angezogenen Himmelskörpers vernachlässigt, und handelt es sich um die Untersuchung der Bewegung einer grösseren Masse, so ist zu setzen

$$k_p' = k_p\sqrt{1+\mu},$$

wenn $\mu$ die Masse des angezogenen Körpers in Einheiten der Planetenmasse ist.

Wählt man als Einheiten die Secunde und den Aequatorealhalbmesser des Planeten, so wird:[1])

$$k_p^{(0)} = \frac{k_p}{(sin\,\rho)^{\frac{3}{2}} \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60},$$

wobei $\rho$ der scheinbare Halbmesser des Planeten in der Entfernung 1 ist (also für die Erde die mittlere Aequatorealhorizontalparallaxe der Sonne). Der Werth von $k_p$ in Secunden ausgedrückt, also

$$k_p'' = \frac{k_p}{arc\,1''}$$

ist, wie aus Formel (10) folgt die mittlere tägliche Bewegung eines in der Entfernung 1 befindlichen Massenpunktes von verschwindender Masse, um den Planeten, und ebenso ist

$$k_p^{(0)''} = \frac{k_p^{(0)}}{arc\,1''}$$

die mittlere Geschwindigkeit in einer Secunde eines an der Oberfläche des Planeten um diesen kreisenden Massenpunktes.

$k_p^{(0)2}$ ist aber weiter die Attraction des Körpers von der Masse $M$ auf die Masseneinheit in der Entfernung gleich dem Halbmesser des Planeten, also die Beschleunigung der Schwere auf diesem Planeten in Einheiten des Planetenhalbmessers; multiplicirt man daher $k_p^{(0)2}$ mit dem Werthe des Planetenhalbmessers in Metern, so erhält man den Werth $g$ die Beschleunigung der Schwere in Metern. Hiernach wird die folgende Zusammenstellung leicht verständlich sein.

| | Masse[2]) | Durchmesser scheinbarer i. d. Entf. 1 | Durchmesser wahrer in *km* | $log\,k_p$ | $log\,k_p''$ | $log\,k_p^{(0)}$ | $log\,k_p^{(0)''}$ | $g$ in Metern | $g$ in Einheiten d. Erdschwere |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Merkur | 1:5810000 | 6''·455 | 4670 | 4·8780842 | 0·1874598 | 7·144859 | 2·459284 | 4·550 | 0·464 |
| Venus | 1:410000 | 17·190 | 12487 | 5·4291895 | 0·7486146 | 7·062044 | 2·377870 | 8·310 | 0·847 |
| Erde | 1:330000 | 17·680 | 12755 | 5·4768245 | 0·7907496 | 7·095615 | 2·408041 | 9·815 | 1·000 |
| Mars | 1:3100000 | 9·780 | 7089 | 4·9899006 | 0·3048957 | 6·994400 | 2·308325 | 3·430 | 0·349 |
| Jupiter[3]) | 1:1047·609 | 196·00 | 141800 | 6·7254818 | 2·0399069 | 6·778767 | 2·088192 | 25·015 | 2·549 |
| Saturn | 1:3501·6 | 164·80 | 119280 | 6·4684482 | 1·7776788 | 6·624681 | 1·930106 | 10·586 | 1·079 |
| Uranus | 1:22600 | 72·68 | 52582 | 6·0555272 | 1·3729528 | 6·755078 | 2·067498 | 8·433 | 0·859 |
| Neptun | 1:19500 | 83·14 | 60150 | 6·0905641 | 1·4040892 | 6·697518 | 2·011948 | 7·469 | 0·761 |
| Sonne | 1 | 1919·8 | 1388600 | 8·2355814 | 3·5500066 | 6·797535 | 2·111961 | 273·281 | 27·844 |
| | | | | — 10 | | — 10 | | | |

[1]) Vergl. auch den Artikel »Kometen und Meteore«, II. Bd., pag. 148.

[2]) Ueber diese Annahmen vergl. den Artikel »Planeten«.

[3]) Mit der Masse $\frac{1}{1047·879}$, welche hier bei den schon vor einigen Jahren gerechneten Beispielen angewendet wurde, ist $log\,k = 6·725426 - 10$.

Die Gleichung für $dt$ giebt, integrirt:

$$\frac{k_0 (t - T_0)}{q^{\frac{3}{2}}(1+e)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^v \frac{dv}{(1 + e\cos v)^2},$$

wenn der Zeit $t = T_0$ die wahre Anomalie $v = 0$ entspricht, d. h. wenn $T_0$ die Zeit des Durchganges des Himmelskörpers durch das Pericentrum (Zeit des Pericentrums) ist. Führt man zur Integration an Stelle von $v$ eine neue Variable $\tau$ ein, definirt durch die Gleichung

$$\tau = \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}v, \tag{14}$$

so geht die Gleichung über in

$$\frac{k_0(t - T_0)}{2q^{\frac{3}{2}}(1+e)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^\tau \frac{(1+\tau^2)\,d\tau}{[(1+e)+(1-e)\tau^2]^2},$$

oder wenn

$$\frac{1-e}{1+e} = \varepsilon \tag{15}$$

gesetzt wird

$$\frac{k_0\sqrt{1+e}\,(t - T_0)}{2\,q^{\frac{3}{2}}} = \int_0^\tau \frac{d\tau}{(1+\varepsilon\tau^2)^2} + \int_0^\tau \frac{\tau^2\,d\tau}{(1+\varepsilon\tau^2)^2}. \tag{16}$$

18. Die Bewegung in der Parabel. Für diese ist $e = 1$, $\varepsilon = 0$, daher

$$\frac{k_0(t - T_0)}{\sqrt{2}\,q^{\frac{3}{2}}} = \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{tang}^3\,\tfrac{1}{2}v. \tag{1}$$

wo die Integrationsconstante $T_0$ verschwindet, wenn die Zeit vom Durchgange der Himmelskörper (Kometen) durch das Perihel ($v = 0$) gezählt wird; dann wird:

$$\frac{t}{q^{\frac{3}{2}}} = \mathrm{M} = \frac{\sqrt{2}}{k_0}\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}\,\frac{\sqrt{2}}{k_0}\,\mathrm{tang}^3\,\tfrac{1}{2}v. \tag{2}$$

Zu einem gegebenen Werthe von $t$ würde sich der zugehörige Werth von $\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}v$ durch eine Gleichung dritten Grades ergeben, die Auflösung dieser Gleichung wird durch Hilfstafeln ersetzt, welche zuerst von HALLEY[1]) gegeben, und später in grösserer Ausdehnung und etwas geänderter Form als BARKER'sche Tafel eingeführt wurden. Der Werth von M ist für eine gegebene Parabel (gegebene Werthe von $q$ und $T_0$) und eine gegebene Zeit $t$ leicht zu bestimmen.

Diese Tafel gilt zunächst nur für einen gegebenen Werth von $k$, also für die Bewegung der Himmelskörper um die Sonne; will man dieselbe auch für einen Planeten anwenden, so hat man zunächst zu beobachten, dass für diesen

$$\frac{t}{q^{\frac{3}{2}}} = \mathrm{M} = \frac{\sqrt{2}}{k_p}\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}\,\frac{\sqrt{2}}{k_p}\,\mathrm{tang}^3\,\tfrac{1}{2}v$$

ist. Multiplicirt man diese Gleichung mit $\frac{k_p}{k_\odot} = \sqrt{m}$, wobei $m$ die Masse des attrahirenden Planeten, um welchen die Bewegung untersucht wird, ist (vergl. 12), so folgt

$$\mathrm{M}\sqrt{m} = \frac{\sqrt{2}}{k_\odot}\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}\,\frac{\sqrt{2}}{k_\odot}\,\mathrm{tang}^3\,\tfrac{1}{2}v,$$

woraus man sieht, dass man die BARKER'sche Tafel (für die Bewegung um die Sonne) benutzen kann, wenn man mit dem Argumente $\mathrm{M}\sqrt{m}$ in dieselbe eingeht.

---

[1]) Phil. transact. No. 293. Eine Tafel, welche mit dem Argumente $v$ von 10'' zu 10'' nach Formel (2) sofort M bezw. $k_0$M giebt, findet sich in v. OPPOLZER, »Lehrbuch zur Bahnbestimmung von Planeten und Kometen«, I. Theil, 2. Aufl., sowie in weniger ausgedehnter Gestalt auch am Schlusse dieses Werkes. Für Kometen kann dabei $k_0 = k$ ($m = 0$) angenommen werden.

Für grosse Werthe der wahren Anomalie wird die Interpolation aus der Tafel unbequem, da sehr kleine Aenderungen in $v$ sehr grossen Zwischenzeiten entsprechen und überdiess auch höhere Differenzen berücksichtigt werden müssten. In diesem Falle wird es besser, das folgende Verfahren einzuschlagen[1]. Da

$$tang\,\tfrac{1}{2}v + cotang\,\tfrac{1}{2}v = \frac{2}{sin\,v}$$

ist, so wird

$$\tfrac{1}{3}tang^3\,\tfrac{1}{2}v(1 + cotang^2\,\tfrac{1}{2}v)^3 = \frac{8}{3\,sin^3\,v}.$$

Es ist aber

$$\frac{k_0(t-T_0)}{\sqrt{2}q^{\frac{3}{2}}} = \mathrm{M} = \tfrac{1}{3}tang^3\,\tfrac{1}{2}v(1 + 3\,cotang^2\,\tfrac{1}{2}v).$$

Ist die Anomalie $v$ nahe 180°, so wird $cotang\,\frac{1}{2}v$ eine sehr kleine Grösse, und es unterscheidet sich daher der letztere Ausdruck von dem ersteren nur um sehr kleine Grössen der zweiten Potenz von $cotang^2\,\frac{1}{2}v$. Setzt man daher

$$\frac{k_0(t-T_0)}{\sqrt{2}q^{\frac{3}{2}}} = \frac{8}{3\,sin^3\,w} \qquad \text{oder} \qquad sin\,w = \frac{2\sqrt{2q}}{\sqrt[3]{3k_0(t-T_0)}}, \tag{3}$$

so wird

$$sin\,v = b\,sin\,w \tag{4}$$

gesetzt werden können, wo $b$ sich von der Einheit nur um Grössen von der Ordnung $cotang^4\,\frac{1}{2}v$ unterscheidet. Es ist, wenn

$$x = cotang^2\,\tfrac{1}{2}v \tag{5}$$

gesetzt wird,

$$b^3 = \frac{1+3x}{(1+x)^3}$$

$$log\,b = \tfrac{1}{3}log(1+3x) - log(1+x) = -Mod\left(\frac{3-1}{2}x^2 - \frac{3^2-1}{3}x^3 + \frac{3^3-1}{4}x^4 - \ldots\right). \tag{6}$$

Ist $v$ gegeben, so rechnet man $x$ nach (5), $b$ nach (6), $w$ nach (4) und $t$ aus (3). Man wird jedoch den zu einem gegebenen Werthe von $v$ gehörigen Werth von $b$ zu dem hieraus folgenden Werthe von $w$ gehörig ansehen, und daher mit dem Argumente $w$ tabuliren können, wo dann die Formeln (3) und (4) unmittelbar den zu einem gegebenen Werthe von $t$ gehörigen Werth von $v$ finden lassen. Die Berechnung von $t$ bei gegebenem $v$ kann unmittelbar aus (1) oder ebenfalls mit Benützung der Hilfstafel für $b$ aus (3) und (4) mittels einer kleinen indirekten Rechnung gefunden werden.

Die Gleichung für $sin\,w$ kann geschrieben werden:

$$sin\,w = c\,\frac{\sqrt{q}}{\sqrt[3]{t-T_0}}, \tag{3a}$$

wobei

$$c = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3k_0}}.$$

Man hat mit den Werthen des § 12 (pag. 303) für die Bewegung um

| | |
|---|---|
| die Sonne | $log\,c$ = 0·7808007 |
| Mercur | 1·9011498 |
| Venus | 1·7157647 |
| Erde | 1·7000580 |
| Mars | 1·8621048 |

[1] S. v. OPPOLZER, »Monatsberichte der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften«, 1880, pag. 511.

| | | |
|---|---|---|
| Jupiter[1]) | $\log c =$ | 1·2886678 |
| Saturn | | 1·3710118 |
| Uranus | | 1·5059855 |
| Neptun | | 1·4958065 |

**14.** Bewegung in der Ellipse und Hyperbel. Für Ellipsen mässiger Excentricitäten ($\epsilon$ sehr klein, $\varepsilon$ nahe 1) erhält man durch direkte Integration von **12.** 16:

$$\frac{k_0(1-e)\sqrt{1+e}}{q^{\frac{3}{2}}}(t-T_0) = -\frac{2\varepsilon\tau}{1+\varepsilon\tau^2} + \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\, arc\, tang\,(\tau\sqrt{\varepsilon}), \tag{1}$$

wobei die Constante $T_0$ gleich Null zu setzen ist, wenn die Zeit vom Durchgange durch das Pericentrum gezählt wird. Setzt man

$$\tau\sqrt{\varepsilon} = tang\,\tfrac{1}{2}v\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = tang\,\tfrac{1}{2}E \tag{2}$$

und berücksichtigt die Beziehungen **12.** 11, so reducirt sich die Gleichung (1) auf

$$\frac{k_0(t-T_0)}{a^{\frac{3}{2}}} = E - e\sin E$$

oder wenn man

$$\frac{k_0}{a^{\frac{3}{2}}} = \mu; \qquad -\mu T_0 = M_0 \tag{3}$$

setzt, auf

$$M = M_0 + \mu t; \qquad E - e\sin E = M. \tag{4}$$

$M_0$ ist der Werth von $M$ für die Zeit $t = 0$, $\mu$ die Veränderung von $M$ für einen mittleren Sonnentag, die mittlere tägliche siderische Bewegung, $M$ die mittlere und $E$ die excentrische Anomalie (vergl. I. Bd. pag. 91). Führt man statt der Excentricität $e$ den Excentricitätswinkel $\varphi$ ein, bestimmt durch die Gleichung

$$e = \sin\varphi \tag{5}$$

so wird

$$tang\,\tfrac{1}{2}v = tang\,(45° + \tfrac{1}{2}\varphi)\, tang\,\tfrac{1}{2}E. \tag{6}$$

Die Gleichungen (3), (4), (5), (6) und

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v} \tag{7}$$

bestimmen den Ort des Himmelskörpers in seiner Bahn. Aus diesen Gleichungen leitet man noch auf elementare Weise die folgenden ab[2])

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{r}\cos\tfrac{1}{2}v &= \sqrt{a(1-e)}\cos\tfrac{1}{2}E\\ \sqrt{r}\sin\tfrac{1}{2}v &= \sqrt{a(1+e)}\sin\tfrac{1}{2}E\end{aligned}\right\}\ (8) \qquad \left.\begin{aligned}r\cos v &= a(\cos E - e)\\ r\sin v &= a\cos\varphi\sin E\end{aligned}\right\}\ (9)$$

$$r = a(1 - e\cos E). \tag{10}$$

Aus (4) und (6) folgt ferner noch die häufig verwandte Beziehung

$$\frac{dv}{dM} = \frac{k_0\sqrt{p}}{r^2\mu}. \tag{11}$$

---

[1]) Mit der bei dem folgenden Beispiel angewandten Jupitermasse $\frac{1}{1047\cdot879}$ ist $\log c = 1·288686$.

[2]) Substituirt man in (7) für $v$ die Variable $\tau$, so erhält man die erste Gleichung (8); multiplicirt man diese mit (6), so folgt die zweite Gleichung (8); quadrirt und addirt man die Gleichungen (8), so ergiebt sich (10); quadrirt und subtrahirt man (8), so folgt die erste Gleichung (9); multiplicirt man die beiden Gleichungen (8), so erhält man die zweite Gleichung (9).

Die Schwierigkeit in der Berechnung der Planetenorte liegt in der Lösung der Gleichung (4): aus der mittleren Anomalie die excentrische zu bestimmen. Ist $E_1$ ein genäherter Werth von $E$ und der daraus folgende Werth von $M_1 = E_1 + e \sin E_1$, so wird sich die Correction $E - E_1 = \Delta E$ aus der Differenz $M - M_1 = \Delta M$ leicht finden lassen; denn wenn die Bewegungen genügend klein sind (als differentiell angesehen werden können), so wird

$$\Delta M = \Delta E(1 - e \cos E) \quad \text{folglich} \quad \Delta E = \frac{\Delta M}{1 - e \cos E}$$

sein. Bei Ephemeridenrechnungen wird man einen genäherten Werth von $E_1$, wenn auch nicht für den ersten zu bestimmenden Ort, so doch für die folgenden leicht aus dem Gange der Werthe entnehmen. Man kann übrigens die Differenz $E - M = x$ leicht auf folgende Weise ermitteln; es ist

$$x = e \sin(M + x) = e \sin M \cos x + e \cos M \sin x$$
$$= e \sin M[1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 - \ldots] + e \cos M[x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5 \ldots]$$

oder wenn das Glied $x \cdot e \cos M$ nach links gebracht wird:

$$x = \frac{e \sin M}{1 + e \cos M}[1 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{6} cotang\, M \cdot x^3 + \tfrac{1}{24}x^4 + \tfrac{1}{120} cotang\, M x^5 \ldots].$$

Setzt man

$$tang\, y = \frac{e \sin M}{1 + e \cos M}; \quad \sin y = \eta, \tag{12}$$

so wird

$$tang\, y = \eta + \tfrac{1}{2}\eta^3 + \tfrac{3}{8}\eta^5 + \tfrac{5}{16}\eta^7 \ldots$$

Durch Umkehrung der Reihe findet man dann[1])

$$x = \eta - \tfrac{1}{6} cotang\, M \eta^4 + \tfrac{1}{8}\eta^5 + \tfrac{11}{120} cotang\, M \eta^6 \ldots; \quad E = M + x. \tag{13}$$

Für die Bewegung in der Hyperbel hat man in 12. 16: $e$ negativ zu setzen; schreibt man dann $e = -\eta$ und führt die Integration aus, so erhält man

$$\frac{k_0(t - T_0)\sqrt{1 + e}(e - 1)}{q^{\frac{3}{2}}} = + \frac{2e\tau}{1 - \eta\tau^2} - \frac{1}{\sqrt{\eta}} \log_n \frac{1 + \tau\sqrt{\eta}}{1 - \tau\sqrt{\eta}}$$

oder

$$\frac{k_0(t - T_0)}{(-a)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2e\tau\sqrt{\eta}}{1 - \eta\tau^2} - \log_n \frac{1 + \tau\sqrt{\eta}}{1 - \tau\sqrt{\eta}}.$$

Setzt man

$$\tau\sqrt{\eta} = tang\, \tfrac{1}{2}F$$

also

$$tang\, \tfrac{1}{2}v = tang\, \tfrac{1}{2}F \sqrt{\frac{e + 1}{e - 1}} \tag{14}$$

und zählt die Zeit vom Perihel ($T_0 = 0$), so wird

$$\frac{k_0 t}{(-a)^{\frac{3}{2}}} = e\, tang\, F - \frac{\log tang(45^\circ + \frac{1}{2}F)}{Mod}; \quad Mod = 0{\cdot}4342945 \tag{15}$$

Beispiel: Es sei für die Bewegung um den Jupiter:

$$\log a = 8{\cdot}9800000_n; \quad \log e = 0{\cdot}0046155; \quad v = 169^\circ\, 6'\, 59''{\cdot}39,$$

so wird:

$$F = 74^\circ\, 50'\, 8''{\cdot}22; \quad \log \frac{kt}{(-a)^{\frac{3}{2}}} = 0{\cdot}288568; \quad t = 80{\cdot}0096^d.$$

15. **Elliptische Bahnen. Entwickelungen nach der mittleren Anomalie.** Für das Folgende wird es nöthig, statt der Bestimmung der zu gegebenen Specialwerthen von $M$ gehörigen speciellen Werthe von $E$ einen allge-

---

[1]) Die von Encke vorgeschlagene Einführung der Grösse $\eta$ bewirkt das Wegfallen der Glieder zweiter und dritter Ordnung.

meinen Ausdruck $E = f(M)$ zu finden, und ebenso gewisse Functionen des Radiusvectors und der wahren Anomalie direkt durch die mittlere Anomalie auszudrücken. Sei zunächst:

$$\sin mE = \tfrac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} S_\iota^{(m)} \sin \iota M; \qquad \cos mE = \tfrac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} C_\iota^{(m)} \cos \iota M. \tag{1}$$

Nach der Lehre von den FOURIER'schen Reihen ist

$$S_\iota^{(m)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin mE \sin \iota M\, dM \qquad C_\iota^{(m)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos mE \cos \iota M\, dM. \tag{2}$$

Für $\iota = 0$ erhält man sofort durch die Substitution von $dM = (1 - e\cos E)\,dE$ und Ausführung der Integration:

$$S_0^{(0)} = 0; \qquad S_0^{(1)} = 0; \qquad C_0^{(0)} = 2; \qquad C_0^{(1)} = -e; \tag{3}$$

und $S_0^{(m)} = 0$; $C_0^{(m)} = 0$ (für alle $m$ mit Ausnahme von $m = 0$ und 1).

Für beliebige $\iota$ folgt durch partielle Integration

$$S_\iota^{(m)} = \frac{2}{\pi}\left\{\left[-\frac{\cos \iota M}{\iota}\sin mE\right]_0^\pi + \frac{m}{\iota}\int_0^\pi \cos \iota M \cos mE\, dE\right\} = \frac{2m}{\pi\iota}\int_0^\pi \cos \iota M \cos mE\, dE$$

$$= \frac{2m}{\pi\iota}\int_0^\pi \cos \iota(E - e\sin E)\cos mE\, dE$$

$$S_\iota^{(m)} = \frac{m}{\pi\iota}\int_0^\pi \cos[(\iota + m)E - e\iota \sin E]\, dE + \frac{m}{\pi\iota}\int_0^\pi \cos[(\iota - m)E - e\iota\sin E]\, dE$$

und ebenso

$$C_\iota^{(m)} = \frac{m}{\pi\iota}\int_0^\pi \cos[(\iota - m)E - e\iota\sin E]\, dE - \frac{m}{\pi\iota}\int_0^\pi \cos[(\iota + m)E - e\iota\sin E]\, dE.$$

Bezeichnet man nach BESSEL

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos[\lambda E - x\sin E]\, dE = J_x^\lambda, \tag{4}$$

so wird, ausgedrückt durch diese BESSEL'schen Functionen

$$S_\iota^{(m)} = \frac{m}{\iota}\left[J_{e\iota}^{(\iota+m)} + J_{e\iota}^{(\iota-m)}\right]; \qquad C_\iota^{(m)} = \frac{m}{\iota}\left[J_{e\iota}^{(\iota-m)} - J_{e\iota}^{(\iota+m)}\right]. \tag{5}$$

Um nun $r^{m+n}\cos mv$ und $r^{m+n}\sin mv$ durch $E$ auszudrücken, wird man am kürzesten folgendermaassen verfahren. Sei

$$\begin{aligned} p\sin q &= \alpha\sin Q \\ p\cos q &= 1 - \alpha\cos Q \end{aligned} \quad (6) \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} \operatorname{tang} q &= \frac{\alpha\sin Q}{1 - \alpha\cos Q} \\ p^2 &= 1 - 2\alpha\cos Q + \alpha^2, \end{aligned} \quad (6a)$$

so erhält man durch Einführung der Exponentiellen mit imaginären Exponenten[1]), wenn $i = \sqrt{-1}$ ist:

$$\begin{aligned} p(\varepsilon^{+iq} - \varepsilon^{-iq}) &= \alpha(\varepsilon^{+iQ} - \varepsilon^{-iQ}) \\ p(\varepsilon^{+iq} + \varepsilon^{-iq}) &= 2 - \alpha(\varepsilon^{+iQ} + \varepsilon^{-iQ}) \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} p\varepsilon^{+iq} &= 1 - \alpha\varepsilon^{-iQ} \\ p\varepsilon^{-iq} &= 1 - \alpha\varepsilon^{+iQ}, \end{aligned} \tag{7}$$

folglich

---

[1]) Die Einführung von $\varepsilon$ als Basis der natürlichen Logarithmen, kann zu Irrungen keinen Anlass geben; $p$ bedeutet hier ebenfalls, wie leicht zu sehen, nicht den Parameter.

$$\log_n p + iq = -\alpha e^{-iQ} - \tfrac{1}{2}\alpha^2 e^{-2iQ} - \tfrac{1}{3}\alpha^3 e^{-3iQ} - \tfrac{1}{4}\alpha^4 e^{-4iQ} - \ldots$$
$$\log_n p - iq = -\alpha e^{+iQ} - \tfrac{1}{2}\alpha^2 e^{+2iQ} - \tfrac{1}{3}\alpha^3 e^{+3iQ} - \tfrac{1}{4}\alpha^4 e^{+4iQ} - \ldots$$

daher durch Addition und Subtraction dieser beiden Gleichungen.

$$\begin{aligned} \log_n p &= -\alpha \cos Q - \tfrac{1}{2}\alpha^2 \cos 2Q - \tfrac{1}{3}\alpha^3 \cos 3Q - \tfrac{1}{4}\alpha^4 \cos 4Q - \ldots \\ q &= +\alpha \sin Q + \tfrac{1}{2}\alpha^2 \sin 2Q + \tfrac{1}{3}\alpha^3 \sin 3Q + \tfrac{1}{4}\alpha^4 \sin 4Q + \ldots \end{aligned} \qquad (8)$$

Ferner erhält man durch Multiplication der Gleichungen (7):

$$p^2 = (1 - \alpha e^{-iQ})(1 - \alpha e^{+iQ})$$
$$p^n = (1 - \alpha e^{-iQ})^{\frac{n}{2}}(1 - \alpha e^{+iQ})^{\frac{n}{2}}.$$

Entwickelt man hier jeden Faktor nach dem binomischen Lehrsatze, bildet dann die Producte der beiden Entwickelungen, und setzt

$$\begin{aligned} K_n^{(0)} &= 1 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 \alpha^2 + \left(\frac{n(n-2)}{2\cdot 4}\right)^2 \alpha^4 + \left(\frac{n(n-2)(n-4)}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \alpha^6 + \ldots \\ -K_n^{(1)} &= \left(\frac{n}{2}\right)\alpha + \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n(n-2)}{2\cdot 4}\right)\alpha^3 + \left(\frac{n(n-2)}{2\cdot 4}\right)\left(\frac{n(n-2)(n-4)}{2\cdot 4\cdot 6}\right)\alpha^5 + \ldots \\ K_n^{(2)} &= \frac{n(n-2)}{2\cdot 4}\alpha^2 + \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n(n-2)(n-4)}{2\cdot 4\cdot 6}\right)\alpha^4 + \ldots, \end{aligned} \qquad (9)$$

so wird

$$p^n = K_n^{(0)} + 2K_n^{(1)} \cos Q + 2K_n^{(2)} \cos 2Q + 2K_n^{(3)} \cos 3Q + \ldots \qquad (10)$$

Für gerade $n$ wird es etwas bequemer

$$p^{2n} = L_n^{(0)} + 2L_n^{(1)} \cos Q + 2L_n^{(2)} \cos 2Q + 2L_n^{(3)} \cos 3Q + \ldots \qquad (10a)$$

zu setzen, wobei $L_n^{(i)} = K_{2n}^{(i)}$, daher

$$\begin{aligned} (-1)^i L_n^{(i)} &= \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots i}\alpha^i + \frac{n}{1}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-i)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(i+1)}\alpha^{i+2} \\ &+ \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,\frac{n(n-1)\ldots(n-i-1)}{1\cdot 2\ldots(i+2)}\alpha^{i+4} + \ldots \end{aligned} \qquad (9a)$$

ist. Quadrirt man die Gleichungen (7) und multiplicirt die aus der ersten entstehende mit $e^{+iQ}$, die aus der zweiten entstehende mit $e^{-iQ}$, so erhält man:

$$p^2 e^{+2iq+iQ} = e^{+iQ} - 2\alpha + \alpha^2 e^{-iQ} = (e^{+\frac{1}{2}iQ} - \alpha e^{-\frac{1}{2}iQ})^2$$
$$p^2 e^{-2iq-iQ} = e^{-iQ} - 2\alpha + \alpha^2 e^{+iQ} = (e^{-\frac{1}{2}iQ} - \alpha e^{+\frac{1}{2}iQ})^2.$$

Erhebt man diese Gleichungen zur $m$ ten Potenz, und fügt der grösseren Symmetrie wegen zum ersten Ausdruck in der Klammer einen Faktor $\beta$ hinzu, der schliesslich gleich 1 gesetzt wird, so folgt:

$$\begin{aligned} p^{2m} e^{+(2q+Q)mi} &= (\beta e^{+\frac{1}{2}iQ} - \alpha e^{-\frac{1}{2}iQ})^{2m} \\ p^{2m} e^{-(2q+Q)mi} &= (\beta e^{-\frac{1}{2}iQ} - \alpha e^{+\frac{1}{2}iQ})^{2m}. \end{aligned} \qquad (11)$$

Aus dem ersten Ausdrucke folgt durch Entwickelung der $2m$ ten Potenz (die Entwickelung des zweiten Ausdruckes folgt einfach durch Vertauschung von $\alpha$ und $\beta$):

$$\begin{aligned} p^{2m} e^{+(2q+Q)mi} &= \beta^{2m} e^{miQ} - \binom{2m}{1}\alpha\beta^{2m-1} e^{(m-1)iQ} + \binom{2m}{2} e^{(m-2)iQ} - \ldots \\ &+ (-1)^m \binom{2m}{m}\alpha^m\beta^m + \ldots \quad - \binom{2m}{1}\alpha^{2m-1}\beta e^{-(m-1)iQ} + \alpha^{2m} e^{-miQ}. \end{aligned} \qquad (11a)$$

Die additive und subtractive Verbindung dieser Gleichung mit der En[...]wickelung der zweiten Gleichung (11) giebt:

$$p^{2m}\cos m(2q+Q) = (1+\alpha^{2m})\cos mQ - \binom{2m}{1}\alpha(1+\alpha^{2m-2})\cos(m-1)Q$$
$$+\binom{2m}{2}\alpha^2(1+\alpha^{2m-4})\cos(m-2)Q+\ldots\ldots+(-1)^{m-1}\binom{2m}{m-1}\alpha^{m-1}(1+\alpha^2)\cos Q$$
$$+(-1)^m\binom{2m}{m}\alpha^m \qquad (1[...]$$

$$p^{2m}\sin m(2q+Q) = (1-\alpha^{2m})\sin mQ - \binom{2m}{1}\alpha(1-\alpha^{2m-2})\sin(m-1)Q$$
$$+\binom{2m}{2}\alpha^2(1-\alpha^{2m-4})\sin(m-2)Q+\ldots\ldots+(-1)^{m-1}\binom{2m}{m-1}\alpha^{m-1}(1-\alpha^2)\sin Q.$$

Schreibt man $p^{2n}$ in der Form:

$$p^{2n} = \ldots\ldots + L_n^{(4)}e^{+4iQ} + L_n^{(3)}e^{+3iQ} + L_n^{(2)}e^{+2iQ} + L_n^{(1)}e^{+iQ} + L_n^{(0)}$$
$$+ L_n^{(-1)}e^{-iQ} + L_n^{(-2)}e^{-2iQ} + L_n^{(-3)}e^{-3iQ} + \ldots,$$

wobei also

$$L_n^{(i)} = L_n^{(-i)}$$

ist, und multiplicirt mit (11a), so folgt

$$p^{2(m+n)}e^{+(2q+Q)mi} = \ldots N_{n,m}^{(3)}e^{+3iQ} + N_{n,m}^{(2)}e^{+2iQ} + N_{n,m}^{(1)}e^{+iQ}$$
$$+ N_{n,m}^{(0)} + N_{n,m}^{(-1)}e^{-iQ} + N_{n,m}^{(-2)}e^{-2iQ} + \ldots$$
$$p^{2(m+n)}e^{-(2q+Q)mi} = \ldots N_{n,m}^{(3)}e^{-3iQ} + N_{n,m}^{(2)}e^{-2iQ} + N_{n,m}^{(1)}e^{-iQ}$$
$$+ N_{n,m}^{(0)} + N_{n,m}^{(-1)}e^{+iQ} + N_{n,m}^{(-2)}e^{+2iQ} + \ldots$$

wobei

$$N_{n,m}^{(i)} = \sum_{\varkappa=0}^{2m}(-1)^\varkappa\binom{2m}{\varkappa}\alpha^\varkappa L_n^{(\varkappa-m+i)}. \qquad (1[...]$$

Durch Addition und Subtraction der letzten beiden Gleichungen erhält man endlich:

$$p^{2(m+n)}\cos m(2q+Q) = N_{n,m}^{(0)} + \left(N_{n,m}^{(1)}+N_{n,m}^{(-1)}\right)\cos Q + \left(N_{n,m}^{(2)}+N_{n,m}^{(-2)}\right)\cos 2Q + \ldots$$
$$p^{2(m+n)}\sin m(2q+Q) = \left(N_{n,m}^{(1)}-N_{n,m}^{(-1)}\right)\sin Q + \left(N_{n,m}^{(2)}-N_{n,m}^{(-2)}\right)\sin 2Q + \ldots \qquad (1[...]$$

Aus der Gleichung 14. 6 folgt nun, wenn für einen Augenblick $\tang(45°+\frac{1}{2}\varphi) = n$ gesetzt wird:

$$\tang\tfrac{1}{2}(v-E) = \frac{\tang\frac{1}{2}v - \tang\frac{1}{2}E}{1+\tang\frac{1}{2}v\,\tang\frac{1}{2}E} = \frac{(n-1)\tang\frac{1}{2}E}{1+n\tang^2\frac{1}{2}E}$$
$$= \frac{(n-1)\sin\frac{1}{2}E\cos\frac{1}{2}E}{\cos^2\frac{1}{2}E+n\sin^2\frac{1}{2}E} = \frac{(n-1)\sin E}{1+\cos E+n(1-\cos E)} = \frac{\alpha\sin E}{1-\alpha\cos E},$$

wenn $\alpha = \dfrac{n-1}{n+1} = \dfrac{\tang(45°+\frac{1}{2}\varphi)-1}{\tang(45°+\frac{1}{2}\varphi)+1} = \tang\frac{1}{2}\varphi$ ist. Weiter folgt aus 14. 1

$$\frac{r}{a\cos^2\frac{1}{2}\varphi} = 1+\tang^2\tfrac{1}{2}\varphi - 2\tang\tfrac{1}{2}\varphi\cos E = 1-2\alpha\cos E+\alpha^2.$$

Setzt man daher in den Gleichungen (6) oder (6a)

$$p = \sqrt{\frac{r}{a\cos^2\frac{1}{2}\varphi}};\qquad q = \tfrac{1}{2}(v-E);\qquad Q = E;\qquad 2q+Q = v$$
$$\alpha = \tang\tfrac{1}{2}\varphi, \qquad (1[...]$$

so ergiebt sich sofort:

$$\tfrac{1}{2}(v-E) = \alpha \sin E + \tfrac{1}{2}\alpha^2 \sin 2E + \tfrac{1}{3}\alpha^3 \sin 3E + \ldots$$

$$\log_n r = \log_n (a \cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi) - 2\left[\alpha \cos E + \tfrac{1}{2}\alpha^2 \cos 2E + \tfrac{1}{3}\alpha^3 \cos 3E + \ldots\right] \quad (16)$$

$$r^n = a^n \cos^{2n}\tfrac{1}{2}\varphi\left[L_n^{(0)} + 2L_n^{(1)} \cos E + 2L_n^{(2)} \cos 2E + 2L_n^{(3)} \cos 3E + \ldots\right]$$

$$\begin{aligned} r^m \cos m v &= a^m \cos^{2m}\tfrac{1}{2}\varphi[(1+\alpha^{2m}) \cos mE - \\ &- \binom{2m}{1} \alpha (1+\alpha^{2m-2}) \cos (m-1) E + \ldots + (-1)^m \binom{2m}{m} \alpha^m] \\ r^m \sin m v &= a^m \cos^{2m}\tfrac{1}{2}\varphi[(1-\alpha^{2m}) \sin mE - \\ &- \binom{2m}{1} \alpha(1-\alpha^{2m-2}) \sin (m-1) E + \ldots + (-1)^{m-1}\binom{2m}{m-1} \alpha^{m-1}(1-\alpha^2) \sin E] \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} r^{m+n} \cos m v &= a^{m+n} \cos^{2(m+n)} \tfrac{1}{2}\varphi \left[N_{n,m}^{(0)} + \left(N_{n,m}^{(1)} + N_{n,m}^{(-1)}\right) \cos E + \right. \\ &\left. + \left(N_{n,m}^{(2)} + N_{n,m}^{(-2)}\right) \cos 2E + \ldots\right] \\ r^{m+n} \sin m v &= a^{m+n} \cos^{2(m+n)} \tfrac{1}{2}\varphi \left[\left(N_{n,m}^{(1)} - N_{n,m}^{(-1)}\right) \sin E + \right. \\ &\left. + \left(N_{n,m}^{(2)} - N_{n,m}^{(-2)}\right) \sin 2E + \ldots\right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Hier ist noch die excentrische Anomalie durch die mittlere Anomalie zu ersetzen; zu diesem Zwecke müssen die BESSEL'schen Functionen entwickelt werden. Schreibt man

$$J_x^\lambda = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\cos \lambda E \cos (x \sin E) + \sin \lambda E \sin (x \sin E)\, dE,$$

entwickelt hier $\cos (x \sin E)$, $\sin (x \sin E)$ in Reihen, ersetzt die Potenzen von $\sin E$ durch die Sinus und Cosinus der Vielfachen von $E$ und integrirt[1]), so wird

$$J_x^\lambda = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\lambda}{\lambda!}\left[1 - \frac{1}{\lambda+1}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot(\lambda+1)(\lambda+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \ldots\right]. \quad (19)$$

Da nun in den Formeln (5) für $x$ der Werth $ie$ zu setzen ist, so werden $S_i^{(m)}$ und $C_i^{(m)}$ als Reihen erhalten, die nach Potenzen von $e$ fortschreiten. Für die einfachsten Functionen $r$, $v$, $\cos v$, $\sin v$, $r \cos v$, $r \sin v$, $\cos v : r^2$, $\sin v : r^2$, in denen die Coëfficienten der Sinus und Cosinus der excentrischen Anomalie einfache Functionen von $e$ sind, wird die Substitution der $S_i^m$, $C_i^m$ einfach durchgeführt werden können; man erhält die in 87 angegebenen Reihen. Wegen der Entwickelung von $r^{m+n} \cos mv$ und $r^{m+n} \sin mv$ wird es jedoch besser auch in $J_x^\lambda$ die Grösse $\alpha = \tang \frac{1}{2}\varphi$ einzuführen[2]). Für $x = ie$ wird

$$\frac{x}{2} = \frac{\alpha i}{1+\alpha^2}.$$

Setzt man diesen Werth in den Ausdruck für $J_x^\lambda$ ein und ordnet nach Potenzen von $\alpha$, so erhält man

$$J_{ie}^\lambda = \frac{i^\lambda \alpha^\lambda}{\lambda!}\left[1 - (i, \lambda)_1 \alpha^2 + (i, \lambda)_2 \alpha^4 - (i, \lambda)_3 \alpha^6 + \ldots\right] \quad (20)$$

---

[1]) Ueber die Ausführung der Rechnung siehe z. B. BESSEL, Ges. Werke, I Band, pag. 18. Ueber eine Kettenbruchentwickelung für dieselben Functionen siehe ebenda, I. Bd., pag. 96.

[2]) Dabei muss jedoch bemerkt werden, dass die Reihen schwächer convergiren; $\alpha$ ist die von HANSEN in seiner »Entwickelung des Produktes einer Potenz des Radiusvectors mit dem *sin* oder *cos* eines Vielfachen der wahren Anomalie« (Abhandl. der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. IV, pag. 183) mit $\beta$ bezeichnete Grösse. Vergl. besonders pag. 241 und für die Coëfficienten $(i\lambda)_x$, pag. 257.

wobei

$$
\begin{aligned}
(\iota, \lambda)_1 &= \binom{\lambda}{1} + \binom{\lambda+1}{0} \frac{\iota^2}{1 \cdot (\lambda+1)} \\
(\iota, \lambda)_2 &= \binom{\lambda+1}{2} + \binom{\lambda+2}{1} \frac{\iota^2}{1 \cdot (\lambda+1)} + \binom{\lambda+3}{0} \frac{\iota^4}{1 \cdot 2\,(\lambda+1)(\lambda+2)} \\
(\iota, \lambda)_3 &= \binom{\lambda+2}{3} + \binom{\lambda+3}{2} \frac{\iota^2}{1 \cdot (\lambda+1)} + \binom{\lambda+4}{1} \frac{\iota^4}{1 \cdot 2\,(\lambda+1)(\lambda+2)} \\
&\quad + \binom{\lambda+5}{0} \frac{\iota^6}{1 \cdot 2 \cdot 3\,(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)} \qquad (21) \\
(\iota, \lambda)_4 &= \binom{\lambda+3}{4} + \binom{\lambda+4}{3} \frac{\iota^2}{1 \cdot (\lambda+1)} + \binom{\lambda+5}{2} \frac{\iota^4}{1 \cdot 2\,(\lambda+1)(\lambda+2)} \\
&\quad + \binom{\lambda+6}{1} \frac{\iota^6}{1 \cdot 2 \cdot 3\,(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)} \\
&\quad + \binom{\lambda+7}{0} \frac{\iota^8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\,(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+4)}.
\end{aligned}
$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**16. Nahe parabolische Bahnen.** Für diesen Fall wird es am vortheilhaftesten, in der Gleichung 12. 16 vor der Integration nach den Potenzen der kleinen Grösse $\varepsilon$ zu entwickeln. Ist $\varepsilon$ positiv, so wird die Bahn eine Ellipse; negative $\varepsilon$ gelten für eine hyperbolische Bahn. Man erhält:

$$\frac{k_0\sqrt{1+\varepsilon}}{2q^{\frac{3}{2}}}(t - T_0) = \tau + \tfrac{1}{3}\tau^3 - 2\varepsilon\left(\tfrac{1}{3}\tau^3 + \tfrac{1}{5}\tau^5\right) + 3\varepsilon^2\left(\tfrac{1}{5}\tau^5 + \tfrac{1}{7}\tau^7\right) - \dots \qquad (1)$$

Um aus dieser Gleichung den Werth von $\tau$ für eine gewisse Zeit zu bestimmen[1]), sei, wenn die Zeit vom Periheldurchgang gezählt, also $T_0 = 0$ angenommen wird:

$$\frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}\, t = \mathrm{M} = \frac{\sqrt{2}}{k_0}\left(x + \tfrac{1}{3}f^2 x^3\right) \qquad (2)$$

oder

$$\mathrm{M}f = \frac{\sqrt{2}}{k_0}\left[fx + \tfrac{1}{3}(fx)^3\right]; \qquad (3)$$

dann wird man $fx$ mit dem Werthe $\mathrm{M}f$ aus der BARKER'schen Tafel entnehmen können, wenn $f$ bekannt ist. $f$ bleibt aber vorerst willkürlich, und es ist gestattet, noch eine Bedingung dafür anzunehmen. v. OPPOLZER nimmt an, dass $f$ so gewählt werde, dass sich $\tau$ durch $x$ mit Hilfe der Gleichung

$$\tau = x\left[1 + A_1\,\varepsilon x^2 + A_2\,\varepsilon^2 x^4 + A_3\,\varepsilon^3 x^6 + \dots\right] \qquad (4)$$

finden lasse, wobei die $A_1, A_2 \dots$ von der nullten Ordnung der Excentricität seien[2]). Nun muss

---

[1]) Von den verschiedenen, von BESSEL, BRÜNNOW, GAUSS und v. OPPOLZER vorgeschlagenen Methoden genügt es die letztere anzuführen.

[2]) Diese Bedingung, denen die $A$ unterworfen werden sollen, drückt v. OPPOLZER nicht explicite aus, s. sein »Lehrbuch zur Bahnbestimmung«, I. Theil, II. Aufl., pag. 66; sie liegt aber in den darauffolgenden Gleichungen (6), pag. 67. RADAU, Bullet. astr., Nov. 1885 ersetzt diese Bedingung durch eine andere, welche die Ableitung scheinbar vereinfacht. Unter der Annahme, dass $\tau$ eine ganze Function von $x$ sei, müssen in dem Ausdrucke

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{1 + (fx)^2}{1 + \tau^2}(1 + \varepsilon\tau^2)^2$$

$1 + (fx)^2$ und $1 + \tau^2$ gleichzeitig verschwinden, daher $\tau$ und $fx$ gleichzeitig $\sqrt{-1}$ werden. Für diesen Fall erhält allerdings $f$ den Werth, den die v. OPPOLZER'sche Lösung fordert, aber

$$x + \tfrac{1}{3} f^2 x^3 = \tau + \tfrac{1}{3}\tau^3 - 2\varepsilon\left(\tfrac{1}{3}\tau^3 + \tfrac{1}{5}\tau^5\right) + \ldots \tag{5}$$

sein. Substituirt man hier für $\tau$ die Reihe (4), so erhält man zur Bestimmung der Coëfficienten $A$ die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
f^2 - 1 + 2\varepsilon &= 3\varepsilon A_1\\
2 - 3\varepsilon &= 5\varepsilon A_2 + 5(1-2\varepsilon)A_1\\
3 - 4\varepsilon &= 7\varepsilon A_3 + 7(1-2\varepsilon)(A_2 + A_1^2) - 7(2-3\varepsilon)A_1\\
4 - 5\varepsilon &= 9\varepsilon A_4 + 9(1-2\varepsilon)(A_3 + 2A_1A_2 + \tfrac{1}{3}A_1^3)\\
&\quad - 9(2-3\varepsilon)(A_2 + 2A_1^2) + 9(3-4\varepsilon)A_1.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{6}$$

Sei $f^2 = 1 + \varepsilon\varphi$, so folgt aus der ersten Gleichung $A_1 = \frac{1}{3}\varphi + \frac{2}{3}$; dieses in die zweite Gleichung substituirt, giebt als Bedingung dafür, dass $A_2$ eine ganze Function von $\varepsilon$ sei, wenn $\varphi_1$ der constante Theil von $\varphi$ ist:

$$\tfrac{5}{3}\varphi_1 + \tfrac{10}{3} = 2 \qquad \text{oder} \qquad \varphi_1 = -\tfrac{4}{5}.$$

Die Weitläufigkeit der hierbei auftretenden Operationen umging v. OPPOLZER dadurch, dass er die Functionen $A$ und $\varphi$ in der Form

$$a_1 + a_2\varepsilon + a_3\varepsilon^2 + \ldots.$$

annahm, und in die Gleichungen (6) substituirte. Es folgt:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \tfrac{2}{5} - \tfrac{2}{175}\varepsilon - \tfrac{52}{7875}\varepsilon^2 \ldots.\\
A_2 &= \tfrac{37}{175} - \tfrac{128}{7875}\varepsilon \ldots.\\
A_3 &= \tfrac{920}{7875} \ldots.\\
&\ldots.
\end{aligned} \tag{7}$$

und nach RADAU:

$$\frac{1}{3f} = \tfrac{1}{1\cdot 3} + \tfrac{2}{3\cdot 5}\varepsilon + \tfrac{3}{5\cdot 7}\varepsilon^2 + \tfrac{4}{7\cdot 9}\varepsilon^3 \ldots \tag{8}$$

Für die praktische Anwendung wird dann gesetzt

$$E = \tfrac{5}{2}A_1 = 1 - \tfrac{1}{35}\varepsilon - \tfrac{26}{1575}\varepsilon^2 - \ldots \tag{9}$$

$$\kappa = \varepsilon E x^2$$

$$G = 1 + \tfrac{2}{5}\kappa + \tfrac{37}{175}\kappa^2 + \tfrac{920}{7875}\kappa^3 + \ldots, \tag{10}$$

wo die Coefficienten der Reihe $G$ die Anfangsglieder $A_1^{(0)}$, $A_2^{(0)}$, $A_3^{(0)}$ .... der Reihen (7) bilden, dann wird, wie sich leicht ergiebt

$$\tau = xGH, \tag{11}$$

wobei

$$\begin{aligned}
H &= 1 + \frac{1}{G}\left[(A_2 - A_2^{(0)}E^2)\varepsilon^2 x^4 + (A_3 - A_3^{(0)}E^3)\varepsilon^3 x^6 + \ldots.\right]\\
&= 1 - \frac{\varepsilon^3}{G}\left[\left(\tfrac{46}{11025} + \tfrac{8484}{\text{[illegible]}}\varepsilon + \ldots\right)x^4 + \left(\tfrac{1168}{\text{[illegible]}} + \ldots\right)\varepsilon x^6 + \ldots\right].
\end{aligned} \tag{12}$$

Tabulirt sind: $f$, $E$ mit dem Argument $\varepsilon$, $G$ mit dem Argument $\kappa$, und $H$ als kleine Ergänzungstafel mit doppeltem Eingange mit den Argumenten $\varepsilon$ und

---

die Identität der Bedingungen ist nicht a priori ersichtlich. Dieses wird offenbar, wenn man einen anderen Werth von $f$ betrachtet, der den Charakter der Function $\tau$ nicht ändert, aber die gestellte Bedingung nicht erfüllt. Angenommen, es werde $f$ so bestimmt, dass in (4) das Glied mit $A_1\varepsilon$ verschwindet; dann wird nach der ersten Gleichung (6) $f^2 = 1 - 2\varepsilon$ zu setzen sein. Dann wird $A_1 = 0$, und die zweite Gleichung (6) giebt $A_2 = \frac{2}{5\varepsilon} - \frac{3}{5}$, folglich würde sich ergeben

$$\tau = x\left[1 + A_2'\varepsilon x^4 + \ldots\right].$$

$x$. Man wird dann zunächst mit dem Argumente $s$ die Werthe von $f$ und $E$ (Constanten für einen Kometen) entnehmen; mit dem Werthe von $Mf$ aus der BARKER'schen Tafel den Werth von $w$, dann ist

$$x = \frac{1}{f} \, tang \tfrac{1}{2} w.$$

Hiermit wird $n$ gerechnet, $G$ und $H$ aus den Tafeln entnommen, und es ist schliesslich

$$tang \tfrac{1}{2} v = x G H.$$

**17. Berechnung der Coordinaten und Geschwindigkeiten.** Die Grössen $r$ und $v$ bestimmen den Ort des Himmelskörpers in seiner Bahn. Um auf eine feste Ebene überzugehen, sei diese die $X$-$Y$-Ebene (Fig. 271), während die $X'Y'$-Ebene die Bahnebene vorstellt. Dann werden $\Omega$, $\omega$, $i$ die die Bahnlage bestimmenden Elemente sein, und es ist

$$x' = r \cos v, \quad y' = r \sin v, \quad z' = 0; \qquad x = \alpha_1 x' + \beta_1 y' \quad \text{u. s. w.,}$$

folglich

$$\begin{aligned} x &= r\,[\cos\Omega \cos(v+\omega) - \sin\Omega \sin(v+\omega)\cos i] \\ y &= r\,[\sin\Omega \cos(v+\omega) + \cos\Omega \sin(v+\omega)\cos i] \\ z &= r \sin(v+\omega) \sin i. \end{aligned} \tag{1}$$

Setzt man

$$\begin{array}{lll} \sin a \sin A = +\cos\Omega & \sin b \sin B = +\sin\Omega & C = 0 \\ \sin a \cos A = -\sin\Omega \cos i & \sin b \cos B = +\cos\Omega \cos i & \sin c = \sin i \\ \cos a = +\sin\Omega \sin i & \cos b = -\cos\Omega \sin i & \cos c = \cos i \end{array}$$

$$\begin{aligned} A' &= A + \omega \\ B' &= B + \omega \\ C' &= C + \omega \end{aligned} \tag{2}$$

so wird[1])

$$\begin{aligned} x &= r \sin a \sin(A' + v) \\ y &= r \sin b \sin(B' + v) \\ z &= r \sin c \sin(C' + v). \end{aligned} \tag{3}$$

Für den Fall, wo die Coordinate $z'$ über der Bahnebene nicht verschwindet, was z. B. in der gestörten Bewegung eintritt (s. z. B. § 29) treten noch die Glieder $\gamma_1 z'$, $\gamma_2 z'$, $\gamma_3 z'$ hinzu, und man erhält:

$$\begin{aligned} x &= r \sin a \sin(A' + v) + z' \cos a \\ y &= r \sin b \sin(B' + v) + z' \cos b \\ z &= r \sin c \sin(C' + v) + z' \cos c. \end{aligned} \tag{3a}$$

Sind die Polarcoordinaten, heliocentrische Länge und Breite, gegeben (Coordinaten der störenden Planeten), so findet man hieraus die rechtwinkligen Coordinaten nach:

$$x = r \cos l \cos b, \quad y = r \sin l \cos b, \quad z = r \sin b. \tag{4}$$

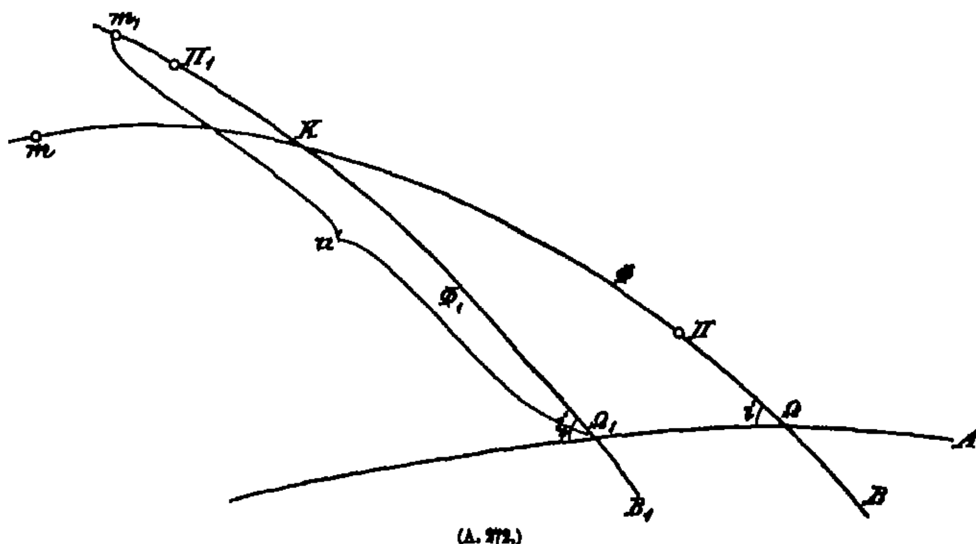
Sind die Polarcoordinaten $l$, $b$ zu bestimmen, so hat man, wenn die $x$-Axe in die Knotenlinie gelegt wird, einerseits in (4) $l - \Omega$ an Stelle von $l$ zu setzen und andererseits in den Formeln (3) $\Omega = 0$, $z = r \sin \beta$ zu setzen, wenn $\beta$ die Breite des Himmelskörpers über seiner Bahnebene ist. Da $\beta$ stets sehr klein ist, so kann $\beta \, arc\, 1''$ für $\sin\beta$ gesetzt werden, und man erhält die heliocentrischen Coordinaten $l$, $b$, bezogen auf eine feste Ebene (Ekliptik, Ebene $A$ in Fig. 272) aus den auf die Bahnebene bezogenen Coordinaten $v$, $\beta$ durch:

---

1) Ueber die Berechnung der Constanten für den Aequator s. »Bahnbestimmung«, I. Band, pag. 471.

$$\begin{aligned} \cos(l - \Omega) \cos b &= \cos(v + \omega) \\ \sin(l - \Omega) \cos b &= \sin(v + \omega) \cos i - \beta \, arc \, 1'' \cdot \sin i \\ \sin b &= \sin(v + \omega) \sin i + \beta \, arc \, 1'' \cdot \cos i. \end{aligned} \tag{5}$$

Es tritt häufig der Fall auf, dass man die Polarcoordinaten $L_1$, $B_1$ des in der Ebene $B_1$ sich bewegenden Himmelskörpers bezogen auf eine andere




(A. 272.)

Fundamentalebene $B$ (z. B. die Coordinaten des störenden Himmelskörpers, bezogen auf die Bahnebene des gestörten) zu beziehen hat. Man hat dann zunächst aus dem sphärischen Dreiecke, dessen eine Seite $\Omega_1 - \Omega$ und dessen anliegende Winkel $i$ und $180° - i_1$ sind, die beiden anderen Seiten $\Phi$ und $\Phi_1$ und den dritten Winkel $J$ zu bestimmen, wozu die Formeln dienen:

$$\begin{aligned} \sin \tfrac{1}{2} J \sin \tfrac{1}{2}(\Phi + \Phi_1) &= \sin \tfrac{1}{2}(\Omega_1 - \Omega) \sin \tfrac{1}{2}(i_1 + i) \\ \sin \tfrac{1}{2} J \cos \tfrac{1}{2}(\Phi + \Phi_1) &= \cos \tfrac{1}{2}(\Omega_1 - \Omega) \sin \tfrac{1}{2}(i_1 - i) \\ \cos \tfrac{1}{2} J \sin \tfrac{1}{2}(\Phi - \Phi_1) &= \sin \tfrac{1}{2}(\Omega_1 - \Omega) \cos \tfrac{1}{2}(i_1 + i) \\ \cos \tfrac{1}{2} J \cos \tfrac{1}{2}(\Phi - \Phi_1) &= \cos \tfrac{1}{2}(\Omega_1 - \Omega) \cos \tfrac{1}{2}(i_1 - i). \end{aligned} \tag{6a}$$

Dann ist $v_1 + \omega_1 - \Phi_1 = Km$ (Fig. 272) das Argument der Breite des Himmelskörpers gezählt vom aufsteigenden Knoten $K$ der Bahnebene $B_1$ auf der Fundamentalebene $B$; es ist daher nach (5):

$$\begin{aligned} \cos[L_1 - (C + \Phi)] \cos B_1 &= \cos(v_1 + \omega_1 - \Phi_1) \\ \sin[L_1 - (C + \Phi)] \cos B_1 &= \sin(v_1 + \omega_1 - \Phi_1) \cos J - \beta_1 \, arc \, 1'' \sin J \\ \sin B_1 &= \sin(v_1 + \omega_1 - \Phi_1) \sin J + \beta_1 \, arc \, 1'' \cos J. \end{aligned} \tag{6b}$$

Die Längen $L_1$ sind dabei von einem Punkte gezählt, der um $C$ gegen $\Omega$ zurückliegt, so dass $C$ die in der Ebene $B$ gezählte Länge von $\Omega$ ist. Wird $C = \Omega$ genommen, so ist $L_1$ die Länge in der Bahn, $\Omega + \omega$ die Länge des Perihels des gestörten Körpers.

Sind die auf die Ebene $A$ bezogenen Coordinaten $l_1$, $b_1$ (aus den Ephemeriden) bekannt, so erhält man $L_1$ $B_1$ aus dem sphärischen Dreiecke, dessen Ecken die Pole der beiden Ebenen $A$, $B$ und der Ort $P$ sind, durch:

$$\begin{aligned} \cos B_1 \cos L_1 &= \cos b_1 \cos(l_1 - \Omega) \\ \cos B_1 \sin L_1 &= \sin b_1 \sin i + \cos b_1 \cos i \sin(l_1 - \Omega) \\ \sin B_1 &= \sin b_1 \cos i - \cos b_1 \sin i \sin(l_1 - \Omega), \end{aligned} \tag{7}$$

welche durch die Einführung zweier Hilfsgrössen $q$, $Q$ die folgende Form annehmen:

$$\begin{aligned} &q_1 \sin Q_1 = \sin b_1 && \cos B_1 \cos L_1 = \cos b_1 \cos(l_1 - \Omega) \\ &q_1 \cos Q_1 = \cos b_1 \sin(l_1 - \Omega) && \cos B_1 \sin L_1 = q_1 \cos(Q_1 - i) \\ & && \sin B_1 = q_1 \sin(Q_1 - i). \end{aligned} \tag{8}$$

Die rechtwinkligen Coordinaten $x$, $y$, $z$, bezogen auf die Ebene $B$ werden dann

$$x_1 = r_1 \cos B_1 \cos L_1; \qquad y_1 = r_1 \cos B_1 \sin L_1; \qquad z_1 = r_1 \sin B_1 \tag{8b}$$

Die Entfernung der Massenpunkte $P_1$ $P$ ist gegeben durch

$$r_{01}^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2.$$

Für die numerische Berechnung aus den rechtwinkligen Coordinaten wäre zu rechnen:

$$\begin{aligned} r_{01} \cos\theta \cos\theta' &= x_1 - x \\ r_{01} \cos\theta \sin\theta' &= y_1 - y \\ r_{01} \sin\theta &= z_1 - z. \end{aligned} \tag{9}$$

Führt man die Polarcoordinaten, bezogen auf die Fundamentalebene $A$ ein, so wird

$$\begin{aligned} x_1 - x &= r_1 \cos b_1 \cos l_1 - r \cos b \cos l \\ y_1 - y &= r_1 \cos b_1 \sin l_1 - r \cos b \sin l \\ z_1 - z &= r_1 \sin b_1 - r \sin b. \end{aligned}$$

Legt man die Fundamentalebene $B$ zu Grunde, so treten $L_1$, $B_1$ an Stelle von $l_1$, $b_1$, es wird $r \cos b = \mathfrak{r}$, $r \sin b = z$, $l$ ist die Länge in der Bahn, und wenn $\theta' - l = \theta$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} r_{01} \cos\theta \cos\theta &= r_1 \cos B_1 \cos(L_1 - l) - \mathfrak{r} \\ r_{01} \cos\theta \sin\theta &= r_1 \cos B_1 \sin(L_1 - l) \\ r_{01} \sin\theta &= r_1 \sin B_1 - z. \end{aligned} \tag{10}$$

Aus den Formeln (8) lassen sich die Geschwindigkeiten nach den drei Axen leicht ableiten; es ist

$$\frac{dx}{dt} = \sin a \sin(A' + v)\frac{dr}{dt} + r \sin a \cos(A' + v)\frac{dv}{dt}$$

aber

$$\frac{dr}{dt} = \frac{k_0}{\sqrt{p}} e \sin v; \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{k_0}{r\sqrt{p}}(1 + e\cos v) = \frac{k_0\sqrt{p}}{r^2} \tag{11}$$

führt man diese Werthe ein, löst $\sin(A' + v)$, $\cos(A' + v)$ auf, so erhält man mit Einführung zweier Hilfsgrössen $\gamma$, $\Gamma$ die Formeln:

$$\begin{aligned} &\gamma \sin\Gamma = \frac{k_0}{\sqrt{p}} \sin v && \frac{dx}{dt} = \gamma \sin a \cos(A' + \Gamma) \\ &\gamma \cos\Gamma = \frac{k_0}{\sqrt{p}}(\cos v + e) && \frac{dy}{dt} = \gamma \sin b \cos(B' + \Gamma) \\ & && \frac{dz}{dt} = \gamma \sin c \cos(C' + \Gamma) \end{aligned} \tag{12}$$

Da die Constanten $A$, $B$, $C$, in den Formeln 12. 2 die Projectionen der Flächengeschwindigkeit $k_0\sqrt{p}$ auf die drei Coordinatenebenen sind, so hat man nach 2. 25:

$$
\begin{aligned}
x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} &= k_0\sqrt{p}\cos i \\
y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} &= k_0\sqrt{p}\sin i \sin \Omega \\
z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} &= -k_0\sqrt{p}\sin i \cos \Omega
\end{aligned}
\tag{13}
$$

oder, wenn man die Variabeln r, $l$, $z$ nach 10. 2 einführt:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{r}^2\frac{dl}{dt} = k_0\sqrt{p}\cos i \\
&\mathrm{r}\sin l\frac{dz}{dt} - \mathrm{r}\cos l\cdot z\frac{dl}{dt} - z\sin l\frac{d\mathrm{r}}{dt} = k_0\sqrt{p}\sin \Omega \sin i \\
&\mathrm{r}\cos l\frac{dz}{dt} + \mathrm{r}\sin l\cdot z\frac{dl}{dt} - z\cos l\frac{d\mathrm{r}}{dt} = k_0\sqrt{p}\cos \Omega \sin i.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

18. **Transformation der Differentialgleichungen für die Variation der Elemente.** Die Differentialgleichungen der Bewegung in rechtwinkligen und polaren Coordinaten ($A$ bis $D$) (pag. 292—295) können mit einigen leichten, bei der Berechnung der Störungen vorzunehmenden Transformationen sofort verwendet werden. Die Gleichungen ($E$) (pag. 298) jedoch müssen noch weiter ausgeführt werden, um die Variation jedes einzelnen Elementes für sich zu erhalten. Zu diesem Zwecke sind zunächst die Coordinaten $x$, $y$, $z$ als Functionen der sechs Elemente $a$, $e$, $M_0$, $\Omega$, $i$, $\omega$ darzustellen.

Sind $x_0$, $y_0$ die rechtwinkligen Coordinaten eines Himmelskörpers in seiner Bahn, wenn die $X_0$-Axe in der Richtung des Perihels angenommen wird, so erhält man die Coordinaten, bezogen auf eine feste Fundamentalebene nach 2. 1 nebst den Geschwindigkeiten gemäss der Bedingung $X' = Y' = Z' = 0$ (s. § 11)[1].

$$
\begin{aligned}
x &= \Phi = \alpha_1 x_0 + \beta_1 y_0 & x' &= \varphi = \alpha_1 x_0' + \beta_1 y_0' \\
y &= \Psi = \alpha_2 x_0 + \beta_2 y_0 & y' &= \psi = \alpha_2 x_0' + \beta_2 y_0' \\
z &= \mathrm{X} = \alpha_3 x_0 + \beta_3 y_0 & z' &= \chi = \alpha_3 x_0' + \beta_3 y_0'.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Die Formeln (1) haben die Eigenthümlichkeit, dass die drei Elemente $a$, $e$, $M_0$ nur in den $x_0$, $y_0$, hingegen die drei anderen Elemente $\Omega$, $i$, $\omega$ nur in den Coëfficienten $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ auftreten. Seien $b$, $c$ zwei Elemente der ersten Gruppe, $f$, $g$ zwei Elemente der zweiten Gruppe, so wird daher

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial b} &= \alpha_1\frac{\partial x_0}{\partial b} + \beta_1\frac{\partial y_0}{\partial b} & \frac{\partial x'}{\partial b} &= \alpha_1\frac{\partial x_0'}{\partial b} + \beta_1\frac{\partial y_0'}{\partial b} \\
\frac{\partial x}{\partial f} &= x_0\frac{\partial \alpha_1}{\partial f} + y_0\frac{\partial \beta_1}{\partial f} & \frac{\partial x'}{\partial f} &= x_0'\frac{\partial \alpha_1}{\partial f} + y_0'\frac{\partial \beta_1}{\partial f}.
\end{aligned}
$$

Man hat daher, wenn $\Sigma$ die Summe dreier Ausdrücke für $\iota = 1, 2, 3$ bedeutet:

$$
\begin{aligned}
[bc] = \Sigma\left(\alpha_\iota\frac{\partial x_0}{\partial b} + \beta_\iota\frac{\partial y_0}{\partial b}\right)\left(\alpha_\iota\frac{\partial x_0'}{\partial c} + \beta_\iota\frac{\partial y_0'}{\partial c}\right) - \left(\alpha_\iota\frac{\partial x_0}{\partial c} + \beta_\iota\frac{\partial y_0}{\partial c}\right)\left(\alpha_\iota\frac{\partial x_0'}{\partial b} - \beta_\iota\frac{\partial y_0'}{\partial b}\right) \\
= \left(\frac{\partial x_0}{\partial b}\frac{\partial x_0'}{\partial c} - \frac{\partial x_0}{\partial c}\frac{\partial x_0'}{\partial b}\right)\Sigma\alpha_\iota^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial b}\frac{\partial y_0'}{\partial c} - \frac{\partial y_0}{\partial c}\frac{\partial y_0'}{\partial b}\right)\Sigma\beta_\iota^2 \\
+ \left(\frac{\partial y_0}{\partial b}\frac{\partial x_0'}{\partial c} - \frac{\partial y_0}{\partial c}\frac{\partial x_0'}{\partial b} + \frac{\partial x_0}{\partial b}\frac{\partial y_0'}{\partial c} - \frac{\partial x_0}{\partial c}\frac{\partial y_0'}{\partial b}\right)\Sigma\alpha_\iota\beta_\iota,
\end{aligned}
$$

daher mit Rücksicht auf 2. 4 bis 7:

[1] Es ist

$$
\begin{aligned}
X' = \left(\alpha_1\frac{\partial x_0}{\partial a} + \beta_1\frac{\partial y_0}{\partial a}\right)\frac{da}{dt} + \left(\alpha_1\frac{\partial x_0}{\partial e} + \beta_1\frac{\partial y_0}{\partial e}\right)\frac{de}{dt} + \left(\alpha_1\frac{\partial x_0}{\partial M_0} + \beta_1\frac{\partial y_0}{\partial M_0}\right)\frac{dM_0}{dt} + \\
+ \left(x_0\frac{\partial \alpha_1}{\partial \Omega} + y_0\frac{\partial \beta_1}{\partial \Omega}\right)\frac{d\Omega}{dt} + \left(x_0\frac{\partial \alpha_1}{\partial i} + y_0\frac{\partial \beta_1}{\partial i}\right)\frac{di}{dt} + \left(x_0\frac{\partial \alpha_1}{\partial \omega} + y_0\frac{\partial \beta_1}{\partial \omega}\right)\frac{d\omega}{dt}.
\end{aligned}
$$

$$[bc] = \frac{\partial x_0}{\partial b}\frac{\partial x_0'}{\partial c} + \frac{\partial y_0}{\partial b}\frac{\partial y_0'}{\partial c} - \frac{\partial x_0}{\partial c}\frac{\partial x_0'}{\partial b} - \frac{\partial y_0}{\partial c}\frac{\partial y_0'}{\partial b}. \tag{2}$$

Ebenso erhält man

$$[fg] = (x_0 y_0' - y_0 x_0')\Sigma\left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial f}\frac{\partial\beta_i}{\partial g} - \frac{\partial\alpha_i}{\partial g}\frac{\partial\beta_i}{\partial f}\right) \tag{3}$$

$$[bf] = \left(x_0'\frac{\partial y_0}{\partial b} - x_0\frac{\partial y_0'}{\partial b}\right)\Sigma\beta_i\frac{\partial\alpha_i}{\partial f} + \left(y_0'\frac{\partial x_0}{\partial b} - y_0\frac{\partial x_0'}{\partial b}\right)\Sigma\alpha_i\frac{\partial\beta_i}{\partial f}. \tag{4}$$

Nun ist

$$E - e\sin E = M_0 + \mu t;\quad x_0 = a(\cos E - e);\quad y = a\sqrt{1-e^2}\sin E \tag{5}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\mu}{1-e\cos E}\quad x_0' = -\frac{a\mu\sin E}{1-e\cos E};\quad y_0' = +\frac{a\mu\sqrt{1-e^2}\cos E}{1-e\cos E}. \tag{6}$$

Die Ableitung der Ausdrücke (2) führt nun zu ziemlich complicirten Ausdrücken; man kann jedoch die Rechnung vereinfachen, wenn man bedenkt, dass die Coëfficienten die Zeit nicht explicite enthalten (s. § 11); da dieselbe demnach im Resultate herausfällt, so kann man sofort einen Spezialwerth einführen, der so gewählt werden kann, dass die Rechnung sich möglichst vereinfacht. Hierzu ist $t = -M_0:\mu$ zu setzen, weil dann $E = 0$ wird; es wird dann

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \frac{\partial E}{\partial\mu}\frac{\partial\mu}{\partial a} = +\frac{3}{2}\frac{M_0}{1-e};\quad \frac{\partial E}{\partial e} = 0;\quad \frac{\partial E}{\partial M_0} = \frac{1}{1-e}. \tag{7}$$

Es wird nun z. B.

$$\frac{\partial x_0'}{\partial e} = -\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{a\mu}{1-e\cos E}\right)\cdot\sin E - \frac{a\mu}{1-e\cos E}\cdot\cos E\frac{\partial E}{\partial e} = 0,$$

da der erste Ausdruck wegen des Faktors $\sin E$, der zweite wegen des Faktors $\frac{\partial E}{\partial e}$ verschwindet. Man erhält auf diese Weise

$$\begin{aligned} x_0 &= a(1-e) & x_0' &= 0 \\ y_0 &= 0 & y_0' &= a\mu\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}. \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x_0}{\partial a} = 1-e && \frac{\partial x_0}{\partial e} = -a && \frac{\partial x_0}{\partial M_0} = 0 \\
&\frac{\partial x_0'}{\partial a} = -\frac{3}{2}\frac{a\mu}{(1-e)^2}M_0 && \frac{\partial x_0'}{\partial e} = 0 && \frac{\partial x_0'}{\partial M_0} = -\frac{a\mu}{(1-e)^2} \\
&\frac{\partial y_0}{\partial a} = +\frac{3}{2}aM_0\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} && \frac{\partial y_0}{\partial e} = 0 && \frac{\partial y_0}{\partial M_0} = +a\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \\
&\frac{\partial y_0'}{\partial a} = -\frac{1}{2}\mu\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} && \frac{\partial y_0'}{\partial e} = +\frac{a\mu}{(1-e)\sqrt{1-e^2}} && \frac{\partial y_0'}{\partial M_0} = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Weiter wird

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\alpha_1}{\partial\Omega} = -\alpha_2 && \frac{\partial\alpha_2}{\partial\Omega} = +\alpha_1 && \frac{\partial\alpha_3}{\partial\Omega} = 0 \\
&\frac{\partial\beta_1}{\partial\Omega} = -\beta_2 && \frac{\partial\beta_2}{\partial\Omega} = +\beta_1 && \frac{\partial\beta_3}{\partial\Omega} = 0 \\
&\frac{\partial\alpha_1}{\partial i} = +\gamma_1\sin\omega && \frac{\partial\alpha_2}{\partial i} = +\gamma_2\sin\omega && \frac{\partial\alpha_3}{\partial i} = +\gamma_3\sin\omega \\
&\frac{\partial\beta_1}{\partial i} = +\gamma_1\cos\omega && \frac{\partial\beta_2}{\partial i} = +\gamma_2\cos\omega && \frac{\partial\beta_3}{\partial i} = +\gamma_3\cos\omega \\
&\frac{\partial\alpha_1}{\partial\omega} = +\beta_1 && \frac{\partial\alpha_2}{\partial\omega} = +\beta_2 && \frac{\partial\alpha_3}{\partial\omega} = +\beta_3 \\
&\frac{\partial\beta_1}{\partial\omega} = -\alpha_1 && \frac{\partial\beta_2}{\partial\omega} = -\alpha_2 && \frac{\partial\beta_3}{\partial\omega} = -\alpha_3.
\end{aligned} \tag{10}$$

Folglich

$$\begin{array}{lll}
& [ae] = 0 & [\Omega i] = -a^2\mu\sqrt{1-e^2}\sin i \\
& [eM_0] = 0 & [i\omega] = 0 \\
& [aM_0] = -\tfrac{1}{2}a\mu & [\Omega\omega] = 0 \\
[a\Omega] = -\tfrac{1}{2}a\mu\sqrt{1-e^2}\cos i & [e\Omega] = +\dfrac{a^2\mu e}{\sqrt{1-e^2}}\cos i & [M_0\Omega] = 0 \\
[ai] = 0 & [ei] = 0 & [M_0 i] = 0 \\
[a\omega] = -\tfrac{1}{2}a\mu\sqrt{1-e^2} & [e\omega] = +\dfrac{a^2\mu e}{\sqrt{1-e^2}} & [M_0\omega] = 0
\end{array} \tag{11}$$

Hiermit werden die Gleichungen ($E$) (pag. 298):

$$-\tfrac{1}{2}a\mu\frac{dM_0}{dt} - \tfrac{1}{2}a\mu\sqrt{1-e^2}\cos i\frac{d\Omega}{dt} - \tfrac{1}{2}a\mu\sqrt{1-e^2}\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a}$$

$$+\frac{a^2\mu e}{\sqrt{1-e^2}}\cos i\frac{d\Omega}{dt} + \frac{a^2\mu e}{\sqrt{1-e^2}}\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial e}$$

$$+\tfrac{1}{2}a\mu\frac{da}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial M_0}$$

$$+\tfrac{1}{2}a\mu\sqrt{1-e^2}\cos i\frac{da}{dt} - \frac{a^2\mu e}{\sqrt{1-e^2}}\cos i\frac{de}{dt} - a^2\mu\sqrt{1-e^2}\sin i\frac{di}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\Omega}$$

$$+a^2\mu\sqrt{1-e^2}\sin i\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial i}$$

$$+\tfrac{1}{2}a\mu\sqrt{1-e^2}\frac{da}{dt} - \frac{a^2\mu e}{\sqrt{1-e^2}}\frac{de}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\omega}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man sofort[1])

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= +\frac{2}{a\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial M_0} \\
\frac{dM_0}{dt} &= -\frac{2}{a\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial a} - \frac{1-e^2}{a^2\mu e}\frac{\partial\Omega}{\partial e} \\
\frac{d\Omega}{dt} &= +\frac{1}{a^2\mu\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial\Omega}{\partial i} \\
\frac{di}{dt} &= -\frac{1}{a^2\mu\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial\Omega}{\partial\Omega} + \frac{\cos i}{a^2\mu\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial\Omega}{\partial\omega} \\
\frac{d\omega}{dt} &= +\frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2\mu e}\frac{\partial\Omega}{\partial e} - \frac{\cos i}{a^2\mu\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial\Omega}{\partial i} \\
\frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2\mu e}\frac{\partial\Omega}{\partial\omega} + \frac{1-e^2}{a^2\mu e}\frac{\partial\Omega}{\partial M_0}
\end{aligned} \tag{12}$$

**19. Variation der Elemente. Einführung der störenden Kräfte $P$, $Q$, $Z^{(0)}$.** Will man statt der Differentialquotienten der Störungsfunction die störenden Kräfte $X$, $Y$, $Z$ einführen, so hat man

$$\frac{\partial\Omega}{\partial k} = \frac{\partial\Omega}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial k} + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial k} + \frac{\partial\Omega}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial k},$$

wenn $k$ irgend eines der sechs Elemente ist. Man hat daher zunächst die

---

[1]) Die Gleichungen entstehen der Reihe nach in folgender Weise: 1) die dritte Gleichung. 2) Die zweite multiplicirt mit $\frac{1-e^2}{2ae}$ und zur ersten addirt. 3) aus der fünften. 4) Die sechste multiplicirt mit $-\cos i$ und zur vierten addirt; 5) 6) durch Substitution der bereits erhaltenen Werthe in die zweite und sechste.

Differentialquotienten der rechtwinkligen Coordinaten zu ermitteln. Aus den Formeln 14. (4), (10) und (6) folgt[1],

$$\frac{\partial E}{\partial a} = -\tfrac{3}{2}\frac{\mu t}{a(1-e\cos E)};\quad \frac{\partial E}{\partial e} = +\frac{\sin E}{1-e\cos E};\quad \frac{\partial E}{\partial M_0} = +\frac{1}{1-e\cos E} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial a} &= +\frac{r}{a} - \tfrac{3}{2}\mu t \tang\varphi \sin v & \frac{\partial v}{\partial a} &= -\tfrac{3}{2}\frac{a\mu t}{r^2}\cos\varphi \\
\frac{\partial r}{\partial e} &= -a\cos v & \frac{\partial v}{\partial e} &= +\frac{\sin v}{\cos^2\varphi}(2+e\cos v) \\
\frac{\partial r}{\partial M_0} &= +a \tang\varphi \sin v & \frac{\partial v}{\partial M_0} &= +\frac{a^2}{r^2}\cos\varphi.
\end{aligned} \tag{2}$$

Setzt man

$$\begin{aligned}
\cos(v+\omega)\cos\Omega - \sin(v+\omega)\sin\Omega\cos i &= \mathrm{I} \\
\cos(v+\omega)\sin\Omega + \sin(v+\omega)\cos\Omega\cos i &= \mathrm{II} \\
\sin(v+\omega)\cos\Omega + \cos(v+\omega)\sin\Omega\cos i &= \mathrm{III} \\
\sin(v+\omega)\sin\Omega - \cos(v+\omega)\cos\Omega\cos i &= \mathrm{IV},
\end{aligned} \tag{3}$$

so wird:

$$x = r\mathrm{I} \qquad y = r\mathrm{II} \qquad z = r\sin(v+\omega)\sin i$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial r} &= +\mathrm{I} & \frac{\partial y}{\partial r} &= +\mathrm{II} & \frac{\partial z}{\partial r} &= +\sin(v+\omega)\sin i \\
\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial \omega} &= -r\mathrm{III} & \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial \omega} &= -r\mathrm{IV} & \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial \omega} &= +r\cos(v+\omega)\sin i \\
\frac{\partial x}{\partial \Omega} &= -r\mathrm{II} & \frac{\partial y}{\partial \Omega} &= +r\mathrm{I} & \frac{\partial z}{\partial \Omega} &= 0 \\
\frac{\partial x}{\partial i} &= +r\sin(v+\omega)\sin\Omega\sin i & \frac{\partial y}{\partial i} &= -r\sin(v+\omega)\cos\Omega\sin i & \frac{\partial z}{\partial i} &= +r\sin(v+\omega)\cos i,
\end{aligned} \tag{4}$$

folglich

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial a} &= \frac{x}{a} - \tfrac{3}{2}\mu t \tang\varphi \sin v\,\mathrm{I} + \tfrac{3}{2}\frac{a\mu t}{r}\cos\varphi\,\mathrm{III} \\
\frac{\partial y}{\partial a} &= \frac{y}{a} - \tfrac{3}{2}\mu t \tang\varphi \sin v\,\mathrm{II} + \tfrac{3}{2}\frac{a\mu t}{r}\cos\varphi\,\mathrm{IV} \\
\frac{\partial z}{\partial a} &= \frac{z}{a} - \tfrac{3}{2}\mu t \tang\varphi \sin v \sin(v+\omega)\sin i - \tfrac{3}{2}\frac{a\mu t}{r}\cos\varphi\cos(v+\omega)\sin i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial e} &= -a\cos v\,\mathrm{I} - \frac{r\sin v}{\cos^2\varphi}(2+e\cos v)\,\mathrm{III} \\
\frac{\partial y}{\partial e} &= -a\cos v\,\mathrm{II} - \frac{r\sin v}{\cos^2\varphi}(2+e\cos v)\,\mathrm{IV} \\
\frac{\partial z}{\partial e} &= -a\cos v\sin(v+\omega)\sin i + \frac{r\sin v}{\cos^2\varphi}(2+e\cos v)\cdot\cos(v+\omega)\sin i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial M_0} &= +a\tang\varphi\sin v\,\mathrm{I} - \frac{a^2}{r}\cos\varphi\,\mathrm{III} \\
\frac{\partial y}{\partial M_0} &= +a\tang\varphi\sin v\,\mathrm{II} - \frac{a^2}{r}\cos\varphi\,\mathrm{IV} \\
\frac{\partial z}{\partial M_0} &= +a\tang\varphi\sin v\sin(v+\omega)\sin i + \frac{a^2}{r}\cos\varphi\cos(v+\omega)\sin i.
\end{aligned}$$

[1] Es genügt hier die Zwischenresultate anzuführen, da die Ausführung der Differentiationen und die Reduction der erhaltenen Ausdrücke keinen Schwierigkeiten unterliegt.

Führt man hier die angezeigten Operationen durch, so erhält man nach entsprechender Reduction[1]):

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{x}{a} + \frac{3}{2}\frac{\mu t}{\cos\varphi}(+\mathrm{III} - e\beta_1) \qquad \frac{\partial y}{\partial a} = \frac{y}{a} + \frac{3}{2}\frac{\mu t}{\cos\varphi}(+\mathrm{IV} - e\beta_2)$$
$$\frac{\partial x}{\partial e} = -\frac{r\sin v}{\cos^2\varphi}\mathrm{III} - a\alpha_1 \qquad \frac{\partial y}{\partial e} = -\frac{r\sin v}{\cos^2\varphi}\mathrm{IV} - a\alpha_2$$
$$\frac{\partial x}{\partial M_0} = -\frac{a}{\cos\varphi}(+\mathrm{III} - e\beta_1) \qquad \frac{\partial y}{\partial M_0} = -\frac{a}{\cos\varphi}(+\mathrm{IV} - e\beta_2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{z}{a} + \frac{3}{2}\frac{\mu t}{\cos\varphi}[-\cos(v+\omega)\sin i - e\beta_3]$$
$$\frac{\partial z}{\partial e} = +\frac{r\sin v}{\cos^2\varphi}\cos(v+\omega)\sin i - a\alpha_3 \qquad (5)$$
$$\frac{\partial z}{\partial M_0} = -\frac{a}{\cos\varphi}[-\cos(v+\omega)\sin i - e\beta_3].$$

Hieraus erhält man nun

$$\frac{\partial\Omega}{\partial a} = \frac{xX_1 + yY_1 + zZ_1}{a} - \frac{3}{2}\frac{\mu t}{\cos\varphi}[Q + e(\beta_1X_1 + \beta_2Y_1 + \beta_3Z_1)]$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial e} = +\frac{r\sin v}{\cos^2\varphi}Q - a(\alpha_1X_1 + \alpha_2Y_1 + \alpha_3Z_1)$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial M_0} = +\frac{a}{\cos\varphi}[Q + e(\beta_1X_1 + \beta_2Y_1 + \beta_3Z_1)]$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial\Omega} = r(\mathrm{I}\,Y_1 - \mathrm{II}\,X_1) \qquad (6)$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial i} = r\sin(v+\omega)(\gamma_1X_1 + \gamma_2Y_1 + \gamma_3Z_1)$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial\omega} = +rQ,$$

wobei

$$Q = -\mathrm{III}\,X_1 - \mathrm{IV}\,Y_1 + \cos(v+\omega)\sin i\,Z_1$$

gesetzt ist. Aus den Gleichungen 18. 1 folgt aber

$$\alpha_1x + \alpha_2y + \alpha_3z = x_0 = r\cos v$$
$$\beta_1x + \beta_2y + \beta_3z = y_0 = r\sin v$$
$$\gamma_1x + \gamma_2y + \gamma_3z = 0$$

und da Kräfte ebenso zusammengesetzt werden, wie die Coordinaten selbst, so ist

$$\alpha_1X_1 + \alpha_2Y_1 + \alpha_3Z_1 = X^{(0)} \qquad X_1 = \alpha_1X^{(0)} + \beta_1Y^{(0)} + \gamma_1Z^{(0)}$$
$$\beta_1X_1 + \beta_2Y_1 + \beta_3Z_1 = Y^{(0)} \qquad Y_1 = \alpha_2X^{(0)} + \beta_2Y^{(0)} + \gamma_2Z^{(0)} \qquad (7)$$
$$\gamma_1X_1 + \gamma_2Y_1 + \gamma_3Z_1 = Z^{(0)} \qquad Z_1 = \alpha_3X^{(0)} + \beta_3Y^{(0)} + \gamma_3Z^{(0)}$$

---

[1]) Es wird z. B.

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{x}{a} - \frac{3}{2}\frac{\mu t}{\cos\varphi}[\sin v\sin\varphi\,\mathrm{I} - (1 + e\cos v)\,\mathrm{III}] =$$
$$= \frac{x}{a} - \frac{3}{2}\frac{\mu t}{\cos\varphi}[-\mathrm{III} - e(\sin\omega\cos\Omega + \cos\omega\sin\Omega\cos i)].$$

Die Ausdrücke für

$$\frac{\partial\Omega}{\partial a},\quad \frac{\partial\Omega}{\partial e},\quad \frac{\partial\Omega}{\partial M_0}$$

ergeben sich auch unmittelbar, wenn man die Kräfte $X^{(0)}$, $Y^{(0)}$, $Z^{(0)}$ einführt, denn es ist z. B.

$$\frac{\partial\Omega}{\partial a} = \frac{\partial\Omega}{\partial x_0}\frac{\partial x_0}{\partial a} + \frac{\partial\Omega}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial a} + \frac{\partial\Omega}{\partial z_0}\frac{\partial z_0}{\partial a} = X^{(0)}\frac{\partial x_0}{\partial a} + Y^{(0)}\frac{\partial y_0}{\partial a} + Z^{(0)}\frac{\partial z_0}{\partial a}.$$

wenn $X^{(0)}$ die störende Kraft in der Richtung des Perihels, $Y^{(0)}$ die störende Kraft senkrecht dazu in der ungestörten Bahnebene, und $Z^{(0)}$ die störende Kraft senkrecht auf die ungestörte Bahnebene sind. Hiermit findet sich:

$$Q = -\sin v(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 Y_1 + \alpha_3 Z_1) + \cos v(\beta_1 X_1 + \beta_2 Y_1 + \beta_3 Z_1)$$
$$\mathrm{I}\,Y_1 - \mathrm{II}\,X_1 = \gamma_3 (Y^{(0)} \cos v - X^{(0)} \sin v) - Z^{(0)} \cos(v + \omega) \sin i$$

oder

$$Q = Y^{(0)} \cos v - X^{(0)} \sin v$$
$$\mathrm{I}\,Y_1 - \mathrm{II}\,X_1 = \gamma_3 Q - Z^{(0)} \cos(v + \omega) \sin i$$
$$x X_1 + y Y_1 + z Z_1 = x_0 X^{(0)} + y_0 Y^{(0)}.$$

$Q$ ist demnach die Kraft senkrecht zum Radiusvector in der ungestörten Bahnebene; führt man noch die Kraft $P$ in der Richtung des Radiusvectors ein, so dass

$$P = Y_0 \sin v + X_0 \cos v$$
$$Q = Y_0 \cos v - X_0 \sin v$$

ist, so wird

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Omega}{\partial a} &= +\frac{r}{a} P - \tfrac{3}{2} \frac{\mu t}{\cos\varphi} (Q + e Y^{(0)}) & \frac{\partial\Omega}{\partial M_0} &= +\frac{a}{\cos\varphi} (Q + e Y^{(0)}) \\
\frac{\partial\Omega}{\partial e} &= +\frac{r \sin v}{\cos^2\varphi} Q - a X^{(0)} & \frac{\partial\Omega}{\partial \omega} &= + r Q \\
\frac{\partial\Omega}{\partial \Omega} &= + r \cos i\, Q - r Z^{(0)} \cos(v + \omega) \sin i & \frac{\partial\Omega}{\partial i} &= + r \sin(v + \omega) Z^{(0)}.
\end{aligned} \qquad (9)$$

Damit werden die Differentialgleichungen für die Elemente:

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= + \frac{2}{\mu \cos\varphi} (Q + e Y^{(0)}) \\
\frac{dM_0}{dt} &= -\frac{2r}{a^2\mu} P + \frac{3t}{a\cos\varphi} (Q + e Y^{(0)}) - \frac{r \sin v}{a^2 \mu e} Q + \frac{\cos^2\varphi}{a \mu e} X^{(0)} \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r \sin(v + \omega)}{a^2 \mu \cos\varphi \sin i} Z^{(0)} \\
\frac{di}{dt} &= + \frac{r \cos(v + \omega)}{a^2 \mu \cos\varphi} Z^{(0)} \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{r \sin v}{a^2 \mu e \cos\varphi} Q - \frac{\cos\varphi}{a\mu e} X^{(0)} - \frac{r \sin(v + \omega) \cos i}{a^2 \mu \cos\varphi \sin i} Z^{(0)} \\
\frac{de}{dt} &= - \frac{r \cos\varphi}{a^2 \mu e} Q + \frac{\cos\varphi}{a\mu e} (Q + e Y^{(0)}).
\end{aligned} \qquad (10)$$

In den Differentialquotienten für $a$, $\omega$, $M_0$ und $e$ sind noch $X^{(0)}$ und $Y^{(0)}$ durch $P$ und $Q$ zu ersetzen. Es ist aber

$$Y^{(0)} = P \sin v + Q \cos v \qquad X^{(0)} = P \cos v - Q \sin v.$$

Nach einigen leichten Reductionen erhält man dann für $a$, $e$, $\omega$ die in den Formeln (11) enthaltenen Resultate. Für $dM_0$ jedoch ist noch eine Bemerkung zu machen, da hier die Zeit noch explicite vorkommt; trennt man diesen Theil ab, so wird der erste Theil

$$\left(\frac{dM_0}{dt}\right)_1 = -\frac{2r}{a^2\mu} P - \frac{r \sin v}{a^2 \mu e} Q + \frac{\cos^2\varphi}{a^2 \mu e} a X^{(0)}$$

sein, dessen Reduction ebenfalls keinen weiteren Schwierigkeiten unterliegt. Der zweite Theil lässt sich schreiben

$$\left(\frac{dM_0}{dt}\right)_2 = -\frac{3t}{a\cos\varphi} (Q + e Y^{(0)}) = -\tfrac{3}{2} \frac{\mu}{a} \frac{da}{dt} t = t \frac{d\mu}{da} \frac{da}{dt} = t \frac{d\mu}{dt}$$

und man hat daher

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{\mu\cos\varphi}\left(e\sin v\cdot P + \frac{a}{r}\cos^2\varphi\, Q\right)\\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r\sin(v+\omega)}{a^2\mu\cos\varphi\sin i} Z^{(0)}\\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{a\mu e}[(\sin E + \cos\varphi\sin v)Q - \cos\varphi\cos v\cdot P] - \frac{r\sin(v+\omega)\cos i}{a^2\mu\cos\varphi\sin i} Z^{(0)}\\
\frac{dM_0}{dt} &= \frac{1}{a\mu e}\left[\left(-2\frac{re}{a} + \cos^2\varphi\cos v\right)P - (\cos\varphi\sin E + \cos^2\varphi\sin v)Q\right] + \left(\frac{dM_0}{dt}\right)_2 \qquad (11)\\
\frac{di}{dt} &= +\frac{r\cos(v+\omega)}{a^2\mu\cos\varphi} Z^{(0)}\\
\frac{de}{dt} &= +\frac{\cos\varphi}{a\mu}[(\cos E + \cos v)Q + \sin v\, P].
\end{aligned}$$

Der zweite Theil in $\frac{dM_0}{dt}$ wird

$$\left(\frac{dM_0}{dt}\right)_2 = \frac{3t}{a\cos\varphi}(Q + e\,Y^{(0)}) = \frac{3}{2}\frac{\mu}{a}\frac{da}{dt}t = -t\frac{d\mu}{da}\frac{da}{dt} = -t\frac{d\mu}{dt}. \qquad (12)$$

Man kann nun die Störung $\left(\frac{dM_0}{dt}\right)_2$ in doppelter Weise berücksichtigen. Es ist nämlich in der ungestörten Bewegung:

$$M = M_0 + \mu t.$$

Für die Berechnung von $M$ in der gestörten Bewegung hat man für $M_0$ die gestörte mittlere Anomalie zur Zeit der Epoche zu nehmen, welche durch Veränderung der Elemente, ohne Rücksicht darauf, dass auch $\mu$ veränderlich ist, bestimmt wird. Da nun die in $t$ multiplicirten Glieder, wie aus dem Anfange dieses Paragraphen ersichtlich ist, daher rühren, dass auch $\mu$ veränderlich genommen wurde, indem hieraus der Differentialquotient $\frac{\partial E}{\partial a} = -\frac{3}{2}\frac{\mu t}{r}$ eintritt [vergl. die Formeln 18 (6) und (7)], so wird dieser Theil die Störung der mittleren Anomalie $\int\left(\frac{dM_0}{dt}\right)_1 dt$. Will man nun erstens mit der constanten mittleren Bewegung nach der Formel $M = M_0 + \mu t$ rechnen, so wird wegen:

$$\begin{aligned}
M &= M_0 + \int\left(\frac{dM_0}{dt}\right)_1 dt + \int\mu\, dt = M_0 + \int\left(\frac{dM_0}{dt}\right)_1 dt + \mu t - \int t\frac{d\mu}{dt}dt\\
&= M_0 + \int\left[\left(\frac{dM_0}{dt}\right)_1 + \left(\frac{dM_0}{dt}\right)_2\right]dt + \mu t,
\end{aligned}$$

die von der Veränderlichkeit von $\mu$ herrührende Variation von $M$ in die Störung der mittleren Anomalie zur Zeit der Epoche einbezogen sein und es wird:

$$M = M_0 + \mu t + \Delta M_0 \quad \text{wobei} \quad \frac{d\Delta M_0}{dt} = \left(\frac{dM_0}{dt}\right)_1 + \left(\frac{dM_0}{dt}\right)_2; \qquad (13)$$

für $\mu$ ist die ungestörte, constante, mittlere Bewegung zu setzen.

Man kann aber auch in der Formel $M = M_0 + \mu t$ für die gestörte Bewegung $\mu$ als veränderlich ansehen, und dann an $M_0$ nur den ersten Theil der Störung anbringen; dann ist

$$\frac{dM}{dt} = \left(\frac{dM}{dt}\right)_1 + \left(\frac{dM}{dt}\right) \quad \text{wo} \quad \left(\frac{dM}{dt}\right) = \mu$$

und $\mu$ veränderlich. Daraus erhält man durch Integration

$$M = M_0 + \int\left(\frac{dM_0}{dt}\right)_1 dt + \int\mu\, dt. \qquad (14)$$

Da aber

$$\mu = \int \frac{d\mu}{dt}\, dt$$

ist, wobei

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{\mu}{a}\frac{da}{dt} = -\frac{3}{a^2}\frac{\partial \Omega}{\partial M_0}$$

ist, so wird man

$$M = M_0 + \Delta M_0 + \zeta \tag{15a}$$

erhalten, wobei

$$\Delta M_0 = \int \left(\frac{dM_0}{dt}\right)_1 dt; \qquad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\frac{3}{a^2}\frac{\partial \Omega}{\partial M_0}. \tag{15b}$$

**20. Variation der Elemente für grosse Excentricitäten (nahe parabolische Bahnen) und für sehr kleine Excentricitäten und Neigungen.** Führt man statt der mittleren Anomalie $M_0$ die Zeit des Periheldurchganges $T_0$ ein, so wird man für die sämmtlichen Elemente dieselben Formeln erhalten, nur an Stelle von $\frac{dM_0}{dt}$ tritt die Störung der Perihelzeit, für welche sich

$$\begin{aligned}\frac{dT_0}{dt} = &-\frac{1}{a\mu^2 e}\left[\left(-\frac{2re}{a} + \cos^2\varphi\cos v\right)P - (\cos\varphi \sin E + \cos^2\varphi \sin v)\, Q\right] \\ &- \frac{3(t - T_0)}{a\cos\varphi\cdot\mu}\left(\sin v \sin\varphi\, P + \frac{a}{r}\cos^2\varphi\, Q\right)\end{aligned} \tag{1}$$

ergiebt, wobei an Stelle von $t$ hier $t - T_0$ als die seit der Epoche $T_0$ verflossene Zeit eingesetzt ist.

In dieser Form sind die Formeln auch für nahe parabolische Bahnen anwendbar, in welchem Falle $e$ nahe der Einheit sein wird. $\mu$ ist aber in diesem Falle noch durch $k_0 : a^{\frac{3}{2}}$ zu ersetzen. Da übrigens $a$ sehr gross und $\cos\varphi$ sehr klein wird, so wird man $a$ überall durch $p = a\cos^2\varphi$ ersetzen. Es wird dann zunächst

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{k_0\sqrt{p}}\left(e \sin v\, P + \frac{p}{r}\, Q\right),$$

während in den übrigen Ausdrücken $a$ vollständig verschwindet. Um auch hier $a$ zu eliminiren, kann man

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{a^2}\frac{da}{dt}$$

bestimmen; hieraus wird also:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{a}\right) = -\frac{2}{k_0\sqrt{p}}\left(e \sin v\, P + \frac{p}{r}\, Q\right); \tag{2}$$

oder man sucht an Stelle der Aenderung $a$ diejenige des Parameters. Da

$$\frac{dp}{dt} = \cos^2\varphi \frac{da}{dt} - 2ae\frac{de}{dt}$$

ist, so erhält man mit Einführung der Werthe von $\frac{da}{dt}$ und $\frac{de}{dt}$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{2p\sqrt{p}}{k_0(1 + e\cos v)}\, Q.$$

Dividirt man noch durch $-2p\sqrt{p}$ so erhält man die erste Formel (3); die übrigen folgen unmittelbar aus 19. 11. Man hat:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) = -\frac{Q}{k_0(1+e\cos v)} \qquad \frac{de}{dt} = +\frac{1}{k_0\sqrt{p}}[r(e+2\cos v+e\cos^2 v)Q+p\sin v P]$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = +\frac{r\sin(v+\omega)}{k_0\sqrt{p}\sin i}Z^{(0)} \qquad \frac{di}{dt} = +\frac{r\cos(v+\omega)}{k_0\sqrt{p}}Z^{(0)}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = +\frac{1}{k_0\sqrt{p}\,e}[(r+p)\sin v Q - p\cos v P] - \frac{r\sin(v+\omega)\cos i}{k_0\sqrt{p}\sin i}Z^{(0)} \tag{3}$$

$$\frac{dT_0}{dt} = \frac{a}{k_0^2 e}[(2er - p\cos v)P + (r+p)\sin v Q] -$$

$$-\frac{3(t-T_0)}{k_0\sqrt{p}}a\left[\sin\varphi\sin v P + \frac{p}{r}Q\right].$$

In dem Ausdrucke für $\frac{d\Omega}{dt}$ tritt der Nenner $\sin i$ auf, in den Ausdrücken für $\frac{dM_0}{dt}$, $\frac{d\omega}{dt}$ der Nenner $e$, in $\frac{d\omega}{dt}$ überdiess ebenfalls $\sin i$. Sind daher die Neigungen und Excentricitäten klein, so wird daraus eine beträchtliche Ungenauigkeit entstehen. Dass die Störungen bedeutend werden, ist theilweise in der Natur der Sache gelegen, da ja bei kleinen Neigungen der Bahnen sehr beträchtliche Verschiebungen der Knoten stattfinden können, ohne dass der Ort des Himmelskörpers dadurch wesentlich geändert würde, und andererseits in sehr nahe kreisförmigen Bahnen starke Drehungen der Apsiden ebenfalls nur ganz unwesentliche Aenderungen der Planetenorte mit sich bringen. Aber auch das umgekehrte ist der Fall: ein nur geringfügiges Hinaustreten des Himmelskörpers aus seiner Bahnebene wird bei kleiner Neigung derselben eine bedeutende Knotenverschiebung der osculirenden Ebene erzeugen, und ebenso wird ein nur unbedeutendes Abweichen des Planeten von einer nahe kreisförmigen Bahn eine sehr bedeutende Verschiebung der Apsiden der osculirenden Ellipse zur Folge haben. Wenn aber auch die Störungen in der Länge des Knotens und in der Richtung der Apsiden durch keinerlei Transformationen verkleinert werden können, so können doch die für die Bestimmung des Ortes des Himmelskörpers nöthigen Störungen von jenen starken Aenderungen, die sich schliesslich wegheben, befreit werden. Zunächst kann die von der Neigung abhängige starke Aenderung der Apsidenrichtung, die sich in $\omega$ zeigt, eliminirt werden, da eine nahe gleich grosse, entgegengesetzte Aenderung in $\Omega$ auftreten muss. Setzt man also

$$\Omega + \omega = \pi \text{ (Länge des Pericentrums)},$$

so wird

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{1}{a\mu e}[(\sin E + \cos\varphi\sin v)Q - \cos\varphi\cos v\cdot P] + \frac{r\sin(v+\omega)}{a^2\mu\cos\varphi}\tan\tfrac{1}{2}i\,Z^{(0)}$$

$$= \frac{1}{k_0\sqrt{p}\,e}[(r+p)\sin v\cdot Q - p\cos v\cdot P] + \frac{r\sin(v+\omega)}{k_0\sqrt{p}}\tan\tfrac{1}{2}i\,Z^{(0)} \tag{4}$$

von der Neigungsänderung nur minimal beeinflusst. Ebenso werden bei starken Aenderungen der Richtungen der Apsiden nothwendig nahe gleiche und entgegengesetzte Störungen der mittleren Anomalie auftreten; setzt man daher

$$\pi + M_0 = L_0 \text{ (mittlere Länge in der Bahn für die Epoche)},$$

so wird:

$$\frac{dL_0}{dt} = \frac{1}{a\mu}\left[\left(-\frac{2r}{a} - \cos\varphi\cos v\tan\tfrac{1}{2}\varphi\right)P + \tan\tfrac{1}{2}\varphi(\sin E + \cos\varphi\sin v)Q\right] +$$

$$+\frac{r\sin(v+\omega)}{a^2\mu\cos\varphi}\tan\tfrac{1}{2}i\,Z^{(0)} + \left(\frac{dM_0}{dt}\right)_1, \tag{5}$$

wobei das letzte Glied wieder in genau derselben Weise berücksichtigt werden kann, wie bei der mittleren Anomalie. In der Form

$$\begin{aligned}\frac{dL_0}{dt} = \frac{1}{k_0\sqrt{p}}&[(-2r\cos\varphi - p\cos v\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi)P + (r+p)\sin v\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi\cdot Q] \\ &+ \frac{r\sin(v+\omega)}{k_0\sqrt{p}}\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}i\cdot Z^{(0)} + \frac{3(t-T_0)}{p}\cos\varphi\left(\sin\varphi\sin v\cdot P + \frac{p}{r}Q\right)\end{aligned} \tag{6}$$

ist die Formel auch auf nahe parabolische Bahnen anwendbar. Handelt es sich um die Berechnung der Störungen in $\Omega$ und $\pi$, so wird man für sehr kleine Werthe von $i$ oder $e$ das Auftreten der Nenner umgehen, indem man andere Variable durch die folgenden Gleichungen einführt:

$$\begin{aligned}\sin i\sin\Omega &= \Xi \\ \sin i\cos\Omega &= \mathrm{H}\end{aligned} \quad (7) \qquad \begin{aligned}e\sin\pi &= \Phi \\ e\cos\pi &= \Psi\end{aligned} \quad (8)$$

Da

$$\frac{d\Xi}{dt} = \cos i\sin\Omega\frac{di}{dt} + \sin i\cos\Omega\frac{d\Omega}{dt} \qquad \frac{d\Phi}{dt} = \sin\pi\frac{de}{dt} + e\cos\pi\frac{d\pi}{dt}$$

$$\frac{d\mathrm{H}}{dt} = \cos i\cos\Omega\frac{di}{dt} - \sin i\sin\Omega\frac{d\Omega}{dt} \qquad \frac{d\Psi}{dt} = \cos\pi\frac{de}{dt} - e\sin\pi\frac{d\pi}{dt}$$

ist, so folgt

$$\begin{aligned}\frac{d\Xi}{dt} &= \frac{1}{a^2\mu\cos\varphi}\cdot r[\sin(v+\omega+\Omega) - 2\cos(v+\omega)\sin\Omega\sin^2\tfrac{1}{2}i]Z^{(0)} \\ \frac{d\mathrm{H}}{dt} &= \frac{1}{a^2\mu\cos\varphi}\cdot r[\cos(v+\omega+\Omega) - 2\cos(v+\omega)\cos\Omega\sin^2\tfrac{1}{2}i]Z^{(0)}\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{dt} &= \frac{1}{a\mu}[\{\cos\pi\sin E + \sin\pi\cos E\cos\varphi + \cos\varphi\sin(\pi+v)\}Q - \cos\varphi\cos(\pi+v)P] \\ &\qquad + \frac{r\sin(v+\omega)\cos\pi}{a^2\mu}\mathrm{tang}\,\varphi\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}iZ^{(0)} \\ \frac{d\Psi}{dt} &= \frac{1}{a\mu}[\{-\sin\pi\sin E + \cos\pi\cos E\cos\varphi + \cos\varphi\cos(\pi+v)\}Q + \cos\varphi\sin(\pi+v)P] \\ &\qquad - \frac{r\sin(v+\omega)\sin\pi}{a^2\mu}\mathrm{tang}\,\varphi\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}iZ^{(0)},\end{aligned} \tag{10}$$

aus welchen Formeln die kritischen Nenner verschwunden sind. Sind diese Differentialausdrücke integrirt, und die Aenderungen der Elemente $\Xi$, $\mathrm{H}$, $\Phi$, $\Psi$ gefunden, so wird man mittels der Formeln (7), (8) die Elemente $i$, $\Omega$, $e$, $\pi$ erhalten, wobei allerdings wieder die Nenner $i$, $e$ auftreten; da sie jedoch erst zum Schlusse erscheinen, so werden sie die Genauigkeit der numerischen Operationen nicht beeinträchtigen.

An Stelle der Grösse $\pi$ kann auch eine andere $\nu$ eingeführt werden, die mit $\Omega$ und $\omega$ durch die Beziehung verbunden ist

$$\frac{d\nu}{dt} = \cos i\frac{d\Omega}{dt} + \frac{d\omega}{dt}. \tag{11}$$

Für diese ergiebt sich

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{1}{k_0\sqrt{p}\,e}[(r+p)\sin v\cdot Q - p\cos v P]. \tag{12}$$

Da weiter

$$\left(\frac{dM_0}{dt}\right)_1 = \frac{\cos\varphi}{k_0 e\sqrt{p}}\left[(-2re + p\cos v)P - p\left(\frac{\sin E}{\cos\varphi} + \sin v\right)Q\right]$$

geschrieben werden kann, so folgt

$$\frac{d\nu}{dt} + \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{dM_0}{dt}\right)_1 = -\frac{2r}{k_0\sqrt{p}}P. \tag{13}$$

**21. Die Störung der Perihelzeit in der parabolischen Bewegung.** Sämmtliche Formeln bleiben brauchbar, ebensowohl für sehr nahe parabolische Bahnen, als auch für die Parabel selbst, mit Ausnahme der Formel für $\frac{dT_0}{dt}$, in welcher der Faktor $a$, die grosse Halbaxe auftritt, welcher für die Parabel unendlich wird. In Folge dessen muss der zweite Faktor Null werden, und für die Parabel wird sich der Ausdruck in der Form $0\cdot\infty$ darstellen; für sehr nahe parabolische Bahnen wird derselbe das Produkt zweier Faktoren, von denen der eine sehr gross, der andere sehr klein ist. Um diesem Uebelstand abzuhelfen, kann der folgende dem von v. OPPOLZER eingeschlagenen ähnliche[1]) Vorgang dienen. Es ist:

$$\frac{dT_0}{dt} = \frac{p}{k_0^2}\left[\frac{2re - p\cos v}{e\cos^2\varphi} - \frac{3k\sqrt{M+m}(t-T_0)}{\cos^2\varphi}\,\frac{e\sin v}{\sqrt{p}}\right]P +$$
$$+\frac{p}{k_0^2}\left[\frac{(r+p)\sin v}{e\cos^2\varphi} - \frac{3k\sqrt{M+m}(t-T_0)\sqrt{p}}{r\cos^2\varphi}\right]Q.$$

Setzt man den Coëfficienten in der Klammer bei $Q$ gleich $U$[2]), sodass

$$U = \frac{(r+p)\sin v}{e\cos^2\varphi} - \frac{3k_0(t-T_0)\sqrt{p}}{r\cos^2\varphi} = \frac{r}{e\cos^2\varphi}\left[\left(1+\frac{p}{r}\right)\sin v - \right.$$
$$\left.\frac{3k_0(t-T_0)\sqrt{p}\cdot e}{r^2}\right],$$

so wird der Klammercoëfficient von $P$:

$$\frac{2re - p\cos v}{e\cos^2\varphi} + \frac{re\sin v}{p}U - \frac{re\sin v}{p}\,\frac{(r+p)\sin v}{e\cos^2\varphi}$$
$$= \frac{re\sin v}{p}U + \frac{r^2}{pe\cos^2\varphi}\left[2e\frac{p}{r} - \left(\frac{p}{r}\right)^2\cos v - e\sin^2 v\left(1+\frac{p}{r}\right)\right]$$
$$= \frac{re\sin v}{p}U - \frac{r^2}{pe}\cos v$$

---

[1]) Vergl. dessen »Lehrbuch zur Bahnbestimmung von Planeten und Kometen«, II. Theil, pag. 226 u. 398.

[2]) Dieser Coëfficient hat eine einfache analytische Bedeutung. Ersetzt man in den Elementen und den Differentialquotienten nach denselben $a$ durch $p$, so wird

$$\frac{\partial v}{\partial e} = \left(\frac{\partial v}{\partial e}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)\frac{\partial a}{\partial e}$$

und da $a = \frac{p}{1-e^2}$ ist, so wird mit den Formeln 19 (2)

$$\frac{\partial v}{\partial e} = \frac{\sin v}{\cos^2\varphi}(2 + e\cos v) - \frac{3k\sqrt{M+m}(t-T_0)\sqrt{p}\,e}{r^2\cos^2\varphi}$$

daher, wie man leicht findet, wenn man die Relation $\frac{p}{r} = 1 + e\cos v$ berücksichtigt:

$$U = \frac{r}{e}\,\frac{\partial v}{\partial e}.$$

v. OPPOLZER ersetzt $a$ nicht durch $p$, sondern durch $q$ (Periheldistanz). Bezeichnet man in diesem Falle den Differentialquotienten mit $\left[\frac{\partial v}{\partial e}\right]$, so findet man leicht

$$\frac{\partial v}{\partial e} = \left[\frac{\partial v}{\partial e}\right]\cdot\frac{2e}{1+e} + \frac{1-e}{1+e}\left(\frac{\partial v}{\partial e}\right),$$

womit sich die Identität der hier gegebenen Formeln für $\frac{dT_0}{dt}$ mit der von v. OPPOLZER gegebenen sofort verificirt.

demnach

$$\frac{dT_0}{dt} = \frac{1}{k_0^2}\left\{-\frac{r^2}{e}\cos v + re\sin v\,U\right\}P + \frac{1}{k_0^2}\cdot pU\cdot Q \tag{1}$$

und es handelt sich noch um die Entwickelung von $U$. Es ist aber für nahe parabolische Bahnen nach Gleichung 14 (1), wenn $T_0$ die Perihelzeit ist:

$$\frac{k_0(1-e)\sqrt{1+e}}{q^{\frac{3}{2}}}(t-T_0) = -\frac{2\varepsilon\tau}{1+\varepsilon\tau^2} + \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\,arc\,tang\,\tau\sqrt{\varepsilon}$$

$$\frac{k_0\sqrt{1+e}}{2q^{\frac{3}{2}}}(t-T_0) = R = \tau + \tfrac{1}{3}\tau^3 - 2\varepsilon(\tfrac{1}{3}\tau^3 + \tfrac{1}{5}\tau^5) + 3\varepsilon^2(\tfrac{1}{5}\tau^5 + \tfrac{1}{7}\tau^7)\;\ldots\ldots,$$

wobei

$$\tau = tang\,\tfrac{1}{2}v, \qquad \varepsilon = \frac{1-e}{1+e}$$

ist. Benützt man den ersten der beiden Werthe, so erhält man für $U$ einen geschlossenen Ausdruck, jedoch in der Form $\frac{0}{0}$, da im Nenner der Faktor $\cos^3\varphi$ stehen bleibt; es wird daher besser, sofort die Reihenentwickelung vorzunehmen. Nun ist:

$$\mathrm{I} = \left(1+\frac{p}{r}\right)\sin v = (2 + e\cos v)\sin v = \frac{p^2}{r^2}\,\frac{2+e\cos v}{(1+e\cos v)^2}\sin v =$$

$$= \frac{p^2}{r^2}\,\frac{\tau}{1+e}\,\frac{(3+\varepsilon)+(1+3\varepsilon)\tau^2}{(1+\varepsilon\tau^2)^3}$$

$$\mathrm{II} = \frac{3k_0(t-T_0)\sqrt{p}\cdot e}{r^2} = \frac{p^2}{r^2}\,\frac{3(1-\varepsilon)}{1+e}\,R.$$

Setzt man nun

$$\theta = \varepsilon\tau^2$$

und für den Augenblick der Kürze halber

$$\frac{3p^2}{r^2(1+e)} = \mathfrak{A},$$

so wird:

$$\mathrm{I} = \mathfrak{A}\tau[1 + \theta + \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\tau^2]\left(1 - \frac{2\theta+\theta^2}{(1+\theta)^2}\right) =$$

$$= \mathfrak{A}\left[\tau + \tfrac{1}{3}\tau^3 + \varepsilon\tau^3 + \tfrac{1}{3}\varepsilon\tau - (\tau + \tau\theta + \tfrac{1}{3}\varepsilon\tau + \tfrac{1}{3}\tau^3)\frac{2\theta+\theta^2}{(1+\theta)^2}\right]$$

$$\mathrm{II} = \mathfrak{A}(1-\varepsilon)R =$$

$$= \mathfrak{A}[\tau + \tfrac{1}{3}\tau^3 - \varepsilon(\tau + \tau^3 + \tfrac{2}{5}\tau^5) + \varepsilon^2(\tfrac{2}{3}\tau^3 + \tau^5 + \tfrac{3}{7}\tau^7) - \varepsilon^3(\tfrac{3}{5}\tau^5 + \tau^7 + \tfrac{4}{9}\tau^9) + \ldots]$$

$$= \mathfrak{A}\left[\tau + \tfrac{1}{3}\tau^3 - \frac{\varepsilon\tau^3}{1+\varepsilon\tau^2} - \varepsilon\tau(1 - \tfrac{2}{3}\theta + \tfrac{3}{5}\theta^2 - \tfrac{4}{7}\theta^3 + \ldots) - \varepsilon\tau^5(\tfrac{2}{5} - \tfrac{3}{7}\theta + \tfrac{4}{9}\theta^2 - \ldots\right]$$

$$= \mathfrak{A}\left[\tau + \tfrac{1}{3}\tau^3 - \frac{\varepsilon\tau^3}{1+\theta} - \varepsilon\tau(1 - \theta + \theta^2 - \theta^3\;\ldots\;.) - \right.$$

$$\left. - \varepsilon\tau(\tfrac{1}{3}\theta - \tfrac{2}{5}\theta^2 + \tfrac{3}{7}\theta^3 - \ldots) - \varepsilon\tau^5(\tfrac{2}{5} - \tfrac{3}{7}\theta + \tfrac{4}{9}\theta^2 - \ldots)\right]$$

$$= \mathfrak{A}\left[\tau + \tfrac{1}{3}\tau^3 - \frac{\varepsilon\tau + \varepsilon\tau^3}{1+\theta} - \tfrac{1}{3}\varepsilon\tau\theta - (\varepsilon\tau^5 - \varepsilon^3\tau^5)(\tfrac{2}{5} - \tfrac{3}{7}\theta + \tfrac{4}{9}\theta^2 - \ldots)\right].$$

Nach einer leichten Reduktion folgt daher

$$\mathrm{I} - \mathrm{II} = \mathfrak{A}\varepsilon\tau\left[\frac{\tfrac{1}{3} + \theta - \tfrac{2}{3}\tau^4 - \tfrac{1}{3}\theta\tau^4}{(1+\theta)^2} + \tfrac{1}{3}\theta + (1-\varepsilon^2)\tau^4(\tfrac{2}{5} - \tfrac{3}{7}\theta + \tfrac{4}{9}\theta^2 - \ldots)\right].$$

Setzt man daher

$$\frac{\frac{1}{2}+\theta}{1+\theta}+\frac{1}{3}\theta(1+\theta)=\theta_0;\quad \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\theta}{1+\theta}=\theta'$$

$$(\tfrac{2}{5}-\tfrac{3}{7}\theta+\tfrac{4}{9}\theta^2-\tfrac{5}{11}\theta^3+\tfrac{6}{13}\theta^4-\ldots)(1+\theta)=\text{H},$$

so wird

$$\text{I}-\text{II}=\frac{\mathfrak{A}\varepsilon\tau}{1+\theta}[\theta_0-\theta'\tau^4+(1-\varepsilon^2)\text{H}\tau^4]$$

und demnach

$$U=\frac{r}{e\cos^2\varphi}(\text{I}-\text{II})=\frac{\mathfrak{A}r\,tang\,\frac{1}{2}v}{e(1+e)^2(1+\theta)}[\theta_0-\theta'\,tang^4\tfrac{1}{2}v+(1-\varepsilon^2)\text{H}\,tang^4\tfrac{1}{2}v]$$

$$=\frac{8p(1+e\cos v)}{e(1+e)^2(1+\theta)}tang\,\tfrac{1}{2}v[\theta_0-\theta'\,tang^4\tfrac{1}{2}v+(1-\varepsilon^2)\text{H}\,tang^4\tfrac{1}{2}v].$$

Setzt man noch $p=q(1+e)$ und ersetzt überall $e$ durch $\varepsilon$, so wird der Coëfficient vor der Klammergrösse:

$$\frac{8q}{e(1+e)^2}\frac{1+e\cos v}{1+\theta}\tau=\frac{8q}{2}\frac{(1+\varepsilon)^2}{1-\varepsilon}\frac{\cos^2\frac{1}{2}v+\varepsilon\sin^2\frac{1}{2}v}{1+\theta}\cdot\tau=\frac{8q}{4}\frac{(1+\varepsilon)^2}{1-\varepsilon}\sin v,$$

folglich

$$U=\tfrac{8}{4}q\frac{(1+\varepsilon)^2}{1-\varepsilon}\sin v[\theta_0-\theta'\,tang^4\tfrac{1}{2}v+(1-\varepsilon^2)\text{H}\,tang^4\tfrac{1}{2}v].$$

Die Entwickelung der Ausdrücke für $\theta_0$ und $\theta'$ in Reihen wird nicht vortheilhaft; hingegen lassen sich die Ausdrücke etwas vereinfachen. Es ist nämlich, wenn man in $\theta_0$ auf gemeinschaftlichen Nenner bringt:

$$\theta_0=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\theta+\frac{2}{3}\theta^2+\frac{1}{3}\theta^3}{1+\theta}=\frac{\frac{1}{2}(1+\theta)+\frac{2}{3}\theta^2(1+\theta)-\frac{1}{3}\theta^3}{1+\theta}=\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}\theta^2-\tfrac{1}{3}\frac{\theta^3}{1+\theta}.$$

Die Reihe für H wird, wenn mit dem Faktor $(1+\theta)$ ausmultiplicirt wird, stark convergent; man erhält:

$$\text{H}=\tfrac{2}{5}-\tfrac{1}{5.7}\theta+\tfrac{1}{7.9}\theta^2-\tfrac{1}{9.11}\theta^3+\tfrac{1}{11.13}\theta^4-\ldots$$

und hat daher zur Bestimmung von $U$ die Formeln;

$$\theta_0=\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}\theta^2-\tfrac{1}{3}\frac{\theta^3}{1+\theta}$$

$$\theta'=\tfrac{1}{4}\left(1+\frac{1}{1+\theta}\right)\tag{2}$$

$$\text{H}=\tfrac{2}{5}-\tfrac{1}{5.7}\theta+\tfrac{1}{7.9}\theta^2-\tfrac{1}{9.11}\theta^3+\ldots$$

$$U=\tfrac{8}{4}q\frac{(1+\varepsilon)^2}{1-\varepsilon}\sin v[\theta_0-\theta'\,tang^4\tfrac{1}{2}v+(1-\varepsilon^2)\text{H}\,tang^4\tfrac{1}{2}v].\tag{3}$$

Die Rechnung würde erleichtert durch Hilfstafeln, welche $\theta_0$, $\theta'$, H mit dem Argumente $\theta$ geben[1]). Für die Parabel ist $\varepsilon=0$, $\theta=0$, daher $\theta_0=\frac{1}{2}$, $\theta'=\frac{1}{2}$, $\text{H}=\frac{2}{5}$, demnach

$$U=q\sin v(1-\tfrac{1}{5}\,tang^4\tfrac{1}{2}v).\tag{4}$$

**22.** Störungsrechnung. Bei der Untersuchung des Einflusses der störenden Massen kann man zwei wesentlich verschiedene Wege einschlagen. Man kann die auftretenden Störungen durch numerische Rechnung bestimmen, wobei man diese, in gleichmässigen Zeitintervallen fortschreitend, für jeden Zeitpunkt speziell ermittelt. Der Vorgang ist dann der, dass man für einen gegebenen Moment den wirklichen, gestörten Ort des Himmelskörpers als bekannt (bereits

[1]) Deshalb wurde der Coëfficient von $tang^4\frac{1}{2}v$ nicht zusammengezogen; dieser Coëfficient $[\theta'-(1-\varepsilon^2)\text{H}]$ hängt nämlich ausser von dem Argumente $\theta$ noch von $\varepsilon$ selbst ab. Tafeln für $\theta_0$, $\theta'$, H sind vom Verfasser berechnet, aber bisher noch nicht publicirt worden.

berechnet) ansieht, die aus dieser Lage und der gleichzeitigen Lage aller störenden Körper resultierenden Kräfte numerisch bestimmt (in ihrem Verhältniss zu der Anziehung des Centralkörpers) und aus diesen Kräften den Ort des Himmelskörpers für das nächste Zeittheilchen sucht. Man nennt diese Methode die Methode der speziellen Störungen. Sie wird verwendet, wenn es sich um die Berechnung der Störungen nicht periodischer Kometen handelt, oder um die Ermittelung der Störungen eines periodischen Kometen oder eines kleinen Planeten in den ersten Jahren der Erscheinung, wenn noch nicht genügend sichere Elemente bekannt sind, und dieselben erst aus der Verbindung mehrerer Erscheinungen unter Berücksichtigung der Störungen abgeleitet werden sollen.

Handelt es sich jedoch darum, die Bewegung eines Himmelskörpers in der Art darzustellen, dass man durch analytische Formeln jederzeit den Ort desselben sofort, ohne die numerische Berechnung der früheren Orte, erhält, so wird man analytische Formeln aus der analytischen Form der störenden Kräfte abzuleiten haben. Diese Methode der Störungsrechnung nennt man die Methode der Berechnung der allgemeinen Störungen oder (nach HANSEN) absoluten Störungen. Sie wird zweckmässig, wenn man die Erscheinungen eines periodischen Kometen, eines Planeten, des Mondes oder der anderen Nebenplaneten zu verfolgen hat, einestheils, weil man für jene Zeiten, während welcher der Himmelskörper unsichtbar ist, die Störungen nicht zu kennen braucht und anderntheils, weil durch die einmalige Berechnung der allgemeinen Störungen Formeln gegeben sind, welche während beträchtlicher Zeiträume ungeändert anwendbar sind, während die Berechnung der speziellen Störungen immer wieder von Ort zu Ort weiter geführt werden muss.

Bei der Ermittelung der speziellen Störungen lassen sich die Methoden der Berechnung der Störungen in rechtwinkligen, in Polarcoordinaten und in den Elementen ziemlich scharf trennen; nicht so bei der Bestimmung der allgemeinen Störungen, wo die Versuche zur Integration der Differentialgleichungen oft auf mannigfache Combinationen zwischen den zu wählenden Variabeln führen.

### a) Berechnung der speziellen Störungen.

**23.** Spezielle Störungen in rechtwinkeligen Coordinaten. BOND-ENCKE'sche Methode. Bezeichnet man wie früher

$$\begin{aligned} \Sigma k^2 m_1 \left[\frac{x_1 - x}{r_{01}^3} - \frac{x_1}{r_1^3}\right] &= X_1 \\ \Sigma k^2 m_1 \left[\frac{y_1 - y}{r_{01}^3} - \frac{y_1}{r_1^3}\right] &= Y_1 \\ \Sigma k^2 m_1 \left[\frac{z_1 - z}{r_{01}^3} - \frac{z_1}{r_1^3}\right] &= Z_1, \end{aligned} \tag{1}$$

so gelten für die ungestörte Bewegung die Gleichungen (2), für die gestörte die Gleichungen (3):

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_0}{dt^2} &= -k_0^2\frac{x_0}{r_0^3} \\ \frac{d^2y_0}{dt^2} &= -k_0^2\frac{y_0}{r_0^3} \\ \frac{d^2z_0}{dt^2} &= -k_0^2\frac{z_0}{r_0^3} \end{aligned} \quad (2) \qquad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -k_0^2\frac{x}{r^3} + X_1 \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -k_0^2\frac{y}{r^3} + Y_1 \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -k_0^2\frac{z}{r^3} + Z_1 \end{aligned} \quad (3)$$

Man wird nun nicht die gestörten Coordinaten $x, y, z$, sondern die Störungen

$$x - x_0 = \xi, \qquad y - y_0 = \eta, \qquad z - z_0 = \zeta$$

ermitteln, und erhält hierzu durch Subtraction der Gleichungen (2) von (3):

$$\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2} &= X_1 + k_0^2\left(\frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3}\right)\\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= Y_1 + k_0^2\left(\frac{y_0}{r_0^3} - \frac{y}{r^3}\right)\\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= Z_1 + k_0^2\left(\frac{z_0}{r_0^3} - \frac{z}{r^3}\right).\end{aligned} \tag{4}$$

Die Berechnung der störenden Kräfte $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ bietet keine Schwierigkeit. Zwar sind in denselben auch die gestörten Coordinaten $x$, $y$, $z$, enthalten; da sie aber mit den störenden Massen $m_1$ multiplicirt sind, so wird es genügen, für dieselben Näherungen zu setzen, welche man stets haben wird. Legt man nämlich osculirende Elemente der Störungsrechnung zu Grunde (die vorhandenen Elemente können dabei immer als osculirende Elemente für eine gewisse Epoche angesehen werden und die durch eine definitive Bahnbestimmung mit Berücksichtigung der Störungen gefundenen Elementenverbesserungen geben dann Correctionen dieser osculirenden Elemente für die angenommene Epoche) so sind die Störungen für die Epoche der Osculation gleich Null, und steigen sehr langsam an. Im weiteren Verlaufe der Störungsrechnung wird man bereits eine Reihe von Störungswerthen haben, aus denen sich die in den störenden Kräften $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ auftretenden gestörten Coordinaten ausreichend genau finden lassen. Nicht dasselbe gilt von den in den Gleichungen (4) auftretenden Schlussgliedern. Diese sind nicht mit störenden Massen multiplicirt, und ihr Einfluss hängt gerade von der Differenz der gestörten und ungestörten Coordinaten ab. Es ist daher zunächst nothwendig, diese sogen. indirekten Glieder in einer für die Berechnung brauchbaren Form darzustellen. Man hat:

$$\frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3} = \frac{1}{r_0^3}\left[\left(1 - \frac{r_0^3}{r^3}\right)x - \xi\right].$$

Nun ist

$$\begin{aligned} r^2 &= (x_0 + \xi)^2 + (y_0 + \eta)^2 + (z_0 + \zeta)^2\\ &= r_0^2 + (2x_0 + \xi)\xi + (2y_0 + \eta)\eta + (2z_0 + \zeta)\zeta.\end{aligned}$$

Setzt man daher

$$\frac{(x_0 + \frac{1}{2}\xi)\xi + (y_0 + \frac{1}{2}\eta)\eta + (z_0 + \frac{1}{2}\zeta)\zeta}{r_0^2} = q, \tag{5}$$

so wird

$$r^2 = r_0^2(1 + 2q); \quad \frac{r_0^3}{r^3} = (1 + 2q)^{-\frac{3}{2}} = 1 - 3q + \frac{3.5}{1.2}q^2 - \frac{3.5.7}{1.2.3}q^3 + \ldots .$$

$$1 - \frac{r_0^3}{r^3} = 3q\left[1 - \frac{5}{2}q + \frac{5.7}{2.3}q^2 - \frac{5.7.9}{2.3.4}q^3 + \ldots .\right].$$

Setzt man daher

$$f = 3\left[1 - \frac{5}{2}q + \frac{5.7}{2.3}q^2 - \frac{5.7.9}{2.3.4}q^3 + \ldots .\right], \tag{6}$$

so wird

$$1 - \frac{r_0^3}{r^3} = fq; \qquad \frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3} = \frac{1}{r_0^3}(fqx - \xi).$$

Setzt man noch

$$\frac{k_0^2}{r_0^3} = \frac{k^2(M + m)}{r_0^3} = h, \tag{7}$$

so gehen die Gleichungen (4) in die folgenden über:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} + k\xi &= X_1 + kfqx \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + k\eta &= Y_1 + kfqy \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} + k\zeta &= Z_1 + kfqz. \end{aligned} \tag{8}$$

In diesen Ausdrücken ist nun $q$ von der Ordnung der Störungen[1]; allein die Differentialgleichungen sind für die numerische Integration noch nicht verwendbar, da sie noch $\xi$, $\eta$, $\zeta$ selbst enthalten. Die Differentialquotienten $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ bilden für gleichmässig fortschreitende Intervalle von z. B. $w$ Tagen, eine regelmässige Reihe von Functionswerthen $f_\xi$, $f_\eta$, $f_\zeta$. Da die Störungen für die Osculationsepoche verschwinden und in der Nähe derselben sehr klein bleiben, so kann man für zwei Zeitmomente $\frac{1}{2}w$ und $\frac{3}{2}w$ vor und $\frac{1}{2}w$ und $\frac{3}{2}w$ nach der Osculationsepoche die Werthe der Differentialquotienten (störenden Kräfte) nach (8) mit alleiniger Berücksichtigung der $X$, $Y$, $Z$ berechnen, indem für diese 4 Orte die $\xi$, $\eta$, $\zeta$ gleich Null gesetzt werden. Hiermit erhält man zunächst 4 Werthe der Differentialquotienten und deren Differenzreihen $f'$, $f''$, aus denen sich sofort die ersten und zweiten Summen ${}^{I}f_\xi$, ${}^{II}f_\xi$, ${}^{I}f_\eta$, ${}^{II}f_\eta$, ${}^{I}f_\zeta$, ${}^{II}f_\zeta$ (s. den Artikel »mechanische Quadratur«) bilden lassen, wobei man nur die Anfangsconstante für die Summation so zu bestimmen hat, dass die Integrale für die Osculationsepoche verschwinden. Man hat also, wenn die für die Osculationsepoche giltigen Grössen den Index 0 erhalten (die Indices $\xi$, $\eta$, $\zeta$ können weggelassen werden, die Operationen sind gleichmässig für alle drei Reihen auszuführen) und die Functionswerthe, welche sich auf die unmittelbar vorhergehende und folgende Störungsepoche beziehen mit den Indices $-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{2}$ versehen werden:

$$\begin{aligned} {}^{I}f_0 &= -\tfrac{1}{24} f_0{}' + \tfrac{17}{5760} f_0{}''' \\ {}^{II}f_{\frac{1}{2}} &= +\tfrac{1}{2}\,{}^{I}f_0 - \tfrac{1}{24} f_0 - \tfrac{17}{1920} f_0{}''. \end{aligned}$$

Mit diesen Werthen erhält man sofort ${}^{II}f_\xi$, ${}^{II}f_\eta$, ${}^{II}f_\zeta$ für den nächsten Ort, welche zur Bestimmung der Doppelintegrale für diesen Ort bereits dienen können. Ganz allgemein wird man daher, wenn der Differentialquotient $\frac{d^2\xi_i}{dt^2}$ (und ebenso die beiden andern Differentialquotienten) für den $i$ten Ort berechnet ist, durch Addition dieser Werthe zur Summe ${}^{I}f_{i-\frac{1}{2}}$ den Werth ${}^{I}f_{i+\frac{1}{2}}$ und durch Addition dieses Werthes zur Summe ${}^{II}f_i$ den Summenwerth ${}^{II}f_{i+1}$ erhalten. Da aber das Integral $\xi$ nach

$$\xi = {}^{II}f_i + \tfrac{1}{12} f_i - \tfrac{1}{240} f_i{}'' \ldots$$

berechnet wird, so könnte man die Störung für den $(i+1)$ten Ort finden, wenn $f_i = \frac{d^2\xi}{dt^2}$ und die Differenz $f''$ auch für den $(i+1)$ten Ort bekannt wären. Dieses ist aber nicht der Fall. Setzt man aber in

---

[1]) Will man nur Störungen von der ersten Potenz der Massen berücksichtigen, so wird man in den störenden Kräften $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ an Stelle von $x$, $y$, $z$ die ungestörten Coordinaten $x_0$, $y_0$, $z_0$ zu setzen haben, und $q = \frac{1}{r_0^2}(x_0\xi + y_0\eta + z_0\zeta)$; $f = 3$.

$$\xi = {}^{II}f_\xi + \tfrac{1}{12}\frac{d^2\xi}{dt^2} - \tfrac{1}{240}f_\xi''$$

den Werth für $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ aus (8) ein, so erhält man

$$\xi = {}^{II}f_\xi + \tfrac{1}{12}X_1 + \tfrac{1}{12}hfqx - \tfrac{1}{12}h\xi - \tfrac{1}{240}f_\xi''$$

oder wenn man

$$\begin{aligned} {}^{II}f_\xi + \tfrac{1}{12}X_1 - \tfrac{1}{240}f_\xi'' &= S_x \\ {}^{II}f_\eta + \tfrac{1}{12}Y_1 - \tfrac{1}{240}f_\eta'' &= S_y \\ {}^{II}f_\zeta + \tfrac{1}{12}Z_1 - \tfrac{1}{240}f_\zeta'' &= S_z \end{aligned} \tag{9}$$

setzt, welche Werthe für jedes Intervall bekannt werden, sobald die $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ bestimmt sind:

$$\begin{aligned} \xi(1 + \tfrac{1}{12}h) &= S_x + \tfrac{1}{12}hfqx \\ \eta(1 + \tfrac{1}{12}h) &= S_y + \tfrac{1}{12}hfqy \\ \zeta(1 + \tfrac{1}{12}h) &= S_z + \tfrac{1}{12}hfqz. \end{aligned} \tag{10}$$

Diese Werthe von $\xi$, $\eta$, $\zeta$ können noch nicht verwendet werden, denn $q$ enthält alle drei Grössen; man könnte diese Gleichungen auch als drei Gleichungen mit den drei Unbekannten $\xi$, $\eta$, $\zeta$ ansehen, und dieselben daraus bestimmen; einfacher jedoch wird es, die aus (10) folgenden Werthe von $\xi$, $\eta$, $\zeta$ in die Gleichung (5) einzusetzen, wodurch man eine Gleichung zur Bestimmung von $q$ erhält, die $\xi$, $\eta$, $\zeta$ nicht mehr als Faktor enthält[1]). Setzt man:

$$a = \frac{x_0 + \frac{1}{2}\xi}{r_0^3(1 + \frac{1}{12}h)}; \quad b = \frac{y_0 + \frac{1}{2}\eta}{r_0^3(1 + \frac{1}{12}h)}; \quad c = \frac{z_0 + \frac{1}{2}\zeta}{r_0^3(1 + \frac{1}{12}h)}, \tag{11}$$

so erhält man

$$q = \frac{aS_x + bS_y + cS_z}{1 - \frac{1}{12}hf(ax + by + cz)}. \tag{12}$$

Substituirt man nun die aus (10) folgenden Werthe von $\xi$, $\eta$, $\zeta$, in denen jetzt $q$ durch (12) bestimmt erscheint, in die Gleichungen (8), so erhält man

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = X_1 + hfqx - \frac{h}{1 + \frac{1}{12}h}(S_x + \tfrac{1}{12}hfqx) = X_1 - \frac{h}{1 + \frac{1}{12}h}(S_x - fqx),$$

folglich, wenn man

$$\frac{h}{1 + \frac{1}{12}h} = h' \tag{13}$$

setzt:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= X_1 + h'(fqx - S_x) \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= Y_1 + h'(fqy - S_y) \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= Z_1 + h'(fqz - S_z). \end{aligned} \tag{14}$$

Nachdem man daher für die ersten 4 Orte (zwei vor, zwei nach der Osculationsepoche) die Differentialquotienten, unter der Voraussetzung $S_x = S_y = S_z = q = 0$ berechnet hat, wird man die erste und zweite summirte Reihe bilden, womit die ${}^{II}f$ für den nächsten Ort bekannt werden; die zweiten Differenzen $f''$ in Formel (9) wird man, da sie mit dem kleinen Faktor $\frac{1}{240}$

---

[1]) Die Incremente $\frac{1}{2}\xi$, $\frac{1}{2}\eta$, $\frac{1}{2}\zeta$ von $x_0$, $y_0$, $z_0$ können beibehalten werden, da das Resultat in Anbetracht ihrer Kleinheit gegenüber den $x_0$, $y_0$, $z_0$ nicht wesentlich geändert wird, wenn man für dieselben auch nur genäherte (extrapolirte) Werthe substituirt.

multiplizirt sind, genügend genau durch Extrapolation erhalten. Sobald dann für die vier ersten Orte $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ bekannt sind, bestimmt man die Integrationsconstanten so, dass die ersten und zweiten Integrale $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ und $\xi$, $\eta$, $\zeta$ gemäss der Bestimmung, dass die Elemente osculiren sollen, für die Osculationsepoche verschwinden; hierfür hat man[1])

$$
\begin{aligned}
{}^{I}f(a-\tfrac{1}{2}) &= -\tfrac{1}{24}f'(a-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{17}{5760}f'''(a-\tfrac{1}{2})\\
{}^{II}f(a-1) &= -\tfrac{1}{2}\,{}^{I}f(a-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{24}f(a-\tfrac{1}{2}) - \tfrac{17}{1920}f''(a-\tfrac{1}{2}).
\end{aligned}
$$

Dann hat man für jeden folgenden Ort[2]) das Formelsystem 1, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14 zu berechnen.

Bei Anwendung dieser Methode wird man zweckmässig als Fundamentalebene eine feste Ekliptik wählen; man drückt dieses dadurch aus, dass man die osculirenden Elemente $\Omega$, $\omega$, $i$ auf die feste Ekliptik und das mittlere Aequinoctium eines bestimmten Jahresanfanges bezieht. Alle Coordinaten werden auf diese bezogen. Die Berechnung der ungestörten Coordinaten $x_0$, $y_0$, $z_0$ wird nach 17. 2, 3 vorgenommen; die der Coordinaten der störenden Planeten $x_1$, $y_1$, $z_1$ erfolgt nach den Formeln 17. 4, wobei man nur zu beachten hat, dass die heliocentrische Länge und Breite $(l_1, b_1)$ auf die gewählte Ekliptik und das gewählte Aequinoctium bezogen werden. Da sich die Störungsrechnung über mehrere Jahre erstrecken kann, so wird man die in den Jahrbüchern angegebenen Daten, falls dieselben wahre Längen und Breiten sind, von Nutation befreien, und durch Anbringen der Präcession auf das gewählte Aequinoctium beziehen. Die Entfernungen $r_{01}$ bestimmen sich aus 17. 9, wobei selbstverständlich die Hilfswerthe $\theta$, $\theta'$ nicht gebraucht werden.

Bei der Wahl der Daten wird man sich zweckmässig an diejenigen halten, für welche das »Berliner Astronomische Jahrbuch« die Coordinaten der störenden Planeten giebt, und es mag noch erwähnt werden, dass diese, ausgedrückt in Tagen der julianischen Periode von der Form $40n + 24$ sind.

Die Störungen $\xi$, $\eta$, $\zeta$ beziehen sich ebenfalls auf die Ekliptik; da man aber bei den Ephemeriden stets Aequatorcoordinaten wählt, so wird man aus den Störungswerthen $\xi$, $\eta$, $\zeta$ am zweckmässigsten sofort die Aequatorealstörungen $\xi'$, $\eta'$, $\zeta'$ ableiten, was durch die Formeln

$$\xi' = \xi; \qquad \eta' = \eta\cos\varepsilon - \zeta\sin\varepsilon; \qquad \zeta' = \eta\sin\varepsilon + \zeta\cos\varepsilon \tag{15}$$

geschieht, wobei $\varepsilon$ die mittlere Schiefe der Ekliptik für das angenommene Aequinoctium bedeutet.

Das Argument $q$ für die Reihe $f$ wird erst durch (12) bekannt; in erster Näherung kann man in (12) $f = 3$ setzen, oder in (6) für $q$ einen extrapolirten Werth verwenden, und wenn nöthig die Rechnung mit einem verbesserten Werthe wiederholen. Die Rechnung der Formel (6) wird umgangen, wenn man $f$ mit dem Argumente $q$ tabulirt hat. Eine solche Tafel auf 6 Decimalen findet sich in v. OPPOLZER, »Lehrbuch zur Bahnbestimmung von Planeten und Kometen«, II Bd., pag. 590; auf 5 Decimalen abgekürzt ist dieselbe:

---

1) Vergl. den Artikel »Mechanische Quadratur«.

2) Man kann für die vier der Osculationsepoche nächst gelegenen Orte mit den bereits bekannten Werthen der $\xi$ die Rechnung auch wenn nöthig wiederholen.

| q | log f | Diff. | q | log f | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|
| − 0·030000 | 0·51080 | | 0·000000 | 0·47712 | |
| − 0·029000 | 0·50964 | − 116 | + 0·001000 | 0·47604 | − 108 |
| − 0·028000 | 0·50848 | − 116 | + 0·002000 | 0·47495 | − 109 |
| − 0·027000 | 0·50733 | − 115 | + 0·003000 | 0·47387 | − 108 |
| − 0·026000 | 0·50618 | − 115 | + 0·004000 | 0·47280 | − 107 |
| − 0·025000 | 0·50503 | − 115 | + 0·005000 | 0·47172 | − 108 |
| − 0·024000 | 0·50388 | − 115 | + 0·006000 | 0·47065 | − 107 |
| − 0·023000 | 0·50274 | − 114 | + 0·007000 | 0·46958 | − 107 |
| − 0·022000 | 0·50160 | − 114 | + 0·008000 | 0·46851 | − 107 |
| − 0·021000 | 0·50046 | − 114 | + 0·009000 | 0·46744 | − 107 |
| − 0·020000 | 0·49932 | − 114 | + 0·010000 | 0·46638 | − 106 |
| − 0·019000 | 0·49819 | − 113 | + 0·011000 | 0·46532 | − 106 |
| − 0·018000 | 0·49706 | − 113 | + 0·012000 | 0·46426 | − 106 |
| − 0·017000 | 0·49593 | − 113 | + 0·013000 | 0·46320 | − 106 |
| − 0·016000 | 0·49480 | − 113 | + 0·014000 | 0·46215 | − 105 |
| − 0·015000 | 0·49368 | − 112 | + 0·015000 | 0·46109 | − 106 |
| − 0·014000 | 0·49256 | − 112 | + 0·016000 | 0·46004 | − 105 |
| − 0·013000 | 0·49144 | − 112 | + 0·017000 | 0·45900 | − 104 |
| − 0·012000 | 0·49032 | − 112 | + 0·018000 | 0·45795 | − 105 |
| − 0·011000 | 0·48921 | − 111 | + 0·019000 | 0·45691 | − 104 |
| − 0·010000 | 0·48810 | − 111 | + 0·020000 | 0·45586 | − 105 |
| − 0·009000 | 0·48699 | − 111 | + 0·021000 | 0·45482 | − 104 |
| − 0·008000 | 0·48588 | − 111 | + 0·022000 | 0·45379 | − 103 |
| − 0·007000 | 0·48478 | − 110 | + 0·023000 | 0·45275 | − 104 |
| − 0·006000 | 0·48368 | − 110 | + 0·024000 | 0·45172 | − 103 |
| − 0·005000 | 0·48258 | − 110 | + 0·025000 | 0·45069 | − 103 |
| − 0·004000 | 0·48148 | − 110 | + 0·026000 | 0·44966 | − 103 |
| − 0·003000 | 0·48039 | − 109 | + 0·027000 | 0·44863 | − 103 |
| − 0·002000 | 0·47930 | − 109 | + 0·028000 | 0·44761 | − 102 |
| − 0·001000 | 0·47821 | − 109 | + 0·029000 | 0·44659 | − 102 |
| 0·000000 | 0·47712 | − 109 | + 0·030000 | 0·44557 | − 102 |

| | 116 | 115 | 114 | 113 | 112 | 111 | 110 | 109 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 11·6 | 11·5 | 11·4 | 11·3 | 11·2 | 11·1 | 11·0 | 10·9 |
| 2 | 23·2 | 23·0 | 22·8 | 22·6 | 22·4 | 22·2 | 22·0 | 21·8 |
| 3 | 34·8 | 34·5 | 34·2 | 33·9 | 33·6 | 33·3 | 33·0 | 32·7 |
| 4 | 46·4 | 46·0 | 45·6 | 45·2 | 44·8 | 44·4 | 44·0 | 43·6 |
| 5 | 58·0 | 57·5 | 57·0 | 56·5 | 56·0 | 55·5 | 55·0 | 54·5 |
| 6 | 69·6 | 69·0 | 68·4 | 67·8 | 67·2 | 66·6 | 66·0 | 65·4 |
| 7 | 81·2 | 80·5 | 79·8 | 79·1 | 78·4 | 77·7 | 77·0 | 76·3 |
| 8 | 92·8 | 92·0 | 91·2 | 90·4 | 89·6 | 88·8 | 88·0 | 87·2 |
| 9 | 104·4 | 103·5 | 102·6 | 101·7 | 100·8 | 99·9 | 99·0 | 98·1 |

| | 108 | 107 | 106 | 105 | 104 | 103 | 102 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10·8 | 10·7 | 10·6 | 10·5 | 10·4 | 10·3 | 10·2 |
| 2 | 21·6 | 21·4 | 21·2 | 21·0 | 20·8 | 20·6 | 20·4 |
| 3 | 32·4 | 32·1 | 31·8 | 31·5 | 31·2 | 30·9 | 30·6 |
| 4 | 43·2 | 42·8 | 42·4 | 42·0 | 41·6 | 41·2 | 40·8 |
| 5 | 54·0 | 53·5 | 53·0 | 52·5 | 52·0 | 51·5 | 51·0 |
| 6 | 64·8 | 64·2 | 63·6 | 63·0 | 62·4 | 61·8 | 61·2 |
| 7 | 75·6 | 74·9 | 74·2 | 73·5 | 72·8 | 72·1 | 71·4 |
| 8 | 86·4 | 85·6 | 84·8 | 84·0 | 83·2 | 82·4 | 81·6 |
| 9 | 97·2 | 96·3 | 95·4 | 94·5 | 93·6 | 92·7 | 91·8 |

Die Störungen $\xi$, $\eta$, $\zeta$ werden selbstverständlich successiv anwachsen, es ist aber keineswegs nöthig, dieselben für jeden Tag zu berechnen. Das zu wählende Intervall hängt wesentlich von den Grössen der störenden Kräfte und den Aenderungen der Distanz zwischen dem störenden und gestörten Körper, ab; das Intervall kann erfahrungsmässig bei kleinen Planeten 40 Tage angenommen werden; bei Kometen werden oft kleine Intervalle bis zu 10 Tagen, und auch noch kleinere, nöthig werden; natürlich tritt an Stelle von $k$ überall $(wk)$.

Da die Störungen stets klein sind, so kann man, um das unnöthige Anschreiben von Decimalen zu vermeiden, gewisse Grössen in einer kleineren Einheit ausdrücken. In der Praxis wählt man als Einheit für $\xi$, $\eta$, $\zeta$ und $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ die siebente Decimale; der Anblick der Formeln (8) und (14) zeigt dann, dass diese Grössen sofort in dieser Einheit erhalten werden, wenn man $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ in Einheiten der siebenten Decimale ausdrückt. Gemäss den Formeln (9) werden dann auch die Summen $S_x$, $S_y$, $S_z$ in derselben Einheit erhalten. Drückt man $x$, $y$, $z$ und folglich nach Formeln (11) auch $a$, $b$, $c$ in der gewöhnlichen Einheit (der Erdbahnhalbaxe) aus, so folgt nach (12) auch $q$ in Einheiten der siebenten Decimale, und da $f$ nahe 3 ist, so werden auch die Glieder $fqx$, $fqy$, $fqz$ in (14) in Einheiten der siebenten Decimale erhalten, während $h$, $h'$ Verhältnisszahlen in der gewöhnlichen Form sind.

Um die störenden Kräfte sofort in Einheiten der siebenten Decimale zu erhalten, genügt es an Stelle von $(wk)^2 m_1$ die Werthe $(wk)^2 m_1 \cdot 10^7$ einzuführen. Dieselben sind mit den pag. 303 angeführten Werthen für die Massen:

| | $\log (wk)^2 m_1 10^7$ | | $\log (wk)^2 m_1 10^7$ |
|---|---|---|---|
| Mercur | 9·9502—10 | Jupiter[2]) | 8·655084 |
| Venus | 1·0625 | Saturn | 8·18109 |
| Erde + Mond[1]) | 1·1244 | Uranus | 2·8217 |
| Mars | 0·1859 | Neptun | 2·8852 |

**24. Beispiel.** Es wird zweckmässig sein, ein Beispiel zu wählen, bei welchem die Störungen beträchtlich anwachsen, weshalb ich die Berechnung der Störungen des Kometen 1889 V, BROOKS wähle. Die zu Grunde gelegten Elemente sind die von BAUSCHINGER aus der ganzen Erscheinung 1889 bis 1891 abgeleiteten[3]):

Epoche 1889 Sept. 30·5 mittl. Zeit Berlin.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $M_0$ = 0° 1′ 5″·01 | | | $\varphi$ = 28° 5′ 5″·75 |
| $\pi$ = 1 34 54·99 | Ekliptik und | | $\mu$ = 501″·72506 |
| $\omega$ = 348 35 50·62 | Aequinoct. 1890·0 | | $\log a$ = 0·5658617 |
| $\Omega$ = 17 59 4·37 | | | $\log \sin \varphi$ = 9·6728179 |
| $i$ = 6 4 6·57 | | | $\log p$ = 0·4575457 |

Die Epoche der Osculation wird bei Kometen am zweckmässigsten in die Nähe des Perihels gelegt; da sich nämlich hier die Coordinaten ausserordentlich rasch verändern (in Folge der schnellen Bewegung der Kometen), namentlich aber höhere, bis zu den vierten und fünften Differenzen, beträchtlich werden, so würden, wenn die Störungen bereits grösser sind, diese Differenzen sich auch in den Störungen zeigen, und einen sehr unregelmässigen Gang derselben erzeugen, weshalb es nöthig würde, viel engere Intervalle zu nehmen. In der Nähe der Osculationsepoche aber sind die Störungen natürlich sehr klein, weil

[1]) Masse 1 : 355500.

[2]) Mit der Masse 1 : 1047·879 gleich 8·654972.

[3]) Untersuchungen über den periodischen Kometen 1889 V (BROOKS) I. Theil, pag. 38.

eben die Elemente osculiren, und die rasche Veränderung der Coordinaten bleibt ohne Einfluss, wie man sich aus dem folgenden Beispiele selbst leicht überzeugen kann. Es ist jedoch nicht nöthig die Osculationsepoche direkt mit dem Durchgange des Kometen durch das Perihel zusammenfallen zu lassen, und wird man dabei zweckmässig als Osculationsepoche einen Tag wählen, welcher in der Mitte zwischen zwei Daten des »Berliner Jahrbuches« liegt, weil dann die Bestimmung der Integrationsconstanten (Integration für die Mitte zweier Intervalle) am einfachsten wird.

Die vorigen Elemente sind als osculirend für 1889 Oct. 8 angesehen, und die Störungen $\xi$, $\eta$, $\zeta$ für die zwei der Osculationsepoche vorangehenden und für die zwei nachfolgenden Daten, also für 1889 Dec. 7, Okt. 28, Sept. 18, Aug. 9 gleich Null angenommen.

Das nachstehende Beispiel ist natürlich bedeutend verkürzt wiedergegeben; für den Beginn der Rechnung sind sechs Orte angeführt; zwischen 1889 Mai 21 bis 1887 Dec. 18 sind die Details weggelassen, und sodann bis 1887 Juni 1 wieder angegeben[1]. Die Berechnung der störenden Kräfte ist auf pag. 339 für Jupiter (die ganz gleichartige Berechnung für Saturn ist weggelassen) und zwar für die vier ersten und die zwei letzen Orte mitgetheilt. Es wird dieses selbst für den Anfänger zur Orientirung vollständig ausreichen; das Fehlende wird mit Hilfe der Zusammenstellungen auf pag. 341 leicht ergänzt werden; aus dem gleichen Grunde sind hierbei die Differenzwerthe weggelassen.

Auf pag. 338 finden sich die Bezeichnungen $N$ und $Z$, und es ist

$$1 - N = \tfrac{1}{f_0} kf(ax + by + cz); \quad Z = aS_x + bS_y + cS_z.$$

Zu bemerken ist übrigens, dass die Werthe der $S_x$, $S_y$, $S_z$ für die ersten vier Orte bei Beginn der Rechnung unbekannt sind, und daher gleich Null angenommen werden müssen; es wird dann auch $q = 0$, daher auch die mit $\Delta\Sigma X$, $\Delta\Sigma Y$, $\Delta\Sigma Z$ bezeichneten Zusatzglieder in 23 (14) verschwinden und folglich $\frac{d^2\xi}{dt^2} = X_1$; $\frac{d^2\eta}{dt^2} = Y_1$; $\frac{d^2\zeta}{dt^2} = Z_1$. Auf pag. 338 sind jedoch auch für die vier ersten Orte bereits Werthe für $S_x$, $S_y$, $S_z$ eingesetzt, indem mit den aus einer provisorischen Rechnung erhaltenen Werthen die Rechnung wiederholt wurde.

Die Rechnung ist nur fünfstellig durchgeführt, und die Störungen in Einheiten der sechsten Decimale angegeben. Für diese Einheit wird daher z. B. für Jupiter $\log (wk)^2 m_1 10^6 = 2{\cdot}65508$. In Einheiten der sechsten Decimale ist dann z. B. für 1887 Juni 1·0 : $\eta = -21646{\cdot}58$ (vergl. pag. 343). Hiervon sind für die Störungsrechnung nur 5 Decimale beizubehalten, d. h. nur die vier ersten Stellen zu berücksichtigen; daher würde für die Störungsrechnung $\eta = -2165$, wofür vor Schluss der Störungsrechnung für dieses Intervall der ausreichend genäherte, extrapolirte Werth $-2164$ verwendet erscheint.

Die Störungsrechnung wurde hier nach rückwärts geführt, man hätte daher $dt$ negativ zu nehmen, da sonst ${}^{I}f$ und somit auch $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ (nicht aber ${}^{II}f$) mit entgegengesetzten Zeichen erscheinen würden. Es genügt aber, für die Berechnung die ungeänderten Formeln beizubehalten, aber die erhaltenen Werthe nach rückwärts einzutragen und in dieser Weise die Differenzen zu bilden, wie dieses aus pag. 341 ersichtlich ist.

Bezüglich der Bestimmung der Constanten der Integration vergl. den Artikel »mechanische Quadratur«.

[1] Die ephemeridenartig gerechneten Zeiten sind durch * bezeichnet.

| 1889 | Dec. 7·0 | Oct. 28·0 | Sept. 18·0 | Aug. 9·0 | Juli 30·0 | Mai 21·0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| * $M$ | 9° 25′ 31″·3 | 3° 51′ 2″·4 | 358° 16′ 33″·5 | 352° 42′ 4″·5 | 347° 7′ 35″·6 | 341° 33′ 6″·7 |
| * $E$ | 17 33 58·5 | 7 15 31·8 | 356 44 33·0 | 346 19 25·2 | 336 16 22·2 | 326 46 18·4 |
| * $v$ | 23 58 16·6 | 12 4 20·7 | 354 34 27·9 | 337 23 23·0 | 321 23 57·5 | 307 4 15·2 |
| * $\log r$ | 0·307650 | 0·293083 | 0·290622 | 0·300890 | 0·321486 | 0·348979 |
| * $x_0$ | + 1·74700 | + 1·90793 | + 1·94699 | + 1·86378 | + 1·67092 | + 1·39242 |
| $\xi$ | 0 | 0 | 0 | 0 | − 2 | − 4 |
| * $x_{♃}$ | + 1·52494 | − 1·23708 | + 0·94501 | + 0·64976 | + 0·35284 | + 0·05875 |
| $x$ | + 1·74700 | + 1·90793 | + 1·94699 | + 1·86378 | + 1·67090 | + 1·39238 |
| * $x_{♄}$ | − 7·81818 | − 7·68545 | − 7·54810 | − 7·40618 | − 7·25978 | − 7·10890 |
| * $y_0$ | + 1·02741 | + 0·46486 | − 0·12702 | − 0·71060 | − 1·25807 | − 1·73296 |
| $\eta$ | 0 | 0 | 0 | 0 | − 1 | − 2 |
| * $y_{♃}$ | − 4·94017 | − 5·03522 | − 5·11815 | − 5·17885 | − 5·21727 | − 5·24889 |
| $y$ | + 1·02741 | + 0·46486 | − 0·12702 | − 0·71060 | − 1·25808 | − 1·73298 |
| * $y_{♄}$ | + 4·90809 | + 5·09578 | + 5·28042 | + 5·46186 | + 5·64000 | + 5·81473 |
| * $z_0$ | + 0·04691 | − 0·01567 | − 0·07676 | − 0·13303 | − 0·18156 | − 0·22087 |
| $\zeta$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| * $z_{♃}$ | − 0·01614 | − 0·00925 | − 0·00287 | + 0·00452 | + 0·01189 | + 0·01893 |
| $z$ | + 0·04641 | − 0·01567 | − 0·07676 | − 0·13303 | − 0·18156 | − 0·22087 |
| * $z_{♄}$ | + 0·23122 | + 0·22274 | + 0·21412 | + 0·20537 | + 0·19650 | + 0·18751 |
| * $\log r_0^3$ | 0·92295 | 0·87925 | 0·87187 | 0·90246 | 0·96446 | 1·04694 |
| * $\log h$ | 8·75233 | 8·79603 | 8·80341 | 8·77282 | 8·71082 | 8·62834 |
| * $\log(1 + \frac{1}{12} h)$ | 0·00204 | 0·00226 | 0·00229 | 0·00214 | 0·00186 | 0·00154 |
| * $\log r_0^2$ | 0·61530 | 0·58617 | 0·58124 | 0·60164 | 0·64297 | 0·69796 |
| * $\log R^2$ | 0·61734 | 0·58843 | 0·58353 | 0·60378 | 0·64483 | 0·69950 |
| $\log(x_0 + \frac{1}{2}\xi)$ | 0·24229 | 0·28057 | 0·28936 | 0·27038 | 0·22296 | 0·14376 |
| $\log(y_0 + \frac{1}{2}\eta)$ | 0·01174 | 9·66685 | 9$_n$10388 | 9$_n$85163 | 0$_n$09797 | 0$_n$23869 |
| $\log(z_0 + \frac{1}{2}\zeta)$ | 8·66663 | 8$_n$19520 | 8$_n$88511 | 9$_n$12396 | 9$_n$25902 | 9$_n$34414 |
| $\log x$ | 0·24229 | 0·28057 | 0·28936 | 0·27038 | 0·22295 | 0·14376 |
| $\log a$ | 9·62595 | 9·69214 | 9·70583 | 9·66660 | 9·57818 | 9·44426 |
| $\log S_x$ | 0$_n$30550 | 9$_n$36382 | 9$_n$37506 | 0$_n$35126 | 1$_n$32318 | 1$_n$65276 |
| $\log y$ | 0·01174 | 9·66685 | 9$_n$10388 | 9$_n$85163 | 0$_n$09798 | 0$_n$23862 |
| $\log b$ | 9·39440 | 9·07842 | 8$_n$52035 | 9$_n$24785 | 9$_n$45314 | 9$_n$58912 |
| $\log S_y$ | 0·14922 | 8·84510 | 8$_n$47712 | 0$_n$07188 | 0$_n$79588 | 1$_n$25912 |
| $\log z$ | 8·66663 | 8$_n$19520 | 8$_n$88511 | 9$_n$12396 | 9$_n$25902 | 9$_n$34414 |
| $\log c$ | 8·04929 | 7$_n$60677 | 8$_n$30158 | 8$_n$52018 | 8$_n$61419 | 8$_n$64464 |
| $\log S_z$ | 8·69897 | 8·00000 | 8·30103 | 9·47712 | 0·10380 | 0·54654 |
| $ax$ | 0·74001 | 0·95910 | 0·98898 | 0·86492 | 0·63258 | 0·38727 |
| $by$ | 0·26477 | 0·05568 | 0·00431 | 0·12574 | 0·35578 | 0·59948 |
| $cz$ | 52 | 6 | 154 | 441 | 747 | 974 |
| $\log(ax + by + cz)$ | 9·99795 | 9·99774 | 9·99770 | 9·99785 | 9·99814 | 9·99845 |
| $\log \frac{1}{12} h$ | 7·67815 | 7·71685 | 7·72423 | 7·69364 | 7·63164 | 7·54916 |
| $\log f$ | 0·47712 | 0·47712 | 0·47712 | 0·47712 | 0·47713 | 0·47713 |
| $\log g$ | 0$_n$37729 | 9$_n$55086 | 9$_n$58670 | 0$_n$49641 | 0$_n$80768 | 0$_n$80944 |
| $\log(1 - N)$ | 8·14822 | 8·19171 | 8·19905 | 8·16861 | 8·10691 | 8·02474 |
| $aS_x$ | − 2·70 | − 0·26 | − 0·28 | − 8·29 | − 8·06 | − 12·50 |
| $bS_y$ | + 0·35 | + 0·01 | 0 | + 0·21 | + 1·77 | + 6·28 |
| $cS_z$ | 0 | 0 | 0 | − 0·01 | − 0·05 | − 0·16 |
| $\log Z$ | 0$_n$37107 | 9$_n$54407 | 9$_n$57978 | 0$_n$48996 | 0$_n$80209 | 0$_n$80469 |
| $\log N$ | 9·99685 | 9·99819 | 9·99808 | 9·99855 | 9·99441 | 9·99588 |

| 1889 | Dec. 7·0 | Oct. 28·0 | Sept. 18·0 | Aug. 9·0 | Juli 30·0 | Mai 21·0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $fqx$ . . . . . | − 12·52 | − 2·04 | − 2·26 | − 17·34 | − 32·19 | − 26·93 |
| $-S_x$ . . . . . | + 6·39 | + 0·78 | + 0·75 | + 7·10 | + 21·29 | + 44·95 |
| $fqy$ . . . . . | − 7·34 | − 0·49 | + 0·15 | + 6·69 | + 24·14 | + 33·51 |
| $-S_y$ . . . . . | − 1·41 | − 0·07 | + 0·08 | + 1·18 | + 6·25 | + 18·16 |
| $fqz$ . . . . . | − 0·33 | + 0·02 | + 0·09 | + 1·95 | + 3·50 | + 4·27 |
| $-S_z$ . . . . | − 0·05 | − 0·01 | − 0·02 | − 0·30 | − 1·27 | − 3·52 |
| $log(fqx - S_x)$ . | $0_n$76746 | $0_n$11727 | $0_n$17896 | $1_n$01870 | $1_n$08743 | 1·25575 |
| $log(fqy - S_y)$ . | $0_n$94201 | $9_n$74819 | 9·25597 | 0·89597 | 1·48273 | 1·71894 |
| $log(fqz - S_z)$ . | $9_n$57978 | 8·00000 | 8·84510 | 9·97772 | 0·34880 | 9·87506 |
| * $log\,k'$ . . . | 8·75029 | 8·79377 | 8·80112 | 8·77068 | 8·70896 | 8·62380 |
| $X_{♃}$ . . . . . | − 5·46 | − 5·80 | − 6·48 | − 7·61 | − 9·25 | − 11·49 |
| $X_{♄}$ . . . . . | + 0·16 | + 0·25 | + 0·32 | + 0·37 | + 0·42 | + 0·46 |
| $Y_{♃}$ . . . . . | + 3·50 | + 1·74 | − 0·69 | − 3·67 | − 8·00 | − 13·25 |
| $Y_{♄}$ . . . . . | − 0·36 | − 0·36 | − 0·35 | − 0·35 | − 0·33 | − 0·32 |
| $Z_{♃}$ . . . . . | − 0·08 | + 0·05 | + 0·27 | + 0·62 | + 1·15 | + 1·96 |
| $Z_{♄}$ . . . . . | − 0·02 | − 0·01 | − 0·01 | − 0·01 | + 0·01 | + 0·01 |
| $\Sigma X$ . . . . . | − 5·30 | − 5·55 | − 6·16 | − 7·24 | − 8·83 | − 11·03 |
| $\Delta\Sigma X$ . . . . . | − 0·34 | − 0·06 | − 0·10 | − 0·62 | − 0·56 | + 0·76 |
| $\Sigma Y$ . . . . . | + 3·14 | + 1·38 | − 1·04 | − 4·22 | − 8·33 | − 13·57 |
| $\Delta\Sigma Y$ . . . . . | − 0·49 | − 0·06 | + 0·01 | + 0·46 | + 1·55 | + 2·19 |
| $\Sigma Z$ . . . . . | − 0·10 | + 0·04 | + 0·26 | + 0·61 | + 1·16 | + 1·97 |
| $\Delta\Sigma Z$ . . . . . | − 0·02 | 0 | 0 | + 0·06 | + 0·11 | + 0·08 |

Jupiter.

| | 1889 Dec. 7·0 | Oct. 28·0 | Sept. 18·0 | Aug. 9·0 | 1887 Juli 11·0 | Juni 1·0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| * $L_0$ . . . . . | 287° 9′ 16″·3 | 283° 48′ 12″·0 | 280° 28′ 16″·4 | 277° 9′ 28″·8 | 217° 11′ 58″·8 | 214° 9′ 24″·6 |
| * $B_0$ . . . . . | −0 10 42·2 | −0 6 8·0 | −0 1 34·0 | +0 2 58·8 | +1 9 29·1 | +1 11 20·1 |
| * $log\,x_1$ . . . . | 0·183258 | 0·092387 | 9·975486 | 9·812751 | $0_n$636058 | $0_n$652078 |
| * $log\,y_1$ . . . . | $0_n$698742 | $0_n$702018 | $0_n$706689 | $0_n$713814 | $0_n$516811 | $0_n$484622 |
| * $log\,z_1$ . . . . | $8_n$207982 | $7_n$966168 | $7_n$374084 | 7·655154 | 9·040525 | 9·052894 |
| * $log\,r_1^3$ . . . . | 2·140521 | 2·143233 | 2·147046 | 2·151686 | 2·204811 | 2·206191 |
| * $log\,x_1 : r_1^3$ . . | 8·04278 | 7·94916 | 7·82749 | 7·66111 | $8_n$43124 | $8_n$44633 |
| * $log\,y_1 : r_1^3$ . . | $8_n$55822 | $8_n$55878 | $8_n$56074 | $8_n$56218 | $8_n$31150 | $8_n$27643 |
| * $log\,z_1 : r_1^3$ . . | $6_n$06741 | $5_n$82293 | $5_n$22674 | 5·50352 | 6·83571 | 6·84620 |
| $log(x_1 - x)$ . | $9_n$84647 | $9_n$82666 | $0_n$00067 | $0_n$08421 | $9_n$14108 | $9_n$06283 |
| $log(y_1 - y)$ . | $0_n$77580 | $0_n$74082 | $0_n$69776 | $0_n$64965 | $9_n$89008 | $9_n$84672 |
| $log\,r_{01} \cos\theta$ . . | 0·77610 | 0·74858 | 0·70685 | 0·66515 | 9·89683 | 9·85252 |
| $log(z_1 - z)$ . . | $8_n$79628 | 7·80754 | 8·87151 | 9·13846 | 9·84467 | 9·80242 |
| $log\,r_{01}$ . . . . | 0·77612 | 0·74858 | 0·70640 | 0·66534 | 9·91327 | 9·86911 |
| $log\,r_{01}^3$ . . . . | 2·32836 | 2·25059 | 2·11920 | 1·99602 | 9·73981 | 9·60733 |
| $log(x_1 - x) : r_{01}^3$ | $7_n$01811 | $7_n$59607 | $7_n$88167 | $8_n$08819 | $9_n$40127 | $9_n$45555 |
| $log(y_1 - y) : r_{01}^3$ | $8_n$44744 | $8_n$50978 | $8_n$57856 | $8_n$65363 | $0_n$15082 | $0_n$23939 |
| $log(z_1 - z) : r_{01}^3$ | $6_n$46787 | 5·57695 | 6·75231 | 7·14244 | 9·60486 | 9·69509 |
| $X_1$ . . . . . | − 0·47 | − 1·78 | − 3·44 | − 5·54 | − 113·63 | − 123·36 |
| * $X_2$ . . . . . | − 4·99 | − 4·02 | − 3·04 | − 2·07 | + 12·20 | + 12·64 |
| $Y_1$ . . . . . | − 12·66 | − 14·61 | − 17·12 | − 20·35 | − 638·55 | − 784·03 |
| * $Y_2$ . . . . . | + 16·16 | + 16·35 | + 16·43 | + 16·46 | + 9·26 | + 8·58 |
| $Z_1$ . . . . . | − 0·13 | + 0·02 | + 0·26 | + 0·63 | + 131·20 | + 223·20 |
| * $Z_2$ . . . . . | + 0·05 | + 0·03 | + 0·01 | − 0·01 | − 0·31 | − 0·32 |

| 1887 | Dec. 18·0 | Nov. 8·0 | Sept. 29·0 | Aug. 20·0 | Juli 11·0 | Juni 1·0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $M$ | 269° 4′ 50″·7 | 263°30′21″·8 | 257°55′52″·9 | 252°21′23″·9 | 246°46′55″·0 | 241°12′26″·1 |
| $v$ | 221 36 16·0 | 218 17 20·5 | 215 3 31·6 | 212 3 25·7 | 209 15 51·8 | 206 29 48·7 |
| $\log r$ | 0·645964 | 0·657870 | 0·668649 | 0·678405 | 0·687207 | 0·695114 |
| $x_0$ | − 3·28023 | − 3·49887 | − 3·78996 | − 3·96850 | − 4·17989 | − 4·37401 |
| $\xi$ | − 314 | − 395 | − 491 | − 605 | − 740 | − 893 |
| $x_♃$ | − 3·51138 | − 3·73227 | − 3·94199 | − 4·13997 | − 4·32567 | − 4·49857 |
| $x_♄$ | − 4·78546 | − 4·58238 | − 4·37640 | − 4·16765 | − 3·95625 | − 3·74231 |
| $y_0$ | − 3·01331 | − 2·90683 | − 2·78020 | − 2·64057 | − 2·48940 | − 2·32792 |
| $\eta$ | − 704 | − 899 | − 1136 | − 1422 | − 1760 | − 2164 |
| $y_♃$ | − 4·10866 | − 3·91542 | − 3·71556 | − 3·50468 | − 3·28330 | − 3·05226 |
| $y_♄$ | + 7·72407 | + 7·83950 | + 7·94998 | + 8·05548 | + 8·15578 | + 8·25096 |
| $z_0$ | − 0·19922 | − 0·17925 | − 0·15837 | − 0·13674 | − 0·11452 | − 0·09183 |
| $\zeta$ | + 110 | + 146 | + 190 | + 246 | + 316 | + 401 |
| $z_♃$ | + 0·09445 | + 0·09873 | + 0·10278 | + 0·10641 | + 0·10978 | + 0·11282 |
| $z_♄$ | + 0·06217 | + 0·05208 | + 0·04196 | + 0·03181 | + 0·02165 | + 0·01144 |
| $\log h$ | 7·73739 | 7·70167 | 7·66933 | 7·64007 | 7·61366 | 7·58994 |
| $\log R^2$ | 1·29212 | 1·31592 | 1·33747 | 1·35697 | 1·37456 | 1·39037 |
| $\log x$ | $0_n50966$ | $0_n54330$ | $0_n57348$ | $0_n59980$ | $0_n62198$ | $0_n64177$ |
| $\log a$ | $9_n21782$ | $9_n22763$ | $9_n23568$ | $9_n24200$ | $9_n24699$ | $0_n25096$ |
| $\log S_x$ | $3_n49736$ | $3_n59645$ | $3_n69125$ | $3_n78207$ | $3_n86928$ | $3_n95326$ |
| $\log y$ | $0_n48085$ | $0_n46476$ | $0_n44585$ | $0_n42408$ | $0_n39915$ | $0_n37100$ |
| $\log b$ | $9_n18322$ | $9_n14817$ | $9_n10740$ | $9_n06590$ | $9_n02307$ | $8_n97862$ |
| $\log S_y$ | $3_n84692$ | $3_n95394$ | $4_n05549$ | $4_n15241$ | $4_n24541$ | $4_n33537$ |
| $\log z$ | $9_n30692$ | $9_n24991$ | $9_n19448$ | $9_n12801$ | $9_n04678$ | $8_n94859$ |
| $\log c$ | $8_n00301$ | $7_n93577$ | $7_n85959$ | $7_n77500$ | $7_n67829$ | $7_n56806$ |
| $\log S_z$ | 3·04294 | 3·16398 | 3·27989 | 3·39129 | 3·49883 | 3·60322 |
| $\log (ax + by + cz)$ | 0·00069 | 0·00106 | 0·00130 | 0·00159 | 0·00191 | 0·00222 |
| $\log f$ | 0·47540 | 0·47508 | 0·47464 | 0.47420 | 0·47371 | 0·47316 |
| $\log q$ | 3·20240 | 3·28371 | 3·35978 | 3·43112 | 3·49843 | 3·56223 |
| $\log (1 - N)$ | 7·13450 | 7·09358 | 7·06609 | 7·03668 | 7·01010 | 6·98616 |
| $\log Z$ | 3·20131 | 3·28316 | 3·35922 | 3·43064 | 3·49797 | 3·56185 |
| $\log N$ | 9·99941 | 9·99945 | 9·99949 | 9·99952 | 9·99954 | 9·99957 |
| $fqx$ | − 15897·3 | − 20069·5 | − 25574·0 | − 31960·3 | − 39270·9 | − 47558·9 |
| $fqy$ | − 14409·7 | − 16730·0 | − 19064·4 | − 21347·6 | − 23512·1 | − 25495·3 |
| $fqz$ | − 943·4 | − 1020·1 | − 1068·6 | − 1079·3 | − 1044·4 | − 959·9 |
| $\log (fqx - S_x)$ | $4_n08830$ | $4_n20740$ | $4_n31517$ | $4_n41341$ | $4_n50888$ | $4_n58685$ |
| $\log (fqy - S_y)$ | $3_n86806$ | $3_n83858$ | $3_n83657$ | $3_n85302$ | $3_n77206$ | $3_n58544$ |
| $\log (fqz - S_z)$ | $3_n31120$ | $3_n39425$ | $3_n47327$ | $3_n54923$ | $3_n62306$ | $3_n69579$ |
| $\log k$ | 7·73720 | 7·70149 | 7·66916 | 7·63991 | 7·61351 | 7·58980 |
| $X_♃$ | − 72·35 | − 77·46 | − 83·51 | − 91·23 | − 101·63 | − 116·34 |
| $X_♄$ | + 0·70 | + 0·72 | + 0·72 | + 0·73 | + 0·75 | + 0·75 |
| $Y_♃$ | − 307·74 | − 364·48 | − 433·44 | − 519·22 | − 629·29 | − 775·50 |
| $Y_♄$ | − 0·26 | − 0·27 | − 0·27 | − 0·28 | − 0·29 | − 0·30 |
| $Z_♃$ | + 86·47 | + 103·64 | + 124·26 | + 149·56 | + 181·59 | + 223·58 |
| $Z_♄$ | + 0·02 | + 0·01 | + 0·01 | + 0·01 | + 0·02 | + 0·01 |
| $\Sigma X$ | − 71·65 | − 76·72 | − 82·79 | − 90·50 | − 100·88 | − 115·59 |
| $\Delta \Sigma X$ | − 66·91 | − 81·08 | − 96·46 | − 113·06 | − 130·39 | − 150·02 |
| $\Sigma Y$ | − 308·00 | − 364·75 | − 433·71 | − 519·50 | − 629·58 | − 775·80 |
| $\Delta \Sigma Y$ | − 40·30 | − 38·91 | − 35·35 | − 31·18 | − 24·29 | − 14·97 |
| $\Sigma Z$ | + 86·49 | + 103·65 | + 124·27 | + 149·57 | + 181·61 | + 223·59 |
| $\Delta \Sigma Z$ | − 11·18 | − 12·47 | − 13·88 | − 15·46 | − 17·24 | − 19·30 |

| | $S_x$ | $^{II}f_x$ | $^{I}f_x$ | $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ | $S_y$ | $^{II}f$ | $^{I}f_y$ | $\frac{d^2\eta}{dt^2}$ | $S_z$ | $^{II}f_z$ | $^{I}f_z$ | $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1887 April 23·0 | | —10812·78 | + 1842·92 | | | —26409·19 | +4828·80 | | | +5049·62 | — 1057·72 | |
| Juni 1·0 | — 8979·42 | — 8969·81 | + 1577·81 | — 265·61 | —21645·51 | —21580·69 | +4037·53 | — 790·77 | +4010·70 | +3992·10 | — 853·43 | + 204·29 |
| Juli 11·0 | — 7400·90 | — 7892·50 | + 1345·54 | — 281·77 | —17595·74 | —17543·86 | +3383·66 | — 653·87 | +3158·79 | +3138·67 | — 689·06 | + 164·37 |
| August 20·0 | — 6054·49 | — 6046·96 | + 1141·98 | — 208·56 | —14902·84 | —14159·70 | +2832·98 | — 550·68 | +2463·05 | +2449·61 | — 554·95 | + 134·11 |
| September 29·0 | — 4911·87 | — 4904·98 | + 962·78 | — 179·25 | —11362·92 | —11326·72 | +2363·82 | — 469·66 | +1905·01 | +1894·66 | — 444·56 | + 110·89 |
| November 8·0 | — 3948·68 | — 3942·25 | + 804·98 | — 157·80 | — 8998·78 | — 8965·40 | +1959·66 | — 408·66 | +1458·78 | +1450·10 | — 353·38 | + 91·18 |
| 1887 December 18·0 | — 3149·28 | — 3187·82 | + 666·37 | — 138·56 | — 7029·59 | — 7008·74 | +1611·36 | — 348·80 | +1108·92 | +1096·72 | — 278·13 | + 75·25 |
| 1888 Januar 27·0 | — 2476·58 | — 2470·95 | + 545·46 | — 120·91 | — 5414·06 | — 5392·38 | +1310·88 | — 300·48 | + 834·63 | + 818·59 | — 216·86 | + 61·77 |
| März 7·0 | — 1930·69 | — 1925·49 | + 440·88 | — 104·58 | — 4099·77 | — 4081·50 | +1052·50 | — 258·88 | + 607·17 | + 602·23 | — 165·97 | + 50·39 |
| April 16·0 | — 1489·40 | — 1484·61 | + 351·57 | — 89·81 | — 3044·32 | — 3029·00 | + 831·76 | — 220·74 | + 440·29 | + 436·26 | — 126·85 | + 40·62 |
| Mai 26·0 | — 1187·43 | — 1139·04 | + 276·48 | — 75·09 | — 2209·99 | — 2197·24 | + 644·91 | — 186·65 | + 314·14 | + 310·91 | — 93·15 | + 33·20 |
| Juli 5·0 | — 860·46 | — 856·56 | + 214·58 | — 61·90 | — 1562·68 | — 1552·83 | + 488·78 | — 156·13 | + 220·33 | + 217·76 | — 68·08 | + 25·07 |
| August 14·0 | — 645·48 | — 641·98 | + 164·85 | — 49·78 | — 1072·00 | — 1068·55 | + 360·50 | — 128·28 | + 151·68 | + 149·68 | — 48·93 | + 19·15 |
| September 23·0 | — 480·17 | — 477·18 | + 125·97 | — 38·68 | — 709·98 | — 708·05 | + 257·37 | — 103·13 | + 102·27 | + 100·75 | — 34·60 | + 14·33 |
| November 2·0 | — 353·76 | — 351·16 | + 96·38 | — 29·59 | — 451·02 | — 445·68 | + 176·64 | — 80·73 | + 67·28 | + 66·15 | — 24·08 | + 10·52 |
| 1888 December 12·0 | — 256·96 | — 254·78 | + 74·32 | — 23·06 | — 278·27 | — 269·04 | + 115·65 | — 60·99 | + 42·73 | + 42·07 | — 16·47 | + 7·61 |
| 1889 Januar 21·0 | — 182·26 | — 180·46 | + 57·82 | — 16·50 | — 156·68 | — 153·39 | + 71·69 | — 43·96 | + 26·18 | + 25·60 | — 11·00 | + 5·47 |
| März 2·0 | — 124·09 | — 122·64 | + 44·66 | — 12·96 | — 84·07 | — 81·70 | + 41·82 | — 29·87 | + 15·00 | + 14·60 | — 7·06 | + 3·95 |
| April 11·0 | — 78·94 | — 77·78 | + 33·75 | — 11·11 | — 41·57 | — 39·88 | + 22·85 | — 18·97 | + 7·81 | + 7·55 | — 4·19 | + 2·36 |
| Mai 21·0 | — 44·85 | — 44·08 | + 22·48 | — 10·27 | — 18·16 | — 17·03 | + 11·47 | — 11·38 | + 3·52 | + 3·36 | — 2·19 | + 2·00 |
| Juli 30·0 | — 21·29 | — 20·55 | + 14·09 | — 9·39 | — 6·25 | — 5·56 | + 4·69 | — 6·78 | + 1·27 | + 1·17 | — 0·92 | + 1·27 |
| August 9·0 | — 7·10 | — 6·46 | + 6·28 | — 7·86 | — 1·18 | — 0·87 | + 0·98 | — 3·76 | + 0·30 | + 0·25 | — 0·25 | + 0·67 |
| September 18·0 | — 0·75 | — 0·28 | [— 0·06] | — 6·36 | — 0·08 | + 0·06 | [— 0·10] | — 1·06 | + 0·02 | 0·00 | [+ 0·01] | + 0·26 |
| October 28·0 | — 0·73 | [— 0·26] | — 5·66 | — 5·63 | + 0·07 | [— 0·04] | + 1·25 | + 1·85 | + 0·01 | [+ 0·01] | + 0·05 | + 0·04 |
| 1889 December 7·0 | — 6·89 | — 5·92 | — 11·80 | — 5·64 | + 1·48 | + 1·21 | + 3·90 | + 2·65 | + 0·05 | + 0·06 | — 0·07 | — 0·12 |
| | | — 17·23 | | | | + 5·11 | | | | — 0·01 | | |

**25. Störungen in rechtwinkligen Coordinaten. Uebergang auf osculirende Elemente.** Im Laufe der Zeiten wird es eintreten, dass die Bahn des Himmelskörpers sich merklich nach beiden Seiten von der ursprünglich angenommenen Ebene entfernen wird, und sich eine geänderte Bahnebene und eine andere Ellipse dem wahren Laufe besser anschmiegen wird. Die Störungswerthe, bezogen auf die ursprünglich angenommene osculirende Bahn werden dann sehr beträchtlich, und der Gang der Differenzen ziemlich unregelmässig (auch die höheren Differenzen sehr bedeutend). Hat man die Störungsrechnung durch einige Zeit fortgeführt, und bemerkt man, dass die Störungen, insbesondere aber die ersten und höheren Differenzen zu gross werden, so wird man für eine neue, zu wählende Epoche, von welcher ausgehend, man die Störungsrechnung fortsetzen will, neue osculirende Elemente ableiten, welche man aus den Coordinaten und Geschwindigkeiten für diese Epoche leicht erhält.

Man rechnet zunächst für die neue Osculationsepoche die ungestörten Coordinaten nach den Formeln 17. 2, 5, und die ungestörten Geschwindigkeiten nach 17. 12. Aus den Tafeln für die Störungen entnimmt man die numerischen Werthe der Störungen $\xi$, $\eta$, $\zeta$ und ihrer Differentialquotienten $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, die entweder durch numerische Differentiation der Störungen oder durch einmalige Integration der störenden Kräfte erhalten werden, dann hat man für die neue Epoche

$$x = x_0 + \xi, \qquad y = y_0 + \eta, \qquad z = z_0 + \zeta$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + \frac{d\xi}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + \frac{d\eta}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz_0}{dt} + \frac{d\zeta}{dt}. \tag{1}$$

Hiermit erhält man die Lage der neuen Bahn nach den Formeln 17. 18 [1]), welche nebst dem Knoten und der Neigung auch den Parameter $p$ geben. Dann wird mit den gestörten Coordinaten und Geschwindigkeiten

$$r\frac{dr}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} \tag{2}$$

und aus 17. 11, 14. 7 und 17. 1:

$$e \sin v = \frac{\sqrt{p}}{k_0}\frac{dr}{dt}, \qquad e \cos v = \frac{p}{r} - 1 \tag{3}$$

$$r \cos u = x \cos \Omega + y \sin \Omega, \qquad r \sin u = y \cos \Omega \cos i - x \sin \Omega \cos i + z \sin i \tag{4}$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}E = \operatorname{tang}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}v$$
$$M = E - e \sin E$$
$$\omega = u - v.$$

Hieraus leitet man noch für elliptische Bahnen

$$a = p \sec^2 \varphi \qquad \mu = \frac{k_0}{a^{\frac{3}{2}}}$$

ab. Die strenge Berechnung dieser Formeln erfordert Tafeln mit 7 Decimalen; dabei werden die osculirenden Elemente unmittelbar erhalten. In vielen Fällen wird es sich aber empfehlen, nur die **Aenderung** der osculirenden Elemente, d. h. die Differenz der neuen gegen die ursprünglichen abzuleiten. Da diese

---

[1]) In den Formeln 2, 5, 12 sind selbstverständlich die ungestörten Coordinaten und Geschwindigkeiten, in den folgenden Formeln 18 aber bereits die gestörten zu verwenden. Ein Missverständniss kann hieraus nicht entstehen.

Differenzen stets mässig sind, so wird man mit weniger Decimalen ausreichen; doch sind die Rechnungsvorschriften, da man die Aenderungen keineswegs als differentielle ansehen kann, etwas weitläufig[1]). Insbesondere jedoch wird sich dieser Vorgang für die Bestimmung der neuen Excentricität ($e\cos v$ bestimmt sich ja durch die sehr kleine Differenz $p:r - 1$) und der neuen mittleren Bewegung $\mu$ empfehlen, welche sehr genau bekannt sein muss, weil mit Hilfe derselben über einen relativ ziemlich bedeutenden Zeitraum hinaus die mittleren Anomalien zu bestimmen sind. Endlich ist noch zu bemerken, dass, wenn für die Störungsrechnung ein Intervall von $w$ Tagen zu Grunde gelegt wird, auch die Werthe $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ in diesem Intervall ausgedrückt sind, und daher überall $(wk)$ an Stelle von $k$ zu setzen ist.

Beispiel: Für Juni 1·0 erhält man aus der Tafel der ersten und zweiten summirten Werthe (pag. 341) für den Kometen 1889 V BROOKS[2])

$$\xi = -8091{\cdot}91 \qquad \eta = -21646{\cdot}58 \qquad \zeta = +4009{\cdot}07$$

$$\frac{d\xi}{dt} = +1707{\cdot}02 \qquad \frac{d\eta}{dt} = +4419{\cdot}71 \qquad \frac{d\zeta}{dt} = -951{\cdot}75.$$

Für die ungestörten Coordinaten erhält man, da $v_0 = 206^\circ\,29'\,48''{\cdot}7$ ist:

$$x_0 = -4{\cdot}874010 \qquad y_0 = -2{\cdot}827995 \qquad z_0 = -0{\cdot}091825,$$

und für die Geschwindigkeiten nach 17 (12):

$$\Gamma = 226^\circ\,26'\,45''{\cdot}7 \qquad \log\gamma = 8{\cdot}789307 \qquad \log(wk)\gamma = 9{\cdot}626948$$

($w = 40^d$, d. h. die Geschwindigkeit in 40 Tagen, die Einheit, auf welche sich auch $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ beziehen), und damit:

$$\frac{dx}{dt} = +0{\cdot}187800 \qquad \frac{dy}{dt} = -0{\cdot}161709 \qquad \frac{dz}{dt} = -0{\cdot}028848.$$

Hieraus erhält man

$\log wk\sqrt{p}\cos i = 0{\cdot}0802666$ $\quad \log\sin\varphi\sin v = 9_n{\cdot}8888188$ $\quad \log r\cos u = 0_n{\cdot}6910998$

$\log wk\sqrt{p}\sin i\sin\Omega = 8{\cdot}6214046$ $\quad \log\sin\varphi\cos v = 9_n{\cdot}6860551$ $\quad \log r\sin u = 9_n{\cdot}8998795$

$\log wk\sqrt{p}\sin i\cos\Omega = 9{\cdot}0826125$ $\quad v = 206^\circ\,22'\,30''{\cdot}42$ $\quad u = 189^\circ\,10'\,34''{\cdot}65$

$\Omega = 19^\circ\;4'\;26''{\cdot}56$ $\quad \varphi = 28\;58\;51{\cdot}86$ $\quad \omega = 342\;42\;4{\cdot}23$

$i = 6\;21\;22{\cdot}78$ $\quad \log a = 0{\cdot}5661102$ $\quad \pi = 1\;46\;30{\cdot}79$

$\log\sqrt{p} = 0{\cdot}2258082$ $\quad \mu = 502''{\cdot}1597$

$M = 242^\circ\,30'\,18''{\cdot}26.$

**26. Störungen in polaren Coordinaten. HANSEN-TIETJEN'sche Methode.** Für die Bestimmung der polaren Coordinaten $r$, $l$, dienen die Gleichungen $(B_1)$ No. 10. Legt man als Fundamentalebene die ungestörte Bahnebene des Massenpunktes $m$ (die osculirende Ebene zu einer gegebenen Epoche) zu Grunde, so werden die Coordinaten des störenden Körpers, bezogen auf diese Ebene durch 17. 6a, 6b oder 7 bestimmt, und $r_{01}$ folgt aus den Gleichungen 17. 10. Die störenden Kräfte werden hier, wenn man für $X$, $Y$, $Z$ ihre Werthe in $P$, $Q$ einführt:

$$P = P_0 + P_1; \qquad Q = Q_0 + Q_1; \qquad Z = Z_0 + Z_1,$$

wo, wie man leicht findet

[1]) S. hierüber v. OPPOLZER, l. c. II. Band, pag. 89.

[2]) Vergl. Artikel »Mechanische Quadratur«.

$$P_0 = -\frac{k_0^2 \mathrm{r}}{r^3}, \qquad Q_0 = 0, \qquad Z_0 = -\frac{k_0^2 z}{r^3}$$

ist. Setzt man[1])

$$K = \frac{1}{r_{1,0}^3} - \frac{1}{r_1^3}$$

$$\left.\begin{aligned} R &= \Sigma k_0^2 m_1 \frac{1}{\mathrm{r}} r_1 \cos B_1 \cos (L_1 - l) \cdot K \qquad & W &= \Sigma k_0^2 m_1 r_1 \sin B_1 \cdot K \\ Q &= \Sigma k_0^2 m_1 \mathrm{r}\, r_1 \cos B_1 \sin (L_1 - l) \cdot K \qquad & w &= \Sigma \frac{k_0^2 m_1}{r_{0,1}^3}, \end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

so findet man leicht

$$P_1 = \mathrm{r}R - \mathrm{r}w; \qquad \mathrm{r}Q_1 = Q; \qquad Z_1 = W - wz$$

und die Differentialgleichungen werden:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\mathrm{r}}{dt^2} - \mathrm{r}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \frac{k_0^2 \mathrm{r}}{r^3} = \mathrm{r}R - \mathrm{r}w \\ &\frac{d}{dt}\left(\mathrm{r}^2 \frac{dl}{dt}\right) = Q \\ &\frac{d^2 z}{dt^2} + \left(\frac{k_0^2}{r^3} + w\right) z = W. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

In diesen Gleichungen tritt nebst den zu betrachtenden Variabeln r, $l$, $z$, noch $r$ auf, welche Grösse aber mit r, $z$ durch die Gleichung verbunden ist,

$$r^2 = \mathrm{r}^2 + z^2.$$

Es ist daher

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{\mathrm{r}^3}\left(1 + \frac{z^2}{\mathrm{r}^2}\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\mathrm{r}^3}\left[1 - \tfrac{3}{2}\frac{z^2}{\mathrm{r}^2}\left(1 - \tfrac{5}{2} q + \tfrac{5 \cdot 7}{2 \cdot 3} q^2 - \ldots\right)\right] = \frac{1}{\mathrm{r}^3} - \frac{3}{2}\frac{z^2}{\mathrm{r}^5} f,$$

wenn

$$q = \frac{z^2}{2\mathrm{r}^2}$$

gesetzt wird. $f$ ist die bereits bei der Berechnung der Störungen in rechtwinkligen Coordinaten eingeführte, von dem Argumente $q$ abhängige Reihe (28. 6). Setzt man noch

$$\left.\begin{aligned} &\tfrac{3}{2} k_0^2 \frac{z^2}{\mathrm{r}^5} f = \Delta; \qquad \tfrac{1}{2} k_0^2 \frac{z^3}{\mathrm{r}^5} f = \Delta'; \qquad \frac{k_0^2}{\mathrm{r}^3} + w = w_0 \\ &R - w + \Delta = R_0; \qquad W + \Delta' = W_0, \end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}$$

so werden die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2\mathrm{r}}{dt^2} - \mathrm{r}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \frac{k_0^2}{\mathrm{r}^2} = \mathrm{r}R_0 \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{r}^2 \frac{dl}{dt}\right) = Q \quad (3)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + w_0 z = W_0. \quad (4)$$

In der ungestörten Bewegung hat man

$$\frac{d^2\mathrm{r}_0}{dt^2} - \mathrm{r}_0\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \frac{k_0^2}{\mathrm{r}_0^2} = 0 \quad (2a)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{r}_0^2 \frac{dl_0}{dt}\right) = 0. \quad (3a)$$

---

[1]) Die Abtrennung gewisser Faktoren bleibt dabei immerhin willkürlich; doch wird bei gewissen Anordnungen die Rechnung am übersichtlichsten oder einfachsten. Der Nenner r in $R$ wird z. B. eingeführt, damit in der ersten Gleichung (1) der Faktor r auftritt, der später bei der Einführung der Variabeln v (s. Gleichung 12) wegfällt.

Integrirt man die Gleichungen (3), (3a), so erhält man, da sich die Integrationsconstante in der ungestörten Bewegung ($Q = 0$) gleich $k_0\sqrt{p}$ ergiebt:

$$r^2\frac{dl}{dt} = k_0\sqrt{p} + \int Q\,dt, \qquad r_0^2\frac{dl_0}{dt} = k_0\sqrt{p}. \tag{5}$$

Nun ist

$$l_0 = v_0 + N_0,$$

wobei $N_0$ je nach der Lage des Anfangspunktes der Zählung für die $l$ den Abstand des Perihels vom Knoten (Anfangspunkt im Knoten der Bahn auf der Ekliptik) oder die Länge des Perihels (Abstand vom Frühlingspunkt gezählt in der Ekliptik bis zum Knoten und von hier in der Bahnebene) bedeutet. Da hier die ungestörte Bahnebene als Fundamentalebene angenommen ist, so wird man für die gestörte Bewegung ebenfalls

$$l = V + N \tag{6}$$

setzen und $V$ als eine wahre Anomalie, gezählt vom beweglichen Perihel und $N$ als Abstand des Perihels vom beweglichen Anfangspunkt nehmen können. Die Zerlegung ist nun ganz willkürlich, sofern nur die erste Gleichung (5) erfüllt ist. Setzt man also

$$r^2\frac{dV}{dt} + r^2\frac{dN}{dt} = k_0\sqrt{p} + \int Q\,dt,$$

so könnte man $N = N_0$ (constant) setzen, und die ganze Veränderung auf den Werth von $V$ werfen; oder man könnte $V = v_0$ setzen, und hiernach die Aenderung von $N$ bestimmen, was im Grunde genommen auf dasselbe hinausläuft. Am bequemsten erweist es sich, die Veränderung von $N$ durch die Differentialgleichung[1])

$$N = N_0 + \Delta N; \qquad \frac{d\Delta N}{dt} = \frac{1}{r^2}\int Q\,dt \tag{7}$$

zu bestimmen; dann wird $V$ nicht gleich $v_0$ sein, da der Faktor r nicht der ungestörten Bewegung entspricht. Es muss also

$$r^2\frac{dV}{dt} = k_0\sqrt{p} \tag{8}$$

sein. Zur Bestimmung der wahren Anomalie $v_0$ in der ungestörten Bewegung dienen die Formeln 14. 4 und 9; an die so bestimmte wahre Anomalie $v_0$ wäre dann eine Correction $\Delta v$ anzubringen, so dass $V = v_0 + \Delta v$ wäre; statt dessen kann man aber an die seit der Epoche verflossene Zeit $t$ eine Correction $\Delta t$ anbringen, so dass sich durch Berechnung der Formeln 14. 4, 9 sofort $V$ ergiebt. Dann wird also:

$$\begin{aligned} M &= M_0 + \mu(t + \Delta t) \qquad & r_0 \cos V &= a(\cos E - e) \\ E - e\sin E &= M & r_0 \sin V &= a\cos\varphi\sin E \end{aligned} \tag{IV}$$
$$l = V + N_0 + \Delta N.$$

Nun ist nach 14, 11

$$\frac{dV}{dM} = \frac{k_0\sqrt{p}}{r_0^2\mu};$$

[1]) Wählt man als Ausgangspunkt der Zählung für $l$ und $N$ den Frühlingspunkt, so ist $N$ die Länge des Perihels. Der Ausdruck für $\frac{d\Delta N}{dt}$ kann natürlich mit demjenigen für die Aenderung von $\pi$ (20. 4) keineswegs identisch sein, da hier $\Omega$ und $\omega$ nicht einer osculirenden Ebene angehören; ersteres ist überhaupt für den ganzen Verlauf der Störungsrechnung als constant angesehen.

Die mittlere Anomalie ist hier aber sowohl wegen des Gliedes $\mu t$ als auch wegen der von der Zeit abhängigen Correction $\Delta t$ veränderlich, so dass

$$\frac{dM}{dt} = \mu\left(1 + \frac{d\Delta t}{dt}\right)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{k_0\sqrt{p}}{r_0^2}\left(1 + \frac{d\Delta t}{dt}\right)$$

ist. Setzt man dies in (8) ein, so folgt

$$1 = \frac{r^2}{r_0^2}\left(1 + \frac{d\Delta t}{dt}\right).$$

Sobald r aus der Gleichung (2) bekannt wird, folgt hieraus $\Delta t$. Setzt man nun

$$r = r_0(1 + \nu), \tag{V}$$

so erhält man nach einer leichten Reduction:

$$\frac{d\Delta t}{dt} = -\sigma\nu, \quad \text{wobei} \quad \sigma = \frac{(2+\nu)}{(1+\nu)^2}. \tag{9}$$

Diese Formel ist auch für parabolische Bewegungen anwendbar, da aus derselben $\mu$ verschwunden ist. Für die elliptische Bewegung wird es kürzer, sofort die Störung der mittleren Anomalie zu erhalten; sie ist

$$\frac{d\Delta M}{dt} = -\mu\nu\sigma. \tag{9a}$$

Um die Störung im Radiusvector zu berechnen, hat man zu beachten, dass der Radiusvector $r_0$ zur wahren Anomalie $V$ gehört, daher nach (IV) und (V):

$$r = \frac{p(1+\nu)}{1 + e\cos V}$$

ist. Hieraus folgt durch Differentiation:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{p}{1 + e\cos V}\frac{d\nu}{dt} + \frac{p(1+\nu)e\sin V}{(1 + e\cos V)^2}\frac{dV}{dt}$$

und daher, wenn man für $\frac{dV}{dt}$ seinen Werth aus (8) einsetzt:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{r}{1+\nu}\frac{d\nu}{dt} + \frac{k_0}{\sqrt{p}(1+\nu)}e\sin V. \tag{10}$$

Differenzirt man nochmals, und setzt in dem entstehenden Ausdrucke für $\frac{dr}{dt}$ den Werth aus (10) ein, so folgt:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{r}{1+\nu}\frac{d^2\nu}{dt^2} + \frac{k_0 e\cos V}{(1+\nu)\sqrt{p}}\frac{dV}{dt}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{r}{1+\nu}\frac{d^2\nu}{dt^2} + \frac{k_0^2 p}{r^3} - \frac{k_0^2}{(1+\nu)r^2}. \tag{11}$$

Weiter folgt aus (5):

$$r^4\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = k_0^2 p + 2k_0\sqrt{p}\int Q\,dt + \left(\int Q\,dt\right)^2,$$

folglich, wenn

$$Q' = \left[1 + \frac{\int Q\,dt}{2k_0\sqrt{p}}\right]\int Q\,dt \tag{IIIa}$$

gesetzt wird:

$$r\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = \frac{k_0^2}{r^3}p + \frac{2k_0\sqrt{p}}{r^3}Q'.$$

Hiermit wird die Gleichung (2)

$$\frac{r}{1+\nu}\frac{d^2\nu}{dt^2}+\frac{k_0^2}{r^2}\frac{\nu}{1+\nu}-\frac{2k_0\sqrt{p}}{r^3}Q'=rR_0. \tag{12}$$

Multiplicirt man hier mit $\frac{1+\nu}{r}$ und setzt:

$$\begin{aligned}\frac{2k_0\sqrt{p}}{r^4}Q'=R_1;\qquad R_0+R_1=H\\ \frac{k_0^2}{r^3}-H=k,\end{aligned} \tag{IIIb}$$

so wird:

$$\frac{d^2\nu}{dt^2}+k\nu=H. \tag{13}$$

Nachdem man die Coordinaten $L_1$, $B_1$ und die Entfernung $r_{01}$ nach 17. 6 oder 7 und 10 bestimmt hat, erhält man die störenden Kräfte $R$, $Q$, $W$, $w$ nach I; $\Delta$, $\Delta'$, $R_0$, $W_0$, $w_0$ nach II, $Q'$, $R_1$, $H$, $k$ nach IIIa, IIIb; $V$, $l$, r sind bestimmt durch die Gleichungen IV, V, wobei die Störungen $\Delta l$, $\Delta N$, $\nu$ und die Breitenstörung $z$ senkrecht zur ungestörten Bahnebene durch die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta l}{dt}=-\sigma\nu;\qquad \sigma=\frac{(2+\nu)}{(1+\nu)^2}\\ \frac{d^2\nu}{dt^2}+k\nu=H\\ \frac{d^2z}{dt^2}+w_0z=W_0\end{aligned} \tag{VI}$$

gegeben sind. In den störenden Kräften treten allerdings bereits die gestörten Coordinaten r, $l$, $z$ auf, für welche aber, da sie mit den störenden Massen multiplicirt erscheinen, die Störungen immer genügend genau extrapolirt werden können. Die Integration der Differentialgleichung für $\Delta l$ bietet keine weiteren Schwierigkeiten, da sie auf einfache Quadraturen führt, denn es ist:

$$\Delta l=-\int\sigma\nu\,dt,$$

wobei allerdings zuerst der Werth von $\nu$ für das $(i+1)$te Intervall bekannt sein muss, wenn man den Werth von $\Delta l$ für dieses Intervall bestimmen will.

Zur Erleichterung der Rechnung kann $\sigma$ mit dem Argumente $\nu$ tabulirt werden; eine solche Tafel findet sich in v. OPPOLZER's »Lehrbuch zur Bahnbestimmung von Planeten und Kometen«, II. Bd., pag. 597 auf 6 Decimalen; im folgenden ist dieselbe auf 5 Decimalen mitgetheilt; dabei ist für $t$ der Tag als Zeiteinheit gewählt; wenn also die Zeiteinheit für die Störungsrechnung (das Störungsintervall) $w$ Tage beträgt, so ist $(w\mu)$ an Stelle von $\mu$ zu setzen; überdies ist in der Tafel der Werth von $\sigma$ mit $10^{-6}$ multiplicirt, wobei also vorausgesetzt ist, dass $\nu$ in Einheiten der sechsten Decimale ausgedrückt wird. Wenn also z. B.

$$\nu=+0{\cdot}002340$$

ist, so wird

$$\begin{aligned}\log\nu=8{\cdot}36922\\ \log\sigma=4{\cdot}29951\end{aligned}$$

daher für diesen Ort $\log\frac{d\Delta l}{dt}=7_n{\cdot}66873$ und die tägliche Störung $\frac{d\Delta l}{dt}=-0{\cdot}004664$.

| v | lg σ | Differenz | v | lg σ | Differenz |
|---|---|---|---|---|---|
| − 0·030000 | 4·32092 | − 67 | 0·000000 | 4·30103 | − 65 |
| − 0·029000 | 4·32025 | − 68 | + 0·001000 | 4·30038 | − 65 |
| − 0·028000 | 4·31957 | − 67 | + 0·002000 | 4·29973 | − 65 |
| − 0·027000 | 4·31890 | − 67 | + 0·003000 | 4·29908 | − 65 |
| − 0·026000 | 4·31823 | − 67 | + 0·004000 | 4·29843 | − 65 |
| − 0·025000 | 4·31756 | − 67 | + 0·005000 | 4·29778 | − 65 |
| − 0·024000 | 4·31689 | − 67 | + 0·006000 | 4·29713 | − 64 |
| − 0·023000 | 4·31622 | − 67 | + 0·007000 | 4·29649 | − 65 |
| − 0·022000 | 4·31555 | − 67 | + 0·008000 | 4·29584 | − 64 |
| − 0·021000 | 4·31488 | − 67 | + 0·009000 | 4·29520 | − 65 |
| − 0·020000 | 4·31421 | − 66 | + 0·010000 | 4·29455 | − 64 |
| − 0·019000 | 4·31355 | − 67 | + 0·011000 | 4·29391 | − 64 |
| − 0·018000 | 4·31288 | − 66 | + 0·012000 | 4·29327 | − 65 |
| − 0·017000 | 4·31222 | − 67 | + 0·013000 | 4·29262 | − 64 |
| − 0·016000 | 4·31155 | − 66 | + 0·014000 | 4·29198 | − 64 |
| − 0·015000 | 4·31089 | − 67 | + 0·015000 | 4·29134 | − 64 |
| − 0·014000 | 4·31022 | − 66 | + 0·016000 | 4·29070 | − 64 |
| − 0·013000 | 4·30956 | − 66 | + 0·017000 | 4·29006 | − 63 |
| − 0·012000 | 4·30890 | − 66 | + 0·018000 | 4·28943 | − 64 |
| − 0·011000 | 4·30824 | − 66 | + 0·019000 | 4·28879 | − 64 |
| − 0·010000 | 4·30758 | − 66 | + 0·020000 | 4·28815 | − 64 |
| − 0·009000 | 4·30692 | − 65 | + 0·021000 | 4·28751 | − 63 |
| − 0·008000 | 4·30627 | − 66 | + 0·022000 | 4·28688 | − 64 |
| − 0·007000 | 4·30561 | − 66 | + 0·023000 | 4·28624 | − 63 |
| − 0·006000 | 4·30495 | − 65 | + 0·024000 | 4·28561 | − 63 |
| − 0·005000 | 4·30430 | − 66 | + 0·025000 | 4·28498 | − 64 |
| − 0·004000 | 4·30364 | − 65 | + 0·026000 | 4·28434 | − 63 |
| − 0·003000 | 4·30299 | − 66 | + 0·027000 | 4·28371 | − 63 |
| − 0·002000 | 4·30233 | − 65 | + 0·028000 | 4·28308 | − 63 |
| − 0·001000 | 4·30168 | − 65 | + 0·029000 | 4·28245 | − 63 |
| 0·000000 | 4·30103 | | + 0·030000 | 4·28182 | |

| | 68 | 67 | 66 | 65 | 64 | 63 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6·8 | 6·7 | 6·6 | 6·5 | 6·4 | 6·3 |
| 2 | 13·6 | 13·4 | 13·2 | 13·0 | 12·8 | 12·6 |
| 3 | 20·4 | 20·1 | 19·8 | 19·5 | 19·2 | 18·9 |
| 4 | 27·2 | 26·8 | 26·4 | 26·0 | 25·6 | 25·2 |
| 5 | 34·0 | 33·5 | 33·0 | 32·5 | 32·0 | 31·5 |
| 6 | 40·8 | 40·2 | 39·6 | 39·0 | 38·4 | 37·8 |
| 7 | 47·6 | 46·9 | 46·2 | 45·5 | 44·8 | 44·1 |
| 8 | 54·4 | 53·6 | 52·8 | 52·0 | 51·2 | 50·4 |
| 9 | 61·2 | 60·3 | 59·4 | 58·5 | 57·6 | 56·7 |

Die Integration der beiden anderen Gleichungen führt auf Doppelintegrale, wenn man sie in der Form schreibt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = G - gx; \qquad (14)$$

Doch erfordert dies bereits einen ausreichend genäherten Werth von $x$. Für den Beginn der Rechnung wird man denselben in folgender Weise erlangen: Sei

$$F(t) = F_0 + F_1 t + F_2 t^2 + \ldots$$

so wird $F_0 = F(0)$; $F_1 = F'(0)$; $F_2 = \frac{1}{2}F''(0) \ldots$. Sind daher eine Reihe von Functionswerthen $F(-\frac{3}{2})$, $F(-\frac{1}{2})$, $F(+\frac{1}{2})$, $F(+\frac{3}{2})$ bekannt, so kann man $F(0)$, $F'(0)$, $F''(0) \ldots$ nach der Methode der mechanischen Differentiation (s. den Artikel »Interpolation«, pag. 43, Formel 6 und pag. 47), und damit die Coëfficienten $F_0$, $F_1$, $F_2 \ldots$ bestimmen. Man findet

$$\begin{aligned} F_0 &= \tfrac{1}{2}[F(-\tfrac{1}{2}) + F(+\tfrac{1}{2})] - \tfrac{1}{16}[f''(-\tfrac{1}{2}) + f''(+\tfrac{1}{2})] \\ F_1 &= f'(0) - \tfrac{1}{24}f'''(0) \\ F_2 &= \tfrac{1}{4}[f''(-\tfrac{1}{2}) + f''(+\tfrac{1}{2})] \\ F_3 &= \tfrac{1}{6}f'''(0), \end{aligned} \qquad (15)$$

wo die $f'$, $f''$, $f'''$ ... die ersten, zweiten, dritten ... Differenzen bedeuten. Man wird so aus der Reihe der numerischen Werthe der $G$, $g$ die Reihen ableiten

$$\begin{aligned} G &= G_0 + G_1 t + G_2 t^2 + \ldots \\ g &= g_0 + g_1 t + g_2 t^2 + \ldots \end{aligned} \qquad (16)$$

Setzt man $x$ ebenfalls in der Form voraus:

$$x = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + x_3 t^3 + \ldots \qquad (17)$$

so wird man die Coëfficienten $x_0$, $x_1$ ... durch Einsetzen in die Differentialgleichung (14) ermitteln. Für die Osculationsepoche muss aber $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$ sein, woraus $x_0 = x_1 = 0$ folgt. Für die übrigen Coëfficienten ergiebt sich durch die Substitution in (14)

$$\begin{aligned} x_2 &= \tfrac{1}{2}G_0 \qquad & x_4 &= \tfrac{1}{12}(G_2 - \tfrac{1}{2}g_0 G_0) \\ x_3 &= \tfrac{1}{6}G_1 \qquad & x_5 &= \tfrac{1}{20}(G_3 - \tfrac{1}{6}g_0 G_1 - \tfrac{1}{2}g_1 G_0). \end{aligned} \qquad (18)$$

Substituirt man nun die Ausdrücke (18) in (17), so erhält man allerdings bereits die Störungen selbst; um dabei jedoch eine genügende Genauigkeit zu erzielen, müsste man nicht nur $x_5$, sondern oft auch noch folgende Glieder berücksichtigen. Da man jedoch für die spätere Rechnung ohnediess die zweiten Differentialquotienten benöthigt, so wird die Formel (17) mit den Coëfficienten (18) (selbst mit Vernachlässigung von $x_5$) ausreichen, um die zwei der Osculation vorangehenden und die beiden folgenden Differentialquotienten mit Hilfe des nach (17) ermittelten $x$ nach (14) zu finden. Aus diesen werden die summirten Reihen berechnet, nachdem die Anfangsconstanten so ermittelt wurden, dass die Integrale für die Osculationsepoche verschwinden. Für die folgenden Intervalle hätte man dann aus den zweiten summirten Reihen die $x$ nach den Formeln zu bestimmen

$$x_{i+1} = {}^{II}f(i+1) + \tfrac{1}{12}f(i+1) - \tfrac{1}{240}f''(i+1).$$

Den Werth von $f''(i+1)$ wird man wegen des kleinen Faktors $\frac{1}{240}$ mit ausreichender Genauigkeit nach dem Gange der Differenzen extrapoliren können; um die Unsicherheit, welche aus der Extrapolation der $f(i+1)$ aus den bis $f(i)$ reichenden Functionswerthen entsteht, zu heben, kann man

$$f(i+1) = \frac{d^2 x_{i+1}}{dt^2} = G - g x_{i+1}$$

einsetzen, und erhält dann

$$(1+\tfrac{1}{12}g)x_{i+1} = {}^{II}f(i+1) + \tfrac{1}{12}G - \tfrac{1}{240}f''(i+1).$$

Setzt man daher

$$S_x = {}^{II}f(i+1) - \tfrac{1}{240}f''(i+1) + \tfrac{1}{12}G, \qquad (19)$$

und setzt den hiermit folgenden Werth

$$x_{i+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{12}g} S_x$$

in die Gleichung (14), so erhält man

$$\frac{d^2 x_{i+1}}{dt^2} = G - \frac{g}{1+\frac{1}{12}g} S_x, \qquad (20)$$

wobei $G$, $g$, die Functionswerthe $H$, $h$, $W_0$, $w_0$ für den $(i+1)$ten Ort sind.

Zu dem folgenden Beispiele sind noch einige Bemerkungen erforderlich. Die Längen $L_1$, $l$ sind vom Knoten der Bahnebene auf der Ekliptik gerechnet. $B_1$ wird nicht gebraucht, daher auch nicht aufgeschlagen, daher sind nur $\cos B_1$ und $\sin B_1$ angeschrieben. Die störenden Kräfte sind wieder in Einheiten der sechsten Decimale gerechnet; ebenso natürlich $h$ und $w_0$; hingegen treten die Grössen $h$: $(1+\frac{1}{12}h)$ und $w_0$: $(1+\frac{1}{12}w_0)$ als Faktoren von den ebenfalls in Einheiten der siebenten Decimale ausgedrückten $S_h$ und $S_w$ auf (s. die Formeln 20) und müssen daher durch Multiplikation mit $10^{-6}$ auf die gewöhnliche Einheit reducirt werden[1].

Für das einfache Integral $\int Q\,dt$ und die Integration für $\Delta N$ ist nichts besonderes zu erwähnen; nur wird zweckmässig, da $\Delta N$ in Bogensecunden ausgedrückt wird, sofort $\int Q\,dt : arc\,1''$ verwendet.

Es wird hier für die Anwendung bequemer, die zerstreut erhaltenen Formeln zu sammeln. Man hat:

$$M = M_0 + \mu(t+\Delta t) = M_0 + \mu t + \Delta M \qquad r_0 \cos V = a(\cos E - e)$$

$$E - \sin E = M \qquad r_0 \sin V = a \cos\varphi \sin E$$

$$l = V + N_0 + \Delta N; \qquad r = r_0(1+\nu)$$

$$r_i \cos B_i \cos(L_i - l) = \xi_i \qquad R = \Sigma k_0^2 m_i \frac{\xi_i}{r} \cdot K$$

$$r_i \cos B_i \sin(L_i - l) = \eta_i \qquad Q = \Sigma k_0^2 m_i \eta_i r K$$

$$r_i \sin B_i = \zeta_i \qquad W = \Sigma k_0^2 m_i \zeta_i K$$

$$K = \frac{1}{r_{0i}^3} - \frac{1}{r_i^3} \qquad w = \Sigma \frac{k_0^2 m_i}{r_{0i}^3}$$

$$\tfrac{1}{2}k_0^2 \frac{s^2}{r^5} f = \Delta; \qquad \tfrac{1}{2}k_0^2 \frac{z^2}{r^5} f = \Delta'$$

$$Q' = \left[1 + \frac{\int Q\,dt}{2k_0\sqrt{p}}\right]\int Q\,dt; \qquad \frac{2k_0\sqrt{p}}{r^4} Q' = R_1$$

$$R - w + \Delta = R_0; \qquad W + \Delta' = W_0$$

$$R_0 + R_1 = H; \qquad \frac{k_0^2}{r^3} + w = w_0; \qquad \frac{k_0^2}{r^3} - H = h$$

$$\frac{d\Delta t}{dt} = -\sigma\nu; \qquad \frac{d\Delta M}{dt} = -\sigma\mu\nu$$

$$\frac{d^2\nu}{dt^2} + h\nu = H; \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} + w_0 z = W_0.$$

Für ein Intervall von $w$ Tagen ist wieder $(wk_0)$ an Stelle von $k_0$ zu setzen.

---

[1]) Dasselbe gilt natürlich auch für die Summanden $\frac{1}{12}h$, $\frac{1}{12}w$.

**27. Beispiel.** Zur Berechnung der störenden Kräfte bedarf man der Coordinaten des störenden Körpers, bezogen auf die Bahnebene des gestörten Himmelskörpers. Das »Berliner astronomische Jahrbuch« giebt nun seit 1880 für die störenden Himmelsköiper die Lage: Länge des Knotens und Neigung gegen die Ekliptik einer als fest angenommenen Bahnebene, ferner die Längen in der Bahn und die Breiten des störenden Körpers bezogen auf diese Bahnebene; für das Decenium 1885 bis 1895 sind die Grössen

| | | |
|---|---|---|
| für Jupiter: | $\Omega_1 = 99° 20' 31''\cdot6$ | $i_1 = 1° 18' 38''\cdot2$ |
| „ Saturn: | $112 \quad 41 \quad 48\cdot8$ | $2 \quad 29 \quad 34\cdot2$. |

Für die Berechnung der Störungen des Kometen 1889 V (BROOKS) ergiebt sich unter Zugrundelegung der pag. 336 angeführten Elemente nach 17, 6a:

| | | | |
|---|---|---|---|
| für Jupiter: | $\Phi = 167° 32' 48''\cdot7$ | $\Phi' = 86° 15' 26''\cdot7$ | $J = 6° \; 0' 44''\cdot0$ |
| „ Saturn: | $158 \quad 20 \quad 37\cdot8$ | $68 \quad 45 \quad 47\cdot6$ | $6 \quad 44 \quad 44\cdot1$, |

womit die Coordinaten $L_1$, $B_1$ des störenden Körpers mit Berücksichtigung der im »Berliner Astronomischen Jahrbuch« gegebenen Breiten $\beta_1$ über der angenommenen Ebene $\Omega_1 i_1$ nach 17 (6b) ermittelt werden können.

Für die zwei der Osculationsepoche vorangehende und nachfolgenden Intervallen sind nun die Störungen gleich Null anzunehmen. In dem folgenden Beispiele ist dieses jedoch nicht der Fall, da die Rechnung mit den nach der ersten Bestimmung sich ergebenden Störungen wiederholt wurde. Die für die Bestimmung von $\Delta$ und $\Delta'$ nöthigen Rechnungen wurden nicht angesetzt, weil in Folge der Kleinheit von $s$ beide Werthe verschwinden.

Eine theilweise Controlle der Rechnung erhält man durch Vergleichung der extrapolirten Werthe für $(1 + \nu)$, die für die Berechnung von r aus $r_0$ verwendet werden mit den schliesslich erhaltenen, welche zur Bestimmung von $\frac{d\Delta M}{dt}$ dienen. Ueberdies müssen, wenn man die Störungen nach verschiedenen Methoden berechnet, die $r_0$, selbstverständlich in allen Methoden sich innerhalb der Ungenauigkeit der Rechnung identisch ergeben. Eine durchgreifende Controlle erhält man natürlich erst durch die Uebereinstimmung der nach den verschiedenen Methoden erhaltenen osculirenden Elemente für dieselbe Epoche. (Vergl. pag. 366.)

Das folgende Beispiel ist wieder bedeutend verkürzt wiedergegenen. Zu erwähnen ist noch, dass die auf pag. 354 unten angesetzten Rechnungen für $s$ und $\nu$ nebst den daraus folgenden Reihen zur Bestimmung der Anfangsconstanten nach den auf pag. 349 gegebenen Vorschriften dienen:

| 1889 | Dec. 7·0 | Oct. 28·0 | Sept. 18·0 | Aug. 9·0 | Juli . 0·0 | Mai 21·0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta N$ . . . . . . | $+0''·3$ | $0''·0$ | $0''·0$ | $-0''·2$ | $-1''·0$ | $-2''·8$ |
| $\Delta M$ . . . . . . | $+0·1$ | 0·0 | 0·0 | $-0·1$ | $-0·3$ | $-0·6$ |
| $M_0+\mu t$ . . . . . | 9° 25′ 31″·8 | 3° 51′ 2″·4 | 358° 16′ 33″·5 | 352° 42′ 4″·5 | 347° 7′ 35″·6 | 341° 38′ 6″·7 |
| $M$ . . . . . . | 9 25 31·4 | 3 51 2·4 | 358 16 33·5 | 352 42 4·4 | 347 7 35·3 | 341 38 6·1 |
| $E$ . . . . . . | 17 33 58·6 | 7 15 31·8 | 356 44 33·0 | 346 19 25·2 | 336 16 21·7 | 326 46 12·5 |
| $V$ . . . . . . | 23 58 16·7 | 12 4 20·7 | 354 34 27·9 | 337 23 23·4 | 321 23 57·1 | 307 6 13·1 |
| $N_0+\Delta N$ . . . | 348 35 50·9 | 348 35 50·6 | 348 35 50·6 | 348 35 50·4 | 348 35 49·6 | 348 35 47·8 |
| $l$ . . . . . . . | 12 29 7·6 | 355 40 11·3 | 338 10 18·5 | 320 59 13·8 | 304 19 46·7 | 290 42 1·7 |
| $1+\nu$ . . . . . | 0·999997 | 1·000000 | 1·000000 | 0·999996 | 0·999998 | 0·999992 |
| $\log r_0$ . . . . . | 0·307650 | 0·293082 | 0·290623 | 0·300817 | 0·321487 | 0·348980 |
| $\log r$ . . . . . | 0·307649 | 0·293082 | 0·290623 | 0·300815 | 0·321484 | 0·348976 |
| $Q$♃ . . . . . . | $+11·67$ | $+5·92$ | $-2·15$ | $-12·55$ | $-24·90$ | $-38·40$ |
| $Q$♄ . . . . . . | $-0·82$ | $-0·80$ | $-0·64$ | $-0·37$ | $-0·02$ | $+0·35$ |
| $R$♃ . . . . . . | $+0·67$ | 0·00 | $+0·15$ | $+1·68$ | $+4·69$ | $+9·76$ |
| $R$♄ . . . . . . | $+0·10$ | $+0·19$ | $+0·28$ | $+0·34$ | $+0·35$ | $+0·30$ |
| $W$♃ . . . . . . | $-0·61$ | $-0·31$ | $+0·12$ | $+0·75$ | $+1·65$ | $+2·92$ |
| $W$♄ . . . . . . | $+0·08$ | $+0·08$ | $+0·04$ | $+0·04$ | $+0·05$ | $+0·05$ |
| $w$♃ . . . . . . | $+2·12$ | $+2·66$ | $+3·43$ | $+4·56$ | $+6·18$ | $+8·47$ |
| $w$♄ . . . . . . | $+0·12$ | $+0·11$ | $+0·10$ | $+0·10$ | $+0·00$ | $+0·09$ |
| $\log r^{-3}$ . . . . . | 9·38470 | 9·41884 | 9·41875 | 9·39887 | 9·35708 | 9·30205 |
| $\log \int \Sigma Q dt$ . . . | 0·99255 | 0·22011 | 9·49136 | 0·90200 | 1·42781 | 1·76518 |
| $\log Q'$ . . . . . | 0·99255 | 0·22011 | 9·49136 | 0·90200 | 1·42782 | 1·76516 |
| $\log 2(wk_0)\sqrt{p_0}\,Q'$ . | 1·85999 | 0·58755 | 9·85330 | 1·26044 | 1·79526 | 2·13260 |
| $\log r^4$ . . . . . | 1·23060 | 1·17233 | 1·16249 | 1·20326 | 1·28594 | 1·39590 |
| $R$ . . . . . . | $+0·77$ | $+0·19$ | $+0·43$ | $+2·02$ | $+5·24$ | $+10·11$ |
| $-w$ . . . . . . | $-2·24$ | $-2·77$ | $-3·53$ | $-4·66$ | $-6·27$ | $-8·56$ |
| $R_0$ . . . . . . | $-1·47$ | $-2·58$ | $-3·10$ | $-2·64$ | $-1·03$ | $+1·55$ |
| $R_1$ . . . . . . | $+1·34$ | $+0·26$ | $+0·05$ | $+1·16$ | $+3·23$ | $+5·45$ |
| $\log r^3$ . . . . . | 0·92295 | 0·87925 | 0·87187 | 0·90244 | 0·96445 | 1·04692 |
| $H$ . . . . . . | $-0·13$ | $-2·32$ | $-3·05$ | $-1·48$ | $+2·20$ | $+7·00$ |
| $(wk_0)^2 r^3$ . . . . | $+5687·5$ | $+62522·6$ | $+68593·7$ | $+59269·6$ | $+51884·4$ | $+42496·0$ |
| $w$ . . . . . . | $+2·24$ | $+2·77$ | $+3·53$ | $+4·66$ | $+6·27$ | $+8·56$ |
| $k$ . . . . . . | $+56537·6$ | $+62524·9$ | $+68596·7$ | $+59271·1$ | $+51882·3$ | $+42489·0$ |
| $\log 10^{-6} k$ . . . . | 8·75284 | 8·79604 | 8·80344 | 8·77284 | 8·71081 | 8·62826 |
| $\log(1+\frac{1}{12}10^{-6}k)$ . | 0·00204 | 0·00225 | 0·00229 | 0·00214 | 0·00185 | 0·00147 |
| $\log S_\nu$ . . . . . | $0_n3927$ | $9_n5051$ | $9_n5441$ | $0_n5079$ | $0_n35678$ | $0_n02942$ |
| $\log k'$ . . . . . | 8·75080 | 8·79379 | 8·80115 | 8·77070 | 8·70896 | 8·62681 |
| $-k'S_\nu = -k\nu$ . | $+0·15$ | $+0·02$ | $+0·02$ | $+0·20$ | $+0·37$ | $+0·36$ |
| $w_0$ . . . . . . | $+56539·7$ | $+62525·4$ | $+68597·3$ | $+59274·2$ | $+51890·7$ | $+42504·1$ |
| $\log w_0\,10^{-6}$ . . . | 8·75284 | 8·79606 | 8·80344 | 8·77286 | 8·71088 | 8·62844 |
| $\log(1+\frac{1}{12}10^{-6}w_0)$ | 0·00204 | 0·00225 | 0·00229 | 0·00214 | 0·00185 | 0·00147 |
| $\log S_0$ . . . . . | $9_n4624$ | $8_n0000$ | — | 9·3010 | 0·07555 | 0·53650 |
| $\log w'$ . . . . . | 8·75082 | 8·79381 | 8·80115 | 8·77072 | 8·70903 | 8·62697 |
| $W-W_0$ . . . . | $-0·58$ | $-0·23$ | $+0·16$ | $+0·79$ | $+1·70$ | $+2·97$ |
| $-wS_0 = -w_0 s$ . | $+0·02$ | $+0·01$ | 0·00 | $-0·01$ | $-0·06$ | $-0·16$ |
| $\nu$ . . . . . . | $-2·46$ | $-0·32$ | $-0·35$ | $-3·21$ | $-7·17$ | $-8·47$ |
| $\log \nu$ . . . . . | $0_n3909$ | $9_n505$ | $9_n544$ | $0_n5065$ | $0_n85552$ | $0_n92788$ |
| $\log c$ . . . . . | 4·3010 | 4·301 | 4·301 | 4·3010 | 4·30103 | 4·30103 |
| $\log d\Delta M : dt$ . . . | 9·1018 | 8·171 | 8·182 | 9·1525 | 9·45907 | 9·53148 |
| $\log d\Delta w : dt$ . . . | 9·6916 | 8·9453 | 8·2245 | 9·6148 | 0·09927 | 0·36162 |

| 1887 | Aug. 20·0 | Juli 11·0 | Juni 1·0 | April 22·0 | März 18·0 | Febr. 1·0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta N$ . . . . . | + 0′ 24″·5 | + 1′ 14″·3 | + 2′ 21″·5 | + 3′ 50″·7 | + 5′ 46″·4 | + 8′ 27″·2 |
| $\Delta M$ . . . . . | + 10 29·0 | + 12 48·4 | + 15 29·0 | + 18 37·8 | + 22 16·4 | + 26 17·8 |
| $M_0 + \mu t$ . . . | 252° 21′ 23″·9 | 246° 46′ 55″·0 | 241° 12′ 26″·1 | 235° 37′ 57″·2 | 230° 3′ 28″·3 | 224° 28′ 59″·3 |
| $M$ . . . . . | 252 31 52·9 | 246 59 38·4 | 241 27 55·1 | 235 56 35·0 | 230 25 44·7 | 224 55 16·6 |
| $E$ . . . . . | 231 26 21·5 | 227 12 7·1 | 223 8 5·5 | 218 58 35·5 | 214 58 9·9 | 211 1 18·8 |
| $V$ . . . . . | 212 18 57·2 | 209 22 18·2 | 206 37 21·9 | 203 58 10·9 | 201 24 5·4 | 198 54 9·4 |
| $N_0 + \Delta N$ . . | 348 36 15·1 | 348 37 4·9 | 348 38 12·1 | 348 39 41·3 | 348 41 37·0 | 348 44 17·8 |
| $I$ . . . . . | 195 50 12·8 | 192 59 23·1 | 190 15 34·0 | 187 37 52·2 | 185 5 42·4 | 182 38 27·2 |
| $1 + \nu$ . . . . . | 1·003354 | 1·003877 | 1·004448 | 1·005049 | 1·005700 | 1·006401 |
| $\log r_0$ . . . . . | 0·678114 | 0·686388 | 0·694767 | 0·701809 | 0·708039 | 0·713440 |
| $\log r$ . . . . . | 0·679568 | 0·688578 | 0·696692 | 0·703997 | 0·710507 | 0·716211 |
| $Q_{♃}$ . . . . . | + 1784·98 | + 2272·76 | + 2989·24 | + 3984·48 | + 5484·41 | + 7671·85 |
| $Q_{♄}$ . . . . . | + 3·06 | + 3·07 | + 3·08 | + 3·09 | + 3·08 | + 3·08 |
| $R_{♃}$ . . . . . | + 697·98 | + 905·88 | + 1209·25 | + 1676·06 | + 2442·23 | + 3801·39 |
| $R_{♄}$ . . . . . | + 0·02 | + 0·01 | + 0·01 | + 0·01 | 0·00 | 0·00 |
| $W_{♃}$ . . . . . | + 200·27 | + 244·42 | + 308·04 | + 384·64 | + 504·63 | + 692·59 |
| $W_{♄}$ . . . . . | + 0·07 | + 0·07 | + 0·06 | + 0·06 | + 0·06 | + 0·05 |
| $w_{♃}$ . . . . . | + 622·72 | + 822·72 | + 1115·86 | + 1568·83 | + 2315·09 | + 3648·62 |
| $w_{♄}$ . . . . . | + 0·11 | + 0·11 | + 0·11 | + 0·11 | + 0·12 | + 0·12 |
| $\log r^{-3}$ . . . | 8·640864 | 8·622844 | 8·606616 | 8·592006 | 8·578986 | 8·567578 |
| $\log \int \Sigma Q dt$ | $3_n$670237 | $3_n$824415 | $3_n$967048 | $4_n$105416 | $4_n$240816 | $4_n$378184 |
| $\log Q'$ . . . . . | $3_n$669364 | $3_n$823170 | $3_n$966214 | $4_n$103084 | $4_n$237558 | $4_n$373660 |
| $\log 2(w h_0)\sqrt{p_0}\,Q'$ | $4_n$056808 | $4_n$190614 | $4_n$333058 | $4_n$470478 | $4_n$605002 | $4_n$741104 |
| $\log r^4$ . . . . . | 2·718272 | 2·754312 | 2·786768 | 2·815938 | 2·842028 | 2·864844 |
| $R$ . . . . . . | + 698·00 | + 905·89 | + 1209·26 | + 1676·07 | + 2442·25 | + 3801·39 |
| $-w$ . . . . . | − 622·83 | − 822·83 | − 1115·97 | − 1568·94 | − 2315·21 | − 3648·62 |
| $R_0$ . . . . . | + 75·17 | + 83·06 | + 93·29 | + 107·13 | + 127·02 | + 157·77 |
| $R_1$ . . . . . | − 20·82 | − 27·31 | − 35·23 | − 45·13 | − 57·24 | − 75·21 |
| $r^2$ . . . . . | 2·03870 | 2·06578 | 2·09008 | 2·11199 | 2·13152 | 2·14863 |
| $H$ . . . . . | + 54·35 | + 55·75 | + 58·06 | + 62·00 | + 69·08 | + 82·56 |
| $(w h_0)^2 : r^2$ . . | + 4330·91 | + 4069·57 | + 3847·75 | + 3658·41 | + 3497·53 | + 3362·41 |
| $w$ . . . . . | + 622·83 | + 822·83 | + 1115·97 | + 1568·94 | + 2315·00 | + 3648·62 |
| $h$ . . . . . | + 4276·56 | + 4013·82 | + 3780·69 | + 3596·41 | + 3428·45 | + 3279·85 |
| $\log 10^{-4} h$ . . | 7·63109 | 7·60356 | 7·57760 | 7·55587 | 7·53510 | 7·51585 |
| $\log(1 + \frac{1}{12} 10^{-4} h)$ | 0·00015 | 0·00014 | 0·00014 | 0·00013 | 0·00012 | 0·00012 |
| $\log S_\nu$ . . . . | 3·52577 | 3·58835 | 3·64786 | 3·70333 | 3·75597 | 3·80628 |
| $\log h'$ . . . . | 7·63094 | 7·60342 | 7·57846 | 7·55574 | 7·53498 | 7·51573 |
| $- h' S_\nu = - k\nu$ | − 14·85 | − 15·57 | − 16·84 | − 18·16 | − 19·54 | − 20·09 |
| $w_0$ . . . . . . | + 4958·74 | + 4802·40 | + 4963·72 | + 5327·35 | + 5812·62 | + 7006·03 |
| $\log 10^{-4} w_0$ . . | 7·69498 | 7·68952 | 7·69581 | 7·71628 | 7·76437 | 7·84547 |
| $\log(1 + \frac{1}{12} 10^{-4} w_0)$ | 0·00018 | 0·00018 | 0·00018 | 0·00019 | 0·00021 | 0·00025 |
| $\log S_s$ . . . . | 3·56577 | 3·66682 | 3·76336 | 3·86671 | 3·96335 | 4·05998 |
| $w'$ . . . . . | 7·69475 | 7·68934 | 7·69563 | 7·71609 | 7·76416 | 7·84522 |
| $W_1 - W_0$ . . | + 200·34 | + 244·49 | + 308·10 | + 384·70 | + 504·69 | + 692·64 |
| $- w' S_s = - w_0 s$ | − 18·22 | − 22·31 | − 29·14 | − 38·44 | − 53·40 | − 80·59 |
| $\nu$ . . . . . . | + 3354·4 | + 3878·8 | + 4443·5 | + 5049·5 | + 5699·6 | + 6399·7 |
| $\log \nu$ . . . . | 3·52562 | 3·58870 | 3·64772 | 3·70325 | 3·75584 | 3·80616 |
| $\log \sigma$ . . . . | 4·29885 | 4·29851 | 4·29814 | 4·29775 | 4·29733 | 4·29687 |
| $\log d\Delta M : dt$ . | $2_n$12699 | $2_n$18978 | $2_n$24838 | $2_n$30352 | $2_n$35569 | $2_n$40555 |
| $\log d\Delta N : dt$ . . | $1_n$62558 | $1_n$76167 | $1_n$88899 | $2_n$01185 | $2_n$13423 | $2_n$26014 |

## Jupiter.

| 1889 | Dec. 7·0 | Oct. 28·0 | Sept. 18·0 | Aug. 9·0 | Juli 30·0 | 1887 | März 15·0 | Febr. 1·0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L$ | 287° 9′ 25″ | 283°48′ 16″ | 280°28′ 17″ | 277° 9′ 27″ | 273°51′ 43″ | | 208°51′ 2″·4 | 205° 8′ 26″·5 |
| $\log B_0$ | $0_n$1461 | $0_n$0792 | $0_n$0414 | $9_n$9542 | $9_n$8451 | | 0·8292 | 0·8494 |
| $\log \sin B_1$ | 9·011190 | 9·015622 | 9·018521 | 9·019937 | 9·019902 | | 8·602795 | 8·549856 |
| $\log r_1$ | 0·713507 | 0·714746 | 0·715982 | 0·717212 | 0·718432 | | 0·786141 | 0·786420 |
| $\log \cos B_1$ | 9·997702 | 9·997654 | 9·997622 | 9·997606 | 9·997607 | | 9·999651 | 9·999754 |
| $L_1$ | 269° 9′ 56″ | 265°47′ 46″ | 262°26′ 48″ | 259° 6′ 47″ | 255°47′ 58″ | | 189°55′ 10″·4 | 186°54′ 18″·5 |
| $l$ | 12 29 8 | 355 40 11 | 338 10 18 | 320 59 14 | 304 59 47 | | 185 5 42·4 | 182 26 27·3 |
| $\log \cos (L_1 - l)$ | $9_n$36246 | 7·84859 | 9·39191 | 9·67339 | 9·81522 | | 9·998458 | 9·998796 |
| $\log r_1 \cos B_1$ | 0·71121 | 0·71240 | 0·71360 | 0·71482 | 0·71604 | | 0·785792 | 0·786158 |
| $\log \sin (L_1 - l)$ | $9_n$98816 | $0_n$00000 | $9_n$98638 | $9_n$94548 | $9_n$87907 | | 8·924811 | 8·871381 |
| $\log \xi_1$ | $0_n$07867 | 8·05599 | 0·10551 | 0·38821 | 0·53126 | | 0·784250 | 0·784954 |
| $\log \mathfrak{r}$ | 0·30765 | 0·29808 | 0·29062 | 0·30081 | 0·32148 | | 0·710507 | 0·716211 |
| $\log \zeta_1$ | 9·72470 | 9·73087 | 9·73450 | 9·73715 | 9·73838 | | 9·838986 | 9·879279 |
| $\log s$ | $3_n$491 | — | — | 3·380 | 4·020 | | 7·96303 | 8·059904 |
| $\log r_{01} \cos \vartheta \cos \Theta$ | $0_n$50726 | $0_n$29056 | $9_n$85100 | 9·64396 | 0·11456 | | 9·460187 | 9·860783 |
| $\log r_{01} \cos \vartheta \sin \Theta$ | $0_n$69937 | $0_n$71240 | $0_n$69999 | $0_n$66025 | $0_n$59511 | | 9·660603 | 9·007459 |
| $\log r_{01} \cos \vartheta$ | 0·77441 | 0·74148 | 0·70892 | 0·66280 | 0·61765 | | 9·788255 | 9·867950 |
| $\log r_{01} \sin \vartheta$ | 9·72470 | 9·73087 | 9·73450 | 9·73715 | 9·73838 | | 9·820265 | 9·259949 |
| $\log r_{01}^{-1}$ | 9·22887 | 9·25646 | 9·20359 | 9·33466 | 9·37860 | | 0·236552 | 0·302167 |
| $\log r_{01}^{-3}$ | 7·67160 | 7·76089 | 7·88078 | 8·00897 | 8·13579 | | 0·709596 | 0·906561 |
| $\log r_1^{-3}$ | 7·85948 | 7·85576 | 7·85206 | 7·84836 | 7·84470 | | 7·791577 | 7·790731 |
| $\log K$ | $7_n$40502 | $7_n$11188 | 6·68707 | 7·46274 | 7·82459 | | 0·709071 | 0·906236 |
| $\log \xi_1 : \mathfrak{r}$ | $9_n$76603 | 7·76290 | 9·81489 | 0·08741 | 0·20077 | | 0·023743 | 0·018743 |
| $\log (mk_0)^2 m_1 10^6 K$ | $0_n$05999 | $9_n$76685 | 9·34204 | 0·13772 | 0·47956 | | 8·364048 | 8·561200 |
| $\log \eta_1 \mathfrak{r}$ | $1_n$00701 | $1_n$00548 | $0_n$99061 | $0_n$96106 | $0_n$91660 | | 0·371110 | 0·323700 |
| $\log K \zeta_1$ | $7_n$12971 | $6_n$84225 | 6·42157 | 7·21089 | 7·56202 | | 0·048007 | 0·185507 |

| | für ν | für s |
|---|---|---|
| $g_0$ | + 0·06371 | + 0·06371 |
| $g_1$ | − 0·00109 | − 0·00109 |
| $G_0$ | − 2·919 | − 0·081 |
| $G_1$ | + 0·764 | − 0·438 |
| $G_2$ | + 0·985 | + 0·062 |
| $G_3$ | − 0·187 | − 0·008 |
| $\varkappa_2$ | − 1·459 | − 0·040 |
| $\varkappa_3$ | + 0·1278 | − 0·078 |
| $\varkappa_4$ | − 0·0052 | + 0·007 |
| $\varkappa_5$ | − 0·0072 | − 0·0009 |

$$\nu = -1{\cdot}459\, t^2 + 0{\cdot}1278\, t^3 - 0{\cdot}0052\, t^4 - 0{\cdot}0072\, t^5$$

$$s = -0{\cdot}040\, t^2 - 0{\cdot}078\, t^3 + 0{\cdot}0070\, t^4 - 0{\cdot}0009\, t^5$$

| | ν | $\frac{d^2\nu}{dt^2}$ | s | $\frac{d^2 s}{dt^2}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1889 August 9·0 | − 3·478 | − 1·23 | + 0·186 | + 0·78 |
| September 18·0 | − 0·856 | − 3·08 | − 0·001 | + 0·16 |
| October 28·0 | − 0·325 | − 2·80 | − 0·019 | − 0·27 |
| December 7·0 | − 2·716 | + 0·02 | − 0·302 | − 0·56 |

| | $\int Q\,dt$ | I f | $Q$ | I f | $\frac{d\Delta M}{dt}$ | I f | $\frac{d\Delta N}{dt}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1887 Febr. 1·0 | −23885·51 | −27955·15 | +7674·08 | +1701·97 | −254″·42 | +608·11 | −187″·03 |
| März 13·0 | −17410·69 | −20281·07 | +5437·49 | +1447·55 | −226·82 | +421·08 | −136·22 |
| April 22·0 | −12747·22 | −14843·58 | +3987·57 | +1220·73 | −201·15 | +284·86 | −102·77 |
| Juni 1·0 | −9290·60 | −10856·01 | +2992·32 | +1019·58 | −177·17 | +182·09 | −77·44 |
| Juli 11·0 | −6674·45 | −7863·69 | +2275·83 | +842·41 | −154·78 | +104·65 | −57·77 |
| Aug. 20·0 | −4679·90 | −5587·86 | +1738·04 | +687·63 | −133·97 | +46·88 | −42·22 |
| Sept. 29·0 | −3157·56 | −3849·82 | +1323·63 | +553·66 | −114·70 | +4·66 | −29·82 |
| Nov. 8·0 | −2003·86 | −2526·19 | +996·41 | +438·96 | −97·01 | −25·16 | −19·90 |
| 1887 Dec. 18·0 | −1143·04 | −1529·78 | +734·45 | +341·95 | −80·91 | −45·06 | −12·00 |
| 1888 Jan. 27·0 | −517·72 | −795·33 | +523·85 | +261·04 | −66·41 | −57·06 | −5·78 |
| März 7·0 | −81·58 | −271·48 | +354·70 | +194·63 | −53·50 | −62·84 | −0·97 |
| April 16·0 | +203·58 | +83·22 | +221·02 | +141·13 | −42·18 | −63·81 | +2·61 |
| Mai 26·0 | +370·54 | +304·24 | +117·72 | +98·95 | −32·40 | −61·20 | +5·15 |
| Juli 5·0 | +447·90 | +421·96 | +40·98 | +66·55 | −24·12 | −56·05 | +6·80 |
| Aug. 14·0 | +460·61 | +462·94 | −12·91 | +42·43 | −17·26 | −49·25 | +7·70 |
| Sept. 23·0 | +428·49 | +450·03 | −47·48 | +25·17 | −11·73 | −41·55 | +7·95 |
| Nov. 2·0 | +370·46 | +402·55 | −66·32 | +13·44 | −7·43 | −33·60 | +7·71 |
| 1888 Dec. 12·0 | +299·89 | +336·23 | −73·06 | +6·01 | −4·24 | −25·89 | +7·07 |
| 1889 Jan. 21·0 | +227·28 | +263·17 | −70·89 | +1·77 | −2·02 | −18·82 | +6·14 |
| März 2·0 | +159·86 | +192·28 | −62·77 | −0·25 | −0·63 | −12·68 | +4·96 |
| April 11·0 | +100·87 | +129·51 | −51·16 | −0·88 | +0·10 | −7·72 | +3·62 |
| Mai 21·0 | +58·28 | +78·35 | −38·05 | −0·78 | +0·34 | −4·10 | +2·41 |
| Juli 30·0 | +26·78 | +40·30 | −24·92 | −0·45 | +0·29 | −1·69 | +1·26 |
| Aug. 9·0 | +7·98 | +15·38 | −12·92 | −0·16 | +0·14 | −0·43 | +0·41 |
| Sept. 18·0 | +0·81 | +2·46 | −2·79 | −0·02 | +0·02 | −0·02 | +0·02 |
| Oct. 28·0 | +1·66 | −0·33 | +5·12 | 0·00 | +0·01 | 0·00 | +0·09 |
| Dec. 7·0 | +9·88 | +4·79 | +10·85 | +0·01 | +0·13 | +0·09 | +0·49 |
| | | +15·64 | | +0·14 | | +0·58 | |

| | $S_1$ | II f | I f | $\frac{d^2\nu}{dt^2}$ | $S_2$ | II f | I f | $\frac{d^2 z}{dt^2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | +7155·40 | −760·74 | | | +14310·82 | −2887·16 | |
| 1887 Febr. 1·0 | +6401·48 | +6394·66 | −699·17 | +61·57 | +11480·91 | +11423·66 | −2274·91 | +612·25 |
| März 13·0 | +5701·21 | +5695·49 | −649·63 | +49·54 | +9190·82 | +9148·75 | −1823·62 | +451·29 |
| April 22·0 | +5051·08 | +5045·86 | −605·79 | +43·84 | +7357·14 | +7325·13 | −1477·36 | +346·26 |
| Juni 1·0 | +4444·91 | +4440·07 | −564·57 | +41·22 | +5873·00 | +5847·77 | −1203·40 | +273·96 |
| Juli 11·0 | +3880·14 | +3875·50 | −524·39 | +40·18 | +4664·71 | +4644·37 | −981·72 | +221·68 |
| Aug. 20·0 | +3355·64 | +3351·11 | −484·39 | +40·00 | +3678·82 | +3662·65 | −799·60 | +182·12 |
| Sept. 29·0 | +2871·16 | +2866·72 | −444·24 | +40·15 | +2876·85 | +2863·05 | −648·46 | +151·14 |
| Nov. 8·0 | +2426·85 | +2422·48 | −403·85 | +40·39 | +2226·09 | +2214·59 | −522·34 | +126·12 |
| 1887 Dec. 18·0 | +2022·92 | +2018·63 | −363·31 | +40·54 | +1701·83 | +1692·25 | −416·98 | +105·36 |
| 1888 Jan. 27·0 | +1659·43 | +1655·32 | −323·03 | +40·28 | +1283·24 | +1275·27 | −329·17 | +87·81 |
| März 7·0 | +1336·34 | +1332·29 | −283·12 | +39·91 | +952·67 | +946·10 | −256·44 | +72·73 |
| April 16·0 | +1053·06 | +1049·17 | −244·13 | +38·99 | +695·05 | +689·66 | −196·76 | +59·68 |
| Mai 26·0 | +808·72 | +805·04 | −206·59 | +37·54 | +497·26 | +492·90 | −148·40 | +48·36 |
| Juli 5·0 | +601·89 | +598·45 | −170·94 | +35·65 | +348·00 | +344·50 | −109·79 | +38·61 |
| Aug. 14·0 | +430·08 | +427·51 | −137·61 | +33·33 | +237·45 | +234·71 | −79·49 | +30·30 |
| Sept. 23·0 | +292·76 | +289·90 | −106·97 | +30·64 | +157·38 | +155·22 | −56·15 | +23·34 |
| Nov. 2·0 | +185·58 | +182·93 | −79·35 | +27·62 | +100·66 | +99·07 | −38·55 | +17·60 |
| 1888 Dec. 12·0 | +105·77 | +103·58 | −55·00 | +24·35 | +61·70 | +60·52 | −25·57 | +12·98 |
| 1889 Jan. 21·0 | +50·40 | +48·58 | −34·33 | +20·67 | +35·80 | +34·95 | −16·24 | +9·33 |
| März 2·0 | +15·67 | +14·25 | −17·69 | +16·64 | +20·05 | +18·71 | −9·73 | +6·51 |
| April 11·0 | −2·44 | −3·44 | −5·65 | +12·04 | +9·05 | +8·98 | −5·37 | +4·36 |
| Mai 21·0 | −8·50 | −9·09 | +1·71 | +7·36 | +3·86 | +3·61 | −2·56 | +3·31 |
| Juli 30·0 | −7·19 | −7·38 | +4·28 | +2·57 | +1·19 | +1·05 | −0·92 | +1·64 |
| Aug. 9·0 | −3·22 | −3·10 | +3·00 | −1·28 | +0·20 | +0·13 | −0·14 | +0·78 |
| Sept. 18·0 | −0·35 | −0·10 | −0·08 | −3·08 | 0·00 | −0·01 | +0·02 | +0·16 |
| Oct. 28·0 | −0·32 | −0·18 | −2·28 | −2·20 | −0·01 | +0·01 | −0·25 | −0·27 |
| Dec. 7·0 | −2·47 | −2·46 | −2·31 | +0·02 | −0·22 | −0·24 | −0·81 | −0·56 |
| | | −4·77 | | | | −1·05 | | |

28. **Störungen in polaren Coordinaten; Uebergang auf osculirende Elemente.** Durch die Störungsrechnung erhält man die Coordinaten $\mathfrak{r}$, $l$, $z$ und ihre Differentialquotienten für die neue Osculationsepoche und mit diesen die Projectionen der Flächengeschwindigkeiten in Bezug auf das feste Axensystem d. i. auf die ungestörte Bahnebene und zwei dazu senkrechte Ebenen. Bezeichnet man die Neigung der neuen Osculationsebene gegen die alte mit $J$ und die Länge des aufsteigenden Knotens der neuen Bahnebene, gezählt vom Anfangspunkte der $l$ mit $\Phi$, so gelten (vergl. Fig. 272, pag. 315) die Formeln 17. 14, aus denen man leicht die folgenden ableitet[1]):

$$\begin{aligned} k_0\sqrt{p}\cos J &= \mathfrak{r}^2\frac{dl}{dt} \\ k_0\sqrt{p}\sin J\sin(l-\Phi) &= \mathfrak{r}z\frac{dl}{dt} \\ k_0\sqrt{p}\sin J\cos(l-\Phi) &= \mathfrak{r}\frac{dz}{dt} - z\frac{d\mathfrak{r}}{dt}. \end{aligned} \tag{1}$$

Aus den Grössen $\Phi$, $J$ in Verbindung mit den $i_0$, $\Omega_0$ kann man nun leicht $\Omega$, $i$ (die Lage der neuen Osculationsebene) finden. In dem Dreiecke $\Omega_0 \Omega K$ hat man

$$\begin{aligned} tang\tfrac{1}{2}[\Phi_1 + (\Omega - \Omega_0)] &= \frac{cos\tfrac{1}{2}(i_0 - J)}{cos\tfrac{1}{2}(i_0 + J)}\,tang\tfrac{1}{2}\Phi \\ tang\tfrac{1}{2}[\Phi_1 - (\Omega - \Omega_0)] &= \frac{sin\tfrac{1}{2}(i_0 - J)}{sin\tfrac{1}{2}(i_0 + J)}\,tang\tfrac{1}{2}\Phi \end{aligned} \tag{2}$$

sodann

$$tang\tfrac{1}{2}(i - i_0) = \frac{cos\tfrac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi)}{cos\tfrac{1}{2}(\Phi_1 - \Phi)}\,tang\tfrac{1}{2}J. \tag{3}$$

Ist $P_1$ der Ort des Planeten für die neue Osculationsepoche, und $Pw$ senkrecht auf der ursprünglichen Bahnlage, so wird $wK = l - \Phi$, daher, wenn man $KP_1 = (u)$ setzt[2]):

$$tang\,(u) = tang\,(l - \Phi)\sec J. \tag{4}$$

Da $r^2 = \mathfrak{r}^2 + z^2$ ist, so wird

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\mathfrak{r}}{r}\frac{d\mathfrak{r}}{dt} + \frac{z}{r}\frac{dz}{dt}, \tag{5}$$

und dann ist:

$$\begin{aligned} e\sin v &= \frac{\sqrt{p}}{k_0}\frac{dr}{dt} \qquad & tang\tfrac{1}{2}E &= cotang\,(45° + \tfrac{1}{2}\varphi)\,tang\tfrac{1}{2}v \\ e\cos v &= \frac{p}{r} - 1 & M &= E - e\sin E \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \omega &= (u) + \Phi - v \\ a &= p\sec\varphi^2 \qquad \mu = \frac{k_0}{a^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \tag{7}$$

**Beispiel:** Aus der Störungstafel pag. 355 erhält man durch mechanische Quadraturen für 1887 Juni 1·0:

$\int Q\,dt = -9290{\cdot}60$ $\quad \Delta M = +15'\,29''{\cdot}07$ $\quad \nu = +4448{\cdot}49$ $\quad z = +5870{\cdot}52$

$\Delta N = +\;2\;21{\cdot}58$ $\quad \frac{d\nu}{dt} = -585{\cdot}04$ $\quad \frac{dz}{dt} = -1885{\cdot}84.$

---

1) $\mathfrak{r}^2\frac{dl}{dt}$ konnte man in der ersten und zweiten Formel sofort durch $k_0\sqrt{p_0} + \int Q\,dt$ ersetzen.

2) Die Ausdrücke für die Aenderungen des Parameters, der Excentricität u. s. w. s. v. Oppolzer, l. c. II. Band, pag. 163.

Damit wird:

| | | |
|---|---|---|
| $M = 241°\ 27'\ 55''\cdot17$ | $v = 206°\ 28'\ 29''\cdot98$ | $\log p = 0\cdot4506052$ |
| $V = 206\ \ 37\ \ 22\cdot02$ | $\varphi = \ 28\ \ 53\ \ 51\cdot91$ | $\log a = 0\cdot5661092$ |
| $l = 190\ \ 15\ \ 34\cdot17$ | $\Phi = \ 22\ \ 49\ \ 10\cdot17$ | $\mu = 502''\cdot16081$ |
| | | $E = 228°\ 27'\ 31''\cdot88$ |
| $\log \mathfrak{r}_0 = 0\cdot6947666$ | $J = \ 0\ \ 18\ \ 39\cdot49$ | $M = 242\ \ 30\ \ 12\cdot74$ |
| $\log \mathfrak{r} = 0\cdot6966921$ | $\Phi_1 = \ 21\ \ 44\ \ 11\cdot28$ | |
| $\log r = 0\cdot6966924$ | $\Omega = \ 19\ \ \ 4\ \ 26\cdot28$ | $\omega = 342\ \ 42\ \ \ 4\cdot65$ |
| $\log dr:dt = 8_n9456559$ | $i = \ \ 6\ \ 21\ \ 22\cdot55$ | $\pi = \ \ 1\ \ 46\ \ 30\cdot93.$ |

**29. Vergleichung der Störungen in rechtwinkligen und polaren Coordinaten; Uebergang auf ein anderes Intervall.** Hat man die Störungen nach zwei verschiedenen Methoden bestimmt, so wird es sich, in jenen Fällen, in denen die Störungsrechnung ohnedies von einer neuen Osculationsepoche aus weiter geführt werden soll, zum Vergleiche der Resultate empfehlen, auf neue osculirende Elemente überzugehen. Wurden die Störungen in rechtwinkligen Coordinaten und nach der folgenden Methode der Variation der Elemente berechnet, so genügt es für die ersteren auf osculirende Elemente überzugehen, da die Methode der Variation der Elemente für jeden Zeitmoment osculirende Elemente giebt. Dasselbe gilt, wenn man die Störungen in polaren Coordinaten mit den Elementenstörungen zu vergleichen hat. Sind aber die Störungen in rechtwinkligen und polaren Coordinaten ermittelt, und erscheint ein Uebergang auf neue osculirende Elemente unnöthig, wie z. B. bei der Berechnung von Störungen für nicht periodische Kometen, so kann die Vergleichung auf wesentlich kürzere Weise erlangt werden. Zur Correction der Zeit $\Delta t$ ist eine Correction der wahren Anomalie und des Radiusvectors gehörig, welche nach 17, 11

$$\Delta v = \frac{k_0\sqrt{p}}{r^2}\Delta t; \qquad \Delta r = \frac{k_0}{\sqrt{p}}\, e\sin v\,\Delta t. \tag{1}$$

sind, und es sind daher die aus IV abgeleiteten Werthe $\mathfrak{r}_0$, $V$ durch die ungestörten $\mathfrak{r}_0^0$, $v^0$ ausgedrückt:

$$V = v^{(0)} + \Delta v; \quad \mathfrak{r}_0 = \mathfrak{r}_0^{(0)} + \Delta r; \quad \mathfrak{r} = (\mathfrak{r}_0^{(0)} + \Delta r)(1+\nu) = \mathfrak{r}_0^{(0)} + \Delta r + \mathfrak{r}_0^{(0)}\nu. \tag{2}$$

Nach 17, 8 ist:

$$x_0 = \mathfrak{r}_0^{(0)}\sin a\sin(A'+v^{(0)}); \qquad y^{(0)} = \mathfrak{r}_0^{(0)}\sin b\sin(B'+v^{(0)});$$
$$z_0 = \mathfrak{r}_0^{(0)}\sin c\sin(C'+v^{(0)}).$$

Durch Differentiation erhält man hieraus:

$$\delta x_0 = \delta\mathfrak{r}_0\sin a\sin(A'+v^{(0)}) + \mathfrak{r}_0^{(0)}\sin a\cos(A'+v^{(0)})(\delta v + \delta A').$$

Da nun

$$\delta x_0 = \xi,\ \delta y_0 = \eta,\ \delta z_0 = \zeta; \quad \delta A' = \delta B' = \delta C' = \Delta N; \quad \delta v = \Delta v,\quad \delta\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{r}_0^{(0)}\nu' \tag{3}$$

ist, wenn

$$\nu' = \nu + \frac{\Delta r}{\mathfrak{r}_0} = \nu + \frac{k_0}{\mathfrak{r}_0\sqrt{p}}\, e\sin v\,\Delta t \tag{4}$$

ist, überdies noch die in 17, 8 auftretenden, von $s$ abhängigen Zusatzglieder in den gestörten Coordinaten zu berücksichtigen sind, so wird

$$\begin{aligned} \xi &= x_0\nu' + \mathfrak{r}_0^{(0)}\sin a\cos(A'+v^{(0)})(\Delta v + \Delta N) + s\cos a \\ \eta &= y_0\nu' + \mathfrak{r}_0^{(0)}\sin b\cos(B'+v^{(0)})(\Delta v + \Delta N) + s\cos b \\ \zeta &= z_0\nu' + \mathfrak{r}_0^{(0)}\sin c\cos(C'+v^{(0)})(\Delta v + \Delta N) + s\cos c. \end{aligned} \tag{5}$$

Obzwar der Uebergang auf ein anderes Störungsintervall keinen theoretischen Schwierigkeiten unterliegt, wird es für die praktische Anwendung nicht un-

erwünscht sein, hier das Wichtigste zu bemerken, um so mehr, als in den Lehrbüchern hierüber meist nichts erwähnt ist.

Ueber die Wahl der Constanten $(wk)$, $(wk)^2 m$, u. s. w. ist nichts besonderes zu bemerken; man findet sofort für die Berechnung der Störungen durch Jupiter in achttägigen Intervallen:

$$\log (wk)^2 m_{♃} \cdot 10^6 = 1{\cdot}257082$$
$$\log (2wk) 10^6 \sqrt{p_0} = 5{\cdot}668474.$$

Hingegen ist ein besonderes Augenmerk auf die Bestimmung der Summationsconstanten zu richten; bei der Aenderung des Integrationsintervalles wird man nämlich nicht die Summationen mit den ursprünglichen Summationsconstanten fortsetzen dürfen, da sich mit diesen die Integrale aus den neuen Störungstafeln nicht richtig ergeben würden. Man wird daher zunächst für ein gegebenes Datum die Störungen (Integrale) aus der bisherigen Störungsrechnung bestimmen, und die Summationsconstanten für die Fortsetzung der Störungsrechnung so bestimmen, dass die Integrale die gefundenen Werthe annehmen. Man findet für das vorliegende Beispiel (Komet 1889 V, BROOKS):

für 1887 Febr. 13·0: $\int Q\,dt = -21705{\cdot}16$

$$\Delta M = +1497''{\cdot}82 \qquad \nu = +6188{\cdot}87 \qquad \frac{d\nu}{dt} = -710{\cdot}80$$
$$\Delta N = +455{\cdot}84 \qquad s = +10781{\cdot}65 \qquad \frac{ds}{dt} = -2390{\cdot}95.$$

Die hierbei aus der Störungstafel folgenden Werthe für $\frac{d\nu}{dt}$ und $\frac{ds}{dt}$ gelten natürlich für ein vierzigtägiges Intervall; für ein achttägiges Intervall wird daher:

$$\frac{d\nu}{dt} = -142{\cdot}16; \qquad \frac{ds}{dt} = -478{\cdot}19.$$

Da nun für die Mitte zweier Intervalle (die neuen Störungsdaten sind Febr. 17·0 und Febr. 9·0)

$$\text{das erste Integral} = {}^{I}f + \tfrac{1}{24} f' - \tfrac{17}{5760} f'''$$

ist, so wird die neue Summationsconstante

$$\text{für Febr. 18·0:} \quad {}^{I}f = \text{Integral} - \tfrac{1}{24} f' + \tfrac{17}{5760} f'''.$$

Man erhält so, indem man zunächst ausreichend genau die bisher erhaltenen Werthe von $\frac{d^2\nu}{dt^2}$, $\frac{d^2 s}{dt^2}$ durch $w^2 = 25$, und $\frac{d\Delta M}{dt}$, $\frac{d\Delta N}{dt}$, $Q$ durch $w = 5$ dividirt, die in der folgenden Störungstafel (pag. 359 und 360) in eckigen Klammern [ ] eingeschlossenen Werthe.

Für die zweiten Summen $s$ und $\nu$ wird es nöthig, das Integral für ein Störungsdatum selbst zu ermitteln; da es ganz gleichgültig ist, für welches Datum man die Summationsconstanten bestimmt, indem man von jedem beliebigen Datum ausgehend, zu jedem anderen gelangen kann, so wird es am einfachsten, Daten zu wählen, welche der ursprünglichen Störungsrechnung angehören, weil für diese die Formeln am einfachsten sind. Für Februar 1·0 erhält man

$$s = 11474{\cdot}29; \qquad \nu = +6899{\cdot}74;$$

und da für ein Störungsdatum

$$\text{das Doppelintegral} = {}^{II}f + \tfrac{1}{12} f - \ldots$$

ist, so folgt die Summationsconstante

$${}^{II}f = \text{Integral für das Störungsdatum} - \tfrac{1}{12} f + \ldots$$

womit sich die in der Störungstafel (pag. 360) in eckige Klammern eingeschlossenen Werthe ergeben.

Im Folgenden sind noch die wichtigsten Zwischenresultate für die ersten vier und die letzten drei Intervalle für das bereits begonnene Beispiel angeführt (wobei jedoch nur die Jupiterstörungen berücksichtigt sind) während Kürze halber die zwölf Zwischenintervalle weggelassen wurden.

| 1887 | Februar 25·0 | Februar 17·0 | Februar 9·0 | Februar 1·0 | 1886 Okt. 20·0 | Oktober 12·0 | Oktober 4·0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta N$ . . | + 6′ 44″·5 | + 7′ 16″·6 | + 7′ 50″·9 | + 8′ 27″·6 | + 20′ 55″·3 | + 22′ 28″·3 | + 24′ 11″·2 |
| $\Delta M$ . . | + 23 44·6 | + 24 32·8 | + 25 22·1 | + 26 12·4 | + 38 59·6 | + 40 8·5 | + 41 19·0 |
| $M$ . . . | 228° 18′ 25″·3 | 227° 7 19″·7 | 226° 1′ 15″·2 | 224° 55′ 11″·7 | 210° 38′ 19″·7 | 209° 32′ 34·9 | 208° 26′ 51″·6 |
| $E$ . . . | 218 22 55·9 | 212 35 32·9 | 211 48 17·8 | 211 1 10·4 | 200 58 50·7 | 200 13 12·5 | 199 27 39·5 |
| $V$ . . . | 200 28 33·8 | 199 58 35·6 | 199 28 46·9 | 198 54 7·4 | 192 40 38·3 | 192 12 36·6 | 191 44 45·4 |
| $l$ . . . | 184 6 3·9 | 183 36 42·8 | 183 7 28·4 | 182 38 25·6 | 176 37 19·2 | 176 10 55·5 | 175 44 47·2 |
| $\log r_0$ . . | 0·710347 | 0·711447 | 0·712519 | 0·713560 | 0·724594 | 0·725257 | 0·725894 |
| $\log r$ . . | 0·712934 | 0·714095 | 0·715228 | 0·716331 | 0·728308 | 0·729061 | 0·729792 |
| $\log Q'$ . . | $8_n$59268 | $8_n$ 61987 | $8_n$ 64724 | $8_n$ 67483 | $4_n$·08341 | $4_n$ 12266 | $4_n$ 16424 |
| $R_0$ . . . | + 5·50 | + 5·74 | + 6·00 | + 6·29 | + 16·77 | + 19·02 | + 21·97 |
| $R_1$ . . . | − 2·57 | − 2·70 | − 2 85 | − 3·01 | − 6·90 | − 7·50 | − 8·20 |
| $U$ . . . | + 2·93 | + 3·04 | + 3·15 | + 3·28 | + 9·67 | + 11·52 | + 13·77 |
| $(w k_0)^2 : r^3$ | + 187·58 | + 186·48 | + 185·41 | + 184·38 | + 128·71 | + 123·07 | + 122·45 |
| $w_1$ . . . | + 110·14 | + 120·64 | + 132·64 | + 146·32 | + 890·81 | + 1118·85 | + 1407·30 |
| $W_0$ . . . | + 22·79 | + 24·29 | + 25·06 | + 27·81 | + 103·47 | + 121·51 | + 145·18 |
| $-k' S_v$ . | − 0·81 | − 0·82 | − 0·83 | − 0·84 | − 0 98 | − 0·98 | − 0·98 |
| $-w' S_z$ . | − 2·49 | − 2·70 | − 2·94 | − 3·22 | − 21·66 | − 27·59 | − 35·99 |

Jupiter.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_1$ . . . | 188° 42′ 47″·5 | 188° 6′ 37″·2 | 187° 30′ 27″·7 | 186° 54′ 18″·9 | 179° 5′ 13″·3 | 178° 29′ 11″·1 | 177° 53′ 9″·3 |
| $L_1 - l$ . | 4 36 33·6 | 4 29 54·4 | 4 22 59·3 | 4 15 53·5 | 2 27 54·1 | 2 18 15·6 | 2 8 22·0 |
| $\log \xi_1$ . . | 0·734589 | 0·734686 | 0·734818 | 0·734954 | 0·736370 | 0·736448 | 0·736520 |
| $\log \eta_1$ . . | 9·64112 | 9·63051 | 9·61038 | 9·60753 | 9·37033 | 9·34111 | 9·30890 |
| $\log \zeta_1$ . . | 9·31620 | 9·30420 | 9·29190 | 9·27928 | 9·06072 | 9·03784 | 9·01365 |
| $\log m$ . . | 8·00186 | 8·02119 | 8·04048 | 8·05971 | 8·82569 | 8·84820 | 8·87154 |
| $\log \rho_{01}^{-1}$ . | 0·26168 | 0·27482 | 0·28854 | 0·30275 | 0·56571 | 0·59660 | 0·63042 |
| $\log K$ . . | 0·78446 | 0·82405 | 0·86527 | 0·90793 | 1·69708 | 1·78976 | 1·89128 |

| | $\int Q\,dt$ | $'f$ | $Q$ | $''f$ | $\frac{d\Delta M}{dt}$ | $'f$ | $\frac{d\Delta N}{dt}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | − 15875·20 | | + 2514·90 | | + 1506·10 | |
| 1886 Oct. 4·0 | − 15084·45 | | + 1588·08 | | − 71″·42 | | − 107″·99 |
| | | − 14837·12 | | + 2148·48 | | + 1398·11 | |
| Oct. 12·0 | − 13665·74 | | + 1309·06 | | − 69·70 | | − 98·16 |
| | | − 13028·06 | | + 2378·78 | | + 1299·95 | |
| Oct. 20·0 | − 12450·13 | | + 1129·15 | | − 68·07 | | − 89·74 |
| | | − 11808·91 | | + 2305·71 | | + 1210·21 | |
| Oct. 28·0 | − 11395·80 | | + 984 62 | | − 66·51 | | − 82·41 |
| | | − 10014·29 | | + 2239·20 | | + 1127·80 | |
| Nov. 5·0 | − 10471·93 | | + 806·90 | | − 65·01 | | − 76·06 |
| | | − 10047·39 | | + 2174·19 | | + 1051·77 | |
| Nov. 13·0 | − 9655·30 | | + 769·34 | | − 63·56 | | − 70·36 |
| | | − 9278·05 | | + 2110·63 | | + 981·41 | |
| Nov. 21·0 | − 8928·08 | | + 687·63 | | − 62·15 | | − 65·32 |
| | | − 8500·42 | | + 2048·48 | | + 916·09 | |
| Nov. 29·0 | − 8275·83 | | + 618·43 | | − 60·79 | | − 60·79 |
| | | − 7971·99 | | + 1987·09 | | + 855·30 | |
| Dec. 7·0 | − 7687·84 | | + 559·14 | | − 59·45 | | − 56·70 |
| | | − 7412·85 | | + 1928·24 | | + 798·60 | |
| Dec. 15·0 | − 7155·01 | | + 507·99 | | − 58·15 | | − 53·00 |
| | | − 6904·86 | | + 1870·09 | | + 745·60 | |
| Dec. 23·0 | − 6609·78 | | + 463·44 | | − 56·88 | | − 49·62 |
| | | − 6441·42 | | + 1813·21 | | + 695·98 | |
| 1886 Dec. 31·0 | − 6226·21 | | + 424·43 | | − 55·63 | | − 46·53 |
| | | − 6016·90 | | + 1757·58 | | + 649·45 | |
| 1887 Jan. 8·0 | − 5819·25 | | + 390·10 | | − 54·42 | | − 43·68 |
| | | − 5620·80 | | + 1703·16 | | + 605·77 | |
| Jan. 16·0 | − 5444·66 | | + 359·66 | | − 53·22 | | − 41·07 |
| | | − 5207·28 | | + 1649·94 | | + 564·70 | |
| Jan. 24·0 | − 5098·83 | | + 332·52 | | − 52·04 | | − 38·64 |
| | | − 4934·71 | | + 1597·90 | | + 526·06 | |
| Febr. 1·0 | − 4778·70 | | + 308·10 | | − 50·88 | | − 36·40 |
| | | − 4626·52 | | + 1547·02 | | + 489·66 | |
| Febr. 9·0 | − 4481·68 | | + 286·32 | | − 49·75 | | − 34·31 |
| | | [− 4340·20] | | [+ 1497·27] | | [+ 455·35] | |
| Febr. 17·0 | − 4205·33 | | + 266·50 | | − 48·63 | | − 32·36 |
| | | − 4078·70 | | + 1448·64 | | + 422·99 | |
| Febr. 25·0 | − 3947·97 | | + 248·63 | | − 47·52 | | − 30·54 |
| | | − 3825·07 | | + 1401·12 | | + 392·45 | |

| | $S_\gamma$ | $II'$ | $I'$ | $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$ | $S_z$ | $II'$ | $I'$ | $\frac{d^2z}{dt^2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | +9247·42 | | | | +24857·68 | | |
| 1886 Oct. 4·0 | +9017·01 | +9015·87 | −231·55 | +12·79 | +23582·55 | +23520·45 | −1837·28 | +109·19 |
| Oct. 12·0 | +8798·07 | +8797·11 | −218·76 | +10·54 | +22302·58 | +22292·41 | −1228·04 | +93·92 |
| Oct. 20·0 | +8589·71 | +8588·89 | −208·22 | +8·89 | +21166·90 | +21156·20 | −1134·12 | +81·63 |
| Oct. 28·0 | +8390·27 | +8389·56 | −199·88 | +7·58 | +20118·22 | +20105·98 | −1062·81 | +71·96 |
| Nov. 5·0 | +8198·44 | +8197·81 | −191·75 | +6·57 | +19182·18 | +19125·68 | −980·85 | +64·06 |
| Nov. 13·0 | +8013·19 | +8012·68 | −185·18 | +5·78 | +18215·10 | +18209·36 | −916·27 | +57·29 |
| Nov. 21·0 | +7833·78 | +7833·28 | −179·40 | +5·11 | +17355·59 | +17350·48 | −858·88 | +51·60 |
| Nov. 29·0 | +7659·40 | +7658·94 | −174·29 | +4·56 | +16547·79 | +16543·20 | −807·28 | +46·61 |
| Dec. 7·0 | +7489·68 | +7489·21 | −169·78 | +4·18 | +15786·67 | +15782·58 | −760·67 | +42·47 |
| Dec. 15·0 | +7323·08 | +7323·61 | −165·60 | +3·78 | +15068·09 | +15064·38 | −718·20 | +38·82 |
| Dec. 23·0 | +7162·15 | +7161·79 | −161·82 | +3·48 | +14388·88 | +14384·05 | −679·88 | +35·06 |
| 1886 Dec. 31·0 | +7003·74 | +7003·40 | −158·39 | +3·17 | +13744·88 | +13741·23 | −643·72 | +32·01 |
| 1887 Jan. 8·0 | +6848·50 | +6848·18 | −155·22 | +2·96 | +13138·82 | +13130·42 | −610·81 | +30·45 |
| Jan. 16·0 | +6696·22 | +6695·92 | −152·26 | +2·76 | +12552·74 | +12550·06 | −580·30 | +28·28 |
| Jan. 24·0 | +6546·74 | +6546·45 | −149·50 | +2·50 | +12000·48 | +11997·98 | −552·08 | +26·04 |
| Febr. 1·0 | +6399·81 | [+6399·54] | −146·01 | +2·44 | +11474·56 | [+11472·24] | −525·74 | +24·60 |
| Febr. 9·0 | +6255·33 | +6255·07 | −144·47 | +2·32 | +10973·25 | +10971·09 | −501·15 | +23·09 |
| Febr. 17·0 | +6113·17 | +6112·92 | [−142·15] | +2·22 | +10495·00 | +10492·06 | [−478·18] | +21·59 |
| Febr. 25·0 | +5973·28 | +5972·90 | −139·98 | +2·12 | +10058·32 | +10036·42 | −456·54 | +20·30 |
| | | +5835·18 | −137·81 | | | +9600·18 | −436·24 | |

**30. Variation der Elemente.** Die Gleichungen, welche die Variation der Elemente geben, sind bereits in den §§ 19. 20 abgeleitet, und können mit geringen Modifikationen auch sofort zur numerischen Berechnung verwendet werden. Die störenden Kräfte $P$, $Q$, $Z^{(0)}$ sind identisch mit den in 26 mit $P_1$, $Q_1$, $Z_1$ bezeichneten Grössen. In diesen tritt der Faktor $k_0^2 m_1$ auf. Führt man in den Formeln 19. 10 an Stelle von $\mu$ seinen Werth $k_0 : a^{\frac{3}{2}}$ ein, so tritt $k_0$ in den Nenner; dieser kann daher sofort weggelassen werden, wenn in den störenden Kräften einfach $k_0 m_1$ als Faktor geschrieben wird. Die Aenderungen von $\Omega$, $i$, $\omega$, $M_0$ ergeben sich im Bogenmaass; um dieselben in das Winkelmaass umzusetzen, wird man durch $arc\ 1''$ dividiren, welcher Nenner auch passend mit $k_0 m_1$ verbunden wird. Es wird dann auch bequemer statt der Aenderung der Excentricität die Aenderung des Excentricitätswinkels $\varphi$ zu bestimmen, indem

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{de}{dt}$$

ist. Da $k'' = k : arc\ 1''$ ist, so wird man durch Einführung von $k$ in Bogensecunden die störenden Kräfte gleich in Bogensecunden ausgedrückt erhalten. Bei der Ausführung findet man aber überdiess, dass die störenden Kräfte mit dem Nenner $\sqrt{p}$ verbunden erscheinen, und man erhält daher, wenn man die sämmtlichen Längen von dem (veränderlichen) Knoten der momentanen osculirenden Ebene des gestörten Planeten[1]) zählt, also die Coordinaten des störenden Himmelskörpers nach 17 (8), die Entfernung $r_{01}$ nach 17 (10) ermittelt:

[1]) Zur besseren Uebersicht mag noch bemerkt werden, dass bei der Berechnung der Störungen in rechtwinkligen Coordinaten, diese sich auf die Ekliptik beziehen, bei der Methode der Störungen in Polarcoordinaten dieselben auf die feste, ungestörte Bahnebene des gestörten Himmelskörpers, und bei der Methode der Variation der Elemente auf die veränderliche, jeweilige osculirende Ebene.

$$
\begin{aligned}
l &= v + \omega & K &= \frac{1}{r_{01}^3} - \frac{1}{r_1^3} \\
\xi_1 &= r_1 \cos B_1 \cos(L_1 - l) & P &= \Sigma \frac{k''m_1}{\sqrt{p}}\left(K\xi_1 - \frac{r}{r_{01}^3}\right) \\
\eta_1 &= r_1 \cos B_1 \sin(L_1 - l) & Q &= \Sigma \frac{k''m_1}{\sqrt{p}} K\eta_1 \\
\zeta_1 &= r_1 \sin B_1 & Z^{(0)} &= \Sigma \frac{k''m_1}{\sqrt{p}} K\zeta_1.
\end{aligned} \qquad (1)
$$

Dann wird

$$\sin i \frac{d\Omega}{dt} = r \sin(v + \omega) Z^{(0)} \qquad \frac{di}{dt} = r \cos(v + \omega) \cdot Z^{(0)}$$

$$\sin\varphi \frac{d\pi}{dt} = [(r + p) \sin v \cdot Q - p \cos v P] + r \sin(v + \omega) \sin\varphi \tang \tfrac{1}{2} i Z^{(0)}$$

$$\frac{da}{dt} = 2a^2 \left(\sin\varphi \sin v P + \frac{p}{r} Q\right) \operatorname{arc} 1''$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = [(\cos E + \cos v) Q + \sin v \cdot P] a \cos\varphi$$

$$\left(\frac{dL}{dt}\right) = [(-2r\cos\varphi - p\cos v \tang \tfrac{1}{2}\varphi) P + (r+p) \sin v \tang \tfrac{1}{2}\varphi Q] + r \sin(v+\omega) \tang \tfrac{1}{2} i Z^{(0)}$$

Der zweite Theil der Störung der mittleren Anomalie wird in der Praxis direkt berechnet, so dass man die mittlere Anomalie stets mit dem constanten Werthe $\mu_0$ rechnen kann. An Stelle des Integrals $\int t \frac{d\mu}{dt} dt$, schreibt man aber hier allgemein, allerdings nicht ganz richtig $\iint \frac{d\mu}{dt} dt^2$. Da

$$\int \frac{d\mu}{dt} dt = t \frac{d\mu}{dt} - \int t \frac{d^2\mu}{dt^2} dt, \qquad \int t \frac{d\mu}{dt} dt = \iint \frac{d\mu}{dt} dt^2 + \iint t \frac{d^2\mu}{dt^2} dt^2$$

ist, so setzt die übliche Schreibweise voraus, dass das zweite Doppelintegral vernachlässigt werden kann. In allen Fällen bedarf man hier der Kenntniss der Aenderung der mittleren Bewegung. Man wird daher besser diese an Stelle von $da$ einführen. Man hat aber

$$\frac{d\mu}{dt} = -3\mu a \left(e \sin v \cdot P + \frac{p}{r} Q\right) = -\frac{3k_0}{\sqrt{a}}\left(e \sin v \cdot P + \frac{p}{r} Q\right)$$

$$\Delta L_2 = \int t \frac{d\mu}{dt} dt = \iint \frac{d\mu}{dt} dt^2.$$

Entsprechend zusammengestellt erhält man daher zur numerischen Berechnung

$$
\begin{aligned}
&\Omega''' = r \sin u \operatorname{cosec} i & & i''' = r \cos u \\
&\pi' = -p \cos v \operatorname{cosec}\varphi & & \pi'' = +(r + p) \sin v \operatorname{cosec}\varphi \quad \pi''' = r \sin u \tang \tfrac{1}{2} i \\
&\varphi' = +a \cos\varphi \sin v & & \varphi'' = +a \cos\varphi (\cos E + \cos v) \\
&L' = -2r\cos\varphi - p \cos v \tang \tfrac{1}{2}\varphi & & L'' = +(r + p) \sin v \tang \tfrac{1}{2}\varphi \quad L''' = r \sin u \tang \tfrac{1}{2} i \\
&\mu' = -\frac{3k_0}{\sqrt{a}} e \sin v & & \mu'' = -\frac{3k_0}{\sqrt{a}} \frac{p}{r}
\end{aligned} \qquad (2)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{dt} &= \Omega''' Z^{(0)} & \frac{d\pi}{dt} &= \pi' P + \pi'' Q + \pi''' Z^{(0)} \\
\frac{di}{dt} &= i''' Z^{(0)} & \frac{d\varphi}{dt} &= \varphi' P + \varphi'' Q \\
\frac{d\mu}{dt} &= \mu' P + \mu'' Q & \left(\frac{dL}{dt}\right)_1 &= L' P + L'' Q + L''' Z^{(0)} \\
& & \Delta L_2 &= \iint \frac{d\mu}{dt} dt^2.
\end{aligned} \qquad (3)
$$

Zu diesen Formeln ist noch zu bemerken, dass überall $wk$ an Stelle von $k$ zu setzen ist, wenn man als Störungsintervall $w$ Tage wählt; dann wird auch $w\frac{d\mu}{dt}$ an Stelle von $\frac{d\mu}{dt}$, d. h. die Aenderung der $w$-tägigen mittleren siderischen

Bewegung $w\mu$ (statt derjenigen der täglichen siderischen Bewegung $\mu$) erhalten, welche in der Gleichung für $\Delta L_2$ unmittelbar wieder zur Verwendung kommt.

Dabei sind die Logarithmen der zu verwendenden Werthe von $(wk)^2 m$, für ein 40 tägiges Intervall für:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Mercur . . | 8·4270—10 | Jupiter . . | 2·181868[1]) |
| Venus . . | 9·5898—10 | Saturn . . | 1·60780 |
| Erde+Mond | 9·6012—10 | Uranus . . | 0·70796 |
| Mars . . | 8·6607—10 | Neptun . | 0·8020. |

Will man in nahe parabolischen Bahnen die Störung der Perihelzeit einführen, so hat man nach 30 mit den hier angegebenen Modifikationen

$$\frac{dT_0}{dt} = \frac{a\sqrt{p}}{k_0}\left[\left(+2r - \frac{p\cos v}{e}\right)P + \frac{r+p}{e}\sin v\, Q\right] - \frac{3(t-T_0)a}{k_0\sqrt{p}}\left(e\sin v\cdot P + \frac{p}{r}Q\right). \quad (4)$$

Da hier noch der Faktor $a$ auftritt, so wird man für parabolische Bahnen die Formeln von 31 zu verwenden haben, und für die Bestimmung der Störung der mittleren Länge:

$$\begin{aligned}\frac{dL_0}{dt} = {} & [(-2r\cos\varphi - p\cos v\, tang\, \tfrac{1}{2}\varphi)P + (r+p)\sin v\, tang\, \tfrac{1}{2}\varphi\, Q] + \\ & + r\sin(v+\omega)\, tang\, \tfrac{1}{2} i\, Z^{(0)} - \frac{3(t-T_0)k_0}{\sqrt{p}}\cos\varphi\left[e\sin v\, P + \frac{p}{r}Q\right]\end{aligned} \quad (5)$$

wo für parabolische Bahnen das letzte Glied verschwindet. Zur Berechnung der Elemente X, Π, Φ, Ψ an Stelle von $i$, ☊, $e$, $\pi$ hat man hier aus 30. 9 und 10:

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= r[\sin(v+\omega+☊) - 2\cos(v+\omega)\sin ☊ \sin^2 \tfrac{1}{2} i]\, Z^{(0)} \\ \frac{d\Pi}{dt} &= r[\cos(v+\omega+☊) - 2\cos(v+\omega)\cos ☊ \sin^2 \tfrac{1}{2} i]\, Z^{(0)} \\ \frac{d\Phi}{dt} &= [r\sin v\cos\pi + p\cos E\sin\pi + p\sin(\pi+v)]Q - p\cos(\pi+v)P \\ &\quad + r\sin(v+\omega)\cos\pi\sin\varphi\, tang\, \tfrac{1}{2} i\, Z^{(0)} \\ \frac{d\Psi}{dt} &= [-r\sin v\sin\pi + p\cos E\cos\pi + p\cos(\pi+v)]Q + p\sin(\pi+v)P \\ &\quad + r\sin(v+\omega)\sin\pi\sin\varphi\, tang\, \tfrac{1}{2} i\, Z^{(0)}.\end{aligned} \quad (6)$$

**31.** Beispiel. Für die numerische Berechnung bedarf es hier keiner weiteren Auseinandersetzung. Für zwei der Osculationsepoche vorangehende und zwei ihr folgende Zeitmomente werden die Elemente constant angenommen, die Differentialquotienten für die Elementenstörungen berechnet, hiermit die Summationsconstanten so bestimmt, dass die Integrale für die Osculationsepoche verschwinden, worauf die numerische Integration mit den erhaltenen summirten Werthen von Intervall zu Intervall vorgenommen wird.

In dem folgenden Beispiele wurden jedoch auch für die ersten vier Intervalle die Elemente nicht constant angenommen, sondern die aus einer ersten vorläufigen Störungsrechnung erhaltenen Werthe verwendet, was bei bedeutenden Elementenstörungen stets zu empfehlen ist. Kleinere Unregelmässigkeiten im Gange der Differenzen sind nicht zu vermeiden, und rühren von der unvermeidlichen Ungenauigkeit der Extrapolation her; sind die Unregelmässigkeiten etwas grösser, wie dies namentlich bei den Elementenstörungen wegen der bedeutenden Grösse derselben auftreten kann, so wird es sich stets empfehlen, die Rechnung für das betreffende Intervall mit den schliesslich erhaltenen osculirenden Elementen an Stelle der für die erste Rechnung verwendeten extrapolirten (in dem Beispiele auf pag. 363 in den ersten sechs Zeilen angeführten) zu wiederholen.

[1]) Mit der Masse $\frac{1}{1047\cdot879}$ wird der Coëfficient gleich 2·181755.

| 1889 | Dec. 7·0 | Oct. 28·0 | Sept. 18·0 | Aug. 9·0 | 1887 Aug. 20·0 | Juli 11·0 | Juni 1·0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_0 + \mu_0 t$ . . | 11° 0′ 26″·8 | 5° 25′ 57″·4 | 359° 51′ 28″·5 | 354° 16′ 59″·5 | 253° 56′ 18″·9 | 248° 21′ 50″·0 | 242° 47′ 21″·1 |
| $L$ . . . . . | 11 0 31·0 | 5 25 59·4 | 359 51 26·2 | 354 16 52·9 | 255 8 4·9 | 249 39 22·4 | 244 16 21·8 |
| $\pi$ . . . . . | 1 35 5·0 | 1 34 58.1 | 1 34 51·8 | 1 34 45·7 | 1 37 5·8 | 1 41 20·2 | 1 46 31·8 |
| $\Omega$ . . . . . | 17 59 4·8 | 17 59 4·4 | 17 59 4·4 | 17 59 5·2 | 18 51 11·9 | 18 57 54·4 | 19 4 27·6 |
| $i$ . . . . . | 6 4 6·44 | 6 4 6·57 | 6 4 6·51 | 6 4 6·40 | 6 14 26·5 | 6 17 29·6 | 6 21 22·5 |
| $\varphi$ . . . . . | 28 5 10·2 | 28 5 6 5 | 28 5 5·0 | 28 5 9·4 | 28 36 9·1 | 28 48 51·7 | 28 53 51·0 |
| $\mu$ . . . . . | 501″·6981 | 501″·7180 | 501″·7221 | 501″·6985 | 500″·4029 | 501″·1610 | 502″·1670 |
| $M$ . . . . . | 9° 25′ 26″·0 | 3° 51′ 1″·8 | 358° 16′ 34″·4 | 352° 42′ 9″·2 | 258° 25′ 59″·1 | 247° 58′ 2″·2 | 242° 29′ 50″·5 |
| $E$ . . . . . | 17 38 51·1 | 7 15 30·0 | 356 44 39·7 | 346 19 32·5 | 281 51 35·6 | 227 37 18·0 | 223 27 16·5 |
| log $e''$ . . . | 4·987261 | 4·987246 | 4·987244 | 4·987258 | 4·994517 | 4·996298 | 4·998592 |
| log sin $\varphi$ . . | 9·672886 | 9·672821 | 9·672819 | 9·672885 | 9·680092 | 9·681878 | 9·684167 |
| log $a$ . . . | 0·566379 | 0·566365 | 0·566368 | 0·566377 | 0·567090 | 0·566687 | 0·566106 |
| log $\sqrt{p}$ . . . | 0·228777 | 0·228774 | 0·228774 | 0·228775 | 0·227021 | 0·226260 | 0·225802 |
| log $r$ sin $v$ . . | 9·991648 | 9·618506 | $9_n$·266285 | $9_n$·885616 | $0_n$·406206 | $0_n$·378105 | $0_n$·345802 |
|  | 9·942800 | 9·990289 | 9·998050 | 9·965277 | 9·927446 | 9·940588 | 9·951896 |
| log $r$ cos $v$ . . | 0·249948 | 0·283874 | 0·288678 | 0·266092 | $0_n$·607026 | $0_n$·620164 | $0_n$·648592 |
| [illegible] . . . . . | 28° 58′ 7″·2 | 12° 4′ 17″·6 | 354° 34′ 30″·8 | 337° 28′ 38″·2 | 212° 12′ 17″·8 | 200° 17′ 28″·4 | 200° 26′ 20″·2 |
| [illegible] . . . . . | 348 36 0·7 | 348 35 58·7 | 348 35 47·4 | 348 35 38·5 | 342 45 58·9 | 342 43 25·8 | 342 42 3·7 |
| [illegible] . . . . . | 12 29 7·9 | 355 40 11·3 | 338 10 18·2 | 320 59 11·7 | 194 58 11·7 | 192 0 54·2 | 189 10 23·9 |
| log cos $u$ . . | 9·989606 | 9·998758 | 9·967690 | 9·890420 | $9_n$·985005 | $9_n$·990680 | $9_n$·994410 |
| log $r$ . . . . | 0·307648 | 0·293085 | 0·290628 | 0·300815 | 0·679580 | 0·688576 | 0·696696 |
| log sin $u$ . . | 9·334842 | $8_n$·877972 | $9_n$·570340 | $9_n$·798997 | $9_n$·412144 | $9_n$·318416 | $9_n$·202546 |
| log sin $i$ . . . | 9·024148 | 9·024145 | 9·024145 | 9·024148 | 9·036252 | 9·030762 | 9·044187 |
| log $r$ sin $u$ . . | 9·642490 | $9_n$·171057 | $9_n$·860968 | $0_n$·099812 | $0_n$·091724 | $0_n$·006992 | $9_n$·899242 |
| log tang ½ $i$ . . | 8·724882 | 8·724884 | 8·724884 | 8·724881 | 8·736511 | 8·740042 | 8·744402 |
| log tang ½ $\varphi$ . | 9·898160 | 9·898148 | 9·898141 | 9·898157 | 9·406404 | 9·408484 | 9·411053 |
| log cos $v$ . . . | 9·942800 | 9·990280 | 9·998050 | 9·965277 | $9_n$·927446 | $9_n$·940588 | $9_n$·951896 |
| log $p$ . . . . | 0·457558 | 0·457547 | 0·457547 | 0·457551 | 0·454042 | 0·452578 | 0·450604 |
| log $r$ . . . . | 0·307648 | 0·293085 | 0·290628 | 0·300815 | 0·670580 | 0·688576 | 0·690606 |
| Add. log . . | 0·232514 | 0·226588 | 0·225589 | 0·229694 | 0·202740 | 0·199234 | 0·195187 |
| log 2 cos $\varphi$ . . | 0·246617 | 0·246621 | 0·246622 | 0·246617 | 0·244506 | 0·243978 | 0·243279 |
| log $(p+r)$ . | 0·690067 | 0·684085 | 0·683086 | 0·687245 | 0·882820 | 0·887810 | 0·891883 |
| log sin $v$ . . | 9·684000 | 9·320428 | $8_n$·975612 | $9_n$·584801 | $9_n$·726686 | $9_n$·689529 | $9_n$·649106 |
| log cosec $\varphi$ . . | 0·327164 | 0·327179 | 0·327181 | 0·327167 | 0·319908 | 0·318127 | 0·315833 |
| log$(-p \cos v)$ . | $0_n$·300853 | $0_n$·447836 | $0_n$·455597 | $0_n$·422828 | 0·381488 | 0·393161 | 0·402500 |
| log sin $v$ sin $\varphi$ . | 9·356836 | 8·993244 | $8_n$·648431 | $9_n$·257034 | $9_n$·406778 | $9_n$·371402 | $9_n$·333273 |
| log$(-3\,k m : \sqrt{a})$ | $0_n$·031578 | $0_n$·031580 | $0_n$·031581 | $0_n$·031575 | $0_n$·031218 | $0_n$·031420 | $0_n$·031710 |
| log$(p : r)$ . . | 0·149905 | 0·164462 | 0·166924 | 0·156736 | 9·774462 | 9·764097 | 9·753908 |
| log$(-p \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi \cos v)$ | $9_n$·798018 | $9_n$·845979 | $9_n$·853738 | $9_n$·820985 | 9·787892 | 9·801595 | 9·813558 |
| log$(-2r \cos\varphi)$ | $0_n$·554265 | $0_n$·539706 | $0_n$·537245 | $0_n$·547432 | $0_n$·924086 | $0_n$·932540 | $0_n$·939975 |
| Add. log . . | 9·070144 | 0·080059 | 0·081797 | 0·074720 | 9·967042 | 9·960626 | 9·906262 |
| log cos $v$ . . | 9·942800 | 9·990289 | 9·998050 | 9·965277 | $9_n$·927446 | $9_n$·940588 | $9_n$·951896 |
| log cos $E$ . . | 9·979266 | 9·996506 | 9·999299 | 9·987512 | $9_n$·790098 | $9_n$·828075 | $9_n$·860891 |
| Add. log . . | 0·282940 | 0·297982 | 0·300405 | 0·290055 | 0·238016 | 0·248668 | 0·257907 |
| log$(\cos v + \cos E)$ | 0·262206 | 0·294488 | 0·299704 | 0·277567 | $0_n$·165462 | $0_n$·189256 | $0_n$·209803 |
| log $a \cos\varphi$ . . | 0·511966 | 0·511956 | 0·511955 | 0·511964 | 0·510566 | 0·509680 | 0·508855 |

| 1889 | Dec. 7·0 | Oct. 28·0 | Sept. 18·0 | Aug. 9·0 | 1887 Aug. 20·0 | Juli 11·0 | Juni 1·0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Jupiter | | | |
| $\beta_0'$ . . . . . | −0° 10′ 42″·2 | −0° 6′ 8″·0 | −0° 1′ 34″·0 | +0° 2′ 58″·8 | +1° 7′ 25″·9 | +1° 9′ 20″·1 | +1° 11′ 27″·1 |
| $\lambda_0'$ . . . . . | 287 9 16·8 | 283 48 12·0 | 280 28 16·4 | 277 9 28·8 | 220 14 56·6 | 217 11 58·3 | 214 9 24·6 |
| $\lambda_0' - \Omega$ . . . | 269 10 12·0 | 265 49 7·6 | 262 29 12·0 | 259 10 23·6 | 201 28 44·7 | 198 14 8·9 | 195 4 57·0 |
| $Q$ . . . . . | 180 10 44·0 | 180 6 9·0 | 180 1 34·8 | 179 56 58·0 | 176 55 18·7 | 176 18 12·8 | 175 26 23·8 |
| $Q - i$ . . . . | 174 6 37·5 | 174 2 2·4 | 173 57 28·2 | 173 52 51·3 | 170 40 52·4 | 170 0 48·2 | 169 5 1·8 |
| $\log q$ . . . . | 9·999954 | 9·998842 | 9·996255 | 9·992200 | 9·562607 | 9·496228 | 9·416097 |
| $L_1$ . . . . . | 269° 9′ 56″·2 | 265° 47′ 45″·9 | 262° 26′ 42″·6 | 259° 6′ 45″·6 | 201° 9′ 58″·7 | 198° 0′ 39″·4 | 194° 52′ 0″·2 |
| $L_1 - l$ . . . . | 256 40 48·8 | 270 7 34·6 | 284 16 24·4 | 298 7 33·9 | 6 11 35·6 | 5 59 45·2 | 5 41 36·8 |
| $\log r_1$ . . . . | 0·718507 | 0·714746 | 0·715982 | 0·717212 | 0·734418 | 0·734937 | 0·735397 |
| $\log \xi_1$ . . . . | $0_n$078668 | 8·055608 | 0·105509 | 0·338220 | 0·731115 | 0·731911 | 0·732719 |
| $\log r$ . . . . | 0·307648 | 0·298065 | 0·290623 | 0·300815 | 0·679568 | 0·688576 | 0·690696 |
| $\log \xi_1 - r$ . . . | $0_n$507258 | $0_n$290564 | $9_n$881004 | 9·649004 | 9·780013 | 9·709476 | 9·638628 |
| $\log \eta_1$ . . . . | $0_n$699865 | $0_n$712898 | $0_n$699986 | $0_n$660244 | 9·766605 | 9·753281 | 9·731402 |
| $\log \zeta_1$ . . . . | 9·724662 | 9·730864 | 9·734502 | 9·737150 | 9·506845 | 9·470316 | 9·429897 |
| $\log r_{01}^{-1}$ . . . | 9·228868 | 9·256468 | 9·298594 | 9·334660 | 0·046450 | 0·086774 | 0·130799 |
| $\log K$ . . . . | $7_n$405007 | $7_n$111888 | 6·687021 | 7·482764 | 0·187372 | 0·258881 | 0·391801 |
| $\log\left(K\xi_1 - \frac{r}{r_{01}}\right)$ | $7_n$814480 | $8_n$068026 | $8_n$152863 | $8_n$105318 | 9·901804 | 9·953888 | 0·012048 |
| $\log K\eta_1$ . . . | 8·104872 | 7·824281 | $7_n$387007 | $8_n$148108 | 9·903977 | 0·012062 | 0·122708 |
| $\log K\zeta_1$ . . . . | $7_n$129669 | $6_n$842247 | 6·421528 | 7·219914 | 9·648717 | 9·729147 | 9·820628 |
| $\log(wk)'' m_1 : \sqrt{p}$ | 1·902978 | 1·902981 | 1·902981 | 1·902980 | 1·904720 | 1·905475 | 1·906453 |
| $P_{♃}$ . . . . . | −0·52168 | −0·92471 | −1·18722 | −1·01928 | +63·9859 | +72·8292 | +87·8308 |
| $P_{♄}$ . . . . . | −0·00725 | +0·02817 | +0·06087 | +0·08402 | −0·0807 | −0·0869 | −0·0028 |
| $Q_{♃}$ . . . . . | +1·01707 | +0·53866 | −0·19498 | −1·11170 | +64·8720 | +82·7060 | +106·9489 |
| $Q_{♄}$ . . . . . | −0·07092 | −0·07281 | −0·05822 | −0·03246 | +0·1185 | +0·1121 | +0·1105 |
| $Z_{♃}^{(0)}$ . . . . | −0·10781 | −0·05562 | +0·02111 | +0·13271 | +35·3588 | +48·1144 | +58·8484 |
| $Z_{♄}^{(0)}$ . . . . | +0·00450 | +0·00580 | +0·00692 | +0·00785 | +0·0119 | +0·0120 | +0·0121 |
| $\log \mu'$ . . . . | $9_n$888409 | $9_n$094824 | 8·680012 | 9·289209 | 9·437996 | 9·402822 | 9·364962 |
| $\log L'$ . . . . | $0_n$624400 | $0_n$619765 | $0_n$619042 | $0_n$622152 | $0_n$891128 | $0_n$899175 | $0_n$906237 |
| $\log \pi'$ . . . . | $0_n$727017 | $0_n$775015 | $0_n$782778 | $0_n$749995 | 0·701896 | 0·711288 | 0·718383 |
| $\log \varphi'$ . . . . | 0·195966 | 9·882879 | $0_n$467567 | $0_n$096765 | $0_n$237252 | $0_n$100159 | $0_n$157461 |
| $\log P$ . . . . | $9_n$728898 | $9_n$952521 | $0_n$081953 | $9_n$970082 | 1·805536 | 1·858792 | 1·918015 |
| $\log \mu''$ . . . . | $0_n$181478 | $0_n$196042 | $0_n$198505 | $0_n$188811 | $9_n$805680 | $9_n$796417 | $9_n$785618 |
| $\log L''$ . . . . | 9·772227 | 9·402651 | $9_n$056839 | $9_n$670208 | $0_n$015410 | $0_n$085778 | $9_n$952042 |
| $\log \pi''$ . . . . | 0·701281 | 0·881687 | $9_n$985879 | $0_n$599218 | $0_n$925914 | $0_n$895406 | $0_n$856822 |
| $\log \varphi''$ . . . . | 0·774172 | 0·806894 | 0·811059 | 0·789581 | $0_n$676028 | $0_n$698886 | $0_n$718158 |
| $\log Q$ . . . . | 9·975960 | 9·664081 | $9_n$403464 | $0_n$058488 | 1·809462 | 1·918129 | 2·020605 |
| $\log i'''$ . . . . | 0·297254 | 0·291848 | 0·258818 | 0·191255 | $0_n$664585 | $0_n$678956 | $0_n$691100 |
| $\log \Omega'''$ . . . . | 0·618847 | $0_n$146912 | $0_n$836818 | $1_n$075069 | $1_n$055472 | $0_n$967280 | $0_n$855055 |
| $\log \pi'''$ . . . . | 8·866822 | $7_n$895891 | $8_n$585297 | $8_n$824143 | $8_n$828285 | $8_n$747084 | $8_n$648724 |
| $\log Z^{(0)}$ . . . . | $9_n$014142 | $8_n$697404 | 8·447628 | 9·147862 | 1·548582 | 1·634758 | 1·727179 |
| $d\Delta\mu'$ . . . . | +0″·129 | +0″·095 | −0″·052 | −0″·182 | +17″·520 | +18″·265 | +19″·187 |
| $d\Delta\mu''$ . . . . | −1·437 | −0·725 | +0·400 | +1·765 | −41·228 | −51·825 | −65·247 |
| $d\Delta L'$ . . . . | +2·227 | +3·785 | +4·477 | +3·918 | −497·852 | −572·753 | −667·198 |
| $d\Delta L''$ . . . . | +0·560 | +0·117 | +0·029 | +0·585 | −66·815 | −80·149 | −95·802 |
| $d\Delta L'''$ . . . . | −0·002 | 0·000 | −0·001 | −0·009 | −2·381 | −2·409 | −2·349 |
| $d\Delta\pi'$ . . . . | +2·821 | +5·840 | +6·527 | +5·259 | +321·316 | +371·604 | +432·861 |
| $d\Delta\pi''$ . . . . | +4·755 | +0·990 | +0·245 | +4·547 | −547·590 | −651·022 | −769·337 |
| $d\Delta\pi'''$ . . . . | −0·002 | 0·000 | −0·001 | −0·009 | −2·381 | −2·409 | −2·349 |
| $d\Delta\varphi'$ . . . . | −0·881 | −0·609 | +0·881 | +1·169 | −110·854 | −114·275 | −118·981 |
| $d\Delta\varphi''$ . . . . | +5·625 | +2·954 | −1·641 | −7·047 | −305·330 | −414·014 | −559·452 |

| | If | $\frac{d\Delta i}{dt}$ | Iy | $\frac{d\Delta\Omega}{dt}$ | IIf | Iy | $40\frac{d\Delta\mu}{dt}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | + 16′ 4″·167 | | |
| 1887 Juni 1·0 | + 19′ 82″·886 | − 4′ 21″·990 | + 68′ 81″·089 | − 6′ 22″·150 | + 16 46·007 | + 41″·840 | − 46″·160 |
| Juli 11·0 | + 15 10·396 | − 3 25·925 | + 62 8·959 | − 6 30·029 | + 16 41·687 | − 4·820 | − 38·560 |
| Aug. 20·0 | + 11 44·471 | − 2 48·868 | + 55 29·010 | − 6 41·841 | + 16 8·785 | − 37·880 | − 28·103 |
| Sept. 29·0 | + 9 1·106 | − 2 10·157 | + 48 46·978 | 6 32·902 | + 15 2·209 | − 61·576 | − 16·044 |
| Nov. 8·0 | + 6 50·946 | − 1 48·509 | + 42 14·076 | − 6 15·595 | + 13 44·589 | − 77·690 | − 9·847 |
| 1887 Dec. 18·0 | + 5 7·877 | − 1 21·019 | + 35 58 481 | − 5 52·059 | + 12 17·122 | − 87·467 | − 4·771 |
| 1888 Jan. 27·0 | + 3 45·456 | − 1 4·066 | + 30 6·422 | − 5 28·203 | + 10 44·884 | − 92·288 | − 0·619 |
| März 7·0 | + 2 41·892 | − 0 49·291 | + 24 48·159 | − 4 50·670 | + 9 12·027 | − 99·857 | + 2·751 |
| April 16·0 | + 1 52·101 | − 37·111 | + 19 52·480 | − 4 15·636 | + 7 41·921 | − 90·106 | + 5·411 |
| Mai 26·0 | + 1 14·990 | − 27·176 | + 15 36·844 | − 3 39·451 | + 6 17·220 | − 84·695 | + 7·407 |
| Juli 5·0 | + 0 47·814 | − 19·216 | + 11 57·393 | − 3 3·508 | + 4 59·988 | − 77·288 | + 8·778 |
| Aug. 14·0 | + 28·598 | − 18·001 | + 8 53·885 | − 2 29·156 | + 3 51·428 | − 68·510 | + 9·570 |
| Sept. 23·0 | + 15·597 | − 8·305 | + 6 24·729 | − 1 57·546 | + 2 52·488 | − 58·940 | + 9·840 |
| Nov. 2·0 | + 7·292 | − 4·895 | + 4 27·188 | − 1 29·504 | + 2 8·888 | − 49·100 | + 9·647 |
| 1888 Dec. 12·0 | + 2·897 | − 2·545 | + 2 57·679 | − 1 5·560 | + 1 28·985 | − 39·458 | + 9·060 |
| 1889 Jan. 21·0 | − 0·148 | − 1·080 | + 1 52·119 | − 0 45·895 | + 0 58·562 | − 30 878 | + 8·202 |
| März 2·0 | − 1 178 | − 0·147 | + 1 0·224 | − 30·889 | + 31·891 | − 22·171 | + 7·069 |
| April 11·0 | − 1·825 | + 0·285 | + 0 35·885 | − 18·707 | + 16·809 | − 15·062 | + 5·805 |
| Mai 21·0 | − 1·040 | + 0·415 | + 57·128 | − 10·384 | + 7·062 | − 9·277 | + 4·418 |
| Juli 30·0 | − 0·625 | + 0·362 | + 6·744 | − 4·889 | + 2·168 | − 4·804 | + 2·974 |
| Aug. 9·0 | − 0·263 | + 0·218 | + 1·855 | − 1·078 | + 0·278 | − 1·890 | + 1·588 |
| Sept. 18·0 | − 0·045 | + 0·051 | + 0·182 | − 0·108 | − 0·029 | − 0·807 | + 0·548 |
| Oct. 28·0 | + 0·006 | − 0·098 | − 0·011 | + 0·070 | + 0·012 | + 0·041 | − 0·680 |
| Dec. 7·0 | − 0·092 | − 0·205 | + 0·059 | − 0·499 | − 0·577 | − 0·589 | − 1·808 |
| | − 0·297 | | − 0·370 | | − 2·474 | − 1·897 | |

| | If | $\frac{d\Delta L_1}{dt}$ | Iy | $\frac{d\Delta\pi}{dt}$ | Iy | $\frac{d\Delta\varphi}{dt}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1887 Juni 1·0 | + 79′ 14″·712 | − 12′ 45″·404 | + 14′ 30″·795 | − 5′ 39″·375 | + 54′ 40″·070 | − 11′ 18″·488 |
| Juli 11·0 | + 66 20·808 | − 10 55·811 | + 8 51·350 | − 4 41·827 | + 43 21·687 | − 8 48·289 |
| Aug. 20·0 | + 55 38·987 | − 9 26·548 | + 4 0·528 | − 3 48·655 | + 34 33·846 | − 6 56·184 |
| Sept. 29·0 | + 46 7·449 | − 8 12·838 | + 0 20·888 | − 3 0·709 | + 27 37·164 | − 5 30·497 |
| Nov. 8·0 | + 37 55·116 | − 7 8·000 | − 2 39·841 | − 2 16·478 | + 22 6·667 | − 4 23·508 |
| 1887 Dec. 18·0 | + 30 47·017 | − 6 10·850 | − 4 56·814 | − 1 35·798 | + 17 48·164 | − 3 30·470 |
| 1888 Jan. 27·0 | + 24 36·167 | − 5 18·659 | − 6 32·112 | − 0 59·079 | + 14 12·694 | − 2 48·173 |
| März 7·0 | + 19 17·508 | − 4 30·468 | − 7 31·191 | − 26·496 | + 11 24·521 | − 2 14·246 |
| April 16·0 | + 14 47·045 | − 3 45·886 | − 7 57·687 | + 1·897 | + 9 10·275 | − 1 47·517 |
| Mai 26·0 | + 11 1·209 | − 3 4·696 | − 7 56·200 | + 24·093 | + 7 22·758 | − 1 26·852 |
| Juli 5·0 | + 7 56·518 | − 2 27·282 | − 7 32·198 | + 41·244 | + 5 56·406 | − 1 9·859 |
| Aug. 14·0 | + 5 29·281 | − 1 53·820 | − 6 50·954 | + 52·766 | + 4 46·547 | − 0 57·171 |
| Sept. 23·0 | + 3 35·461 | − 1 24·770 | − 5 58·188 | + 58 861 | + 3 49·376 | − 47·475 |
| Nov. 2·0 | + 2 10·691 | − 1 0·250 | − 4 59·827 | + 60·016 | + 3 1·901 | − 39·968 |
| 1888 Dec. 12·0 | + 1 10·441 | − 0 40·287 | − 3 59·311 | + 57·038 | + 2 21·918 | − 34·118 |
| 1889 Jan. 21·0 | + 0 30·157 | − 24·670 | − 3 2·278 | + 50·887 | + 1 47·800 | − 29·188 |
| März 2·0 | + 5·487 | − 18·042 | − 2 11·486 | + 42·476 | + 1 18·612 | − 24·790 |
| April 11·0 | − 7·555 | − 4·904 | − 1 28·960 | + 33·055 | + 0 53·892 | − 20·816 |
| Mai 21·0 | − 12·459 | + 0·818 | − 0 55·905 | + 23·724 | + 33·576 | − 15·709 |
| Juli 30·0 | − 12·141 | + 3·238 | − 32·181 | + 15·681 | + 17·867 | − 10·881 |
| Aug. 9·0 | − 8·908 | + 4·444 | − 16·550 | + 9·797 | + 7·036 | − 5·878 |
| Sept. 18·0 | − 4·464 | + 4·505 | − 6·758 | + 6·771 | + 1·158 | − 1·810 |
| Oct. 28·0 | + 0·041 | + 3·859 | + 0·018 | + 6·380 | − 0·152 | + 2·845 |
| Dec. 7·0 | + 3·693 | + 2·785 | + 6·848 | + 7·574 | + 2·198 | + 4·794 |
| | + 6·678 | | + 13·922 | | + 6·087 | |

Da die erhaltenen Elemente, wie bereits wiederholt erwähnt, für jeden Zeitmoment osculiren, so sind die Resultate mit den beiden andern Störungsmethoden unmittelbar vergleichbar. Berechnet man nun aus der Integraltafel pag. 365 die Werthe der Integrale für 1887 Juni 1·0, so erhält man die in der dritten Columne eingetragenen osculirenden Elemente, denen behufs Vergleichung die früher durch die Berechnung der Störungen in rechtwinkligen und polaren Coordinaten erhaltenen osculirenden Elemente beigesetzt sind:

Epoche und Osculation 1887 Juni 1·0

| | Rechtwinklige Coordinaten | Polarcoordinaten | Elementenstörungen |
|---|---|---|---|
| $L_0$ | 244° 16′ 44″·05 | 244° 16′ 43″·67 | 244° 16′ 44″·97 |
| $M_0$ | 242 30 13·26 | 242 30 12·74 | 242 30 13·84 |
| $\omega$ | 342 42 4·28 | 342 42 4·65 | 342 42 4·48 |
| $\Omega$ | 19 4 26·56 | 19 4 26·28 | 19 4 26·05 |
| $\pi$ | 1 46 30·79 | 1 46 30·98 | 1 46 31·13 |
| $i$ | 6 21 22·73 | 6 21 22·55 | 6 21 22·60 |
| $\varphi$ | 28 58 51·86 | 28 58 51·91 | 28 58 51·95 |
| $\mu$ | 502″·1597 | 502″·1608 | 502″·1627 |
| $\log p$ | 0·4506064 | 0·4506059 | 0·4506088 |
| $\log a$ | 0·566110’ | 0·5661002 | 0·5661081 |

## b. Berechnung der allgemeinen Störungen.

32. **Vorbemerkungen.** Die Entwickelung der Störungen in analytischen Ausdrücken erweisen sich für die rechtwinkligen Coordinaten aus mancherlei Gründen als unzweckmässig. Während der Radiusvector wenigstens für elliptische Bahnen nur innerhalb enger Grenzen veränderlich ist, und die wahre Länge von einer der Zeit periodischen Function nur mässig abweicht, die Elemente selbst aber, von den secularen und periodischen Störungen abgesehen, Constante sind, sind die rechtwinkligen Coordinaten an und für sich periodische Functionen von starker Veränderlichkeit, da sowohl $x$ als auch $y$ bei jedem Umlaufe alle Werthe zwischen $-r$ und $+r$ durchlaufen, und nur die dritte Coordinate ($z$) für den Fall, wo die Bahnebene nahe der Fundamentalebene bleibt, zwischen mässigen Grenzen eingeschlossen ist. Hierzu kommt, dass die Berücksichtigung kleiner Lageänderungen der Fundamentalebene (bewegliche Ekliptik) in rechtwinkligen Coordinaten wesentlich complicirter ist, als bei polaren Coordinaten. Mannigfache Versuche, Störungen in rechtwinkligen Coordinaten zu ermitteln, welche schon bis auf EULER zurückzuführen sind, und bei denen die Entwickelungen meist durch Einführung von rechtwinkligen Coordinaten, bezogen auf ein bewegliches Axensystem vereinfacht werden, erlangen in ihrem weiteren Verlaufe stets den Charakter der Methode der Störungen in Polarcoordinaten. Endlich ist, wenigstens für die Sonne und den Mond, die Vergleichung der Polarcoordinaten mit den Beobachtungen einfacher, indem die Längen und Breiten direkt vergleichbar sind, während dieselben aus den rechtwinkligen Coordinaten erst abgeleitet werden müssen.

Wenn auch in dieser Richtung die Methode der Störungsrechnung in polaren Coordinaten als die zweckmässigste erscheint, so bietet andererseits auch die Methode der Variation der Elemente nicht unbedeutende Vortheile. Zunächst hat man es hier nur mit Differentialgleichungen erster Ordnung zu thun, während die Bestimmung der Polarcoordinaten an die Auflösung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung gebunden ist. Von besonderer Wichtigkeit aber ist es, dass sich aus der Form der Differentialgleichungen selbst einige allgemeine, für die Erkenntniss des Weltsystems wichtige Relationen ableiten lassen, welche die

secularen Störungen betreffen, und die Berücksichtigung dieser secularen Glieder selbst sich relativ einfach gestaltet. Viele Theoretiker zogen es daher vor, die Elementenstörungen zu ermitteln, die Seculargliedei dadurch zu berücksichtigen, dass man sie mit den Elementen vereinigt, so dass man den weiteren Rechnungen mit der Zeit langsam veränderliche Elemente zu Grunde legt, und aus den periodischen Störungen für die Elemente die periodischen Störungen in den Polarcoordinaten ableitet. Man hat, wenn $M = L - \pi$ die mittlere Anomalie, $L$ die mittlere Länge, $\pi$ die Länge des Perihels ist, und $E_1, E_2, \ldots E_1', E_2' \ldots$ Functionen der Excentricität sind:

$$r = a[1 + E_1 \cos(L - \pi) + E_2 \cos 2(L - \pi) + E_3 \cos 3(L - \pi) + \ldots]$$
$$l = L + E_1' \sin(L - \pi) + E_2' \sin 2(L - \pi) + E_3' \sin 3(L - \pi) + \ldots$$

Sind daher die Störungen der Elemente $\delta a, \delta e, \delta\pi, \delta L$, so wird

$$\delta r = \delta a[1 + E_1 \cos(L-\pi) + \ldots] + a\left[\frac{\partial E_1}{\partial e}\cos(L-\pi) + \frac{\partial E_2}{\partial e}\cos 2(L-\pi) + \ldots\right]\delta e$$
$$- a[E_1 \sin(L - \pi) + 2E_2 \sin 2(L - \pi) + \ldots](\delta L - \delta\pi)$$
$$\delta l = \left[\frac{\partial E_1'}{\partial e}\sin(L - \pi) + \frac{\partial E_2'}{\partial e}\sin 2(L - \pi) + \ldots\right]\delta e + \delta L +$$
$$+ [E_1' \cos(L - \pi) + E_2' \cos 2(L - \pi) \ldots](\delta L - \delta\pi).$$

Dieser Vorgang hat jedoch den Nachtheil, dass man die beträchtlich grösseren Elementenstörungen zu bestimmen hat, welche sich bei der Substitution in die Formeln für die Störungen der Coordinaten theilweise vereinigen und wegheben. Ueberdiess sind die Formeln nicht mehr strenge, wenn die Störungen der Elemente zu gross werden; die dann erforderliche Berücksichtigung der zweiten Potenzen von $\delta a, \delta e, \delta L, \delta\pi$ macht aber in diesem Falle die Rechnung ziemlich beschwerlich.

Aus diesen Gründen entwickelte sich das Bestreben, die periodischen Störungen der Polarcoordinaten mit möglichster Berücksichtigung der secularen Störungen der Elemente gleichzeitig zu bestimmen, wobei jedoch zu beachten ist, dass der Beobachtung nur so viel Daten entnommen werden, als die Zahl der durch die Differentialgleichungen bestimmten Integrationsconstanten erfordert.

**83. Entwickelung der störenden Kräfte.** Während für die Entwickelung der störenden Kräfte für die numerische Rechnung (spezielle Störungen) direkt die Werthe $X, Y, Z, P, Q, Z^{(0)}$ ermittelt werden, erweist es sich bei der Ableitung allgemeiner Störungen vortheilhaft, die Störungsfunction zu entwickeln und die störenden Kräfte durch die Differentiation derselben zu erhalten. Nun ist die Störungsfunction $\Omega$ der in 9 (7) mit $\Omega_1$ bezeichnete Theil, also, da

$$f(r) = \frac{k^2}{r^2}, \quad F(r) = \frac{k^2}{r}$$

ist:

$$\Omega = \Sigma k^2 m_1 \left[\frac{1}{r_{01}} - \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r_1^3}\right]. \qquad (1)$$

Setzt man hier $x = \mathfrak{r} \cos v$, $y = \mathfrak{r} \sin v$, was darauf hinauskömmt, die $X$-axe in die Richtung des Pericentrums des gestörten Himmelskörpers zu legen, so wird:

$$\Omega = \Sigma k^2 m_1 \left[\frac{1}{r_{01}} - \frac{\mathfrak{r}(x_1 \cos v + y_1 \sin v) + zz_1}{r_1^3}\right]. \qquad (1a)$$

Hierbei ist:

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \mathfrak{r}_1^2 + z_1'^2 \qquad (2)$$
$$r_{01}^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 = \mathfrak{r}^2 + \mathfrak{r}_1^2 + z^2 + z_1'^2 - 2(xx_1 + yy_1 + zz_1).$$

$xx_1 + yy_1 + zz_1$ ist darstellbar durch den Cosinus des Winkels $\Gamma$ zwischen den beiden Radienvectoren $r$ und $r_1$. In allen Fällen, wo nicht auf die ursprünglichen Differentialgleichungen der Bewegung ($A$) (pag. 292) in rechtwinkligen Coordinaten zurückgegriffen wird, werden die Differentiationen nach $x, y$ durch diejenigen nach den polaren Coordinaten oder den Elementen ersetzt; hingegen wird häufig die dritte Differentialgleichung, nach $z$, beibehalten, da $z$ selbst als Störung aufgefasst werden kann, wenn man die ungestörte Bahnebene als Fundamentalebene wählt. Da dann Differentiationen nach $z$ auftreten, so muss $z$ explicite beibehalten werden. Aus diesem Grunde wurde auch $r$ an Stelle von $r$ eingeführt. Da aber:

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = rr_1 \cos\Gamma - \zeta_0 \tag{3}$$

ist, wobei $\zeta_0$ eine noch zu bestimmende Grösse ist, so wird

$$r_{01}^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos\Gamma + z^2 + z_1'^2 + 2\zeta_0. \tag{4}$$

Hierin tritt zunächst der Ausdruck

$$r_{01}^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos\Gamma$$

auf; in diesem kann man schreiben:

$$r_{01}^2 = (r^2 + r_1^2)\left[1 - \frac{2rr_1}{r^2 + r_1^2}\cos\Gamma\right].$$

Setzt man daher

$$r^2 + r_1^2 = \Delta^2; \quad \frac{2rr_1}{r^2 + r_1^2} = \delta,$$

so würde

$$\frac{1}{r_{01}} = \frac{1}{\Delta}(1 - \delta\cos\Gamma)^{-\frac{1}{2}}.$$

Die Entwickelung dieses Ausdruckes hat keine Schwierigkeiten und könnte nach dem in 15 eingeschlagenen Wege durchgeführt werden. Allein es ist zu beachten, dass $r$ und $r_1$ nicht constant sind; ist:

$$r = a(1 + \sigma); \qquad r_1 = a_1(1 + \sigma_1),$$

wobei $a$, $a_1$ die Halbaxen sind, so werden $\sigma$, $\sigma_1$ von den Excentricitäten der Bahn und von den mittleren Anomalien abhängen, überdiess aber, da für $r$, $r$ die gestörten Werthe zu setzen sind, bei der Berücksichtigung der Störungen höherer Ordnung der Massen, die Störungen enthalten. Dann wird:

$$\delta = \frac{2aa_1(1+\sigma)(1+\sigma_1)}{a^2(1+\sigma)^2 + a_1^2(1+\sigma_1)^2} =$$

$$= \frac{2aa_1}{a^2 + a_1^2}(1 + \sigma + \sigma_1 + \sigma\sigma_1)\left[1 + 2\frac{a^2\sigma + a_1^2\sigma_1}{a^2 + a_1^2} + \frac{a^2\sigma^2 + a_1^2\sigma_1^2}{a^2 + a_1^2}\right]^{-1}.$$

Die angeführte Formel wird daher nur dann vortheilhaft, wenn man die Störungen nur mit Rücksicht auf die ersten Potenzen der Massen berechnen will ($\sigma$, $\sigma_1$ von den Störungen unabhängig) und überdiess die höheren Potenzen der Excentricität vernachlässigt. Thatsächlich tritt diese Entwickelung nur in den ersten Arbeiten und auch da nur in vereinzelten Fällen auf, und man zog alsbald vor, Entwickelungen nach Potenzen des Verhältnisses $\frac{r}{r_1}$ oder $\frac{r_1}{r}$ vorzunehmen, je nachdem $r_1 \gtrless r$ ist.

1) Sei $r < r_1$, d. h. der gestörte Planet ein **innerer**. Dann wird:

$$r_{01}^2 = r_1^2[1 - 2\alpha\cos\Gamma + \alpha^2]; \qquad \alpha = \frac{r}{r_1}. \tag{5a}$$

2) Sei $r > r_1$, d. h. der gestörte Planet ein **äusserer**. Dann wird:

$$r_{01}^2 = r^2[1 - 2\alpha\cos\Gamma + \alpha^2]; \qquad \alpha = \frac{r_1}{r}. \tag{5b}$$

Es ist für beide Fälle

$$\delta = \frac{2 r r_1}{r^2 + r_1^2} = 2 \frac{\alpha}{1 + \alpha^2};$$

daher, wenn $\alpha = 1 - \beta$ gesetzt wird:

$$\delta = 2 \frac{1 - \beta}{2 - 2\beta + \beta^2} = \frac{1 - \beta}{1 - \beta + \frac{1}{2}\beta^2} = 1 - \frac{\frac{1}{2}\beta^2}{1 - \beta + \frac{1}{2}\beta^2}$$

$$\delta - \alpha = \beta \left[1 - \frac{\frac{1}{2}\beta}{1 - \beta + \frac{1}{2}\beta^2}\right],$$

folglich, da $\beta < 1$ ist, stets $\delta - \alpha$ positiv, also $\delta > \alpha$.

Die Entwickelung nach $\alpha$ hat also scheinbar den Vortheil der stärkeren Convergenz[1]). Da $r_{01}^2 = \Delta^2 (1 - \delta \cos \Gamma)$, so wird, wenn $\delta = \sin\varphi$ gesetzt wird:

$$r_{01}^n = \Delta^n [1 - \sin\varphi \cos\Gamma]^{\frac{n}{2}} = \Delta^n \cos\tfrac{1}{2}\varphi^n [1 - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi e^{i\Gamma}]^{\frac{n}{2}} [1 - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi e^{-i\Gamma}]^{\frac{n}{2}}$$

$$= \Sigma\, V_{\frac{n}{2}}^{(i)} \cos i\Gamma,$$

wobei

$$V_{\frac{n}{2}}^{(i)} = (-1)^i 2 \cos\tfrac{1}{2}\varphi^n \Delta^n \binom{\frac{n}{2}}{i} \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi^i F\left(-\frac{n}{2}, \; -\frac{n}{2} + i, \; i + 1, \; \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\varphi\right).$$

Nun ist aber gemäss der Definition von $\varphi$:

$$\cos\varphi = \frac{r^2 - r_1^2}{r^2 + r_1^2} \quad \text{oder} \quad \frac{r_1^2 - r^2}{r^2 + r_1^2},$$

jenachdem $r > r_1$ oder $r_1 > r$ ist; demnach folgt

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{r_1^2}{r^2} \quad \text{oder} \quad \frac{r^2}{r_1^2}.$$

Setzt man daher

$$\frac{r}{r_1} = \alpha \quad \text{oder} \quad \frac{r_1}{r} = \alpha,$$

so wird

$$V_{\frac{n}{2}}^{(i)} = (-1)^i r^n \binom{\frac{n}{2}}{i} \alpha^i F\left[-\frac{n}{2}, \; -\frac{n}{2} + i, \; i + 1, \; \alpha^2\right] \qquad r > r_1$$

$$V_{\frac{n}{2}}^{(i)} = (-1)^i r_1^n \binom{\frac{n}{2}}{i} \alpha^i F\left[-\frac{n}{2}, \; -\frac{n}{2} + i, \; i + 1, \; \alpha^2\right] \qquad r_1 > r$$

übereinstimmend mit **15** (10).

Es giebt allerdings einen Fall, in welchem die Entwickelung nach $\alpha$ unthunlich wird; wenn nämlich $r$ und $r_1$ sehr nahe gleich sind, oder wie dieses bei Kometenbahnen der Fall ist, die eine Excentricität so gross, dass $r$ in dem einen Theile der Bahn kleiner, im andern grösser wird, so wird die Entwickelung nach $\alpha$ in dem einen Theile der Bahn nach der ersten, in dem anderen Theile nach der zweiten Zerlegung vorgenommen werden müssen. Eine solche Theilung der Bahn ist bei den Kometen allerdings mit Vortheilen verbunden, wird jedoch nicht immer anwendbar; da aber $(r - r_1)^2$ stets positiv ist, so ist

$$r^2 + r_1^2 > 2 r r_1 \quad \text{daher} \quad \delta < 1,$$

und nur in einzelnen Punkten, für $r = r_1$ wird $\delta = 1$ werden. Wenn aber auch in den meisten Fällen die Entwickelungen in Folge der Continuität für $r = r_1$ gültig bleiben, wenn sie für unendlich benachbarte Werthe gültig sind, so werden sich, und dies ist bei der Berechnung der Störungen der kleinen

---

[1]) Würde die Entwickelung z. B. nach Potenzen von $\frac{1}{2}\delta$ d. i. Potenzen von $\left(\frac{r r_1}{r^2 + r_1^2}\right)$ fortschreiten, so würde die Convergenz dieser Entwickelung im Gegentheil stärker sein, da wie man leicht findet $\alpha - \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - 2\beta + \frac{\frac{1}{2}\beta^2}{1 - \beta + \frac{1}{2}\beta^2}\right)$ also $\alpha > \frac{1}{2}\delta$ ist.

Planeten untereinander oder bei der Berechnung der allgemeinen Störungen eines Kometen wichtig, der numerischen Anwendung ganz bedeutende Schwierigkeiten entgegenstellen.

84. Kleine Neigungen und Excentricitäten. Für die Entwickelung von $\cos\Gamma$ ist erforderlich, dass die Coordinaten $x, y, z, x_1, y_1, z_1$ auf dasselbe Coordinatensystem bezogen werden. Im gegebenen Falle war das Axensystem so gelegt, dass die $X$-Axe in die Richtung des Pericentrums und die $XY$-Ebene in die Bahnebene des gestörten Himmelskörpers fallen. Auf die Kugel projicirt, wird die Richtung der $X$-Axe in $\Pi$ (Fig. 272) treffen, die $XY$-Ebene in dem Kreise $\Omega\Pi$ schneiden. In den Formeln 2. 1, welche jetzt auf die $x_1\, y_1\, z_1$ anzuwenden sind, bedeuten dann $x_1' = r_1 \cos v_1$, $y_1' = r_1 \sin v_1$ die rechtwinkligen Coordinaten, bezogen auf ein Axensystem, dessen $X'$-Axe in die Richtung des Pericentrums des störenden Köipers fällt (Schnittpunkt auf der Kugel in $\Pi_1$). Es wird also in den Formeln 2. 21: $\Pi K = \Phi - \omega$ an Stelle von $\Omega$ und $\Pi_1 K = \omega_1 - \Phi_1$ an Stelle von $\omega$, endlich $I$ an Stelle von $i$ zu setzen sein. Es soll jedoch Kürze halber von nun an nur ein störender Körper betrachtet werden, und die auf ihn bezüglichen Grössen durch obere Accente unterschieden werden. also $r', v', \pi'$ an Stelle von $r_1\, v_1\, \pi_1$ u. s. w.[1]). Dann wird:

$$\begin{aligned} x_1 &= r'\left[\cos(\Phi-\omega)\cos(v'+\omega'-\Phi') - \sin(\Phi-\omega)\sin(v'+\omega'-\Phi')\cos I\right] \\ &\quad + \sin(\Phi-\omega)\sin I\cdot z' \\ y_1 &= r'\left[\sin(\Phi-\omega)\cos(v'+\omega'-\Phi') + \cos(\Phi-\omega)\sin(v'+\omega'-\Phi')\cos I\right] \\ &\quad - \cos(\Phi-\omega)\sin I\cdot z' \qquad (1) \\ z_1 &= r'\sin(v'+\omega'-\Phi')\sin I + z'\cos I, \end{aligned}$$

folglich[2])

$$\begin{aligned} xx_1 + yy_1 + zz_1 &= rr'\left[\cos(\Phi - v - \omega)\cos(v'+\omega'-\Phi')\right. \\ &\quad \left. - \sin(\Phi - v-\omega)\sin(v'+\omega'-\Phi')\cos I\right] + r\sin(\Phi - v - \omega)\sin I\cdot z' \qquad (2) \\ &\quad + r'\sin(v'+\omega'-\Phi')\sin I z + zz'\cos I. \end{aligned}$$

Ersetzt man in dem zweiten Gliede des ersten Klammerausdruckes $\cos I$ durch $1 - 2\sin^2\frac{1}{2}I$, und setzt

$$\omega - \Phi = \pi_0, \qquad \omega' - \Phi' = \pi_0',$$

so ist die in 82. 8 mit $\zeta_0$ bezeichnete Grösse

$$\begin{aligned} -\zeta_0 &= -2rr'\sin^2\tfrac{1}{2}I\sin(v+\pi_0)\sin(v'+\pi_0') - r\sin(v+\pi_0)\sin I z' \\ &\quad + r'\sin(v'+\pi_0')\sin I.z + zz'\cos I \qquad (3) \\ xx_1 + yy_1 + zz_1 &= rr'\cos(v+\pi_0 - v' - \pi_0') - \zeta_0. \qquad (4) \end{aligned}$$

Handelt es sich nur um die Störungen durch einen Himmelskörper, so wird man alle Längen von dem Schnittpunkte K der beiden Bahnen (Fig. 272) zählen können. Dann ist $\pi_0$ die Länge des Perihels des gestörten Himmelskörpers von K aus (gezählt in der Richtung der Bewegung, also in Fig. 272 $\Pi K = 360° - \pi_0$) und $\pi_0'$ der Abstand des Perihels des störenden Körpers von K; daher sind $v + \pi_0$, $v' + \pi_0'$ die wahren Längen der beiden Körper von K aus. Bei mehreren störenden Körpern muss selbstverständlich ein anderer Anfangspunkt gewählt werden, da nicht alle Bahnen dieselbe Schnittlinie haben.

---

[1]) Die rechtwinkligen Coordinaten bezogen auf die Bahnebene des gestörten Körpers sind dabei $x_1\, y_1\, z_1$ da $x'\, y'\, z'$ für die auf das Pericentrum und die Ebene der eigenen Bahn (des störenden Körpers) bezügliche Grössen vorbehalten sind.

[2]) Derselbe Ausdruck entsteht natürlich, von welchem Axensystem immer man ausgeht.

Der grösseren Allgemeinheit wegen wurden hier die auf der Bahnebene senkrechten Coordinaten $s$, $s'$ beibehalten. Bestimmt man Neigung und Knotenlinie derart, dass die momentane Bahnebene stets durch den gegebenen Ort geht (z. B. bei osculirenden Bahnen), so wird $s = s' = 0$; $\zeta_0$ reducirt sich auf das erste Glied, und es ist $\mathfrak{r} = r$, $\mathfrak{r}' = r'$. Unter der hier gemachten Annahme, dass die Neigungen klein sind, welcher Fall bei den Planeten und Satelliten (mit Ausnahme der durch die Sonne bewirkten Störungen der Uranus- und Neptunstrabanten) eintrifft, wird man $\zeta_0$ als eine Grösse von der zweiten Ordnung der Neigungen (von der Ordnung des Quadrates von $I$) ansehen können; es wird daher, wenn man $\zeta = 2\zeta_0 + s^2 + s'^2$ setzt:]

$$\begin{aligned} r_{01}^2 &= \mathfrak{r}^2 + \mathfrak{r}'^2 - 2\mathfrak{r}\mathfrak{r}'\cos(v + \pi_0 - v' - \pi_0') + \zeta \\ \zeta &= + 4\mathfrak{r}\mathfrak{r}'\sin^2\tfrac{1}{2}I\sin(v + \pi_0)\sin(v' + \pi_0') + 2\mathfrak{r}\sin(v + \pi_0)\sin I s' \\ &\quad - 2\mathfrak{r}'\sin(v' + \pi_0')\sin I s - 2ss'\cos I + s^2 + s'^2 \end{aligned} \tag{5}$$

Da

$$\begin{aligned} \mathfrak{r} &= a(1 + \sigma) \qquad & \mathfrak{r}' &= a'(1 + \sigma') \\ v &= M + \nu & v' &= M' + \nu' \end{aligned} \tag{6}$$

ist, wo für kleine Excentricitäten $\sigma$, $\sigma'$, $\nu$, $\nu'$ mässige Grössen sind, so kann man setzen:

$$\begin{aligned} r_{01}^2 &= E^2 + G \\ E^2 &= a^2 + a'^2 - 2aa'\cos(M + \pi_0 - M' - \pi_0'). \end{aligned} \tag{7}$$

Da

$$\begin{aligned} \cos(v + \pi_0 - v' - \pi_0') &= \cos(M + \pi_0 - M' - \pi_0')\cos(\nu - \nu') \\ &\quad - \sin(M + \pi_0 - M' - \pi_0')\sin(\nu - \nu') \end{aligned}$$

ist, so wird

$$\begin{aligned} G = a^2(2\sigma + \sigma^2) &+ a'^2(2\sigma' + \sigma'^2) + 2aa'\cos(M + \pi_0 - M' - \pi_0') \\ &[\tfrac{1}{2}(\nu - \nu')^2 - \tfrac{1}{24}(\nu - \nu')^4 + \ldots] \\ &- 2aa'\cos(M + \pi_0 - M' - \pi_0')(\sigma + \sigma' + \sigma\sigma') \\ &[1 - \tfrac{1}{2}(\nu - \nu')^2 + \tfrac{1}{24}(\nu - \nu')^4 \ldots] \\ &+ 2aa'\sin(M + \pi_0 - M' - \pi_0')(1 + \sigma)(1 + \sigma') \\ &[(\nu - \nu') - \tfrac{1}{6}(\nu - \nu')^3 \ldots\ldots] + \zeta. \end{aligned}$$

$E$ stellt, wie man sieht, die Entfernung des störenden und gestörten Himmelskörpers dar, wenn man annimmt, dass sich beide mit gleichförmiger Geschwindigkeit in zwei in derselben Ebene befindlichen concentrischen Kreisen bewegen. Nach (7) ist dann:

$$\frac{1}{r_{01}} = \frac{1}{E}\left(1 + \frac{G}{E^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{E} - \frac{1}{2}\frac{G}{E^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{G^2}{E^5} - \ldots \tag{8}$$

Diese Form der Entwickelung, scheinbar die einfachste, wird wenig übersichtlich; man erhält eine übersichtlichere Entwickelung auf die folgende Art: Man hat offenbar

$$r_{01}^2 = \rho^2 + \zeta \quad \text{wenn} \quad \rho^2 = \mathfrak{r}^2 + \mathfrak{r}'^2 - 2\mathfrak{r}\mathfrak{r}'\cos(v + \pi_0 - v' - \pi_0'), \tag{9}$$

folglich unter der Voraussetzung kleiner $\zeta$:

$$\frac{1}{r_{01}} = \frac{1}{\rho}\left(1 + \frac{\zeta}{\rho^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{2}\frac{\zeta}{\rho^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{\zeta^2}{\rho^5} - \ldots \tag{10}$$

Hierdurch sind zunächst die Glieder, die von der Neigung und der Breite abhängen, insoweit sie nicht in $\pi_0$, $\pi_0'$ enthalten sind, abgetrennt. Zur Entwickelung von $\frac{1}{\rho^n}$ kann man aber die TAYLOR'sche Reihe benutzen, indem man $a\sigma$, $a'\sigma'$, $\nu$, $\nu'$ als Incremente der Grössen $a$, $a'$, $M$, $M'$ ansieht. Es wird dann:

$$\frac{1}{\rho^n}=\left(\frac{1}{\rho^n}\right)_0+\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{\rho^n}\right)_0\cdot a\sigma+\frac{\partial}{\partial a'}\left(\frac{1}{\rho^n}\right)_0\cdot a'\sigma'+\frac{\partial}{\partial Q}\left(\frac{1}{\rho^n}\right)_0(v-v')+\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{1}{\rho^n}\right)_0(a\sigma)^2+\cdots$$

wo Kürze halber $Q=M+\pi_0-M'-\pi_0'$ gesetzt ist. Es ist aber

$$\left(\frac{1}{\rho^n}\right)_0=\frac{1}{E^n};\qquad \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{\rho^n}\right)_0=\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{E^n}\right)\ldots.$$

da in dem Ausdrucke für $E$ überall $a$ auftritt, wo in dem Ausdrucke für $\rho$ der Werth $a(1+\sigma)$ vorkommt. Man hat daher, wenn

$$\frac{1}{E^{2s+1}}=\sum_x B_s^{(x)}\cos xQ;\quad Q=M+\pi_0-M'-\pi_0' \tag{11}$$

entwickelt ist, sodass die Coëfficienten $B_s^{(x)}$ nur von den $a$, $a'$ abhängig sind:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho^{2s+1}}=&\sum_x B_s^{(x)}\cos xQ+a\sigma\sum_x\frac{\partial B_s^{(x)}}{\partial a}\cos xQ+a'\sigma'\sum_x\frac{\partial B_s^{(x)}}{\partial a'}\cos xQ-\\&-(v-v')\sum_x xB_s^{(x)}\sin xQ+\tfrac{1}{2}a^2\sigma^2\sum_x\frac{\partial^2 B_s^{(x)}}{\partial a^2}\cos xQ+aa'\sigma\sigma'\sum_x\frac{\partial^2 B_s^{(x)}}{\partial a\,\partial a'}\cos xQ+\ldots\end{aligned}\tag{12}$$

Da für $s=1, 2, \ldots$ die Faktoren $\zeta$, $\zeta^2\ldots$ auftreten, so wird man sich bei diesen Ausdrücken auf die Mitnahme einer geringeren Anzahl von Gliedern beschränken, während für $s=0$ eine weitergehende Entwickelung nöthig ist.

**35. Entwickelung der negativen ungeraden Potenzen von $E$.** Diese Entwickelung ist gemäss 33. (5) an die Entwickelung der Potenzen des Ausdruckes

$$\rho^2=1-2\alpha\cos Q+\alpha^2 \tag{1}$$

$$\alpha=\frac{a}{a'}\quad\text{oder}\quad\alpha=\frac{a'}{a},\ \alpha<1$$

gebunden. Die direkte Lösung dieser Aufgabe ist bereits durch die Formeln 15 (9), (10) gegeben. Da es sich nur um die negativen ungeraden Potenzen handelt, so sei $n=-2s-1$

$$\frac{1}{\rho^{2s+1}}=P_s^{(0)}+2P_s^{(1)}\cos Q+2P_s^{(2)}\cos 2Q+2P_s^{(3)}\cos 3Q+\ldots. \tag{2}$$

$$\begin{aligned}P_s^{(0)}&=1+\left(\frac{2s+1}{2}\right)^2\alpha^2+\left(\frac{2s+1}{2}\,\frac{2s+3}{4}\right)^2\alpha^4+\left(\frac{2s+1}{2}\,\frac{2s+3}{4}\,\frac{2s+5}{6}\right)^2\alpha^6+\ldots\\P_s^{(1)}&=\left(\frac{2s+1}{2}\right)\alpha+\left(\frac{2s+1}{2}\right)\left(\frac{2s+1}{2}\,\frac{2s+3}{4}\right)\alpha^3+\\&+\left(\frac{2s+1}{2}\,\frac{2s+3}{4}\right)\left(\frac{2s+1}{2}\,\frac{2s+3}{4}\,\frac{2s+5}{6}\right)\alpha^5+\ldots.\\P_s^{(2)}&=\left(\frac{2s+1}{2}\,\frac{2s+3}{4}\right)\alpha^2+\left(\frac{2s+1}{2}\right)\left(\frac{2s+1}{2}\,\frac{2s+3}{4}\,\frac{2s+5}{6}\right)\alpha^4+\ldots\end{aligned}\tag{3}$$

Die Bestimmung aller Coëfficienten durch diese Reihen würde ziemlich weitläufig, und es ist daher zweckmässiger nur einzelne (im Allgemeinen zwei, und hin und wieder einen zur Probe) direkt zu rechnen und aus diesen die anderen abzuleiten[1]). Setzt man $K_n^{(-x)}=K_n^{(x)}$, so kann man schreiben[2])

$$\rho^n=\sum_x K_n^{(x)}e^{ixQ}, \tag{4}$$

---

[1]) S. LAPLACE, »Mécanique céleste I. Bd.«, LEVERRIER, »Ann. der Pariser Sternwarte, II. Bd.«; HANSEN, »Entwickelung der negativen ungeraden Potenzen u. s. w.« Die recurrente Entwickelung der $P$ wurde zuerst von LAGRANGE und LAPLACE gewählt, während EULER noch bedeutende Schwierigkeiten bei der Bestimmung dieser Coëfficienten für die wechselseitigen Störungen von ♃ und ♄ oder ♀ und ♁ fand.

[2]) Die Basis der natürlichen Logarithmen gleich e, und die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}=i$ gesetzt.

wobei die Summe nach $\varkappa$ von $-\infty$ bis $+\infty$ zu nehmen ist. Differenzirt man diesen Ausdruck, so folgt:

$$n p^{n-2} p \frac{dp}{dQ} = \sum_\varkappa i\varkappa K_n^{(\varkappa)} e^{i\varkappa Q} \quad \text{oder} \quad n p^{n} \cdot p \frac{dp}{dQ} = p^2 \sum_\varkappa i\varkappa K_n^{(\varkappa)} e^{i\varkappa Q}$$

und da nach (1):

$$i p \frac{dp}{dQ} = i\alpha \sin Q = \tfrac{1}{2}\alpha(e^{iQ} - e^{-iQ})$$

ist, so wird

$$\tfrac{1}{2} n\alpha(e^{iQ} - e^{-iQ}) \sum_\varkappa K_{n-2}^{(\varkappa)} e^{i\varkappa Q} = -\sum_\varkappa \varkappa K_n^{(\varkappa)} e^{i\varkappa Q}$$

$$\tfrac{1}{2} n\alpha(e^{iQ} - e^{-iQ}) \sum_\nu K_n^{(\nu)} e^{i\nu Q} = -(1 - \alpha e^{iQ})(1 - \alpha e^{-iQ}) \sum_\nu \nu K_n^{(\nu)} e^{i\nu Q}.$$

Führt man hier die Multiplikationen aus und beachtet, dass diese Bedingungen für jeden Werth von $Q$ identisch erfüllt sein müssen, so erhält man für die Coefficienten die Bedingungen:

$$n\alpha\left(K_{n-2}^{(\varkappa-1)} - K_{n-2}^{(\varkappa+1)}\right) = -2\varkappa K_n^{(\varkappa)} \tag{5}$$

und ebenso[1])

$$n\alpha\left(K_n^{(\varkappa-1)} - K_n^{(\varkappa+1)}\right) = -(1+\alpha^2)2\varkappa K_n^{(\varkappa)} + \alpha\left[(2\varkappa+2)K_n^{(\varkappa+1)} + (2\varkappa-2)K_n^{(\varkappa-1)}\right]$$

oder

$$(1+\alpha^2)2\varkappa K_n^{(\varkappa)} = \alpha\left[(n+2\varkappa+2)K_n^{(\varkappa+1)} - (n-2\varkappa+2)K_n^{(\varkappa-1)}\right]. \tag{6}$$

Um hieraus eine Recursionsformel zu erhalten, werde $K_n^{(\varkappa+1)}$ gesucht; es folgt:

$$K_n^{(\varkappa+1)} = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\frac{2\varkappa}{n+2\varkappa+2} K_n^{(\varkappa)} + \frac{n-2\varkappa+2}{n+2\varkappa+2} K_n^{(\varkappa-1)}. \tag{7}$$

Sind daher für ein gegebenes $n$ zwei der Coëfficienten $K$ bestimmt, so kann man nach (7) die übrigen finden, und dann nach (5) die Coëfficienten für die übrigen Potenzen. Da $n = -(2s+1)$, so würde man nach (5) die Coëfficienten der negativen $(2s+1)$ Potenz aus denjenigen der $(2s+3)$, diese aus denjenigen der $(2s+5)$ u. s. w. erhalten. Je grösser $s$ ist, desto schwächer convergent sind aber die Reihen (3) und es wird sich daher empfehlen, umgekehrt die Coëfficienten $K_{n-2}^{(\varkappa)}$ aus den Coëfficienten $K_n^{(\varkappa)}$ zu ermitteln; Gleichung (5) ist daher noch umzuformen.

In Gleichung (7) tritt der Nenner $\alpha$ auf; bei mässigen Werthen von $\alpha$ (z. B. für die wechselseitigen Störungen der Erde und Venus, oder des Jupiter und Saturn), bei welchen die Berechnung der Formeln (3) am unbequemsten wird, kann hieraus keine Schwierigkeit entstehen. Bei kleinen Werthen von $\alpha$ werden diese Formeln aber unzweckmässig. Für kleine Werthe von $\alpha$ hat zuerst

---

[1]) Beispielsweise giebt die Multiplication für die beiden Werthe der ersten Gleichung:

$$\tfrac{1}{2} n\alpha \sum_\varkappa K_{n-2}^{(\varkappa)} e^{i(\varkappa+1)Q} - \tfrac{1}{2} n\alpha \sum_\varkappa K_{n-2}^{(\varkappa)} e^{i(\varkappa-1)Q}$$

und indem man $\varkappa + 1 = \varkappa'$, $\varkappa - 1 = \varkappa''$ setzt:

$$\tfrac{1}{2} n\alpha \sum_\varkappa K_{n-2}^{(\varkappa'-1)} e^{i\varkappa' Q} - \tfrac{1}{2} n\alpha \sum_\varkappa K_{n-2}^{(\varkappa''+1)} e^{i\varkappa'' Q}.$$

Schreibt man nun an Stelle der Summationsindices $\varkappa'$, $\varkappa''$ wieder $\varkappa$, und beachtet, dass beide ebenfalls alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ erhalten, so wird:

$$\tfrac{1}{2} n\alpha \sum_\varkappa \left(K_{n-2}^{(\varkappa-1)} - K_{n-2}^{(\varkappa+1)}\right) e^{i\varkappa Q} = -\sum_\varkappa \varkappa K_n^{(\varkappa)} e^{i\varkappa Q}.$$

GAUSS[1]) ein Verfahren angegeben, um diese Schwierigkeit zu beheben. Setzt man für diesen Fall:

$$K_n^{(\varkappa)} = \alpha^\varkappa k_n^{(\varkappa)} \tag{8}$$

so geht die Gleichung (7) über in:

$$\alpha^2 k_n^{(\varkappa+1)} = (1+\alpha^2)\frac{2\varkappa}{n+2\varkappa+2}k_n^{(\varkappa)} + \frac{n-2\varkappa+2}{n+2\varkappa+2}k_n^{(\varkappa-1)},$$

woraus nunmehr

$$k_n^{(\varkappa-1)} = -(1+\alpha^2)\frac{2\varkappa}{n-2\varkappa+2}k_n^{(\varkappa)} + \alpha^2\frac{n+2\varkappa+2}{n-2\varkappa+2}k_n^{(\varkappa+1)} \tag{9}$$

folgt. Rechnet man daher für zwei gewisse Werthe von $\varkappa$ die Werthe von $k_n^{(\varkappa)}$ und $k_n^{(\varkappa+1)}$, nach (9) die sämmtlichen vorhergehenden bis $k_n^{(0)}$, so erhält man dann nach (8) $K_n^{(\nu)}$. Noch bequemer wird das folgende Verfahren. Setzt man

$$\frac{k_n^{(\varkappa-1)}}{k_n^{(\varkappa)}} = -2\varkappa\frac{1+\alpha^2}{n-2\varkappa+2}\gamma_n^{(\varkappa)}, \qquad \frac{k_n^{(\varkappa)}}{k_n^{(\varkappa+1)}} = -2(\varkappa+1)\frac{1+\alpha^2}{n-2\varkappa}\gamma_n^{(\varkappa+1)}, \tag{10}$$

so wird

$$-2\varkappa\frac{1+\alpha^2}{n-2\varkappa+2}(\gamma_n^{(\varkappa)}-1)k_n^{(\varkappa)} = \alpha^2\frac{n+2\varkappa+2}{n-2\varkappa+2}k_n^{(\varkappa+1)}$$

$$+2\varkappa(2\varkappa+2)\frac{(1+\alpha^2)^2}{n-2\varkappa}(\gamma_n^{(\varkappa)}-1)\gamma_n^{(\varkappa+1)} = \alpha^2(n+2\varkappa+2),$$

demnach

$$\gamma_n^{(\varkappa)} = 1 + \frac{(n-2\varkappa)(n+2\varkappa+2)}{4\varkappa(\varkappa+1)}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\right)^2\frac{1}{\gamma_n^{(\varkappa+1)}}. \tag{11}$$

Für $\gamma_n^{(\varkappa)}$ ergiebt sich demnach der Kettenbruch

$$\gamma_n^{(\varkappa)} = 1 + \cfrac{\frac{(n+2\varkappa+2)(n-2\varkappa)}{4\varkappa(\varkappa+1)}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\right)^2}{1+\cfrac{\frac{(n+2\varkappa+4)(n-2\varkappa-2)}{4(\varkappa+1)(\varkappa+2)}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\right)^2}{1+\cfrac{\frac{(n+2\varkappa+6)(n-2\varkappa-4)}{4(\varkappa+2)(\varkappa+3)}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\right)^2}{1+\ldots}}}.$$

Da übrigens

$$K_n^{(\varkappa)} = (-1)^\varkappa \alpha^\varkappa \frac{n(n-2)\ldots(n-2\varkappa+2)}{2\cdot 4\ldots 2\varkappa}F\left(-\frac{n}{2},\ -\frac{n}{2}+\varkappa,\ \varkappa+1,\ \alpha^2\right)$$

ist, wenn $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ die hypergeometrische Reihe ist, so wird

$$\frac{1}{\gamma_n^{(\varkappa)}} = (1+\alpha^2)\frac{F(-\frac{1}{2}n,\ -\frac{1}{2}n+\varkappa,\ \varkappa+1,\ \alpha^2)}{F(-\frac{1}{2}n,\ -\frac{1}{2}n+\varkappa-1,\ \varkappa,\ \alpha^2)},$$

woraus der Kettenbruch folgt (GAUSS, Ges. Werke, III. Band, pag. 134):

$$\frac{1}{\gamma_n^{(\varkappa)}} = \cfrac{1+\alpha^2}{1-\cfrac{\beta_{1,n}^{(\varkappa)}\alpha^2}{1-\cfrac{\beta_{2,n}^{(\varkappa)}\alpha^2}{1-\cfrac{\beta_{3,n}^{(\varkappa)}\alpha^2}{1-\ldots}}}} \tag{12a}$$

$$\beta_{1,n}^{(\varkappa)} = -\frac{n(n+2)}{4\varkappa(\varkappa+1)} \qquad \beta_{2,n}^{(\varkappa)} = -\frac{(n-2\varkappa)(n+2\varkappa+2)}{4(\varkappa+1)(\varkappa+2)}$$

$$\beta_{3,n}^{(\varkappa)} = -\frac{(n-2)(n+4)}{4(\varkappa+2)(\varkappa+3)} \qquad \beta_{4,n}^{(\varkappa)} = -\frac{(n-2\varkappa-2)(n+2\varkappa+4)}{4(\varkappa+3)(\varkappa+4)} \tag{12b}$$

$$\beta_{5,n}^{(\varkappa)} = -\frac{(n-4)(n+6)}{4(\varkappa+4)(\varkappa+5)} \qquad \beta_{6,n}^{(\varkappa)} = -\frac{(n-2\varkappa-4)(n+2\varkappa+6)}{4(\varkappa+5)(\varkappa+6)}.$$

---

[1]) Für $n = -1$; Brief an BESSEL vom 3. September 1805. Vergl. auch HANSEN l. c. und LESSER, Störungen der Metis.

Hat man $\gamma_n^{(\nu)}$ nach (12) berechnet, so erhält man $\gamma_n^{(\varkappa-1)}$, $\gamma_n^{(\varkappa-2)}$ nach (11); da nun

$$\frac{K_n^{(\nu)}}{K_n^{(\varkappa-1)}} = \alpha \frac{k_n^{(\varkappa)}}{k_n^{(\varkappa-1)}} = -\frac{n-2\varkappa+2}{2\varkappa}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\right)\frac{1}{\gamma_n^{(\varkappa)}}$$

$$K_n^{(\varkappa)} = -\frac{n-2\varkappa+2}{2\varkappa}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\right)\frac{1}{\gamma_n^{(\varkappa)}}K_n^{(\varkappa-1)} \tag{13}$$

ist, so erhält man die sämmtlichen $K_n^{(\nu)}$ sobald einer der Coëfficienten bekannt ist. Formel (13) hat dabei den Vortheil, dass man $K_n^{(1)}$, $K_n^{(2)}$ . . . aus $K_n^{(0)}$ erhält.

Mit Rücksicht auf (5) genügt es die Coëfficienten für ein einziges $n$ zu ermitteln; man könnte $s = 1$ wählen; die Reihen werden aber convergenter für $s = 0$; allein noch zweckmässiger wird es $s = -1$ zu wählen, d. h. $p$ zu entwickeln; lässt man für diesen Fall die Indices weg, d. h. bezeichnen die Grössen $\gamma^{(\varkappa)}$, $\beta_\lambda^{(\nu)}$, $P^{(\varkappa)}$ die Werthe $\gamma_{+1}^{\varkappa}$, $\beta_{\lambda,+1}^{(\varkappa)}$ $P_{-1}^{(\varkappa)}$ ($n = +1$, $s = -1$), so wird:

$$\frac{1}{\gamma^{(\varkappa)}} = \cfrac{1+\alpha^2}{1-\cfrac{\beta_1^{(\nu)}\alpha^2}{1-\cfrac{\beta_2^{(\varkappa)}\alpha^2}{1-\cdots}}}$$

$$\beta_1^{(\varkappa)} = -\tfrac{1}{4}\frac{1\cdot 3}{\varkappa(\varkappa+1)} \qquad \beta_2^{(\nu)} = +\tfrac{1}{4}\frac{(2\varkappa-1)(2\varkappa+3)}{(\varkappa+1)(\varkappa+2)}$$

$$\beta_3^{(\varkappa)} = +\tfrac{1}{4}\frac{1\cdot 5}{(\varkappa+2)(\varkappa+3)} \qquad \beta_4^{(\varkappa)} = +\tfrac{1}{4}\frac{(2\varkappa+1)(2\varkappa+5)}{(\varkappa+3)(\varkappa+4)}$$

$$\beta_5^{(\varkappa)} = +\tfrac{1}{4}\frac{3\cdot 7}{(\varkappa+4)(\varkappa+5)} \qquad \beta_6^{(\varkappa)} = +\tfrac{1}{4}\frac{(2\varkappa+3)(2\varkappa+7)}{(\varkappa+5)(\varkappa+6)}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\gamma^{(\varkappa-1)} = 1 - \frac{(2\varkappa+1)(2\varkappa-3)}{4\varkappa(\varkappa-1)}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\right)^2\frac{1}{\gamma^{(\varkappa)}} \tag{I}$$

$$P^{(0)} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\alpha^2 + \left(\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\right)^2\alpha^4 + \left(\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\alpha^6 + \left(\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\right)^2\alpha^8 + \ldots$$

$$P^{(\varkappa)} = \frac{2\varkappa-3}{2\varkappa}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\right)\frac{1}{\gamma^{(\varkappa)}}P^{(\varkappa-1)},$$

und man erhält die sämmtlichen $P$ für $s = -1$ mit gleicher Sicherheit auch für sehr kleine Werthe von $\alpha$; es ist zu bemerken, dass diese Formeln auch für grosse Werthe von $\alpha$ (immer $\alpha < 1$) mit Leichtigkeit verwendet werden können, wenn nur für die Bestimmung von $\gamma^{(\varkappa)}$ der Werth von $\varkappa$ genügend gross gewählt wird.

Schreibt man in (5) $n+2$ für $n$ und setzt $K_n^{(\varkappa+1)}$ aus (7) ein, so folgt:

$$-2\varkappa K_{n+2}^{(\varkappa)} = (n+2)\alpha\left[K_n^{(\varkappa-1)} - \left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\frac{2\varkappa}{n+2\varkappa+2}K_n^{(\varkappa)} - \frac{n-2\varkappa+2}{n+2\varkappa+2}K_n^{(\varkappa-1)}\right]$$

$$\frac{n+2\varkappa+2}{n+2}K_{n+2}^{(\nu)} = (\alpha^2+1)K_n^{(\varkappa)} - 2\alpha K_n^{(\varkappa-1)}. \tag{14a}$$

Sucht man aus (7) $K_n^{(\varkappa-1)}$ und substituirt in (14a) (nachdem hier wieder $n+2$ für $n$ geschrieben wird), so wird nach einer leichten Reduction

$$\frac{n-2\varkappa+2}{n+2}K_{n+2}^{(\varkappa)} = (\alpha^2+1)K_n^{(\varkappa)} - 2\alpha K_n^{(\varkappa+1)}$$

oder indem man $\varkappa-1$ für $\varkappa$ setzt:

$$\frac{n-2\varkappa+4}{n+2}K_{n+2}^{(\varkappa-1)} = (\alpha^2+1)K_n^{(\varkappa-1)} - 2\alpha K_n^{(\varkappa)}. \tag{14b}$$

Aus den Gleichungen (14a), (14b) kann man nun $K_n^{(\varkappa)}$, $K_n^{(\varkappa-1)}$ bestimmen; man erhält ohne Mühe

$$\left.\begin{aligned}(1-\alpha^2)^2 K_n^{(\varkappa)} &= \frac{n+2\varkappa+2}{n+2}(1+\alpha^2)K_{n+2}^{(\varkappa)} + \frac{n-2\varkappa+4}{n+2}\cdot 2\alpha K_{n+2}^{(\varkappa-1)} \\ (1-\alpha^2)^2 K_n^{(\varkappa-1)} &= \frac{n+2\varkappa+2}{n+2}\, 2\alpha K_{n+2}^{(\varkappa)} + \frac{n-2\varkappa+4}{n+2}(1+\alpha^2)K_{n+2}^{(\varkappa-1)}\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

und hieraus

$$\left.\begin{aligned}(1-\alpha)^2 (K_n^{(\varkappa)} + K_n^{(\varkappa-1)}) &= \frac{n+2\varkappa+2}{n+2} K_{n+2}^{(\varkappa)} + \frac{n-2\varkappa+4}{n+2} K_{n+2}^{(\varkappa-1)} \\ (1+\alpha)^2 (K_n^{(\varkappa)} - K_n^{(\varkappa-1)}) &= \frac{n+2\varkappa+2}{n+2} K_{n+2}^{(\varkappa)} - \frac{n-2\varkappa+4}{n+2} K_{n+2}^{(\varkappa-1)}.\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Geht man auf die $P_s$ über, so wird

$$n = -2s-1, \qquad n+2 = -2s+1, \qquad K_n^{(\varkappa)} = P_s^{(\varkappa)}, \qquad K_{n+2}^{(\varkappa)} = P_{s-1}^{(\varkappa)}$$

zu setzen sein, und es wird

$$(1+\alpha^2)\, 2\varkappa P_s^{(\varkappa)} = \alpha\left[(2s+2\varkappa-1)P_s^{(\varkappa-1)} - (2s-2\varkappa-1)P_s^{(\varkappa+1)}\right] \quad \text{(II)}$$

$$\left.\begin{aligned}P_s^{(\varkappa)} &= \frac{1}{2s-1}\left[(2\varkappa+2s-3)\frac{2\alpha}{(1-\alpha^2)^2}P_{s-1}^{(\varkappa-1)} - (2\varkappa-2s+1)\frac{1+\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2}P_{s-1}^{(\varkappa)}\right] \\ P_s^{(\varkappa)} &= \frac{1}{2s-1}\left[(2\varkappa+2s-1)\frac{1+\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2}P_{s-1}^{(\varkappa)} - (2\varkappa-2s+3)\frac{2\alpha}{(1-\alpha^2)^2}P_{s-1}^{(\varkappa+1)}\right]\end{aligned}\right\} \quad \text{(II a)}$$

$$\left.\begin{aligned}P_s^{(\varkappa-1)} + P_s^{(\varkappa)} &= \frac{1}{(2s-1)(1-\alpha)^2}\left[(2\varkappa+2s-3)P_{s-1}^{(\varkappa-1)} - (2\varkappa-2s+1)P_{s-1}^{(\varkappa)}\right] \\ P_s^{(\varkappa-1)} - P_s^{(\varkappa)} &= \frac{1}{(2s-1)(1+\alpha)^2}\left[(2\varkappa+2s-3)P_{s-1}^{(\varkappa-1)} + (2\varkappa-2s+1)P_{s-1}^{(\varkappa)}\right].\end{aligned}\right\} \quad \text{(II b)}$$

Hieraus folgt für $s=0$:

$$\left.\begin{aligned}P_0^{(\varkappa-1)} + P_0^{(\varkappa)} &= -\frac{1}{(1-\alpha)^2}\left[(2\varkappa-3)P^{(\varkappa-1)} - (2\varkappa+1)P^{(\varkappa)}\right] \\ P_0^{(\varkappa-1)} - P_0^{(\varkappa)} &= -\frac{1}{(1+\alpha)^2}\left[(2\varkappa-3)P^{(\varkappa-1)} + (2\varkappa+1)P^{(\varkappa)}\right],\end{aligned}\right\} \quad \text{(III a)}$$

und für $s=1$:

$$\left.\begin{aligned}P_1^{(\varkappa-1)} + P_1^{(\varkappa)} &= \frac{2\varkappa-1}{(1-\alpha)^2}(P_0^{(\varkappa-1)} - P_0^{(\varkappa)}) = -\frac{2\varkappa-1}{(1-\alpha^2)^2}\left[(2\varkappa-3)P^{(\varkappa-1)} + (2\varkappa+1)P^{(\varkappa)}\right] \\ P_1^{(\varkappa-1)} - P_1^{(\varkappa)} &= \frac{2\varkappa-1}{(1+\alpha)^2}(P_0^{(\varkappa-1)} + P_0^{(\varkappa)}) = -\frac{2\varkappa-1}{(1-\alpha^2)^2}\left[(2\varkappa-3)P^{(\varkappa-1)} - (2\varkappa+1)P^{(\varkappa)}\right],\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

folglich

$$P_1^{(\varkappa)} = -\frac{(2\varkappa-1)(2\varkappa+1)}{(1-\alpha^2)^2}P^{(\varkappa)}. \quad \text{(III b)}$$

Nachdem die Werthe $P^{(\varkappa)}$ nach I berechnet sind, erhält man aus (III a) und (III b) die Werthe für $s=0$ und 1 (die negative erste und dritte Potenz), und aus (II a, II b) die übrigen Coëfficienten. Für grosse Werthe von $\alpha$ werden hier die Coefficienten wegen des Nenners $(1-\alpha^2)^2$ bedeutend vergrössert; dieses ist aber in der Natur der Sache gelegen, da, wie die Reihen (8) zeigen, die $P_s^{(\varkappa)}$ für grosse Werthe von $\alpha$ rasch zunehmen, und ihrer geringeren Convergenz wegen ebenfalls mit Vortheil durch die Formeln II ersetzt werden. Aus (14 a), (14 b) erhält man noch die im folgenden benutzten Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{2s+2\varkappa-3}{2s-1}P_{s-1}^{(\varkappa-1)} &= (1+\alpha^2)P_s^{(\varkappa-1)} - 2\alpha P_s^{(\varkappa)} \\ \frac{2s-2\varkappa-1}{2s-1}P_{s-1}^{(\varkappa)} &= (1+\alpha^2)P_s^{(\varkappa)} - 2\alpha P_s^{(\varkappa-1)} \\ (1+\alpha^2)P_0^{(\varkappa-1)} - 2\alpha P_0^{(\varkappa)} &= -(2\varkappa-3)P^{(\varkappa-1)} \\ (1+\alpha^2)P_0^{(\varkappa)} - 2\alpha P_0^{(\varkappa-1)} &= +(2\varkappa+1)P^{(\varkappa)}\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

und

$$P_0^{(\varkappa-1)} = -(2\varkappa-3)\frac{1+\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2}P^{(\varkappa-1)} + (2\varkappa+1)\frac{2\alpha}{(1-\alpha^2)^2}P^{(\varkappa)}$$

$$P_0^{(\varkappa)} = -(2\varkappa-3)\frac{2\alpha}{(1-\alpha^2)^2}P^{(\varkappa-1)} + (2\varkappa+1)\frac{1+\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2}P^{(\varkappa)} \qquad (19)$$

$$P_0^{(0)} = \frac{1+\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2}P^{(0)} + \frac{2\alpha}{(1-\alpha^2)^2}3P^{(1)}$$

$$P_0^{(1)} = \frac{2\alpha}{(1-\alpha^2)^2}P^{(0)} + \frac{1+\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2}3P^{(1)}.$$

**86. Differentialquotienten der $K$ und $P$.** Differenzirt man die Reihe 85. 4 nach $\alpha$, so folgt:

$$n p^{n-2} p\frac{dp}{d\alpha} = \sum_{\varkappa}\frac{\partial K_n^{(\varkappa)}}{\partial\alpha}e^{i\varkappa Q},$$

und da

$$p\frac{dp}{d\alpha} = -\cos Q + \alpha = -\tfrac{1}{2}(e^{iQ}+e^{-iQ}) + \alpha$$

ist, so wird

$$-\tfrac{1}{2}n\,[e^{iQ}+e^{-iQ}-2\alpha]\sum_{\varkappa}K_{n-2}^{(\varkappa)}e^{i\varkappa Q} = \sum_{\varkappa}\frac{\partial K_n^{(\varkappa)}}{\partial\alpha}e^{i\varkappa Q},$$

demnach

$$\frac{\partial K_n^{(\varkappa)}}{\partial\alpha} = n\left[\alpha K_{n-2}^{(\varkappa)} - \tfrac{1}{2}K_{n-2}^{(\varkappa-1)} - \tfrac{1}{2}K_{n-2}^{(\varkappa+1)}\right]$$

$$\frac{\partial P_s^{(\varkappa)}}{\partial\alpha} = \frac{2s+1}{2}\left(P_{s+1}^{(\varkappa-1)} + P_{s+1}^{(\varkappa+1)} - 2\alpha P_{s+1}^{(\varkappa)}\right). \qquad (1)$$

Es erscheint manchmal praktisch, auch hier an Stelle der $P_{s+1}$ die $P_s$ selbst einzuführen, da sonst bei den höheren Differentialquotienten $\frac{\partial^\lambda P_s^{(\varkappa)}}{\partial\alpha^\lambda}$ die Werthe von $P$ bis zu $P_{s+\lambda}$ nothwendig wären, deren Bestimmung überflüssig ist. Mit Rücksicht auf 85. (15) wird aber:

$$(1-\alpha^2)^2(K_{n-2}^{(\varkappa-1)}+K_{n-2}^{(\varkappa+1)}) = \frac{n+2\varkappa}{n}\cdot 2\alpha K_n^{(\varkappa)} + \frac{n-2\varkappa+2}{n}(1+\alpha^2)K_n^{(\varkappa-1)} +$$
$$+\frac{n+2\varkappa+2}{n}(1+\alpha^2)K_n^{(\varkappa+1)} + \frac{n-2\varkappa}{n}2\alpha K_n^{(\varkappa)},$$

folglich

$$-\tfrac{1}{2}n(1-\alpha^2)^2(K_{n-2}^{(\varkappa-1)}+K_{n-2}^{(\varkappa+1)}) = -\tfrac{1}{2}(1+\alpha^2)\left[(n-2\varkappa+2)K_n^{(\varkappa-1)} +\right.$$
$$\left.+(n+2\varkappa+2)K_n^{(\varkappa+1)}\right] - 2\alpha n K_n^{(\varkappa)}.$$

Da sich die zweite Gleichung (15) auch schreiben lässt:

$$(1-\alpha^2)^2K_n^{(\varkappa)} = \frac{n+2\varkappa+4}{n+2}\cdot 2\alpha K_{n+2}^{(\varkappa+1)} + \frac{n-2\varkappa+2}{n+2}(1+\alpha^2)K_{n+2}^{(\varkappa)},$$

so wird, indem man aus dieser Gleichung, und der ersten 85. (15) das arithmetische Mittel nimmt:

$$n\alpha(1-\alpha^2)^2K_{n-2}^{(\varkappa)} = \alpha^2(n+2\varkappa+2)K_n^{(\varkappa+1)} + \alpha^2(n-2\varkappa+2)K_n^{(\varkappa-1)} + n\alpha(1+\alpha^2)K_n^{(\varkappa)},$$

demnach

$$n(1-\alpha^2)^2\left[\alpha K_{n-2}^{(\varkappa)} - \tfrac{1}{2}K_{n-2}^{(\varkappa-1)} - \tfrac{1}{2}K_{n-2}^{(\varkappa+1)}\right] = -\tfrac{1}{2}(1-\alpha^2)\left[(n-2\varkappa+2)K_n^{(\varkappa-1)} +\right.$$
$$\left.(n+2\varkappa+2)K_n^{(\varkappa+1)}\right] - n\alpha(1-\alpha^2)K_n^{(\varkappa)},$$

folglich

$$\frac{\partial K_n^{(\varkappa)}}{\partial\alpha} = -\frac{1}{1-\alpha^2}\left[\frac{n-2\varkappa+2}{2}K_n^{(\varkappa-1)} + \frac{n+2\varkappa+2}{2}K_n^{(\varkappa+1)} + n\alpha K_n^{(\varkappa)}\right].$$

Diese Gleichung kann man in zwei verschiedenen Formen schreiben, jenachdem man $K_n^{(\varkappa)}$ und $K_n^{(\varkappa+1)}$ oder $K_n^{(\varkappa)}$ und $K_n^{(\varkappa-1)}$ einführen will; es wird dann

$$\alpha(1-\alpha^2)\frac{\partial K_n^{(\varkappa)}}{\partial\alpha} = -(n+2\varkappa+2)\alpha K_n^{(\varkappa+1)} + [\varkappa+(\varkappa-n)\alpha^2]K_n^{(\varkappa)} =$$
$$= -(n-2\varkappa+2)\alpha K_n^{(\varkappa-1)} - [\varkappa+(\varkappa+n)\alpha^2]K_n^{(\varkappa)},$$

folglich wird:

$$(1-\alpha^2)\frac{\partial P_s^{(\varkappa)}}{\partial\alpha} = (s+\varkappa-\tfrac{1}{2})P_s^{(\varkappa-1)} + (s-\varkappa-\tfrac{1}{2})P_s^{(\varkappa+1)} + (2s+1)\alpha P_s^{(\varkappa)} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha(1-\alpha^2)\frac{\partial P_s^{(\varkappa)}}{\partial\alpha} &= (2s-2\varkappa-1)\alpha P_s^{(\varkappa+1)} + [\varkappa+(2s+\varkappa+1)\alpha^2]P_s^{(\varkappa)}\\ \alpha(1-\alpha^2)\frac{\partial P_s^{(\varkappa)}}{\partial\alpha} &= (2s+2\varkappa-1)\alpha P_s^{(\varkappa-1)} - [\varkappa-(2s-\varkappa+1)\alpha^2]P_s^{(\varkappa)}.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Aus Formel (1) erhält man durch nochmalige Differentiation:

$$\frac{\partial^2 P_s^{(\varkappa)}}{\partial\alpha^2} = \frac{2s+1}{2}\left[\frac{\partial P_{s+1}^{(\varkappa-1)}}{\partial\alpha} + \frac{\partial P_{s+1}^{(\varkappa+1)}}{\partial\alpha} - 2\alpha\frac{\partial P_{s+1}^{(\varkappa)}}{\partial\alpha} - 2P_{s+1}^{(\varkappa)}\right].$$

Setzt man hier für die Differentialquotienten rechts die aus (1) durch Vertauschung von $s$ mit $s+1$ und von $\varkappa$ mit $\varkappa$, $\varkappa-1$, $\varkappa+1$ folgenden Werthe ein, so erhält man:

$$\frac{\partial^2 P_s^{(\varkappa)}}{\partial\alpha^2} = \frac{2s+1}{2}\left[\frac{2s+3}{2}\left\{P_{s+2}^{(\varkappa-2)} - 4\alpha P_{s+2}^{(\varkappa-1)} + 2(1+2\alpha^2)P_{s+2}^{(\varkappa)} - 4\alpha P_{s+2}^{(\varkappa+1)} + P_{s+2}^{(\varkappa+2)}\right\}\right.$$
$$\left. - 2P_{s+1}^{(\varkappa)}\right].$$

Wendet man hierauf die Formeln (IIa) an, indem man auf den ersten Theil

$$P_{s+2}^{(\varkappa-2)} - 4\alpha P_{s+2}^{(\varkappa-1)} + (1+2\alpha^2)P_{s+2}^{(\varkappa)}$$

die zweite Gleichung und auf den zweiten Theil

$$(1+2\alpha^2)P_{s+2}^{(\varkappa)} - 4\alpha P_{s+2}^{(\varkappa+1)} + P_{s+2}^{(\varkappa+2)}$$

die erste Gleichung anwendet, so erhält man nach entsprechender Reduction:

$$\frac{\partial^2 P_s^{(\varkappa)}}{\partial\alpha^2} = \frac{2s+1}{4(1-\alpha^2)^2}\left\{(2s+2\varkappa-1)(1+\alpha^2)P_{s+1}^{(\varkappa-2)} - (2\varkappa-2)4\alpha P_{s+1}^{(\varkappa-1)} +\right.$$
$$+ (2s-2\varkappa-1)(1+\alpha^2)P_{s+1}^{(\varkappa+2)} + (2\varkappa+2)4\alpha P_{s+1}^{(\varkappa+1)} +$$
$$\left. + \left[2(2s+3)[(1+\alpha^2)-3\alpha^2+2\alpha^2(1+\alpha^2)] - 4(1-\alpha^2)^2\right]P_{s+1}^{(\varkappa)}\right\}$$

und wenn man die Ausdrücke $P_{s+1}^{(\varkappa+2)}$ und $P_{s+1}^{(\varkappa-2)}$ durch $P_{s+1}^{(\varkappa+1)}$, $P_{s+1}^{(\varkappa)}$, $P_{s+1}^{(\varkappa-1)}$ ausdrückt und wieder reducirt den eleganten Ausdruck

$$\frac{\partial^2 P_s^{(\varkappa)}}{\partial\alpha^2} = \frac{2s+1}{2\alpha}\left\{(\varkappa-1)P_{s+1}^{(\varkappa-1)} + 4(s+1)\alpha P_{s+1}^{(\varkappa)} - (\varkappa+1)P_{s+1}^{(\varkappa+1)}\right\}. \qquad (4)$$

Dieser Ausdruck giebt, wenn man noch in derselben Weise die $P_s$ einführt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 P_s^{(\varkappa)}}{\partial\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha(1-\alpha^2)^2}&\left\{(2\varkappa+2s-1)[(\varkappa-1)+(\varkappa+4s+3)\alpha^2]P_s^{(\varkappa-1)} +\right.\\ &+ (2\varkappa-2s+1)[(\varkappa+1)+(\varkappa-4s-3)\alpha^2]P_s^{(\varkappa+1)} +\\ &\left.+ 4\alpha[s(2s+1)-2\varkappa^2+(s+1)(2s+1)\alpha^2]P_s^{(\varkappa)}\right\},\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

welche Gleichung auch durch Differentiation von (2) erhalten wird.

Um endlich die Coëfficienten $B_s^{(\varkappa)}$ in 35 (11) und ihre Differentialquotienten zu erhalten, hat man zu beachten, dass

$$\frac{1}{E^{2s+1}} = \frac{1}{a'^{2s+1}}\,\frac{1}{\rho^{2s+1}}; \quad \alpha = \frac{a}{a'} \quad \text{daher} \quad B_s^{(\varkappa)} = \frac{1}{a'^{2s+1}}\,P_s^{(\varkappa)}\left(\frac{a}{a'}\right) \tag{6}$$

oder

$$\frac{1}{E^{2s+1}} = \frac{1}{a^{2s+1}}\,\frac{1}{\rho^{2s+1}}; \quad \alpha = \frac{a'}{a} \quad \text{daher} \quad B_s^{(\varkappa)} = \frac{1}{a^{2s+1}}\,P_s^{(\varkappa)}\left(\frac{a'}{a}\right) \tag{7}$$

ist, wo der Deutlichkeit halber, das Argument bei $P_s^{(\varkappa)}$ beigefügt ist. Für die Differentialquotienten hat man:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \text{für}\ \alpha = \frac{a}{a'}: \quad \frac{\partial B_s^{(\varkappa)}}{\partial a} = +\frac{1}{a'^{2s+2}}\,\frac{dP_s^{(\varkappa)}}{d\alpha} \\ &\qquad\qquad\qquad \frac{\partial B_s^{(\varkappa)}}{\partial a'} = -\frac{1}{a'^{2s+2}}\left[(2s+1)P_s^{(\varkappa)} + \frac{a}{a'}\,\frac{dP_s^{(\varkappa)}}{d\alpha}\right] \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} &2)\ \text{für}\ \alpha = \frac{a'}{a}: \quad \frac{\partial B_s^{(\varkappa)}}{\partial a} = -\frac{1}{a^{2s+2}}\left[(2s+1)P_s^{(\varkappa)} + \frac{a'}{a}\,\frac{dP_s^{(\varkappa)}}{d\alpha}\right] \\ &\qquad\qquad\qquad \frac{\partial B_s^{(\varkappa)}}{\partial a'} = +\frac{1}{a^{2s+2}}\,\frac{dP_s^{(\varkappa)}}{d\alpha}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

womit alle für die Entwickelung von $\rho^{-(2s+1)}$ in 35 (12) nöthigen Grössen berechnet werden können.

Die zur Rechnung zu verwendenden Constanten sind:

| | |
|---|---|
| $\log\left(\frac{1}{2}\right)^2$ | = 9·3979400 |
| $\log\left(\frac{1\cdot1}{2\cdot4}\right)^2$ | = 8·1938200 |
| $\log\left(\frac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\right)^2$ | = 7·5917600 |
| $\log\left(\frac{1\cdots5}{2\cdots8}\right)^2$ | = 7·1835200 |
| $\log\left(\frac{1\cdots7}{2\cdots10}\right)^2$ | = 6·8737161 |
| $\log\left(\frac{1\cdots9}{2\cdots12}\right)^2$ | = 6·6238386 |
| $\log\left(\frac{1\cdots11}{2\cdots14}\right)^2$ | = 6·4143680 |
| $\log\left(\frac{1\cdots13}{2\cdots16}\right)^2$ | = 6·2340148 |
| $\log\left(\frac{1\cdots15}{2\cdots18}\right)^2$ | = 6·0756522 |
| $\log\left(\frac{1\cdots17}{2\cdots20}\right)^2$ | = 5·9344900 |

| | $\log\frac{(2\varkappa+1)(2\varkappa-3)}{4\varkappa(\varkappa-1)}$ | $\log\frac{2\varkappa-3}{2\varkappa}$ |
|---|---|---|
| $\varkappa = 1$ | — | $9_n6989700$ |
| 2 | 9·7958800 | 9·3979400 |
| 3 | 9·9420081 | 9·6989700 |
| 4 | 9·9719713 | 9·7958800 |
| 5 | 9·9834007 | 9·8450980 |
| 6 | 9·9890046 | 9·8750613 |
| 7 | 9·9921747 | 9·8952647 |
| 8 | 9·9941448 | 9·9098234 |
| 9 | 9·9954524 | 9·9208187 |
| 10 | 9·9963657 | 9·9294189 |

| | |
|---|---|
| $\log\beta_1^{(10)} = 7_n8836686$ | $\log\beta_6^{(10)} = 9·8178475$ |
| $\log\beta_2^{(10)} = 7·9087854$ | $\log\beta_7^{(10)} = 9·8580279$ |
| $\log\beta_3^{(10)} = 8·3979400$ | $\log\beta_8^{(10)} = 9·8108204$ |
| $\log\beta_4^{(10)} = 8·6165836$ | $\log\beta_9^{(10)} = 9·7725566$ |
| $\log\beta_5^{(10)} = 8·7504046$ | $\log\beta_{10}^{(10)} = 9·7408819.$ |

**37. Entwickelung der Störungsfunction für Planetenbewegungen.** Sieht man zunächst von den Excentricitäten und Bahnneigungen ab, und betrachtet nur Störungen erster Ordnung, so wird sich die Entwickelung 34 (10) auf das erste Glied reduciren, die Entwickelung 34 (12) wird daher nur für $s = 0$ nöthig und in dieser wird nur die erste Summe zu betrachten sein. Es wird daher

$$\frac{1}{r_{01}} = B_0^{(0)} + 2B_0^{(1)}\cos Q + 2B_0^{(2)}\cos 2Q + \ldots + \text{Glieder von der Ordnung der Excentricitäten, Neigungen und Störungen.}$$

Ist $\alpha$ klein, so zeigen die Formeln 35 (3), dass dem Wesen nach $P_0^{(0)} = 1$, $P_0^{(1)} = \frac{1}{2}\alpha$, $B_0^{(0)} = \frac{1}{a'}$ und da auch $\frac{1}{r'} = \frac{1}{a'} +$ Glieder von der Ordnung der Excentricität, so werden die Hauptglieder in $\Omega$ wegfallen; für sehr kleine Werthe von $\alpha$ (Störungen der Satelliten durch die Sonne) wird es daher angezeigt, $\Omega$ in anderer Weise zu entwickeln.

Beschränkt man sich auf die zweiten Potenzen der Neigungen und Excentricitäten, so wird, weil $\zeta$ von der zweiten Ordnung ist:

$$\frac{1}{r_{01}} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{2}\frac{\zeta}{\rho^3} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho} = {} & \sum_\kappa B_0^{(\kappa)} \cos\kappa Q + a\sigma \sum_\kappa \frac{\partial B_0^{(\kappa)}}{\partial a} \cos\kappa Q + a'\sigma' \sum_\kappa \frac{\partial B_0^{(\kappa)}}{\partial a'} \cos\kappa Q - (\nu - \nu') \sum_\kappa \kappa B_0^{(\kappa)} \sin\kappa Q \\ & + \frac{1}{2} a^2\sigma^2 \sum_\kappa \frac{\partial^2 B_0^{(\kappa)}}{\partial a^2} \cos\kappa Q + a\sigma \cdot a'\sigma' \sum_\kappa \frac{\partial^2 B_0^{(\kappa)}}{\partial a \partial a'} \cos\kappa Q + \frac{1}{2} a'^2\sigma'^2 \sum_\kappa \frac{\partial^2 B_0^{(\kappa)}}{\partial a'^2} \cos\kappa Q \\ & - a\sigma(\nu - \nu') \sum_\kappa \kappa \frac{\partial B_0^{(\kappa)}}{\partial a} \sin\kappa Q - a'\sigma'(\nu - \nu') \sum_\kappa \frac{\partial B_0^{(\kappa)}}{\partial a'} \sin\kappa Q - \frac{1}{2}(\nu - \nu')^2 \sum_\kappa \kappa^2 B_0^{(\kappa)} \cos\kappa Q\end{aligned} \tag{2}$$

$$\frac{1}{\rho^3} = \sum_\kappa B_1^{(\kappa)} \cos\kappa Q \qquad Q = M - M' + \pi_0 - \pi_0'. \tag{3}$$

Hierzu ist noch zu bemerken, dass für $a\sigma$, $a'\sigma'$, $\nu - \nu'$ in der ersten Zeile von (2) die zweiten Potenzen der Excentricitäten, in der zweiten und dritten Zeile nur die ersten Potenzen beizubehalten sind; in (3) genügt es wegen des Faktors $\zeta$ die von der Excentricitat freien Glieder mitzunehmen[1]). Mit Berücksichtigung von 33 (4) wird:

$$\Omega = \Sigma k^2 m' \left[\frac{1}{r_{01}} - \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{r}' \cos(v + \pi_0 - v' - \pi_0') - \zeta_0}{r'^3}\right]$$

und da

$$\frac{\mathfrak{r}'}{r'^3} = \left(\frac{\mathfrak{r}'}{r'}\right)^3 \frac{1}{\mathfrak{r}'^2} = \frac{1}{\mathfrak{r}'^2}\left[1 + \frac{s'^2}{\mathfrak{r}'^2}\right]^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\mathfrak{r}'^2}\left[1 - \frac{3}{2}\frac{s'^2}{\mathfrak{r}'^2} + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4}\frac{s'^4}{\mathfrak{r}'^4} \cdot \cdot \cdot \cdot\right]$$

ist, so wird

$$\begin{aligned}\Omega' &= \Sigma k^2 m' \left[\frac{1}{\rho} - \frac{\mathfrak{r} \cos(v + \pi_0 - v' - \pi_0')}{\mathfrak{r}'^2}\right] \\ \Omega'' &= \Sigma k^2 m' \left[-\frac{1}{2}\frac{\zeta}{\rho^3} + \frac{3}{8}\frac{\zeta^2}{\rho^5} \ldots + \frac{\zeta_0}{r'^3} + \frac{3}{2}\frac{s'^2\, \mathfrak{r} \cos(v + \pi_0 - v' - \pi_0')}{\mathfrak{r}'^4}\left(1 - \frac{5}{4}\frac{s'^2}{\mathfrak{r}'^2} + \ldots\right)\right] \\ \Omega &= \Omega' + \Omega''.\end{aligned} \tag{4}$$

Der erste Theil von $\Omega$ ist hierbei von $s$ unabhängig; es ist also

$$\frac{\partial \Omega}{\partial s} = \frac{\partial \Omega''}{\partial s}.$$

Von den Ausdrücken, welche hier auftreten, lassen sich alle mittels der Beziehungen

$$\begin{aligned}\sin \lambda E &= \frac{1}{2}\sum_{\iota = -\infty}^{+\infty} S_\iota^{(\lambda)} \sin \iota M \\ \cos \lambda E &= \frac{1}{2}\sum_{\iota = -\infty}^{+\infty} C_\iota^{(\lambda)} \cos \iota M\end{aligned} \tag{5}$$

auf

---

[1]) Man sieht leicht, wie bei Berücksichtigung der höheren Potenzen der Excentricität und Neigungen die Formeln an Umfang zunehmen.

$$\begin{aligned} r^{m+n} \cos mv &= a^{m+n} \cos^{2(m+n)} \tfrac{1}{2}\varphi \Big\{ N^{(0)}_{n,m} + \tfrac{1}{2} \sum_{\iota=-\infty}^{+\infty} \Big[ \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} (N^{(\lambda)}_{n,m} + N^{(-\lambda)}_{n,m})\, C_\iota^{(\lambda)} \Big] \cos \iota M \Big\} \\ r^{m+n} \sin mv &= \tfrac{1}{2} a^{m+n} \cos^{2(m+n)} \tfrac{1}{2}\varphi \sum_{\iota=-\infty}^{+\infty} \Big[ \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} (N^{(\lambda)}_{n,m} - N^{(-\lambda)}_{n,m})\, S_\iota^{(\lambda)} \Big] \sin \iota M \end{aligned} \tag{6}$$

[vergl. 15 (1) und (18)] zurückführen. Für die zunächst nöthigen Faktoren

$$r, \quad \cos(v+H), \quad \sin(v+H), \quad r\cos(v+H), \quad r\sin(v+H), \quad \frac{\cos(v+H)}{r^2}, \quad \frac{\sin(v+H)}{r^2}$$

lassen sich die Formeln verhältnissmässig einfach ableiten[1]. Sei:

$$\begin{aligned} r &= a(1 - \tfrac{1}{2}\Sigma \rho_\iota \cos \iota M) \\ v &= M + \tfrac{1}{2}\Sigma \alpha_\iota \sin \iota M \end{aligned} \tag{7} \qquad \begin{aligned} \cos v &= \tfrac{1}{2}\Sigma C_\iota \cos \iota M \\ \sin v &= \tfrac{1}{2}\Sigma S_\iota \sin \iota M \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} \cos v &= \tfrac{1}{2}\Sigma c_\iota \cos \iota M \\ \frac{r}{a} \sin v &= \tfrac{1}{2}\Sigma s_\iota \sin \iota M \end{aligned} \tag{9} \qquad \begin{aligned} \frac{a^2}{r^2} \cos v &= \tfrac{1}{2}\Sigma \gamma_\iota \cos \iota M \\ \frac{a^2}{r^2} \sin v &= \tfrac{1}{2}\Sigma \sigma_\iota \sin \iota M \end{aligned} \tag{10}$$

wobei $\iota$ alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annimmt, und

$$\begin{aligned} \rho_{-\iota} &= \rho_\iota & C_{-\iota} &= C_\iota & c_{-\iota} &= c_\iota & \gamma_{-\iota} &= \gamma_\iota \\ \alpha_{-\iota} &= -\alpha_\iota & S_{-\iota} &= -S_\iota & s_{-\iota} &= -s_\iota & \sigma_{-\iota} &= -\sigma_\iota \end{aligned}$$

ist. Differenzirt man (8), so folgt mit Rücksicht auf 14. (11):

$$\sin v \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2} = \tfrac{1}{2}\Sigma \iota C_\iota \sin \iota M; \qquad \cos v \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2} = \tfrac{1}{2}\Sigma \iota S_\iota \cos \iota M,$$

daher durch Vergleichung mit (10):

$$\gamma_\iota \sqrt{1-e^2} = \iota S_\iota; \qquad \sigma_\iota \sqrt{1-e^2} = \iota C_\iota.$$

Differenzirt man (9), so folgt:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{r}{a}\sin v + \frac{\cos v}{a}\,\frac{r^2 e \sin v}{a(1-e^2)}\right) \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2} &= -\tfrac{1}{2}\Sigma \iota c_\iota \sin \iota M \\ \left(+\frac{r}{a}\cos v + \frac{\sin v}{a}\,\frac{r^2 e \sin v}{a(1-e^2)}\right) \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2} &= +\tfrac{1}{2}\Sigma \iota s_\iota \cos \iota M; \end{aligned}$$

daher nach entsprechender Reduction der linken Seiten:

$$\frac{-\sin v}{\sqrt{1-e^2}} \quad \text{und} \quad \frac{\cos v + e}{\sqrt{1-e^2}};$$

folglich durch Vergleichung mit (8):

$$S_\iota = \sqrt{1-e^2}\,\iota c_\iota; \qquad C_\iota = \sqrt{1-e^2}\,\iota s_\iota$$

mit Ausschluss von $\iota = 0$, wofür sich $C_0 = -2e$ ergiebt; es wird daher

$$\begin{aligned} C_0 &= -2e & C_\iota &= \iota\sqrt{1-e^2}\,s_\iota & \gamma_0 &= 0 & \gamma_\iota &= \iota^2 c_\iota \\ S_0 &= 0 & S_\iota &= \iota\sqrt{1-e^2}\,c_\iota & \sigma_0 &= 0 & \sigma_\iota &= \iota^2 s_\iota \end{aligned} \tag{11}$$

und es handelt sich noch um die Bestimmung von $s_\iota$, $c_\iota$, $\rho_\iota$, $\alpha_\iota$. Da aber

$$\begin{aligned} \frac{r}{a}\cos v &= \cos E - e \\ \frac{r}{a}\sin v &= \sqrt{1-e^2}\sin E \\ r &= a(1 - e\cos E) \\ v &= E + 2\Sigma \frac{1}{\lambda}\alpha^\lambda \sin\lambda E = M + e\sin E + 2\Sigma\frac{1}{\lambda}\alpha^\lambda \sin\lambda E \end{aligned}$$

[1] S. Bessel, Ges. Werke I. Bd., pag. 93.

ist, so wird

$$c_0 = C_0^{(1)} - 2e \qquad \rho_\iota = e\,C_\iota^{(1)}$$
$$c_\iota = C_\iota^{(1)} \qquad \alpha_0 = 0 \tag{12}$$
$$s_\iota = \sqrt{1-e^2}\,S_\iota^{(1)} \qquad \alpha_\iota = e\,S_\iota^{(1)} + \Sigma \frac{2}{\lambda}\,\alpha^\lambda S_\iota^\lambda.$$

Die Ausführung der Operationen liefert:

$$\begin{array}{ll}
c_0 = -3e & s_0 = 0 \\
c_1 = 1 - \frac{3}{8}e^2 + \frac{5}{192}e^4 & s_1 = 1 - \frac{5}{8}e^2 - \frac{11}{192}e^4 \\
c_2 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{3}e^3 + \frac{1}{16}e^5 & s_2 = \frac{1}{2}e - \frac{5}{12}e^3 + \frac{1}{24}e^5 \\
c_3 = \frac{3}{8}e^2 - \frac{45}{128}e^4 & s_3 = \frac{3}{8}e^2 - \frac{51}{128}e^4 \\
c_4 = \frac{1}{3}e^3 - \frac{2}{5}e^5 & s_4 = \frac{1}{3}e^3 - \frac{13}{30}e^5 \\
c_5 = \frac{125}{384}e^4 & s_5 = \frac{125}{384}e^4 \\
c_6 = \frac{27}{80}e^5 & s_6 = \frac{27}{80}e^5
\end{array} \tag{13a}$$

$$\begin{array}{ll}
\rho_0 = -e^2 & \alpha_0 = 0 \\
\rho_1 = e - \frac{3}{8}e^3 + \frac{5}{192}e^5 & \alpha_1 = 2e - \frac{1}{4}e^3 + \frac{5}{96}e^5 \\
\rho_2 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{3}e^4 & \alpha_2 = \frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 \\
\rho_3 = \frac{3}{8}e^3 - \frac{45}{128}e^5 & \alpha_3 = \frac{13}{12}e^3 - \frac{43}{64}e^5 \\
\rho_4 = \frac{1}{3}e^4 & \alpha_4 = \frac{103}{96}e^4 \\
\rho_5 = \frac{125}{384}e^5 & \alpha_5 = \frac{1097}{960}e^5
\end{array}$$

und, bis auf die Quadrate der Excentricität inclusive:

$$\begin{array}{llll}
C_0 = -2e & S_0 = 0 & \gamma_0 = 0 & \sigma_0 = 0 \\
C_1 = 1 - \frac{9}{8}e^2 & S_1 = 1 - \frac{7}{8}e^2 & \gamma_1 = 1 - \frac{3}{8}e^2 & \sigma_1 = 1 - \frac{5}{8}e^2 \\
C_2 = e & S_2 = e & \gamma_2 = 2e & \sigma_2 = 2e \\
C_3 = \frac{9}{8}e^2 & S_3 = \frac{9}{8}e^2 & \gamma_3 = \frac{27}{8}e^2 & \sigma_3 = \frac{27}{8}e^2
\end{array} \tag{13b}$$

Zwei Reihen

$$a\cos b = \tfrac{1}{2}\Sigma\gamma_\iota \cos\iota\beta, \quad a\sin b = \tfrac{1}{2}\Sigma\gamma_\iota' \sin\iota\beta, \quad \iota = -\infty \ldots + \infty$$

in denen $\gamma_{-\iota} = \gamma_\iota$, $\gamma_{-\iota}' = -\gamma_\iota'$, kann man auch schreiben

$$a\cos b = \tfrac{1}{2}\Sigma(\gamma_\iota + \gamma_\iota')\cos\iota\beta; \qquad a\sin b = \tfrac{1}{2}\Sigma(\gamma_\iota + \gamma_\iota')\sin\iota\beta,$$

da sich in dem ersten Ausdrucke $\gamma_\iota'$ in dem zweiten Ausdrucke $\gamma_\iota$ für gleiche positive und negative Werthe von $\iota$ weghebt. Hieraus erhält man sofort:

$$a\cos(b+H) = \tfrac{1}{2}\Sigma(\gamma_\iota + \gamma_\iota')\cos(\iota\beta + H); \quad a\sin(b+H) = \tfrac{1}{2}\Sigma(\gamma_\iota + \gamma_\iota')\sin(\iota\beta + H).$$

Es wird daher:

$$\begin{aligned}
&\cos(v+H) = \tfrac{1}{2}\Sigma(C_\iota + S_\iota)\cos(\iota M + H); && \sin(v+H) = \tfrac{1}{2}\Sigma(C_\iota + S_\iota)\sin(\iota M + H) \\
&\frac{r}{a}\cos(v+H) = \tfrac{1}{2}\Sigma(c_\iota + s_\iota)\cos(\iota M + H); && \frac{r}{a}\sin(v+H) = \tfrac{1}{2}\Sigma(c_\iota + s_\iota)\sin(\iota M + H) \\
&\frac{a^2}{r^2}\cos(v+H) = \tfrac{1}{2}\Sigma(\gamma_\iota + \sigma_\iota)\cos(\iota M + H); && \frac{a^2}{r^2}\sin(v+H) = \tfrac{1}{2}\Sigma(\gamma_\iota + \sigma_\iota)\sin(\iota M + H).
\end{aligned} \tag{14}$$

Setzt man nun die auf die Bahnebene senkrechten Coordinaten $z$, $z'$, welche bisher wegen späterer Entwickelungen beibehalten wurden, gleich Null, so wird:

$$z = 0, \quad z' = 0, \quad \mathfrak{r} = r, \quad \mathfrak{r}' = r'$$
$$\zeta = 2\zeta_0 = 4\,\mathfrak{r}\mathfrak{r}' \sin\tfrac{1}{2}I^2 \sin(v + \pi_0)\sin(v' + \pi_0'). \tag{15}$$

Man findet nun leicht

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{r}\cos(v+\pi_0-v'-\pi_0')}{\mathrm{r}'^2} = \mathrm{r}\cos(v+\pi_0)\frac{\cos(v'+\pi_0')}{\mathrm{r}'^2} + \mathrm{r}\sin(v+\pi_0)\frac{\sin(v'+\pi_0')}{\mathrm{r}'^2}$$

$$\mathrm{I} = \frac{a}{a'^2}\Sigma\tfrac{1}{2}(c_\iota+s_\iota)\cdot\tfrac{1}{2}(\gamma'_\lambda+\sigma'_\lambda)\cos(\iota M-\lambda M'+\pi_0-\pi_0') \tag{16}$$

$$\mathrm{II} = \mathrm{r}\,\mathrm{r}'\sin(v+\pi_0)\sin(v'+\pi_0') = \tfrac{1}{4}aa'\Sigma^1(c_\iota+s_\iota)\cdot\tfrac{1}{2}(c'_\lambda+s'_\lambda)[\cos(\iota M-\lambda M'+\pi_0-\pi_0') - \cos(\iota M+\lambda M'+\pi_0+\pi_0')] \tag{17}$$

$$\mathrm{III} = \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{r}'^2}\sin(v+\pi_0)\sin(v+\pi_0') = \tfrac{1}{2}\frac{a}{a'^2}\Sigma\tfrac{1}{2}(c_\iota+s_\iota)\cdot\tfrac{1}{2}(\gamma'_\lambda+\sigma'_\lambda)[\cos(\iota M-\lambda M'+\pi_0-\pi_0') - \cos(\iota M+\lambda M'+\pi_0+\pi_0')] \tag{18}$$

$$\Omega' = \Sigma k^2 m'\left(\frac{1}{\rho}-\mathrm{I}\right);\quad \Omega'' = -\Sigma k^2 m'\cdot 2\sin^2\tfrac{1}{2}J\left(\frac{\mathrm{II}}{\rho^3}-\mathrm{III}\right).$$

Berücksichtigt man nur die zweiten Potenzen der Excentricitäten und Neigungen, so wird man sich in II, III auf die von denselben freien Glieder zu beschränken haben, und es wird

$$\mathrm{II} = \tfrac{1}{2}aa'[\cos(M-M'+\pi_0-\pi_0') - \cos(M+M'+\pi_0+\pi_0')]$$

$$\mathrm{III} = \tfrac{1}{2}\frac{a}{a'^2}[\cos(M-M'+\pi_0-\pi_0') - \cos(M+M'+\pi_0+\pi_0')].$$

Die Berücksichtigung des Gliedes I in dem Ausdrucke für $\Omega'$ kann in einfacherer Weise geschehen. Entwickelt man hier nach der TAYLOR'schen Reihe, indem man für r, r', $v$, $v'$ die Ausdrücke 34 (6) einsetzt, so wird:

$$\mathrm{I} = \frac{a}{a'^2}\cos Q + a\sigma\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{a}{a'^2}\right)\cos Q + a'\sigma'\frac{\partial}{\partial a'}\left(\frac{a}{a'^2}\right)\cos Q - (\mathrm{v}-\mathrm{v}')\frac{a}{a'^2}\sin Q + \ldots$$

Vergleicht man dieses mit der Entwickelung (2) für $1:\rho$, so sieht man, dass sich der Ausdruck für I mit den Gliedern von (2) für $\varkappa = 1$ vereinigen lässt, wenn man $B_0^{(1)} - \frac{a}{a'^2}$ an Stelle von $B_0^{(1)}$ setzt. Es wird daher wenn

$$\begin{aligned} \overline{B}_0^{(\varkappa)} &= B_0^{(\varkappa)} \text{ für } \varkappa = 0, 2, 3 \ldots \\ \overline{B}_0^{(1)} &= B_0^{(1)} - \frac{a}{a'^2} \end{aligned} \tag{19}$$

ist:

$$\Omega' = \Sigma\overline{B}_0^{(\varkappa)}\cos\varkappa Q + a\sigma\Sigma\frac{\partial\overline{B}_0^{(\varkappa)}}{\partial a}\cos\varkappa Q + a'\sigma'\Sigma\frac{\partial\overline{B}_0^{(\varkappa)}}{\partial a'}\cos\varkappa Q - (\mathrm{v}-\mathrm{v}')\Sigma\varkappa\overline{B}_0^{(\varkappa)}\sin\varkappa Q. \tag{20}$$

Dabei ist:

$$\begin{aligned}
&\sigma = -\tfrac{1}{2}\Sigma\rho_\iota\cos\iota M = \tfrac{1}{2}e^2 - e\cos M - \tfrac{1}{2}e^2\cos 2M \qquad \sigma' = +\tfrac{1}{2}e'^2 - e'\cos M' - \tfrac{1}{2}e'^2\cos 2M' \\
&\mathrm{v} = +\tfrac{1}{2}\Sigma\alpha_\iota\sin\iota M = 2e\sin M + \tfrac{5}{4}e^2\sin 2M \qquad \mathrm{v}' = +2e'\sin M' + \tfrac{5}{4}e'^2\sin 2M' \\
&\sigma^2 = +\tfrac{1}{2}e^2 + \tfrac{1}{2}e^2\cos 2M \qquad \sigma'^2 = +\tfrac{1}{2}e'^2 + \tfrac{1}{2}e'^2\cos 2M' \\
&\sigma\sigma' = +\tfrac{1}{2}ee'\cos(M-M') + \tfrac{1}{2}ee'\cos(M+M') \\
&\sigma(\mathrm{v}-\mathrm{v}') = -e^2\sin 2M + ee'\sin(M+M') - ee'\sin(M-M') \\
&\sigma'(\mathrm{v}-\mathrm{v}') = +e'^2\sin 2M' - ee'\sin(M+M') - ee'\sin(M-M') \\
&(\mathrm{v}-\mathrm{v}')^2 = 2(e^2+e'^2) - 4ee'\cos(M-M') + 4ee'\cos(M+M') - 2e^2\cos 2M - 2e'^2\cos 2M'.
\end{aligned} \tag{21}$$

38. **Variation der Elemente.** Wenn auch die wirklichen Substitutionen bei Berücksichtigung der höheren Potenzen der Excentricität und Störungen auf sehr ausgedehnte numerische Operationen führen, so wird es doch nicht schwer, ganz allgemein ein Bild über die Form der Reihen zu erhalten. In den Ausdrücken 37 (20) sind $\sigma$, $\sigma'$ und sammtliche Potenzen derselben, sowie die geraden Potenzen $(\mathrm{v}-\mathrm{v}')^{2k}$ Cosinusreihen, die ungeraden Potenzen $(\mathrm{v}-\mathrm{v}')^{2k+1}$ Sinusreihen; da aber die geraden Potenzen von $(\mathrm{v}-\mathrm{v}')$ in den

Ausdrücken 84 (12) mit den Differentialquotienten gerader Ordnung von $\cos \varkappa Q$, also wieder mit Cosinus multiplicirt erscheinen, die ungeraden Potenzen mit Differentialquotienten ungerader Ordnung also mit $\sin \varkappa Q$, so werden die sämmtlichen Reihen in $\rho^{-2s-1}$ durchweg Cosinusreihen[1]). Es wird daher $\Omega$ eine Cosinusreihe, also

$$\Omega = \Sigma K_{\iota\lambda} \cos(\iota M - \lambda M' + \Gamma_{\iota\lambda}), \tag{1}$$

wobei die Coëfficienten K Functionen von $a$, $e$, $i$, die Winkel $\Gamma_{\iota\lambda}$ Functionen von $M_0$, $\omega$, $\Omega$ sind. Für die Variation der Elemente gelten nun die Formeln 18. 12. Da $M = M_0 + \mu t$ ist, so wird

$$\frac{\partial \Omega}{\partial M_0} = \frac{\partial \Omega}{\partial M} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \Omega}{\partial t}.$$

Dabei ist aber zu beachten, dass bei dieser Differentiation nach $t$, dieses nur insofern als Variable anzusehen ist, als es mit $\mu$ verknüpft ist[2]), und es ist

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= +\frac{2}{a\mu}\frac{\partial \Omega}{\partial M_0}\\
\frac{d\Omega}{dt} &= +\frac{1}{a^2\mu\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial \Omega}{\partial i}\\
\frac{di}{dt} &= -\frac{1}{a^2\mu\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial \Omega}{\partial \Omega} + \frac{\cos i}{a^2\mu\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial \Omega}{\partial \omega}\\
\frac{d\omega}{dt} &= +\frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2\mu e}\frac{\partial \Omega}{\partial e} - \frac{\cos i}{a^2\mu\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial \Omega}{\partial i}\\
\frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2\mu e}\frac{d\Omega}{d\omega} + \frac{1-e^2}{a^2\mu e}\frac{\partial \Omega}{\partial M_0}\\
\frac{d\Delta M_0}{dt} &= -\frac{2}{a\mu}\frac{\partial \Omega}{\partial a} - \frac{1-e^2}{a^2\mu e}\frac{\partial \Omega}{\partial e}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Hierzu ist noch zu bemerken, dass bei der Differentiation nach $a$ auch $\mu$ als veränderlich anzusehen ist; es ist daher, wenn $\left(\frac{\partial \Omega}{\partial a}\right)$ der Differentialquotient nach dem explicite vorkommenden $a$ ist,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a} = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial a}\right) - \frac{3}{2}\frac{\mu t}{a}\frac{\partial \Omega}{\partial M_0},$$

wobei aber das zweite Glied dem Ausdrucke $\left(\frac{dM_0}{dt}\right)_2$ in 19 entspricht, und daher weggelassen werden muss, wenn man die Form zu Grunde legt

$$M = M_0 + \Delta M_0 + \zeta; \qquad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\frac{3}{a^2}\frac{\partial \Omega}{\partial M_0}. \tag{2 a}$$

Dann ist in (2) der Differentialquotient nach $a$ nur nach dem explicite vorkommenden $a$ zu nehmen.

---

[1]) Man hat dabei nur zu beachten, dass sich die Produkte $\cos A \cos B$ und $\sin A \sin B$ durch Cosinus, die Produkte $\sin A \cos B$ durch Sinus ausdrücken. Die vorliegenden Ueberlegungen gelten indessen nur für die Störungen erster Ordnung.

[2]) Man pflegt dieses dadurch anzudeuten, dass man $d'\Omega$ an Stelle von $d\Omega$ setzt; es ist also:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial M_0} = \frac{1}{\mu}\frac{d'\Omega}{dt}, \quad \text{daher} \quad d'\Omega = -\Sigma\iota K_{\iota\lambda}\sin(\iota M - \lambda M' + \Gamma_{\iota\lambda})dt,$$

folglich:

$$\int d'\Omega\, dt = +\Sigma\frac{\iota}{\iota - \lambda}K_{\iota\lambda}\cos(\iota M - \lambda M' + \Gamma_{\iota\lambda}).$$

Diese Formeln lassen sich noch für die Anwendung bequemer umformen. Führt man zunächst $\pi$ an Stelle von $\omega$ ein, so wird[1])

$$\frac{d\pi}{dt}=\frac{d\omega}{dt}+\frac{d\text{☊}}{dt};\quad \frac{\partial\Omega}{\partial\omega}=\frac{\partial\Omega}{\partial\pi};\quad \frac{\partial\Omega}{\partial\text{☊}}=\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\text{☊}}\right)+\frac{\partial\Omega}{\partial\pi}\frac{d\pi}{\partial\text{☊}}=\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\text{☊}}\right)+\frac{\partial\Omega}{\partial\pi},$$

wobei wie früher der eingeklammerte Differentialquotient nach der explicite vorkommenden Variablen zu nehmen ist. Führt man weiter an Stelle der mittleren Anomalie die mittlere Länge $L_0$ für die Epoche ein, so wird:

$$\frac{dL_0}{dt}=\frac{dM_0}{dt}+\frac{d\pi}{dt};\ \frac{\partial\Omega}{\partial M_0}=\frac{\partial\Omega}{\partial L_0};\ \frac{\partial\Omega}{\partial\pi}=\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\pi}\right)+\frac{\partial\Omega}{\partial L_0}\frac{dL_0}{d\pi}=\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\pi}\right)+\frac{\partial\Omega}{\partial L_0}.$$

Setzt man diese Werthe in (2) und (2a) ein, und lässt dann die Klammern bei den Differentialquotienten nach ☊ und $\pi$ weg, da $\Omega$ nach der Substitution als Function von ☊, $\pi$, $L_0$ erscheint, so wird

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt}&=+\frac{2}{a\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial L_0}\\
\frac{di}{dt}&=-\frac{1}{a^2\mu\cos\varphi\sin i}\frac{\partial\Omega}{\partial\text{☊}}-\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}i}{a^2\mu\cos\varphi}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\pi}+\frac{\partial\Omega}{\partial L_0}\right)\\
\frac{de}{dt}&=-\frac{\cos\varphi}{a^2\mu\sin\varphi}\frac{\partial\Omega}{\partial\pi}-\frac{\cos\varphi\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi}{a^2\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial L_0}\\
\frac{d\text{☊}}{dt}&=+\frac{1}{a^2\mu\cos\varphi\sin i}\frac{\partial\Omega}{\partial i}\\
\frac{d\pi}{dt}&=+\frac{\cos\varphi}{a^2\mu\sin\varphi}\frac{\partial\Omega}{\partial e}+\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}i}{a^2\mu\cos\varphi}\frac{\partial\Omega}{\partial i}\\
\frac{d\Delta L_0}{dt}&=-\frac{2}{a\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial a}+\frac{\cos\varphi\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi}{a^2\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial e}+\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}i}{a^2\mu\cos\varphi}\frac{\partial\Omega}{\partial i}\\
\frac{d^2\zeta}{dt^2}&=-\frac{3}{a^2}\frac{\partial\Omega}{\partial L_0};\quad L=L_0+\Delta L_0+\zeta.
\end{aligned}\qquad(3)$$

Da die Differentialquotienten von $\Omega$ nach $L_0$, ☊, $\pi$ Sinusreihen geben, die Differentiation nach $a$, $e$, $i$ jedoch Cosinusreihen, so sieht man, dass die Differentialquotienten der Elemente $a$, $e$, $i$ rein periodische Functionen ohne constantes Anfangsglied sind, die Differentialquotienten von ☊, $\pi$, $L_0$ jedoch constante Anfangsglieder haben. Setzt man $\Omega$ in der Form (1) voraus, so erhält man für die Elemente $E_1$, $E_2$ der beiden Gruppen:

$$\frac{dE_1}{dt}=\Sigma K_{\iota\lambda}'\sin(\iota M-\lambda M'+\Gamma')\qquad \frac{dE_2}{dt}=K_0+\Sigma K_{\iota\lambda}''\cos(\iota M-\lambda M'+\Gamma''),\quad(4)$$

wobei $K_0$ das constante Anfangsglied für $\iota$, $\lambda$ und $\Gamma''$ gleich Null ist. Würde man hier $\Gamma'$, $\Gamma''$ als Constante betrachten, so würde

$$E_1=E_1^{(0)}+K_{00}'\sin\Gamma'\,t+\mathfrak{P}_1;\quad E_2=E_2^{(0)}+(K_0+K_{00}''\cos\Gamma'')t+\mathfrak{P}''\quad(4a)$$

wenn mit $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ periodische Functionen (Sinus- oder Cosinusreihen) bezeichnet werden. Die Integrationsconstanten $E_1^{(0)}$, $E_2^{(0)}$ sind die Werthe der Elemente für $t=0$. Hier treten daher in beiden Elementengruppen Glieder auf, die mit der Zeit unbeschränkt wachsen, sogen. seculäre Glieder. Dieses Resultat kann aber nur für sehr beschränkte Zeiträume als richtig angesehen werden, für Zeiträume innerhalb deren $\Gamma'$, $\Gamma''$ thatsächlich als constant betrachtet werden können. Nimmt man auf die Veränderlichkeit dieser Winkel Rücksicht, und ist

[1]) Man hat $\Omega=f(\omega,\text{☊})=f(\pi-\text{☊},\text{☊})=f_1(\pi,\text{☊})$.

$$\frac{d\Gamma'}{dt} = \gamma'; \qquad \frac{d\Gamma''}{dt} = \gamma'',$$

so wird

$$E_1 = E_1^{(0)} - \Sigma \frac{K_i\lambda'}{\iota\mu - \lambda\mu' + \gamma'} \cos(\iota M - \lambda M' + \Gamma');$$
$$E_2 = E_2^{(0)} + K_0 t + \Sigma \frac{K_i\lambda''}{\iota\mu - \lambda\mu' + \gamma''} \sin(\iota M - \lambda M' + \Gamma''). \tag{5}$$

Es treten daher nur in den Elementen der zweiten Gruppen seculare Glieder auf. Diese Bedingung ist aber erforderlich, wenn das System der betrachteten Weltkörper ein stabiles sein soll; denn würden in den Elementen der ersten Gruppe auch seculare Glieder auftreten, so würden die grossen Axen, Excentricitäten und Neigungen unbeschränkt wachsen oder abnehmen können; es würden z. B. auch die grossen Axen Null werden können, d. h. einer der Himmelskörper sich mit dem Centralkörper vereinigen. $\Omega$, $\pi$ und $L_0$ können hingegen auch Störungen von $n \cdot 360°$ erlangen, was den secularen Drehungen der Apsiden und Knoten und einer geänderten mittleren Bewegung entspricht.

Es treten jedoch Glieder mit kleinen Integrationsdivisoren auf, und zwar für $\iota = \lambda = 0$ die Nenner $\gamma'$, $\gamma''$ und weiter, wenn $\iota\mu - \lambda\mu'$ einen sehr kleinen Werth erhält, d. h. wenn das Verhältniss der mittleren Bewegungen sehr nahe commensurabel ist (vergl 45). In dieser Richtung jedoch unterscheidet sich die Differentialgleichung für $a$ von derjenigen für $e$ und $i$. Glieder langer Periode[1]) von der Form

$$\frac{K_{00}'}{\gamma'} \cos\Gamma'$$

können nämlich wohl in $e$ und $i$ erscheinen, da $\Gamma'$ die Elemente $\Omega$, $\pi$ enthält, und das Glied $K_{00} \cos\Gamma_{00}$ aus (1) bei der Differentiation nach $\Omega$, $\pi$ nicht verschwindet. Hingegen tritt $L_0$ nur in Verbindung mit $M$ auf; es wird daher $\Gamma_{00}$ kein $L_0$ enthalten, das erwähnte Glied bei der Differentiation nach $L_0$ verschwinden. Daraus folgt, dass in den grossen Axen weder seculare Glieder noch langperiodische mit dem Nenner $\gamma'$ auftreten. Damit ist aber noch nicht ausgeschlossen, dass langperiodische Glieder mit dem Nenner $\iota\mu - \lambda\mu'$ vorkommen; solche werden in der That erscheinen, und insbesondere in $\zeta$, wo das Quadrat dieses Nenners auftritt, besonders merklich werden.

Um in den Ausdrücken für $e$ und $i$ auch die erwähnten langperiodischen Glieder mit dem Nenner $\gamma'$ zu berücksichtigen, und gleichzeitig die Secularstörungen von $\Omega$, $\pi$ zu erhalten, führt man wieder die in 20 gewählten Functionen $\Xi$, H, $\Phi$, $\Psi$ ein. Es ist

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\Omega} = \sin i\cos\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial\Xi} - \sin i\sin\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial H} \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial e} = \sin\pi\frac{\partial\Omega}{\partial\Phi} + \cos\pi\frac{\partial\Omega}{\partial\Psi}$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial i} = \cos i\sin\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial\Xi} + \cos i\cos\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial H} \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial\pi} = e\cos\pi\frac{\partial\Omega}{\partial\Phi} - e\sin\pi\frac{\partial\Omega}{\partial\Psi} \tag{6}$$

und da nach den Differentialformeln für $\Xi$, H, $\Phi$, $\Psi$ aus 20:

---

[1]) Wegen der langsamen Veränderlichkeit von $\Gamma'$. Die Periode von $\Gamma'$ ist $T = (360°\cdot60\cdot60):\gamma'$, wenn $\gamma'$ in Secunden ausgedrückt wird; ist $\gamma'$ die Bewegung des Argumentes in einem Tage, so wird $T$ in Tagen erhalten.

$$\frac{d\Xi}{dt} = -\frac{\cos i \sin\Omega}{a^2\mu\cos\varphi\sin i}\frac{\partial\Omega}{\partial\Omega} - \frac{\tang\frac{1}{2}i\cos i\sin\Omega}{a^2\mu\cos\varphi}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\pi} + \frac{\partial\Omega}{\partial L_0}\right) + \frac{\cos\Omega}{a^2\mu\cos\varphi}\frac{\partial\Omega}{\partial i}$$

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\cos i\cos\Omega}{a^2\mu\cos\varphi\sin i}\frac{\partial\Omega}{\partial\Omega} - \frac{\tang\frac{1}{2}i\cos i\cos\Omega}{a^2\mu\cos\varphi}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\pi} + \frac{\partial\Omega}{\partial L_0}\right) - \frac{\sin\Omega}{a^2\mu\cos\varphi}\frac{\partial\Omega}{\partial i}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\cos\varphi\sin\pi}{a^2\mu\sin\varphi}\frac{\partial\Omega}{\partial\pi} - \frac{\cos\varphi\sin\pi\tang\frac{1}{2}\varphi}{a^2\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial L_0} + \frac{\cos\varphi\cos\pi}{a^2\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial e} + \frac{\tang\frac{1}{2}i\sin\varphi\cos\pi}{a^2\mu\cos\varphi}\frac{\partial\Omega}{\partial i}$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{\cos\varphi\cos\pi}{a^2\mu\sin\varphi}\frac{\partial\Omega}{\partial\pi} - \frac{\cos\varphi\cos\pi\tang\frac{1}{2}\varphi}{a^2\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial L_0} - \frac{\cos\varphi\sin\pi}{a^2\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial e} - \frac{\tang\frac{1}{2}i\sin\varphi\sin\pi}{a^2\mu\cos\varphi}\frac{\partial\Omega}{\partial i}$$

ist, so wird

$$\begin{aligned}
\frac{d\Xi}{dt} &= +\frac{\cos i}{a^2\mu\cos\varphi}\frac{\partial\Omega}{\partial H} - \frac{\tang\frac{1}{2}i\cos i\sin\Omega}{a^2\mu\cos\varphi}\frac{\partial\Omega}{\partial L_0} - \\
&\quad - \frac{\tang\frac{1}{2}i\cos i\sin\varphi\sin\Omega}{a^2\mu\cos\varphi}\left(\cos\pi\frac{\partial\Omega}{\partial\Phi} - \sin\pi\frac{\partial\Omega}{\partial\Psi}\right) \\
\frac{dH}{dt} &= -\frac{\cos i}{a^2\mu\cos\varphi}\frac{\partial\Omega}{\partial\Xi} - \frac{\tang\frac{1}{2}i\cos i\cos\Omega}{a^2\mu\cos\varphi}\frac{\partial\Omega}{\partial L_0} - \\
&\quad - \frac{\tang\frac{1}{2}i\cos i\sin\varphi\cos\Omega}{a^2\mu\cos\varphi}\left(\cos\pi\frac{\partial\Omega}{\partial\Phi} - \sin\pi\frac{\partial\Omega}{\partial\Psi}\right) \\
\frac{d\Phi}{dt} &= +\frac{\cos\varphi}{a^2\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial\Psi} - \frac{\cos\varphi\sin\pi\tang\frac{1}{2}\varphi}{a^2\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial L_0} + \\
&\quad + \frac{\tang\frac{1}{2}i\cos i\sin\varphi\cos\pi}{a^2\mu\cos\varphi}\left(\sin\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial\Xi} + \cos\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial H}\right) \\
\frac{d\Psi}{dt} &= -\frac{\cos\varphi}{a^2\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial\Phi} - \frac{\cos\varphi\cos\pi\tang\frac{1}{2}\varphi}{a^2\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial L_0} - \\
&\quad - \frac{\tang\frac{1}{2}i\cos i\sin\varphi\sin\pi}{a^2\mu\cos\varphi}\left(\sin\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial\Xi} + \cos\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial H}\right).
\end{aligned} \tag{7}$$

**89. Secularglieder der Störungsfunction.** Trennt man von $\Omega$ jene Glieder ab, welche weder die mittlere Anomalie des störenden, noch des gestörten Planeten enthalten, so erhält man die secularen, bezw. langperiodischen Glieder. Würde man die Gleichungen 88 (8) durch einfache Quadraturen integriren, so würde man Integrale der Form (5) erhalten. Da aber, wie erwähnt, die Elemente der Gruppe $E_2$ in $\Gamma''$ enthalten sind, so werden die Gleichungen (8) die Form von Differentialgleichungen erster Ordnung annehmen, in denen nebst den Differentialquotienten auch die Variabeln selbst als Argumente trigonometrischer Functionen auftreten. Gerade für diesen Fall empfiehlt sich dann die Form (7), indem dadurch die Differentialgleichungen linear werden. Entwickelt man $\Omega$ und behält nur die von $M$, $M'$ freien Glieder, so erhält man[1]):

[1]) Da $Q$ nur $M - M'$ enthält, $\sigma$, $\sigma'$, $\nu$, $\nu'$, aber nur entweder $M$ oder $M'$, so wird beim Auflösen der Produkte der *sin* und *cos* in die Summen und Differenzen derselben nicht $M$ und $M'$ gleichzeitig wegfallen können, weshalb in $\Omega$ nur die constanten Theile von $\sigma$, $\sigma'$, $\nu - \nu'$ und der bei denselben auftretenden Faktoren zu berücksichtigen sind; dasselbe gilt von $\sigma^2$, $\sigma'^2$. In den Produkten, in denen $\sigma\sigma'$, $\sigma(\nu - \nu')$, $\sigma'(\nu - \nu')$, $(\nu - \nu')^2$ als Faktoren auftreten, wird man alle jene Ausdrücke dieser Incremente zu berücksichtigen haben, welche das Argument $M - M'$ haben; so wird aus den von $\sigma\sigma'$ abhängigen Ausdrücken $\frac{1}{4}ee'\cos(M - M')$ $\frac{\partial^2 B_0^{(1)}}{\partial a\partial a'}\cos(M - M' + \pi_0 - \pi_0')$ das Glied $+\frac{1}{4}ee'\frac{\partial^2 B_0^{(1)}}{\partial a\partial a'}\cos(\pi_0 - \pi_0')$ entstehen. Der Faktor 2 bei dem mit $ee'\cos(\pi_0 - \pi_0')$ multiplicirten Gliede rührt daher, dass für $\varkappa = +1$ und $\varkappa = -1$ gleiche Glieder entstehen. An Stelle von $B_0^{(1)}$ wäre nach 87 (19) eigentlich $\overline{B}_0^{(1)}$ zu setzen; man überzeugt sich aber leicht, dass die von dem Zusatzgliede $\frac{a}{a'^2}$ herrührenden Theile in $C_1$ verschwinden.

$$\frac{1}{\rho} = B_0^{(0)} + \tfrac{1}{2} a e^2 \frac{\partial B_0^{(0)}}{\partial a} + \tfrac{1}{2} a' e'^2 \frac{\partial B_0^{(0)}}{\partial a'} + \tfrac{1}{4} a^2 e^2 \frac{\partial^2 B_0^{(0)}}{\partial a^2} + \tfrac{1}{4} a'^2 e'^2 \frac{\partial^2 B_0^{(0)}}{\partial a'^2}$$
$$+ 2\left[\frac{a a'}{4} \frac{\partial^2 B_0^{(1)}}{\partial a \partial a'} + \tfrac{1}{2} a \frac{\partial B_0^{(1)}}{\partial a} + \tfrac{1}{2} a' \frac{\partial B_0^{(1)}}{\partial a'} + B_0^{(1)}\right] e e' \cos(\pi_0 - \pi'_0)$$
$$\frac{\Pi}{\rho^3} = \tfrac{1}{2} a a' B_1^{(1)}.$$

Setzt man daher

$$C = B_0^{(0)} + \tfrac{1}{2} a e^2 \frac{\partial B_0^{(0)}}{\partial a} + \tfrac{1}{2} a' e'^2 \frac{\partial B_0^{(0)}}{\partial a'} + \tfrac{1}{4} a^2 e^2 \frac{\partial^2 B_0^{(0)}}{\partial a^2} + \tfrac{1}{4} a'^2 e'^2 \frac{\partial^2 B_0^{(0)}}{\partial a'^2}$$
$$C_1 = B_0^{(1)} + \tfrac{1}{2} a \frac{\partial B_0^{(1)}}{\partial a} + \tfrac{1}{2} a' \frac{\partial B_0^{(1)}}{\partial a'} + \tfrac{1}{4} a a' \frac{\partial^2 B_0^{(1)}}{\partial a \partial a'}, \qquad (1)$$

so wird

$$\Omega = \Sigma k^2 m' [C + 2 C_1 e e' \cos(\pi_0 - \pi_0') - a a' B_1^{(1)} \sin \tfrac{1}{2} J^2]. \qquad (2)$$

Aus 17 (6a) erhält man, wenn man die beiden ersten Gleichungen quadrirt und addirt:

$$4 \sin^2 \tfrac{1}{2} J = 4 \sin^2 \tfrac{1}{2}(\Omega' - \Omega) \sin^2 \tfrac{1}{2}(i + i') + 4 \cos^2 \tfrac{1}{2}(\Omega' - \Omega) \sin^2 \tfrac{1}{2}(i' - i)$$
$$= [1 - \cos(\Omega' - \Omega)][1 - \cos(i' + i)] + [1 + \cos(\Omega' - \Omega)][1 - \cos(i' - i)]$$
$$= 2[1 - \cos i' \cos i - \sin i' \sin i \cos(\Omega' - \Omega)].$$
$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} J = 1 - (1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} i - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} i' + 4 \sin^2 \tfrac{1}{2} i \sin^2 \tfrac{1}{2} i') - \sin i \sin i' \cos(\Omega' - \Omega)$$
$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} J = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} i + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} i' - 4 \sin^2 \tfrac{1}{2} i \sin^2 \tfrac{1}{2} i' - \sin i \sin i' \cos(\Omega' - \Omega) \qquad (3)$$
$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} J = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} i (1 - \sin^2 \tfrac{1}{2} i) + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} i' (1 - \sin^2 \tfrac{1}{2} i')$$
$$- 4 \sin^2 \tfrac{1}{2} i \sin^2 \tfrac{1}{2} i' + 2 \sin^4 \tfrac{1}{2} i + 2 \sin^4 \tfrac{1}{2} i' - \sin i \sin i' \cos(\Omega' - \Omega)$$
$$4 \sin^2 \tfrac{1}{2} J = \sin^2 i + \sin^2 i' - 2 \sin i \sin i' \cos(\Omega' - \Omega) + 4(\sin^2 \tfrac{1}{2} i - \sin^2 \tfrac{1}{2} i')^2,$$

folglich mit Vernachlässigung der Grössen vierter Ordnung:

$$4 \sin^2 \tfrac{1}{2} J = \sin^2 i + \sin^2 i' - 2 \sin i \sin i' \cos(\Omega' - \Omega). \qquad (4)$$

Für das weitere ist nun zu beachten, dass $\pi_0$, $\pi_0'$ die Längen der Perihele, gezählt vom Knotenpunkte $K$ (Fig. 272) der Bahnebene des störenden auf der Bahnebene des gestörten Himmelskörpers ist[1]), während $\pi$, $\pi'$ die Längen der Perihele, gezählt von den Knotenpunkten der beiden Bahnebenen auf der Fundamentalebene sind. Es ist also:

$$\pi = \pi_0 + \Phi + \Omega; \qquad \pi' = \pi_0' + \Phi' + \Omega'$$
$$\pi_0 - \pi_0' = \pi - \pi' - \Delta \quad \text{wenn} \quad \Delta = (\Phi - \Phi') - (\Omega' - \Omega) \qquad (5)$$

ist. Aus den Formeln 17 (6a) folgt durch Multiplication der beiden letzten

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} J \sin(\Phi - \Phi') = \sin(\Omega' - \Omega) \cos \tfrac{1}{2}(i' + i) \cos \tfrac{1}{2}(i' - i)$$
$$= \sin(\Omega' - \Omega)(\cos^2 \tfrac{1}{2} i \cos^2 \tfrac{1}{2} i' - \sin^2 \tfrac{1}{2} i \sin^2 \tfrac{1}{2} i')$$
$$= \sin(\Omega' - \Omega)(1 - \sin^2 \tfrac{1}{2} i - \sin^2 \tfrac{1}{2} i'),$$

daher

$$\frac{\sin(\Omega' - \Omega)}{\sin(\Phi - \Phi')} = \frac{1 - \sin^2 \tfrac{1}{2} J}{1 - \sin^2 \tfrac{1}{2} i - \sin^2 \tfrac{1}{2} i'}. \qquad (6)$$

Setzt man $\sin \tfrac{1}{2} i = \theta$, $\sin \tfrac{1}{2} i' = \theta'$, so wird nach (3)

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} J = \theta^2 + \theta'^2 - 2\theta^2\theta'^2 - 2\theta\theta' \sqrt{1 - \theta^2} \sqrt{1 - \theta'^2} \cos(\Omega' - \Omega),$$

daher

---

1) S. pag. 370. Ueber die Einführung der Secularänderung des Punktes $K$ s. Harzer »Ueber die Argumente des Problems der $n$ Körper«, Astr. Nachr. No. 2869.

$$\frac{\sin(\Phi - \Phi')}{\sin(\Omega' - \Omega)} = \frac{1 - \theta^2 - \theta'^2}{1 - \theta^2 - \theta'^2 + 2\theta\theta'[\theta\theta' + \sqrt{1-\theta^2}\sqrt{1-\theta'^2}\cos(\Omega' - \Omega)]}$$

$$\sin(\Phi - \Phi') - \sin(\Omega' - \Omega) = \sin\tfrac{1}{2}[(\Phi - \Phi') - (\Omega' - \Omega)]\cos\tfrac{1}{2}[(\Phi - \Phi') + (\Omega' - \Omega)] =$$
$$= \sin\tfrac{1}{2}\Delta\cos[\tfrac{1}{2}\Delta + (\Omega' - \Omega)]$$
$$= -\frac{2\theta\theta'[\theta\theta' + \sqrt{1-\theta^2}\sqrt{1-\theta'^2}\cos(\Omega' - \Omega)]}{1 - \theta^2 - \theta'^2 + 2\theta\theta'[\theta\theta' + \sqrt{1-\theta^2}\sqrt{1-\theta'^2}\cos(\Omega' - \Omega)]}\sin(\Omega' - \Omega),$$

folglich

$$\Delta = \theta_1 \sin(\Omega' - \Omega) + \theta_2 \sin 2(\Omega' - \Omega) + \theta_3 \sin 3(\Omega' - \Omega) + \dots$$

wobei $\theta_i$ Functionen von $\theta$, $\theta'$ mindestens von der zweiten Ordnung sind, sodass man hier innerhalb der gesteckten Genauigkeitsgrenzen $\pi_0 - \pi_0' = \pi - \pi'$ setzen kann. Man hat dann:

$$\Omega = \Sigma k^2 m'(C + 2C_1[e\cos\pi \cdot e'\cos\pi' + e\sin\pi \cdot e'\sin\pi']$$
$$- \tfrac{1}{4}aa'B_1^{(1)}[\sin^2 i + \sin^2 i' - 2\sin i\cos\Omega \cdot \sin i'\cos\Omega' - 2\sin i\sin\Omega \cdot \sin i'\sin\Omega'])$$

oder in den $\Xi$, H, $\Phi$, $\Psi$ ausgedrückt:

$$\Omega = \Sigma k^2 m'(C + 2C_1[\Psi\Psi' + \Phi\Phi']$$
$$- \tfrac{1}{4}aa'B_1^{(1)}[\Xi^2 + H^2 + \Xi'^2 + H'^2 - 2(\Xi\Xi' + HH')]). \tag{7}$$

In $C$ sind noch die Excentricitäten enthalten. Man erhält für $s = 0$ aus den Formeln 36 (8) und (9) für $\alpha = \frac{a}{a'}$:

$$\frac{d\alpha}{da} = \frac{1}{a'};\qquad \frac{d\alpha}{da'} = -\frac{\alpha}{a'}$$

$$\frac{\partial B_0^{(0)}}{\partial a} = \frac{1}{a'^2}\frac{dP_0^{(0)}}{d\alpha};\qquad \frac{\partial B_0^{(0)}}{\partial a'} = -\frac{1}{a'^2}\left(P_0^{(0)} + \alpha\frac{dP_0^{(0)}}{d\alpha}\right)$$

$$\frac{\partial^2 B_0^{(0)}}{\partial a^2} = \frac{1}{a'^3}\frac{d^2P_0^{(0)}}{d\alpha^2}$$

$$\frac{\partial^2 B_0^{(0)}}{\partial a'^2} = +\frac{2}{a'^3}\left(P_0^{(0)} + \alpha\frac{dP_0^{(0)}}{d\alpha}\right) + \frac{\alpha}{a'^3}\left(2\frac{dP_0^{(0)}}{d\alpha} + \alpha\frac{d^2P_0^{(0)}}{d\alpha^2}\right).$$

$$a\frac{\partial B_0^{(0)}}{\partial a} + \tfrac{1}{2}a^2\frac{\partial^2 B_0^{(0)}}{\partial a^2} = \frac{1}{a'}\left(\alpha\frac{dP_0^{(0)}}{d\alpha} + \tfrac{1}{2}\alpha^2\frac{d^2P_0^{(0)}}{d\alpha^2}\right)$$

$$a'\frac{\partial B_0^{(0)}}{\partial a'} + \tfrac{1}{2}a'^2\frac{\partial^2 B_0^{(0)}}{\partial a'^2} = \frac{1}{a'}\left(\alpha\frac{dP_0^{(0)}}{d\alpha} + \tfrac{1}{2}\alpha^2\frac{d^2P_0^{(0)}}{d\alpha^2}\right)$$

$$\frac{\partial B_0^{(1)}}{a} = \frac{1}{a'^2}\frac{dP_0^{(1)}}{d\alpha};\qquad \frac{\partial B_0^{(1)}}{\partial a'} = -\frac{1}{a'^2}\left(P_0^{(1)} + \alpha\frac{dP_0^{(1)}}{d\alpha}\right)$$

$$\frac{\partial^2 B_0^{(1)}}{\partial a\partial a'} = -\frac{2}{a'^3}\frac{dP_0^{(1)}}{d\alpha} - \frac{\alpha}{a'^3}\frac{d^2P_0^{(1)}}{d\alpha^2}.$$

Setzt man daher

$$\alpha\frac{dP_0^{(0)}}{d\alpha} + \tfrac{1}{2}\alpha^2\frac{d^2P_0^{(0)}}{d\alpha^2} = b_0;\qquad \alpha\frac{dP_0^{(1)}}{d\alpha} + \tfrac{1}{2}\alpha^2\frac{d^2P_0^{(1)}}{d\alpha^2} = b_1, \tag{8}$$

so wird

$$a'C = P_0^{(0)} + \tfrac{1}{2}(e^2 + e'^2)b_0;\quad a'C_1 = \tfrac{1}{2}P_0^{(1)} - \tfrac{1}{2}b_1;\quad aa'B_1^{(1)} = \frac{\alpha}{a'}P_1^{(1)}. \tag{9a}$$

Für $\alpha = \frac{a'}{a}$ erhält man auf dieselbe Weise:

$$aC = P_0^{(0)} + \tfrac{1}{2}(e^2 + e'^2)b_0;\quad aC_1 = \tfrac{1}{2}P_0^{(1)} - \tfrac{1}{2}b_1;\quad aa'B_1^{(1)} = \frac{\alpha}{a}P_1^{(1)}. \tag{9b}$$

Man erhält leicht aus 36 (2), (3):

$$\alpha(1-\alpha^2)\frac{dP_0^{(0)}}{d\alpha} = -\alpha P_0^{(1)} + \alpha^2 P_0^{(0)} \qquad \alpha(1-\alpha^2)\frac{dP_0^{(1)}}{d\alpha} = \alpha P_0^{(0)} - P_0^{(1)}$$

$$\alpha(1-\alpha^2)\frac{d^2P_0^{(0)}}{d\alpha^2} + (1-3\alpha^2)\frac{dP_0^{(0)}}{d\alpha} = -\alpha\frac{dP_0^{(1)}}{d\alpha} - P_0^{(1)} + \alpha^2\frac{dP_0^{(0)}}{d\alpha} + 2\alpha P_0^{(0)}$$

$$(1-\alpha^2)\left[2\frac{dP_0^{(0)}}{d\alpha} + \alpha\frac{d^2P_0^{(0)}}{d\alpha^2}\right] = (1+2\alpha^2)\frac{dP_0^{(0)}}{d\alpha} - \alpha\frac{dP_0^{(1)}}{d\alpha} - P_0^{(1)} + 2\alpha P_0^{(0)}$$

$$(1-\alpha^2)^2\left[\alpha\frac{dP_0^{(0)}}{d\alpha} + \tfrac{1}{2}\alpha^2\frac{d^2P_0^{(0)}}{d\alpha^2}\right] = \alpha^2 P_0^{(0)} - \tfrac{1}{2}\alpha(1+\alpha^2)P_0^{(1)} = -\tfrac{1}{2}\alpha P^{(1)} \quad (10a)$$

$$(1-3\alpha^2)\frac{dP_0^{(1)}}{d\alpha} + \alpha(1-\alpha^2)\frac{d^2P_0^{(1)}}{d\alpha^2} = P_0^{(0)} + \alpha\frac{dP_0^{(0)}}{d\alpha} - \frac{dP_0^{(1)}}{d\alpha}$$

$$(1-\alpha^2)\left[2\frac{dP_0^{(1)}}{d\alpha} + \alpha\frac{d^2P_0^{(1)}}{d\alpha^2}\right] = \alpha^2\frac{dP_0^{(1)}}{d\alpha} + \alpha\frac{dP_0^{(0)}}{d\alpha} + P_0^{(0)}$$

$$(1-\alpha^2)^2\left[\alpha\frac{dP_0^{(1)}}{d\alpha} + \tfrac{1}{2}\alpha^2\frac{d^2P_0^{(1)}}{d\alpha^2}\right] = -\alpha^2 P_0^{(1)} + \tfrac{1}{2}\alpha(1+\alpha^2)P_0^{(0)} = +\tfrac{1}{2}\alpha P^{(0)}. \quad (10b)$$

Substituirt man diese Werthe in (8), (9a), (9b), so erhält man für beide Fälle ($\alpha = a : a'$ oder $a' : a$):

$$\Omega = \Sigma k^2 m' \left\{\frac{(a^2+a'^2)B^{(0)} + 6aa'B^{(1)}}{(a^2-a'^2)^2} - \tfrac{1}{4}\frac{aa'B^{(1)}}{(a^2-a'^2)^2}[\Phi^2+\Psi^2+\Phi'^2+\Psi'^2] + \right.$$
$$+ \tfrac{1}{2}\frac{aa'B^{(0)} + 2(a^2+a'^2)B^{(1)}}{(a^2-a'^2)^2}(\Phi\Phi' + \Psi\Psi') + \quad (11)$$
$$\left. + \tfrac{1}{4}\frac{aa'B^{(1)}}{(a^2-a'^2)^2}[\Xi^2 + \mathrm{H}^2 + \Xi'^2 + \mathrm{H}'^2 - 2(\Xi\Xi' + \mathrm{H}\mathrm{H}')]\right\},$$

wenn $B^{(0)}$, $B^{(1)}$ die den $P^{(0)}$, $P^{(1)}$ entsprechenden Ausdrücke $B_{-\frac{1}{2}}^{(0)}$, $B_{-\frac{1}{2}}^{(1)}$ bedeuten.

40. Secularstörungen in $e$, $i$, $\Omega$, $\pi$. Da bei den Differentialquotienten von $\Omega$ nach $L_0$ keine Secularglieder auftreten, und die letzten Ausdrücke in 38 (7) mit $tang\,\frac{1}{2}i\,tang\,\varphi$ multiplicirt sind, also von der dritten Ordnung der kleinen Parameter, welche bereits in 39 (1) vernachlässigt wurden, so müssen dieselben consequenterweise auch in den Differentialgleichungen weggelassen werden, und aus denselben Gründen müssen die Coëfficienten $\cos\varphi$, $\cos i = 1$ gesetzt werden[1]), wodurch die Gleichungen die Form annehmen:

$$\frac{d\Xi}{dt} = +\frac{1}{a^2\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial\mathrm{H}} \qquad\qquad \frac{d\Phi}{dt} = +\frac{1}{a^2\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial\Psi}$$
$$\frac{d\mathrm{H}}{dt} = -\frac{1}{a^2\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial\Xi} \quad (1) \qquad \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{1}{a^2\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial\Phi} \quad (2)$$

Da in dem Ausdrucke für $\Omega$ die Variabeln $\Xi$, $\mathrm{H}$ einerseits und die Variabeln $\Phi$, $\Psi$ andererseits getrennt sind, so werden in den Differentialgleichungen (1) nur die ersten beiden, in (2) nur die letzten beiden auftreten, und es ist daher möglich, die beiden Gruppen zu trennen[2]). Setzt man

$$-\tfrac{1}{4}\frac{k^2m'}{a^2\mu}\frac{aa'B_{01}^{(1)}}{(a^2-a'^2)^2} = (01); \quad +\tfrac{1}{4}\frac{k^2m'}{a^2\mu}\frac{aa'B_{01}^{(0)} + 2(a^2+a'^2)B_{01}^{(1)}}{(a^2-a'^2)^2} = [01], \quad (3)$$

wobei der Index 01 bei den $B$ andeutet, dass es die Entwickelungscoëfficienten der Entfernung der beiden Körper 0, 1 sind, dann wird für die Störung durch einen zweiten Himmelskörper

1) Bei Berücksichtigung der höheren Potenzen der kleinen Parameter werden die Untersuchungen daher wesentlich complicirter.

2) Die Differentialgleichungen haben die canonische Form.

$$-\frac{1}{2}\frac{k^2 m''}{a^3\mu}\,\frac{aa''B^{(1)}_{02}}{(a^2-a''^2)^2} = (02);\quad +\frac{1}{2}\frac{k^2 m''}{a^3\mu}\,\frac{aa''B^{(0)}_{02}+2(a^2+a''^2)B^{(1)}_{02}}{(a^2-a''^2)^2} = [02] \qquad (3a)$$

u. s. w. Es wird daher, abgesehen von dem constanten Theile, der hier bei der Differentiation verschwindet:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2\mu}\,\Omega = \tfrac{1}{2}\,\Sigma(01)[\Phi^2+\Psi^2+\Phi'^2+\Psi'^2] + \Sigma[01](\Phi\Phi'+\Psi\Psi') -\\ -\tfrac{1}{2}\,\Sigma(01)[\Xi^2+H^2+\Xi'^2+H'^2-2(\Xi\Xi'+HH')],\end{aligned} \qquad (4)$$

wobei die Summe sich auf die verschiedenen störenden Körper bezieht. Hieraus erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{d\Xi}{dt} &= -\{(01)+(02)+(03)\ldots.\}H+(01)H'+(02)H''+(03)H'''\ldots.\\ \frac{dH}{dt} &= +\{(01)+(02)+(03)\ldots.\}\Xi-(01)\Xi'-(02)\Xi''-(03)\Xi'''\ldots.\end{aligned} \qquad (5)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{dt} &= +\{(01)+(02)+(03)\ldots.\}\Psi+[01]\Psi'+[02]\Psi''+[03]\Psi'''\ldots.\\ \frac{d\Psi}{dt} &= -\{(01)+(02)+(03)\ldots.\}\Phi-[01]\Phi'-[02]\Phi''-[03]\Phi'''\ldots.\end{aligned} \qquad (6)$$

Sieht man in diesen Gleichungen $\Pi'\ \Pi''\ \ldots\ \Xi'\ \Xi''\ \ldots\ \Phi'\ \Phi''\ \ldots\ \Psi'\ \Psi''\ \ldots$ als bekannt an, so erhält man je ein System von zwei simultanen linearen Differentialgleichungen, dessen Integration weiter keine Schwierigkeiten bereitet[1]. Sieht man $\Pi'\ \Pi''\ \ldots.$ aber selbst als unbekannte Functionen an, so werden für sie ähnliche Differentialgleichungen bestehen. Wenn man die analogen Grössen für die Störungen des Planeten $m'$ durch die Planeten $m$, $m''\ \ldots$ mit (10), (12) ... bezeichnet, z. B.:

$$(10) = -\frac{1}{2}\frac{k^2 m}{a'^3\mu'}\,\frac{aa'B^{(1)}_{01}}{(a^2-a'^2)^2};\quad [12] = +\frac{1}{2}\frac{k^2 m''}{a'^3\mu'}\,\frac{a'a''B^{(0)}_{12}+2(a'^2+a''^2)B^{(1)}_{12}}{(a'^2-a''^2)^2} \qquad (3b)$$

u. s. w. und wenn man Kürze halber

$$\begin{aligned}(01)+(02)+(03)+\ldots &= [0]\\ (10)+(12)+(13)+\ldots &= [1]\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned} \qquad (7)$$

setzt, dann ist:

$$\begin{aligned}\frac{d\Xi}{dt} &= -[0]\Pi+(01)\Pi'+(02)\Pi''+\ldots. & \frac{d\Pi}{dt} &= +[0]\Xi-(01)\Xi'-(02)\Xi''-\ldots\\ \frac{d\Xi'}{dt} &= -[1]\Pi'+(10)\Pi+(12)\Pi''+\ldots. & \frac{d\Pi'}{dt} &= +[1]\Xi'-(10)\Xi-(12)\Xi''-\ldots\\ \frac{d\Xi''}{dt} &= -[2]\Pi''+(20)\Pi+(21)\Pi'+\ldots. & \frac{d\Pi''}{dt} &= +[2]\Xi''-(20)\Xi-(21)\Xi'-\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned} \qquad (8)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{dt} &= +[0]\Psi+[01]\Psi'+[02]\Psi''+\ldots & \frac{d\Psi}{dt} &= -[0]\Phi-[01]\Phi'-[02]\Phi''-\ldots\\ \frac{d\Phi'}{dt} &= +[1]\Psi'+[10]\Psi+[12]\Psi''+\ldots & \frac{d\Psi'}{dt} &= -[1]\Phi'-[10]\Phi-[12]\Phi''-\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned} \qquad (9)$$

---

1) Vergl. S. NEWCOMB, »On the Secular Variations and Mutual Relations of the orbits of the Asteroids«, wo im ersten Theile die Secularstörungen für die Elemente von 25 der ersten Asteroiden aus den bekannten Secularbewegungen der Elemente der störenden Planeten (mit Ausschluss von Mercur) berechnet sind.

Die Differentialgleichungen (8) unterscheiden sich von denjenigen (9) nur unwesentlich; es genügt daher, die letzteren zu integriren, da sich die Integrale von (8) in derselben Weise ergeben. Dem System (9) kann genügt werden, wenn man setzt:

$$\begin{array}{lll} \Phi = f \sin(\varphi t + F); & \Phi' = f' \sin(\varphi t + F); & \Phi'' = f'' \sin(\varphi t + F) \\ \Psi = f \cos(\varphi t + F); & \Psi' = f' \cos(\varphi t + F); & \Psi'' = f'' \cos(\varphi t + F) \end{array} \qquad (10)$$

wobei $\varphi$, $F$, $f$, $f'$, $f''$ ... Constante sind. Differenzirt man diese Ausdrücke und substituirt in (9), so erhält man für die Bestimmung dieser Constanten die Gleichungen:

$$\begin{array}{l} (\varphi - [0])f - [01]f' - [02]f'' \; \ldots\ldots = 0 \\ -[10]f + (\varphi - [1])f' - [12]f'' \; \ldots\ldots = 0 \\ -[20]f - [21]f' + (\varphi - [2])f'' \; \ldots\ldots = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \qquad (11)$$

Dieses ist ein lineares homogenes Gleichungssystem, in $f$, $f'$, $f''$ ..., welches nur dann lösbar ist, wenn die Determinante der Coëfficienten verschwindet. Es muss also

$$\begin{vmatrix} [0]-\varphi, & [01], & [02], & \ldots \\ [10], & [1]-\varphi, & [12], & \ldots \\ [20], & [21], & [2]-\varphi, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0 \qquad (12)$$

sein. Sind $n$ Körper, so werden $n$ Gleichungen (11) sein, daher wird die Gleichung (12) vom $n$ten Grade sein. Ist $\varphi$ hiernach bestimmt, so werden sich aus den Gleichungen (11) für jeden der $n$ Werthe von $\varphi$ die Verhältnisse der Unbekannten bestimmen. Seien die Lösungen der Gleichung (12):

$$\varphi_1 \; \varphi_2 \; \varphi_3 \; \ldots\ldots \; \varphi_n$$

so findet man aus (11) die zugehörigen Werthe von

$$\left(\frac{f'}{f}\right)_1 = g_1', \quad \left(\frac{f''}{f}\right)_1 = g_1'' \; \ldots\ldots \; \left(\frac{f'}{f}\right)_2 = g_2', \quad \left(\frac{f''}{f}\right)_2 = g_2'' \; \ldots\ldots$$

Allgemein werden die Lösungen

$$\varphi_n \; g_n' \; g_n'', \; g_n''' \; \ldots\ldots$$

ein System von particulären Lösungen der Gleichungen (9) repräsentiren, zu denen noch zwei willkürliche Constanten $f_n$, $F_n$ gehören. Es wird daher

$$\begin{array}{l} \Phi = f_1 \sin(\varphi_1 t + F_1) + f_2 \sin(\varphi_2 t + F_2) + \ldots \\ \Phi' = g_1' f_1 \sin(\varphi_1 t + F_1) + g_2' f_2 \sin(\varphi_2 t + F_2) + \ldots \\ \Phi'' = g_1'' f_1 \sin(\varphi_1 t + F_1) + g_2'' f_2 \sin(\varphi_2 t + F_2) + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Psi = f_1 \cos(\varphi_1 t + F_1) + f_2 \cos(\varphi_2 t + F_2) + \ldots \\ \Psi' = g_1' f_1 \cos(\varphi_1 t + F_1) + g_2' f_2 \cos(\varphi_2 t + F_2) + \ldots \\ \Psi'' = g_1'' f_1 \cos(\varphi_1 t + F_1) + g_2'' f_2 \cos(\varphi_2 t + F_2) + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \qquad (13)$$

das System der vollständigen Integrale, in dem $2n$ Integrationsconstanten $f_1 \, f_2 \ldots f_n$, $F_1 \; F_2 \ldots F_n$ enthalten sind. In ganz ähnlicher Weise erhält man die Integrale von (8) durch die Auflösung der Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} \xi + [0], & -(01), & -(02) & \ldots \\ -(10), & \xi + [1], & -(12) & \ldots \\ -(20), & -(21), & \xi + [2] & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0 \qquad (12a)$$

$$\begin{aligned} (\xi + [0]) - (01)l' - (02)l'' - \ldots &= 0 \\ -(10) + (\xi + [1])l' - (12)l'' - \ldots &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{11a}$$

in der Form:

$$\begin{aligned} \Xi &= k_1 \sin(\xi_1 t + K_1) + k_2 \sin(\xi_2 t + K_2) + \ldots \\ \Xi' &= k_1 l_1' \sin(\xi_1 t + K_1) + k_2 l_2' \sin(\xi_2 t + K_2) + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ H &= k_1 \cos(\xi_1 t + K_1) + k_2 \cos(\xi_2 t + K_2) + \ldots \\ H' &= k_1 l_1' \cos(\xi_1 t + K_1) + k_2' l_2' \cos(\xi_2 t + K_2) + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{13a}$$

mit den $2n$ Integrationsconstanten $k_1, k_2, \ldots k_n, K_1, K_2, \ldots K_n$.

**41. Stabilität der Bewegungen.** Um hieraus die Werthe für $e$, $i$, $\pi$, $\Omega$ zu erhalten, hat man zu beachten, dass

$$\sin^2 i = \Xi^2 + H^2 \qquad \tang \Omega = \frac{\Xi}{H} \tag{1}$$

$$e^2 = \Phi^2 + \Psi^2 \qquad \tang \pi = \frac{\Phi}{\Psi} \tag{2}$$

ist. Sind die Werthe von $e$, $i$, $\Omega$, $\pi$ für sämmtliche Himmelskörper für eine gewisse Zeit gegeben, so erhält man hieraus die zugehörigen Werthe von $\Xi$, H, $\Phi$, $\Psi$ und daraus die Constanten $f$, $F$, $k$, $K$. Aus (2) folgt:

$$e^2 = f_1^2 + f_2^2 + \ldots + 2 f_1 f_2 \cos[(\varphi_1 - \varphi_2)t + (F_1 - F_2] + \ldots$$

folglich

$$\begin{aligned} e^2 &< (f_1 + f_2 + f_3 + \ldots)^2 \\ e'^2 &< (g_1' f_1 + g_2' f_2 + \ldots)^2 \end{aligned} \quad \text{und ebenso} \quad \begin{aligned} \sin^2 i &< (k_1 + k_2 + k_3 + \ldots)^2 \\ \sin^2 i' &< (k_1 l_1' + k_2 l_2' + \ldots)^2. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die Excentricitäten und Neigungen trotz der nach 38 (5) auftretenden kleinen Integrationsdivisoren $\gamma'$ stets nur zwischen gewissen, durch die zu irgend einer Zeit gegebene Configuration bestimmten Grenzen bleiben. Dieser für die Stabilität des Weltsystemes wichtige Satz lässt sich noch auf eine andere Art ableiten, welche gleichzeitig die Beziehungen im ganzen Systeme näher beleuchtet. Man erhält nach 40 (8):

$$\begin{aligned} \Xi \frac{d\Xi}{dt} + H \frac{dH}{dt} &= -(01)(\Xi H' - H\Xi') - (02)(\Xi H'' - H\Xi'') \ldots \\ \Xi' \frac{d\Xi'}{dt} + H' \frac{dH'}{dt} &= -(10)(\Xi' H - H'\Xi) - (20)(\Xi' H'' - H'\Xi'') \ldots \\ \Xi'' \frac{d\Xi''}{dt} + H'' \frac{dH''}{dt} &= -(20)(\Xi'' H - H''\Xi) - (21)(\Xi'' H' - H''\Xi') \ldots \end{aligned} \tag{3}$$

und ähnliche Gleichungen für $\Phi$, $\Psi$, in denen (01), (02) ... durch [01] [02] ... ersetzt sind. Es ist aber nach 40 (3), (3a), (3b) allgemein:

$$\begin{aligned} m_\iota a_\iota^2 \mu_\iota (\iota\varkappa) &= m_\varkappa a_\varkappa^2 \mu_\varkappa (\varkappa\iota) \\ m_\iota a_\iota^2 \mu_\iota [\iota\varkappa] &= m_\varkappa a_\varkappa^2 \mu_\varkappa [\varkappa\iota], \end{aligned} \tag{4}$$

folglich

$$\Sigma m_\iota a_\iota^2 \mu_\iota \left(\Xi_\iota \frac{d\Xi_\iota}{dt} + H_\iota \frac{dH_\iota}{dt}\right) = 0; \qquad \Sigma m_\iota a_\iota^2 \mu_\iota \left(\Phi_\iota \frac{d\Phi_\iota}{dt} + \Psi_\iota \frac{d\Psi_\iota}{dt}\right) = 0.$$

Da nun

$$\mu_\iota = \frac{k_0^2}{a_\iota^{\frac{3}{2}}}; \quad a_\iota^2 \mu_\iota = k_0^2 \sqrt{a_\iota} \tag{5}$$

ist, so erhält man, wenn man den gemeinschaftlichen Faktor $\frac{1}{2} k_0^2$ weglässt und integrirt:

$$\Sigma m_\iota \sqrt{a_\iota}(\Xi_\iota^2 + H_\iota^2) = \text{Const.} \qquad \Sigma m_\iota \sqrt{a_\iota}(\Phi_\iota^2 + \Psi_\iota^2) = \text{Const.},$$

daher

$$\begin{aligned} m\sqrt{a}\,e^2 + m'\sqrt{a'}\,e'^2 + m''\sqrt{a''}\,e''^2 + \ldots &= c \\ m\sqrt{a}\,sin^2 i + m'\sqrt{a'}\,sin^2 i' + m''\sqrt{a''}\,sin^2 i'' \ldots &= c_1, \end{aligned} \tag{6}$$

wobei $c$, $c_1$ Integrationsconstante sind, welche sich durch die Werthe der betreffenden Summen zu einer gegebenen Zeit bestimmen. Gemäss (5) sind $\mu$ und $\sqrt{a}$ gleichbezeichnet; setzt man daher $\mu$ für rechtläufige Bewegungen positiv voraus, so ist $\sqrt{a}$, $\sqrt{a'}$ ... in (6) ebenfalls positiv zu nehmen; da die Massen, die Quadrate der Excentricitäten und die Sinus der Neigungen an und für sich positiv sind, so werden in einem Systeme von rechtläufig sich bewegenden Himmelskörpern, deren Excentricitäten und Neigungen in einem gegebenen Momente sehr kleine Grössen sind, die Werthe dieser Grössen stets sehr klein bleiben, und überhaupt nicht grösser werden können als

$$e_\iota^2 = \frac{c}{m_\iota\sqrt{a_\iota}}; \qquad sin^2 i_\iota = \frac{c_1}{m_\iota\sqrt{a_\iota}}, \tag{7}$$

welche Werthe aber nur dann erreicht werden könnten, wenn die Neigungen, bezw. Excentricitäten aller anderen Körper verschwinden würden.

Diese Schlussfolgerung ist nicht mehr gestattet, wenn eine der Massen sehr klein wäre; für die Veränderung der Bahnen der anderen Himmelskörper würde dies allerdings keine weitere Folge haben, da das betreffende Glied: $m_\lambda\sqrt{a_\lambda}\,e_\lambda^2$ bezw. $m_\lambda\sqrt{a_\lambda}\,sin^2 i_\lambda$ wegen des Faktors $m_\lambda$ sehr klein wird. Für die Masse $m_\lambda$ selbst werden aber $e_\lambda$, $i_\lambda$ bei constanten $c$, $c_1$ sehr bedeutende Veränderungen erfahren können, ohne dass dadurch die Stabilität der übrigen Bahnen gefährdet würde. So hat z. B. der LEXELL'sche Komet von 1770 durch die Störungen des Jupiter so bedeutende Veränderungen erfahren, dass er bei der ersten Annäherung aus einer nahe parabolischen Bahn in eine Ellipse von etwa $5\frac{1}{2}$ Jahre Umlaufszeit gebracht wurde; bei der zweiten Annäherung wurde er wieder aus dieser Bahn in eine nahe parabolische gedrängt, ohne dass diese gewaltigen Störungen in $e$ und $a$ von irgend einer Rückwirkung auf die übrigen Körper des Sonnensystems begleitet gewesen wären, woraus umgekehrt geschlossen werden kann, dass die Masse $m_\lambda$ ausserordentlich klein sein musste.

Für die Veränderung von $\Omega$ erhält man (für $\pi$ gelten genau dieselben Schlüsse):

$$tang\,\Omega = \frac{k_1 sin(\xi_1 t + K_1) + k_2 sin(\xi_2 t + K_2) + \ldots\ldots}{k_1 cos(\xi_1 t + K_1) + k_2 cos(\xi_2 t + K_2) + \ldots\ldots}.$$

Sei in dieser Formel $k_1$ der grösste der Coefficienten und

$$k_1 > k_2 + k_3 + \ldots. \tag{8}$$

so kann man schreiben:

$$tang(\Omega - \xi_1 t - K_1) = \frac{\frac{k_2}{k_1} sin[(\xi_2 - \xi_1)t + (K_2 - K_1)] + \ldots.}{1 + \frac{k_2}{k_1} cos[(\xi_2 - \xi_1)t + (K_2 - K_1)] + \ldots.}. \tag{9}$$

Gemäss der über $k_1$ gemachten Annahme wird die Summe der veränderlichen Glieder im Nenner nie grösser werden als 1, der Nenner kann daher nie Null werden, der Zähler bleibt eine endliche, periodische Grösse, folglich wird $\Omega - \xi_1 t - K_1$ stets nur um den mittleren Werth Null oscilliren; es wird:

$$\Omega = K_1 + \xi_1 t + \Sigma h\, sin(\eta t - H), \tag{10}$$

wobei $k$ mässige Coëfficienten sind. Es bedeutet demnach $K_1$ den Werth von $\Omega$ für $t = 0$, $\xi_1$ die Veränderung von $\Omega$ in der Zeiteinheit; in diesem Falle drückt sich daher die Secularbewegung des Knotens sehr einfach aus. Wenn aber die Bedingung (8) nicht erfüllt ist, so wird sich die Secularbewegung nicht so einfach ausdrücken. Thatsächlich wurde lange Zeit angenommen, dass in diesem Falle eine Secularbewegung von $\Omega$ nicht stattfindet, und erst GYLDÉN[1]) wies nach, dass auch hier eine langsame Secularbewegung stattfindet.

Die Integrale 40 (18), (18a) andern ihre Form, wenn die Gleichungen (12), (12a) gleiche oder imaginäre Wurzeln haben. Würden gleiche Wurzeln auftreten, so werden die denselben entsprechenden, particularen Lösungen zusammenfallen; das allgemeine Integral enthält dann aber der Zeit proportionale Glieder. Das Auftreten von imaginären Wurzeln hingegen würde Exponentialgrössen einführen. In beiden Fällen würden $e$ und $\sin i$ mit der Zeit anwachsen, und die Stabilität des Systemes gefährdet werden. Der Schluss aus der Unmöglichkeit eines derartigen nicht stabilen Weltsystemes aus den Gleichungen (6) auf die Unmöglichkeit von gleichen oder imaginären Wurzeln, welches den älteren Beweisen hierfür zu Grunde liegt, ist keinesfalls einwurfsfrei. Es lässt sich aber strenge beweisen, dass Determinanten der Form (12) lauter reelle verschiedene Wurzeln haben[2]).

Die numerischen Rechnungen wurden schon von LAGRANGE und LAPLACE, später für die damals bekannten sieben Planeten im II. Bde. der Annalen der Pariser Sternwarte von LEVERRIER und 1873 für alle acht Planeten (einschliesslich des Neptun) von STOCKWELL durchgeführt.

Eine von der behandelten grundsätzlich verschiedene Methode für die Berechnung der Secularstörungen hat GAUSS in Vorschlag gebracht. Betrachtet man den Ausdruck 30 (7), d. i. den Theil der Störungsfunction, von welchem die Secularveränderungen abhängen, so sieht man, dass derselbe von der gegenseitigen Lage der Himmelskörper völlig unabhängig ist, und nur von der Lage und Form der Bahnen abhängt. Die Aenderungen dieser Bahnen werden demnach dieselben sein, wie jene, welche zwei mit Masse belegte Ringe durch ihre gegenseitige Attraction in ihren gegenseitigen Lagen hervorbringen. Auf die Bewegung der Himmelskörper muss dabei insofern Rücksicht genommen werden, dass man die Ringe nicht homogen annehmen darf, da die Wirkung in demjenigen Theile der Ringe offenbar stärker sein wird, in welchem der Körper länger verweilt. Das Maass für die Zeit, welche ein Himmelskörper braucht, um eine gewisse Strecke in seiner Bahn (in dem Ringe) zu durchlaufen, ist aber die Fläche des von dem Radiusvector überstrichenen Sectors; es wird demnach die Masse des Ringelementes proportional der Fläche dieses Sectors zu setzen sein[3]).

---

[1]) Traités des orbites absolues, Bd. I, pag. 114—123.

[2]) Für $n = 3$ ist dies die Gleichung, durch welche die Richtung der drei Hauptaxen der Flächen zweiter Ordnung mit Mittelpunkt, die Richtung der drei Hauptträgheitsaxen, die Richtung der Hauptaxen der Elasticität etc. gegeben sind. Den Beweis für den Satz hat für eine Determinante dritten Grades zuerst LAGRANGE in den »Memoiren der Berliner Academie der Wissenschaften für 1773« (Werke, Bd. III, pag. 606) zur Bestimmung der Hauptträgheitsaxen gegeben. Den allgemeinen Beweis für eine Gleichung $n$ten Grades gaben CAUCHY (Exercices des Mathématiques Bd. IV) und JACOBI (CRELLE's Journal, Bd. XII, Ges. Werke Bd. III, pag. 207).

[3]) S. GAUSS: Determinatio attractionis, quam in punctum quodvis positionis datae exerceret planeta, si ejus massa per totam orbitam ratione temporis quo singulae partes describuntur uniformiter esset dispertita. (Werke III. Bd., pag. 331).

Eine besondere Erscheinung bietet in Hinsicht der Secularbewegung der Elemente der Mercur dar. LEVERRIER bemerkte 1859[1]), dass die Secularbewegung des Mercurperihels, wie sie sich aus den Beobachtungen ergiebt, um nahe 48″ im Jahrhundert grösser ist, als der theoretisch bestimmte Werth. Wollte man die Differenz durch eine unrichtige Annahme der Massen der störenden Planeten erklären, so könnte dieses nur durch eine Aenderung der Venusmasse geschehen, weil, da die Venus keinen Satelliten hat, ihre Masse nur durch die Störungen bestimmt werden kann, welche sie auf andere Himmelskörper ausübt. Die aus der Secularbewegung des Mercurperihels folgende Venusmasse würde aber um nahe den zehnten Theil ihres Werthes von demjenigen abweichen, welcher sich aus den durch die Beobachtungen ziemlich genau bekannten Störungen in der Lage der Ekliptik ergeben. LEVERRIER vermutete die Ursache in dem Vorhandensein eines innerhalb des Mercur gelegenen »intramercuriellen« Planeten, der später den Namen Vulcan erhielt, für welchen aber die Nachforschungen bisher zu keinem Ergebnisse geführt haben[2]).

BAUSCHINGER[3]) berechnete die Störungen nach der Methode, welche HANSEN für die kleinen Planeten angewendet hat, kommt aber ebenfalls zu dem Resultate, dass der rechnerisch bestimmte Werth der Secularbewegung des Mercurperihels mit dem beobachteten nicht übereinstimmt; allein er gelangt zu dem Schlusse, dass nach der Uebereinstimmung der Resultate es nicht ausgeschlossen ist, dass der Mangel in den Methoden der Störungsrechnung liegt, und dass »die vorhandenen Störungstheorieen ein empirisches Glied erfordern«.

HARZER[4]) findet, dass sich die Bewegung des Mercurperihels erklären liesse, wenn man die Sonnencorona als flache Scheibe von der Dicke eines Sonnendurchmessers bis auf etwa 4 Sonnendurchmesser im Aequator der Sonne ausgedehnt annimmt, und deren Dichte etwa $\frac{1}{15}$ der Dichte des Wasserstoffes annimmt.

**42. Secularstörung der mittleren Länge.** Für die Secularstörung in der mittleren Länge $L_0$ hat man nach 38 (8), wenn $\cos\varphi$, $\cos\frac{1}{2}\varphi$ gleich 1 gesetzt werden:

$$\frac{d\Delta L_0}{dt} = -\frac{2}{a\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial a} + \frac{\sin\varphi}{a^2\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial e} + \frac{\sin i}{a^2\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial i}. \tag{1}$$

Nun ist, wenn man den in 40 (4) weggelassenen, constanten Theil der von dem betrachteten störenden Körper herrührenden Störungsfunktion mit $\{01\}$ bezeichnet.

$$\Omega = \Sigma\{01\} + \tfrac{1}{2}(01)(e^2 + e'^2) + [01]ee'\cos(\pi - \pi') - \tfrac{1}{2}(01)[\sin^2 i + \sin^2 i' - 2\sin i\sin i'\cos(\Omega - \Omega')].$$

Die Coëfficienten $\{01\}$, $(01)$, $[01]$ sind Funktionen von $a$; sei

$$-2a\frac{\partial}{\partial a}\{01\} = \{01\}'; \quad -2a\frac{\partial}{\partial a}(01) = (01)'; \quad -2a\frac{\partial}{\partial a}[01] = [01]',$$

so wird

$$-2a\frac{\partial\Omega}{\partial a} = \Sigma\big[\{01\}' + \tfrac{1}{2}(01)'(e^2 + e'^2) + [01]'ee'\cos(\pi - \pi') - \tfrac{1}{2}(01)'[\sin^2 i + \sin^2 i' - 2\sin i\sin i'\cos(\Omega - \Omega')]\big]$$

---

[1]) Comptes rendus Bd. 49, pag. 381.
[2]) Vergl. den Artikel »Planeten«.
[3]) Astron. Nachrichten, Bd. 109, No. 2594.
[4]) Astronomische Nachrichten Bd. 127, No. 3030.

$$e\frac{\partial\Omega}{\partial e} = \Sigma[(01)e^2 + [01]ee'\cos(\pi - \pi')]$$

$$\sin i\frac{\partial\Omega}{\partial i} = \Sigma[(01)\sin^2 i - (01)\sin i \sin i' \cos(\Omega - \Omega')].$$

Substituirt man hier an Stelle von $e, e', \pi, \pi', i, i', \Omega, \Omega'$ wieder $\Phi, \Psi, \Xi, H$, so erhält man

$$\frac{dL_0}{dt} = \frac{1}{a^2\mu}\Sigma\Big[\{01\}' + \alpha(\Xi^2 + H^2) + \alpha'(\Xi'^2 + H'^2) + \beta(\Xi\Xi' + HH') + \gamma(\Phi^2 + \Psi^2) + \gamma'(\Phi'^2 + \Psi'^2) + \delta(\Phi\Phi' + \Psi\Psi')\Big]. \quad (2)$$

Während daher die Differentialquotienten von $\Xi$, $H$, $\Phi$, $\Psi$ von der ersten Ordnung in den kleinen Parametern sind, ist der Differentialquotient der mittleren Länge von der zweiten Ordnung dieser Grössen. Mit Vernachlässigung derselben würde sich ergeben

$$\frac{dL_0}{dt} = \frac{1}{a^2\mu}\left[\{01\}' + \{02\}' + \ldots\right] = \lambda \quad (3)$$

und da $[01]'$, $[02]' \ldots$ nur von den grossen Axen abhängen, diese aber secularen Störungen nicht unterworfen sind, so würde $\lambda$ constant sein; die mittlere Länge würde nur der Zeit proportionale Glieder enthalten, welche sich in der mittleren Länge $L$ mit dem der Zeit proportionalen Gliede $\mu t$ verbinden. Da nun

$$L_0 = L_{00} + \lambda t$$

ist, so wird

$$L = L_0 + \mu t = L_{00} + (\mu + \lambda)t = L_{00} + (\mu)t, \quad (4)$$

wenn

$$(\mu) = \mu + \lambda \quad (5)$$

ist. Aus der Beobachtung folgt aber nicht der Werth $\mu$ (ungestörte mittlere Bewegung), sondern der Werth $(\mu)$; die Beziehung $\mu = k_0 a^{-\frac{3}{2}}$ ist aber für den ungestörten Werth von $\mu$ gültig. Bestimmt man daher einen Werth $(a)$ nach der Beziehung

$$(\mu) = k_0 (a)^{-\frac{3}{2}} \quad (6)$$

so wird der aus dem beobachteten Werthe $(\mu)$ gefolgerte Werth von $(a)$ nicht die grosse Axe sein. Man erhält den wahren Werth der grossen Axe $a$ aus der Gleichung

$$\left(\frac{a}{(a)}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{(\mu)}{\mu} = \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu}\right)$$

$$a = (a)\left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$a = (a)\left[1 + \frac{2}{3}\frac{\lambda}{\mu}\right]. \quad (7)$$

Es ist z. B. für die Erde in einem julianischen Jahre $\mu = 1295977''{\cdot}443$; $\lambda = +2''{\cdot}507$. Hiermit folgte, ohne Rücksicht auf $\lambda$ in § 12, mit der fest behaltenen Gauss'schen Constanten:

$$(a) = 1 - 0{\cdot}0000000228$$

und da

$$1 + \frac{2}{3}\frac{\lambda}{\mu} = 0{\cdot}0000012896,$$

so folgt daraus, dass die Gauss'sche Constante, wenn man die mittlere Länge der Erde von den Störungen befreien würde, einer Längeneinheit entspricht, in welcher die Erdbahnhalbaxe gleich ist $1{\cdot}0000012668$.

Berücksichtigt man nun aber auch die Quadrate der Excentricitäten und Neigungen, betrachtet diese aber als constant, so wird, wie man sofort sieht, die Form der Differentialgleichung dieselbe, nur werden $\lambda$ und die von den Excentricitäten und Parametern abhängenden Glieder geändert. Anders aber wird die Sache, wenn man auf die Secularstörungen von $\Xi$, $\Pi$ .... Rücksicht nimmt. Für die langperiodischen Glieder 40 (18), (18a) kann man in kurzen Zeiträumen eine Entwickelung nach der Zeit setzen:

$$\Xi = \xi_0 + \xi t + \ldots \qquad H = \eta_0 + \eta t + \ldots$$

und ähnlich für $\Xi'$, $H'$, $\Xi''$ ...; hieraus leitet man ab

$$\Xi^2 = \xi_0^2 + \xi' t + \ldots \qquad H^2 = \eta_0^2 + \eta' t + \ldots,$$

$$\frac{dL_0}{dt} = \lambda + \mu' t + \ldots.$$

$$L = L_{00} + (\mu)t + \tfrac{1}{2}\mu' t^2 + \ldots$$

Das Glied $\frac{1}{2}\mu' t^2$ giebt die im I. Bde., pag. 119, angedeutete Secularacceleration. LAGRANGE hatte auf dieselbe zuerst aufmerksam gemacht; die numerischen Rechnungen gaben ihm aber für die Planeten verschwindende Beträge, weshalb er die Anwendung auf den Mond nicht verfolgte. Dies that zuerst LAPLACE (vergl. § 60).

**43. Periodische Störungen. Glieder langer Periode.** Führt man die in 37 angezeigten Operationen durch, so ergiebt sich für $\Omega$ die Entwickelung 38 (1) und die Störungen können durch Formeln (2), (2a) oder (3), (6) bestimmt werden. Da in 38 (1) $\Gamma$ von den $\omega$, $\Omega$ abhängt, so wird:

$$\Omega = \Sigma K_{\iota\lambda} \cos(\iota M - \lambda M' + \alpha\omega + \beta\omega' + \gamma\Omega + \delta\Omega') \tag{1}$$

oder, wenn man Kürze halber

$$D_{\iota\lambda\alpha\beta\gamma\delta} = D = \iota(M_0 + \mu t) - \lambda(M_0' + \mu' t) + \alpha\omega + \beta\omega' + \gamma\Omega + \delta\Omega' \tag{2}$$

setzt, wo $\iota$, $\lambda$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ ganze Zahlen bedeuten:

$$\Omega = \Sigma K_{\iota\lambda} \cos D. \tag{1a}$$

Führt man an Stelle der Differentialquotienten von $K_{\iota\lambda}$ die Symbole

$$\frac{\partial K_{\iota\lambda}}{\partial a} = K_{\iota\lambda}^{(a)}; \quad \frac{\partial K_{\iota\lambda}}{\partial e} = K_{\iota\lambda}^{(e)}; \quad \frac{\partial K_{\iota\lambda}}{\partial i} = K_{\iota\lambda}^{(i)} \tag{3}$$

ein, so wird aus 38 (2):

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= -\frac{2}{a\mu}\Sigma\iota K_{\iota\lambda}\sin D \\
\frac{d\Omega}{dt} &= +\frac{1}{a^2\mu\cos\varphi\sin i}\Sigma K_{\iota\lambda}^{(i)}\cos D \\
\frac{di}{dt} &= +\frac{1}{a^2\mu\cos\varphi\sin i}\Sigma(\gamma - \alpha\cos i)K_{\iota\lambda}\sin D \\
\frac{d\omega}{dt} &= +\frac{1}{a^2\mu}\Sigma\left(\operatorname{cotang}\varphi K_{\iota\lambda}^{(e)} - \frac{\operatorname{cotang} i}{\cos\varphi}K_{\iota\lambda}^{(i)}\right)\cos D \\
\frac{de}{dt} &= +\frac{\cos\varphi}{a^2\mu\sin\varphi}\Sigma(\alpha - \iota\cos\varphi)K_{\iota\lambda}\sin D \\
\frac{d\Delta M_0}{dt} &= -\frac{2}{a\mu}\Sigma\left(K_{\iota\lambda}^{(a)} + \frac{1}{2}\frac{\cos^2\varphi}{a\sin\varphi}K_{\iota\lambda}^{(e)}\right)\cos D.
\end{aligned} \tag{4}$$

Die Integration dieser Gleichungen bietet keine Schwierigkeiten. Sieht man die Elemente als constant an, so wird man die periodischen Glieder durch Quadraturen erhalten. Werden die Resultate der ersten Näherung substituirt,

so treten neue periodische Glieder hinzu u. s. w. Es ist jedoch vortheilhaft, schon in der ersten Näherung die secularen Glieder in $\omega$ und $\Omega$ zu berücksichtigen, wie dies POISSON that. Sei daher

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 t; \qquad \Omega = \Omega_0 + \Omega_1 t,$$

so wird

$$D = D_0 + (\iota\mu - \lambda\mu' + \varepsilon)t$$
$$D_0 = \iota M_0 - \lambda M_0' + \alpha\omega_0 + \beta\omega_0' + \gamma\Omega_0 + \delta\Omega_0' \tag{5}$$
$$\varepsilon = \alpha\omega_1 + \beta\omega_1' + \gamma\Omega_1 + \delta\Omega_1'$$

und man erhält z. B.:

$$\Delta a = + \frac{2}{a\mu} \Sigma \frac{\iota}{\iota\mu - \lambda\mu' + \varepsilon} K_{\iota\lambda} \cos D; \qquad a = a_0 + \Delta a.$$

Ebenso $\Delta i$, $\Delta e$ ... und $i = i_0 + \Delta i$, $e = e_0 + \Delta e$ ..., wobei $a_0$, $i_0$, $e_0$ ... die ungestörten Elemente sind. Die Glieder für $\iota = \lambda = 0$ sind dabei auszuschliessen, da dieselben bei der Berechnung der secularen Störungen bereits berücksichtigt wurden. Hingegen erfordern jene Glieder eine besondere Aufmerksamkeit, bei denen $\iota\mu - \lambda\mu'$ eine sehr kleine Grösse ist, und zwar besonders in dem Ausdrucke für $\zeta$, bei welchem eine doppelte Integration auszuführen ist. Es ist nämlich:

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = + \frac{8}{a^3} \Sigma \iota K_{\iota\lambda} \sin D; \qquad \zeta = - \frac{8}{a^3} \Sigma \frac{\iota}{(\iota\mu - \lambda\mu' + \varepsilon)^2} \sin D. \tag{6}$$

Nach 15 (19) ist $J_x^\lambda$ von der $\lambda$ten Ordnung nach $x$, wenn man die niedrigsten auftretenden Potenzen als die Ordnung des Ausdruckes nach den kleinen Parametern bezeichnet; daher ist $J_{\iota e}^\lambda$ von der $\lambda$ten Ordnung nach $e$, die $S_\iota^{(m)}$, $C_\iota^{(m)}$ von der $(\iota - m)$ten Ordnung; die in 87 auftretenden Coëfficienten $\rho_\iota$, $\alpha_\iota$ sind nach 87 (12) von der $\iota$ten Ordnung (mit Ausnahme von $\rho_0$, welches von der zweiten Ordnung ist, und $\alpha_0$, welches verschwindet). Um über die Ordnung der Coëfficienten der Potenzen von $\sigma$ und $\nu$ zu entscheiden, kann man schreiben

$$\sigma^s = \Sigma \rho_\iota^{(s)} \cos \iota M; \qquad \nu^s = \Sigma \alpha_\iota^{(s)} \sin \iota M.$$

Da nun $\sigma^{s+1} = \sigma^s \sigma$ ist, so wird das Glied mit $\cos \iota M$ den Coëfficienten haben:

$$\rho_\iota^{(s+1)} = \rho_0 \rho_\iota^{(s)} + \rho_1 \left(\rho_{\iota+1}^{(s)} + \rho_{\iota-1}^{(s)}\right) + \rho_2 \left(\rho_{\iota+2}^{(s)} + \rho_{\iota-2}^{(s)}\right) \ldots .$$

Es ist aber $\rho_\iota^{(1)} = \rho_\iota$, daher $\rho_\iota^{(2)}$ im Allgemeinen ebenfalls von der $\iota$ten Ordnung und ebenso $\rho_\iota^{(3)}$, $\rho_\iota^{(4)}$ .... Dies gilt jedoch nur für $\iota > s$, denn da $\sigma$ den Faktor $e$ enthält, so wird $\sigma^s$ von der Ordnung $s$ sein und für $\iota < s$ werden alle Coëfficienten von der $s$ten Ordnung. Dasselbe gilt von $\nu$; es wird daher

$\rho_\iota^{(s)}$, $\alpha_\iota^{(s)}$ von der Ordnung $\iota$, wenn $\iota > s$; und von der Ordnung $s$ für $\iota \leq s$.

In den Produkten $\sigma^s \sigma_1'^{s_1}$, $\nu^s \nu_1'^{s_1}$ werden die Produkte $\rho_\iota^{(s)} \rho'^{(s')}_\lambda \cos(\iota M \pm \lambda M')$; $\alpha_\iota^{(s)} \alpha'^{(s')}_\lambda \cos(\iota M \pm \lambda M')$ auftreten, in denen die Coëfficienten bezw. von den Ordnungen $\iota$, $\lambda$ oder mindestens $s$, $s'$ sind. Eben dasselbe gilt von den Ausdrücken $(\nu - \nu')^s$, woraus sofort folgt, dass in den Ausdrücken 87 (2) oder allgemeiner in dem Ausdrucke 84 (12) die Produkte der auftretenden Grössen

$$A \cos(\iota M \pm \lambda M') \cdot B \cos x Q \tag{7}$$

von der Ordnung $\iota$ in $e$ und $\lambda$ in $e'$ sind. Die Bedingung, dass sie mindestens von der Ordnung $s$ seien, entfällt hier, da sie in den Gliedern erster Ordnung der TAYLOR'schen Entwickelung von der ersten Ordnung sind, und auch die

Ausnahme für $\iota = 0$, $\lambda = 0$ entfällt, da in der Summe die Glieder nullter Ordnung $\Sigma B_s^\varkappa \cos \varkappa Q$ vorkommen. Löst man in (7) die Produkte auf, so folgt:

$$C \cos(\iota M \pm \lambda M' + \varkappa Q) + C \cos(\iota M \pm \lambda M' - \varkappa Q),$$

daher

für die oberen Zeichen: $$C \cos[(\iota + \varkappa) M + (\lambda - \varkappa) M' + \varkappa \pi_0 - \varkappa \pi_0'] + C \cos[(\iota - \varkappa) M + (\lambda + \varkappa) M' - \varkappa \pi_0 + \varkappa \pi_0']$$

für die unteren Zeichen: $$C \cos[(\iota + \varkappa) M - (\lambda + \varkappa) M' + \varkappa \pi_0 - \varkappa \pi_0'] + C \cos[(\iota - \varkappa) M - (\lambda - \varkappa) M' - \varkappa \pi_0 + \varkappa \pi_0'].$$

In dem Ausdrucke für $\rho^{-2s-1}$ ist daher der Coëfficient eines Gliedes $\cos(\alpha M + \beta M' + \gamma \pi_0 + \delta \pi_0')$ in $e$ von der Ordnung $[\alpha - \gamma]$, in $e'$ von der Ordnung $[\beta - \delta]$ wenn mit $[A]$ der absolute Betrag von $A$ bezeichnet wird.

In dem Ausdrucke für $\Omega$ treten zu $\rho^{-1}$ noch die mit I bezeichneten Glieder, welche sich aber mit den obigen für $\varkappa = 1$ vereinigen.

Die Glieder in I, II und III, welche von $\cos(\iota M - \lambda M' + \pi_0 - \pi_0')$ abhängen, sind nach 37 (16), (17) und (18) für positive $\iota$ und $\lambda$ von der $(\iota - 1)$ten bezw. $(\lambda - 1)$ten Ordnung, für negative $\iota$, $\lambda$ von der Ordnung $\iota + 1$, bezw. $\lambda + 1$ in $e$, $e'$; da im ersten Falle $[\alpha - \gamma] = \iota - 1$; $[\beta - \delta] = \lambda - 1$; im zweiten $[\alpha - \gamma] = \iota + 1$, $[\beta - \delta] = \lambda + 1$ ist, so gilt der obige Satz auch für den von den Neigungen abhängigen Theil von $\Omega$.

Genau dasselbe gilt von den Ausdrücken II, $\text{II}^2$, ... daher auch von den Ausdrücken $\text{II} \cdot \rho^{-3}$; $\text{II}^2 \rho^{-5}$ ... Diese sind noch zu multipliciren mit $\sin^2 \frac{1}{2} J$, $\sin^4 \frac{1}{2} J$ ..., welche nach 39 (4) nach Potenzen von $\sin^2 \frac{1}{2} i$, $\sin^2 \frac{1}{2} i'$ entwickelt werden können, und es wird

$$\sin^{2\varepsilon} \tfrac{1}{2} J = J_0^{(\varepsilon)} + J_2^{(\varepsilon)} \cos(\Omega - \Omega') + J_4^{(\varepsilon)} \cos 2(\Omega - \Omega') + \ldots,$$

wo wieder $J_{2\lambda}^{(\varepsilon)}$ nach derselben Schlussweise von der Ordnung $2\lambda$ ist, für $\lambda > \varepsilon$; und von der Ordnung $2\varepsilon$ für $\lambda \overline{\gtrless} \varepsilon$. In derselben Weise schliessend, gelangt man zu dem Resultate, dass der Coëfficient $C$ in dem Ausdrucke

$$C \cos[\alpha M + \beta M' + \gamma \pi_0 + \delta \pi_0' + \varepsilon(\Omega - \Omega')]$$

von der Ordnung $[\alpha - \gamma]$ in $e$, von der Ordnung $[\beta - \delta]$ in $e'$ und von der Ordnung $2\varepsilon$ in den Neigungen ist, wobei aber $\gamma + \delta = 0$ ist.

Man kann diese Beziehungen in etwas einfacherer Form aussprechen. Führt man statt der mittleren Anomalie die mittlere Länge ein, so dass $M = \mu t + M_0 = \mu t + L_0 - \pi$ ist, so wird das Argument

$$A = \alpha M + \beta M' + \gamma \pi_0 + \delta \pi_0' + \varepsilon(\Omega - \Omega') = \alpha \mu t + \beta \mu' t + \alpha L_0 + \beta L_0' - \alpha \pi - \beta \pi' + \gamma(\pi_0 - \pi_0') + \varepsilon(\Omega - \Omega').$$

Da aber $\pi_0 - \pi_0' = \pi - \pi' + \Delta$ ist, so wird $A = D + \Delta$, wenn

$$D = \alpha \mu t + \beta \mu' t + \alpha L_0 + \beta L_0' - (\alpha - \gamma) \pi - (\beta + \gamma) \pi' + \varepsilon(\Omega - \Omega'),$$

ist, und $\Delta$ die auf pag. 389 angegebene Bedeutung hat; weiter ist

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} A = \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} D \cos \Delta \mp \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} D \sin \Delta.$$

Führt man hier für $\sin \Delta$, $\cos \Delta$ die Reihen ein, löst die Produkte der goniometrischen Functionen in Summen auf, so verbinden sich die Vielfachen von $\Omega - \Omega'$ mit den bereits vorhandenen, und die Argumente werden daher die allgemeine Form haben

$$D = \alpha \mu t + \beta \mu' t + \alpha L_0 + \beta L_0' + \gamma' \pi + \delta' \pi' + \varepsilon \Omega + \zeta \Omega', \tag{8}$$

wobei, wie man sofort sieht, die Beziehung besteht:

$$\alpha + \beta + \gamma' + \delta' + \varepsilon + \zeta = 0. \tag{9}$$

44. Beispiel: Für den Jupiter[1]) ist $\mu = 299''{\cdot}12886$; für den Saturn $\mu' = 120''{\cdot}45465$, daher $5\mu' - 2\mu = 4''{\cdot}01658$, als tägliche Bewegung des Argumentes $5M' - 2M$; die Periode ist daher 883·4 julianische Jahre, die Differenz $(5\mu' - 2\mu)\, arc\, 1'' = 0{\cdot}000019478$. Die Glieder niedrigster Ordnung in den Excentricitäten mit dem Argumente $5M' - 2M$ entstehen, wenn in den Entwickelungen von $\rho^{-2s-1}$ die Glieder mit den Argumenten $2Q$, $3Q$, $4Q$, $5Q$ bezw. mit denjenigen Gliedern multiplicirt werden, deren Argumente $3M'$, $2M' + M$, $M' + 2M$, $3M$ sind. Die Glieder mit dem Argumente $5M' - 2M + \iota(\pi_0 - \pi_0')$ haben daher den Faktor $e^{\iota+2} e'^{\iota+5}$ und sind, wenn man nur bis zu Gliedern 6. Ordnung der Excentricitäten geht, zu vernachlässigen. Dasselbe gilt von den Gliedern mit dem Argumente $5M' - 2M$, welche $e^2 e'^5$ als Faktor enthalten, und von den Gliedern, deren Argumente $5M' - 2M - (\iota + 6)(\pi_0 - \pi_0')$ sind, da diese den Faktor $e^{\iota+4} e'^{\iota+1}$ enthalten. Man hat daher nur die Glieder zu berücksichtigen:

$$A e'^3 \cos[5M' - 2M - 2(\pi_0 - \pi_0')] \qquad P e'^4 e \cos[5M' - 2M - (\pi_0 - \pi_0')]$$
$$B e'^2 e \cos[5M' - 2M - 3(\pi_0 - \pi_0')] \qquad Q e' e^4 \cos[5M' - 2M - 6(\pi_0 - \pi_0')]$$
$$C e' e^2 \cos[5M' - 2M - 4(\pi_0 - \pi_0')]$$
$$D e^3 \cos[5M' - 2M - 5(\pi_0 - \pi_0')].$$

Bleibt man bei den Gliedern dritter Ordnung stehen, so sind nur die Coëfficienten $A$, $B$, $C$, $D$ zu berechnen.

Das Glied mit dem Coefficienten $A$ entsteht offenbar aus dem Produkte $\cos 3M' \cos 2Q$ und $\sin 3M' \sin 2Q$. Zu betrachten sind daher die folgenden Verbindungen, bei denen die durch die Auflösung der Produkte entstandenen Glieder, die nicht das Argument $A = 5M' - 2M - 2(\pi_0 - \pi_0')$ enthalten, durch * bezeichnet sind.

$$a'\sigma' \cdot \frac{\partial B_0^{(2)}}{\partial a'} \cos 2Q = -\tfrac{3}{8} a' e'^3 \cos 3M' \frac{\partial B_0^{(2)}}{\partial a'} \cos 2Q = -\tfrac{3}{16} e'^3 a' \frac{\partial B_0^{(2)}}{\partial a'} \cos A + {*}$$

$$\nu' \cdot 2 B_0^{(2)} \sin 2Q = +\tfrac{13}{12} e'^3 \sin 3M' \cdot 2 B_0^{(2)} \sin 2Q = +\tfrac{13}{12} e'^3 B_0^{(2)} \cos A + {*}$$

$$\tfrac{1}{2} a'^2 \sigma'^2 \frac{\partial^2 B_0^{(2)}}{\partial a'^2} \cos 2Q = +\tfrac{1}{4} a'^2 e'^3 \cos 3M' \frac{\partial^2 B_0^{(2)}}{\partial a'^2} \cos 2Q = +\tfrac{1}{8} e'^3 a'^2 \frac{\partial^2 B_0^{(2)}}{\partial a'^2} \cos A + {*}$$

$$\tfrac{1}{6} a'^3 \sigma'^3 \frac{\partial^3 B_0^{(2)}}{\partial a'^3} \cos 2Q = -\tfrac{1}{24} a'^3 e'^3 \cos 3M' \frac{\partial^3 B_0^{(2)}}{\partial a'^3} \cos 2Q = -\tfrac{1}{48} e'^3 a'^3 \frac{\partial^3 B_0^{(2)}}{\partial a'^3} \cos A + {*}$$

$$-\tfrac{1}{2} a'^2 \sigma'^2 (\nu - \nu') \cdot 2 \frac{\partial^2 B_0^{(2)}}{\partial a'^2} \sin 2Q = + a'^2 e'^3 \sin M' \cos^2 M' \frac{\partial^2 B_0^{(2)}}{\partial a'^2} \sin 2Q =$$
$$= +\tfrac{1}{4} e'^3 a'^2 \frac{\partial^2 B_0^{(2)}}{\partial a'^2} \cos A + {*}$$

$$-\tfrac{1}{2} a' \sigma' (\nu - \nu')^2 \cdot 4 \frac{\partial B_0^{(2)}}{\partial a'} \cos 2Q = -4 a' e'^3 \cos M' \cos^2 M' \frac{\partial B_0^{(2)}}{\partial a'} \cos 2Q =$$
$$= - e'^3 a' \frac{\partial B_0^{(2)}}{\partial a'} \cos A + {*}$$

$$+\tfrac{1}{6} (\nu - \nu')^3 \cdot 8 B_0^{(2)} \sin 2Q = -\tfrac{1}{3} e'^3 B_0^{(2)} \sin 3M' \sin 2Q = -\tfrac{1}{6} e'^3 B_0^{(2)} \cos A + {*}.$$

Die Summe der hier angesetzten Coëfficienten giebt den Coëfficienten $A$; in ähnlicher Weise sind $B$, $C$, $D$ zu entwickeln. Für die von der Neigung abhängigen Glieder sind in dem Ausdrucke $\Pi \cdot \rho^{-3}$ nur die Glieder erster Potenz der Excentricität beizubehalten; daher hat man für $\iota$, $\lambda$ die Werthe 0, 1, 2 zu setzen. Beachtet man, dass $c_\iota - s_\iota$ um zwei Ordnungen höher ist, als $c_\iota + s$ so findet man, dass aus dem Gliede nullter Ordnung in $\rho^{-3}$ und den Gliedern

[1]) Die Daten aus dem »Berliner astronomischen Jahrbuch« für 1899.

erster Ordnung in II kein Glied dieser Gattung entsteht. Die Glieder nullter Ordnung in H entstehen für $\iota = \lambda = 1$, und man sieht sofort, dass sie mit den Gliedern erster Ordnung von $a\sigma$, $a'\sigma'$ und $\nu - \nu'$ die Argumente $M$, $M'$, $2M' \pm M$, $M' \pm 2M$ geben, aus welchen das gesuchte Argument $5M' - 2M$ nur für $\varkappa = 3$ in Verbindung mit $2M' + M$ und $\varkappa = 4$ mit $M' + 2M$ ensteht. Man findet für den ersten Fall die beiden Glieder:

$$-a'e'\frac{\partial B_1^{(3)}}{\partial a'}\cos 3Q \cdot \tfrac{1}{2}aa'\cos(2M' + M + \pi_0' + \pi_0) \quad \text{und}$$
$$+2e'\cdot 3B_1^{(3)}\sin 3Q \cdot \tfrac{1}{2}aa'\sin(2M' + M + \pi_0' + \pi_0),$$

woraus

$$aa'e'\left(\tfrac{3}{4}B_1^{(3)} - \tfrac{1}{8}a'\frac{\partial B_1^{(3)}}{\partial a'}\right)(\sin^2 i + \sin^2 i')\cos(5M' - 2M + 4\pi_0' - 2\pi_0)$$
$$-aa'e'\left(\tfrac{3}{4}B_1^{(3)} - \tfrac{1}{8}a'\frac{\partial B_1^{(3)}}{\partial a'}\right)\sin i \sin i'\,[\cos(5M' - 2M + 4\pi_0' - 2\pi_0 + \Omega' - \Omega)$$
$$+\cos(5M' - 2M + 4\pi_0' - 2\pi_0 - \Omega' + \Omega)]$$

entsteht. Sollte man bei diesen Entwickelungen auch die Glieder 5ter Ordnung berücksichtigen, so müsste in den Gliedern dritter Ordnung $\pi_0 - \pi_0'$ durch $\pi - \pi_0 + \Delta$ ersetzt werden.

**45.** Argumente langer Periode in den Planetenbewegungen. Aehnliche Glieder treten bei der Entwickelung der Störungen aller Planeten auf. Man kann die betreffenden Glieder finden, indem man $\frac{\mu}{\mu'}$ in einen Kettenbruch entwickelt, und dessen Näherungswerthe sucht. Sei

$$\frac{\mu}{\mu'} = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \ldots}}$$

und die aufeinanderfolgenden Näherungswerthe und eingeschalteten Werthe

$$\frac{\iota}{\lambda}, \frac{\iota'}{\lambda'}, \frac{\iota''}{\lambda''} \ldots,$$

so werden die Ausdrücke $\iota\mu - \lambda\mu'$; $\iota'\mu - \lambda'\mu'$; $\iota''\mu - \lambda''\mu'$, welche als Integrationsdivisoren auftreten, kleine Werthe erlangen, aber nach dem Gesagten mit immer höheren Potenzen der Excentricitäten und Neigungen multiplicirt sein. Die mittleren täglichen siderischen Bewegungen[1]) der grossen Planeten sind:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Für Mercur . | 14732''·41967 | Jupiter . | 299''·12836 |
| Venus . | 5767·66982 | Saturn . | 120·45465 |
| Erde . | 3548·19286 | Uranus . | 42·23079 |
| Mars . | 1886·51881 | Neptun . | 21·53302. |

Damit erhält man für die folgenden Combinationen (die mittlere Länge des Planeten durch sein Zeichen ausgedrückt):

| Störungen zwischen | Argument | tägliche Veränderung des Arg. | Periode |
|---|---|---|---|
| 1. Mercur-Venus . . . . | 2 ☿ − 5 ♀ | 626''·490 | 5·67 Jahre |
| 2. Venus-Erde . . . . . | 5 ♁ − 3 ♀ | 437·955 | 8·1 Jahre |
| 3. „ „ . . . . . | 5 ♀ − 8 ♁ | 452·806 | 7·8 Jahre |
| 4. „ „ . . . . . | 8 ♀ − 13 ♁ | 14·8514 | 240 Jahre |
| 5. Erde-Mars . . . . . | 2 ♂ − ♁ | 224·844 | 16 Jahre |
| 6. „ „ . . . . . | 8 ♁ − 15 ♂ | 87·7682 | 40 Jahre |

[1]) $\mu$ muss wegen des Werthes von $k$ für die Einheit des mittleren Sonnentages ausgedrückt werden.

| Störungen zwischen | Argument | tägliche Veränderung des Arg. | Periode |
|---|---|---|---|
| 7. Venus-Mars . . . . | ♀ — 3♂ | 108·115 | 88 Jahre |
| 8. Jupiter-Saturn . . . | 5♄ — 2♃ | 4·01658 | 888 Jahre |
| 9. Saturn-Uranus . . . | 3♅ — ♄ | 6·23772 | 569 Jahre |
| 10. Jupiter-Uranus . . . | ♃ — 7♅ | 3·51288 | 1010 Jahre |
| 11. Uranus-Neptun . . | 2♆ — ♅ | 0·83525 | 4250 Jahre |
| 12. Saturn-Neptun . . | 2♄ — 11♆ | 4·04608 | 877 Jahre |

Zwischen den mittleren Bewegungen der äusseren und inneren Planeten bestehen keine genäherten Beziehungen dieser Art, denn die mittleren Bewegungen sind zu verschieden. Doch ist z. B. ♂ — 6♃ = 91″·748, woraus ein Glied mit ca. 89 jähriger Periode entsteht.

Die Störungen sind selbstverständlich wechselseitig; berücksichtigt man von der Störungsfunction nur jene Theile, welche sich auf die Masse $m'$ beziehen, so ist:

$$\Omega = k^2 m' \left(\frac{1}{r_{01}} - \Gamma\right).$$

Umgekehrt wird die Störung, welche die Masse $m'$ durch $m$ erfährt, bestimmt durch die Störungsfunction

$$\Omega' = k^2 m \left(\frac{1}{r_{01}} - \Gamma'\right),$$

woraus folgt, dass in beiden Entwickelungen dieselben Argumente, also auch dieselben Glieder langer Periode auftreten.

Die Dauer der Periode $P$[1]) giebt ein Maass für die Kleinheit des Divisors; die Differenz $\iota - \lambda$ die Ordnung des Coefficienten. Bezeichnet man die kleinen Parameter, welche als Grössen erster Ordnung aufgefasst werden können, allgemein mit $p$, so wird man als ungefähren Maassstab für die Beurtheilung der Grösse des Coëfficienten in den Integralen von 48 (4) den Ausdruck $Pp^{\iota-\lambda}m$ ansehen können, während dieser Coëfficient in $\zeta$ von der Ordnung $P^2p^{\iota-\lambda}m$ wird. Numerisch allerdings werden die Ausdrücke noch sehr verschieden sein können, da die numerischen Werthe der Parameter $p$ von einander sehr abweichen. So ist die Excentricität des Mercur das 30fache derjenigen der Venusbahn, diejenige der Marsbahn nahe das 6fache derjenigen der Erdbahn u. s. w.

Von den angeführten Ungleichheiten sind einige besonders wichtig. So die 4te, 5te und 7te, die letzten beiden sind von der ersten Ordnung der Excentricität. Die letzten fünf werden bedeutend wegen der relativen Nähe der störenden Massen gegenüber der Entfernung des Centralkörpers. Die 8te und 11te haben eine historische Bedeutung. Die von dem Argumente 5♄ — 2♃ abhängige Ungleichheit in der Bewegung der beiden Himmelskörper hat wegen der sehr langen Periode innerhalb des Zeitraumes von mehreren Decennien einen secularen Charakter; sie ist die von Halley angegebene Secularbeschleunigung des ♄ und Secularverzögerung des ♃ (s. I. Bd., pag. 119). Die von dem Argumente 2♆ — ♅ abhängige Ungleichheit bewirkt in der Bewegung des Uranus Störungen, die sehr bedeutend sind. Allerdings ist hier die Periode so gross, dass innerhalb kurzer Zeiträume die Veränderlichkeit des Gliedes nicht merklich wird; hier aber werden die von den doppelten und dreifachen Argumenten abhängigen Glieder noch

---

[1]) Für ein Argument $\iota M - \lambda M'$, dessen tägliche Veränderung $\iota\mu - \lambda\mu'$ ist, wird die Periode $\frac{360°}{\iota\mu - \lambda\mu'}$ Tage oder, da $\mu$ und $\mu'$ in Secunden ausgedrückt werden, $\frac{360° \times 60 \times 60}{(\iota\mu - \lambda\mu')365 \cdot 2422}$ Jahre.

maassgebend, da die Integrationsdivisoren noch immer sehr klein sind, und die Glieder von der Ordnung der zweiten bezw. dritten Potenzen der Parameter sind. 50 Jahre nach der Entdeckung des Uranus konnte, da die Theorie der Störungen bereits über die Wechselwirkungen der Planeten ein ausreichendes Bild gegeben hatte, ein Zweifel darüber nicht mehr bestehen, dass die grossen Abweichungen, welche die beobachteten Oerter des Uranus gegenüber den berechneten ergaben, einem störenden Körper zugeschrieben werden müssten. Die analytische Verfolgung dieser Annahme führte zur Entdeckung des Neptun

46. Bemerkungen über die Störungen zweiter Potenz der Massen. Substituirt man in die Störungsfunction an Stelle der Elemente ihre gestörten Werthe, so wird man nebst den Verbesserungen der in der ersten Näherung aufgetretenen Glieder noch andere erhalten, von denen einige beträchtlich werden konnen. Da man jetzt in der Störungsfunction die Störungen zu berücksichtigen hat, welche von allen störenden Körpern herrühren, so treten in dieselben Glieder mit den Argumenten $i'M - \lambda' M'$; $i''M - \lambda'' M''$; $i'''M - \lambda''' M'''$ . . . , welche mit den von den Argumenten $M$ und $M'$, $M$ und $M''$ . . . abhängigen Glieder multiplicirt werden. Es treten daher nunmehr Combinationen der Form $\alpha M + \beta M' + \gamma M''$ auf. Auch diese können für gewisse Werthe der ganzen Zahlen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ numerisch sehr kleine Integrationsdivisoren erhalten, wenn $\alpha\mu + \beta\mu' + \gamma\mu''$ nahe Null ist. Beschränkt man sich dabei auf die Glieder niedrigster Ordnung der Parameter, so findet man für derartige Argumente z. B.: ☿ — 2 ♁ — 4 ♂ (Periode 89 Jahre), ♃ — ♄ — 4♅ (860 Jahre), 4♄ + 3♅ — 2♃ (850 Jahre), 2♄ + 8♆ — ♃ (560 Jahre), 2♅ + 2♆ — ♄ (520 Jahre), ♅ + 4♆ — ♄ (440 Jahre) u. s. w. Die Integrationsdivisoren werden aber vielfach modificirt durch das Auftreten der Seculärglieder in der Bewegung von Knoten und Perihel; sie werden dann

$$\Delta = \alpha\mu + \beta\mu' + \gamma\mu'' + \alpha'\pi_1 + \beta'\pi_1' + \beta''\pi_1'' + \alpha''\Omega_1 + \beta''\Omega_1' + \gamma''\Omega_1''.$$

Bei den Störungen, die von der dritten Potenz der Masse abhängen, werden, wie man sofort sieht, noch die von dem vierten Planeten abhängigen Grössen $\mu'''$, $\pi'''$, $\Omega'''$ hinzutreten. Bei gegebenen Werthen der $\mu$, $\mu'$, $\mu''$ . . . $\pi_1$, $\pi_1'$, $\pi_1''$ . . . wird man aber immer ganzzahlige, positive oder negative Werthe der Coëfficienten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\alpha'$ . . . finden, welche dem Integrationsdivisor $\Delta$ einen sehr kleinen Werth ertheilen, und je grösser die Anzahl der verfügbaren Daten, d. h. je grösser die Zahl der betrachteten Argumente, desto leichter wird es, dem Nenner $\Delta$ einen immer kleineren Werth zu geben.

Sei ein Argument $A = \alpha M + \beta M' + \gamma M'' + \ldots + \alpha'\pi + \beta'\pi' + \ldots$ derart, dass die tägliche Bewegung gleich Null würde, also

$$\frac{dA}{dt} = \alpha\mu + \beta\mu' + \gamma\mu'' + \ldots + \alpha'\pi_1 + \beta'\pi_1' + \ldots = 0$$

und $\Omega = C \cos A$. Bildet man hier die Ableitungen nach den einzelnen Veränderungen, so wird für irgend ein Element:

$$\frac{dE}{dt} = C' \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} A \quad \text{z. B.} \quad \frac{da}{dt} = -\frac{2}{a\mu}\, \alpha C \sin A.$$

Da aber $\dfrac{dA}{dt} = 0$ ist, so ist $A$ constant, und es wird die aus diesem Gliede entstehende Störung des Elementes

$$\delta E = C' t \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} A; \qquad \delta a = -\left(\frac{2}{a\mu}\, \alpha C \sin A\right) t,$$

daher ein thatsächlich seculares Glied. Die Werthe der Coefficienten und Argumente sind aber von den angenommenen Elementen abhängig, daher können kleine Aenderungen in den mittleren Bewegungen die Form der Glieder verändern: aus langperiodischen Gliedern werden seculare und umgekehrt. Mit den Aenderungen der mittleren Bewegungen sind aber correspondirende Aenderungen der grossen Axen verbunden, und in dem Maasse als, den Aenderungen von $\mu$, $\mu'$ . . . entsprechend, $\frac{dA}{dt}$ stetig kleiner wird, wird nothwendigerweise auch der Coëfficient $C$ stetig abnehmen, und für $\frac{dA}{dt} = 0$ wird endlich der Coëfficient des Integrales in der Form $\frac{0}{0}$ auftreten; durch eine zweckentsprechende Integrationsmethode könnten daher diese secularen Glieder zum Verschwinden gebracht werden.

Für die grossen Planeten sind die mittleren Bewegungen derartige, dass die von den ersten Potenzen der störenden Massen abhängigen Glieder solche Complicationen nicht herbeiführen, obzwar die mittleren Bewegungen des Neptun und selbst des Uranus noch beträchtlichen Unsicherheiten unterliegen. Wesentlich anders ist es jedoch bei den kleinen Planeten; die mittleren Bewegungen derselben schwanken zwischen 403'' (Planet 279) und 1175'' (330) und es treten vielfach nahe commensurable Verhältnisse mit der mittleren Bewegung $\mu'$ des nahen und mächtigen Jupiter auf. So z. B.[1]):

| | | | |
|---|---|---|---|
| für (279): | $3\mu - 4\mu' = 18''\cdot04$ | für (188): | $2\mu - 5\mu' = 2''\cdot00$ |
| „ (153): | $2\mu - 3\mu' = 2\cdot88$ | „ (266): | $2\mu - 5\mu' = 15\cdot24$ |
| „ (190): | $2\mu - 3\mu' = 7\cdot88.$ | | u. s. w. |

Hierzu kommt noch, dass die kleinen Planeten sehr beträchtliche Excentricitäten und Neigungen haben und daher die Störungscoëfficienten ziemlich bedeutend werden, ein Umstand, der sich übrigens auch bei allen anderen Integrationsmethoden fühlbar macht.

Eine besondere Wichtigkeit erlangt der Fall eines constanten Argumentes auch für die Theorie der Jupitersatelliten. Bezeichnet man die mittleren Bewegungen der fünf Satelliten der Reihe nach mit $\mu'$ $\mu''$ $\mu'''$ $\mu''''$ $\mu^{(5)}$ so gelten für die drei mittleren die folgenden Beziehungen:

$$\mu'' - 2\mu''' \text{ und } \mu''' - 2\mu'''' \text{ sind äusserst kleine Werthe,}$$

die Differenz $(\mu'' - 2\mu''') - (\mu''' - 2\mu'''') = \mu'' - 3\mu''' + 2\mu'''' = 0$ ist völlig strenge Null. Souillart, der für die Satelliten die Störungen der Elemente bestimmt[2]), berücksichtigt hierbei auch sofort die secularen Variationen der Elemente $\Omega$, $\pi$, wodurch die Schwierigkeit umgangen wird, und die Methode sich mit der von Laplace angewandten Berechnung der Störungen in polaren Coordinaten (s. No. 57) deckt[3]).

**47. Störungen in polaren Coordinaten.** So verschieden die Integrationsmethoden hier, je nach der Wahl der Variabeln sind, so liegt allen das gemeinschaftliche Princip zu Grunde, die auch hier auftretenden secularen Glieder auf die eine Coordinate, welche der Natur der Sache nach ein der Zeit proportionales

---

[1]) Aus den ersten 330; für (132) ist überdies $\mu' - 3\mu = 6''\cdot20$, der Excentricitätswinkel nahe 20°; der Planet ist aber nur in einer Opposition beobachtet und später nicht wieder gesehen worden.

[2]) Mémoirs of the Royal Society, Bd. 45.

[3]) l. c. pag. 14 und 30.

Glied enthalten muss, die Länge, zu beschränken, d. h. die durch die Integration auftretenden secularen Glieder im Radiusvector und in der Breite zu eliminiren.

Die älteste Form der Differentialgleichungen, welche der Störungsrechnung zu Grunde gelegt wurde, ist ($D$) (pag. 295); indem der reciproke Werth des Radiusvectors in der ungestörten Bewegung sich in einfacher Weise durch die wahre Anomalie darstellt, war es natürlich, auch für die gestörte Bewegung nicht den Radiusvektor selbst, sondern seinen reciproken Werth als zu bestimmende Variable einzuführen. Während CLAIRAUT an Stelle der dritten Differentialgleichung ($D$), welche die Breite bestimmt, die Variationen von Knoten und Neigung ermittelt, benützt er zur Bestimmung des Radiusvector und der Zeit die beiden ersten Gleichungen ($D$). CLAIRAUT integrirt dieselbe in folgender Weise: Durch Multiplikation mit $\cos l$ wird die linke Seite ein vollständiges Differential; man erhält daher durch Integration

$$\frac{du}{dl}\cos l + u\sin l = \int U'\cos l\,dl + C_1; \qquad U' = \frac{1}{V^2 u^2}\,U.$$

Wird diese Gleichung mit $\sec^2 l\,dl$ multiplicirt, so wird die linke Seite wieder ein vollständiges Differential, und giebt intergrirt:

$$\frac{u}{\cos l} = \int\frac{dl}{\cos^2 l}\int U'\cos l\,dl + C_1\int\frac{dl}{\cos^2 l} + C_2.$$

Durch partielle Integration des ersten Gliedes folgt

$$\int\frac{dl}{\cos^2 l}\int U'\cos l\,dl = \operatorname{tang} l\int U'\cos l\,dl - \int \operatorname{tang} l\,U'\cos l\,dl,$$

daher

$$u = \sin l\int U'\cos l\,dl - \cos l\int U'\sin l\,dl + C_1\sin l + C_2\cos l.$$

Sind $z_1$, $z_2$ zwei particuläre Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + N^2y = Y \tag{1}$$

für $Y = 0$, so kann das allgemeine Integral für jede beliebige Function $Y$ nach der Methode der Variation der Constanten erhalten werden. Es ist:

$$y = z_1\int\frac{Yz_2\,dt}{z_2\frac{dz_1}{dt} - z_1\frac{dz_2}{dt}} + z_2\int\frac{Yz_1\,dt}{z_1\frac{dz_2}{dt} - z_2\frac{dz_1}{dt}} + C_1z_1 + C_2z_2, \tag{2a}$$

wobei $C_1$ $C_2$ Constante sind. Zwei particuläre Integrale der reducirten Differentialgleichung (1) (für $Y = 0$) sind aber, wenn $N$ constant ist:

$$z_1 = \sin Nt; \quad z_2 = \cos Nt;$$

Das allgemeine Integral der Gleichung (1) wird daher

$$y = C_1\sin Nt + C_2\cos Nt + \frac{\sin Nt}{N}\int Y\cos Nt\,dt - \frac{\cos Nt}{N}\int Y\sin Nt\,dt. \tag{2b}$$

Zerlegt man $U'$ in $U_0 + \Omega$, wobei $U_0$ die Attraction des Centralkörpers, $\Omega$ die störende Kraft darstellt, so wird für $\Omega = 0$ die elliptische Bewegung resultiren, also

$$u_0 = \frac{1}{p} + C_1\sin l + C_2\cos l = \frac{1 - e\cos v}{p}.$$

Es ist daher

$$u = \frac{1 - e\cos v}{p} + \Delta, \quad \text{wobei} \quad \Delta = \sin l\int\Omega\cos l\,dl - \cos l\int\Omega\sin l\,dl$$

(vergl. I. Band, pag. 124).

Man kann die Differentialgleichung für die Störungen des Radiusvectors selbst auf eine ähnliche Form bringen. Das Integral der lebendigen Kraft $T = U + h$ wird in Polarcoordinaten für einen einzelnen Himmelskörper

$$U + h = m\int(Xdx + Ydy + Zdz) = m\int\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}dr + \frac{\partial\Omega}{\partial l}dl + \frac{\partial\Omega}{\partial b}db\right)$$

die Form annehmen[1])

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \cos b^2 \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{db}{dt}\right)^2 = 2\int d'\Omega + h, \tag{3}$$

wobei mit $d'\Omega$ das totale Differential der Störungsfunction in Bezug auf sämmtliche Coordinaten des gestörten Himmelskörpers (die Coordinaten der störenden Körper dabei als constant angesehen) bezeichnet wird. Multiplicirt man nun die erste Gleichung (*C*) (pag. 293) mit $r$ und addirt dazu die Gleichung (3), so erhält man

$$r\frac{d^2 r}{dt^2} + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{dt^2} = r\frac{\partial\Omega}{\partial r} + 2\int d'\Omega + h.$$

Setzt man $\frac{k_0^2}{r} + \Omega$ an Stelle von $\Omega$ indem die Wirkung des Centralkörpers für sich betrachtet wird, so geht diese Gleichung über in

$$\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{dt^2} - \frac{k_0^2}{r} - h = r\frac{\partial\Omega}{\partial r} + 2\int d'\Omega. \tag{4}$$

Ist $r_0$ der elliptische Werth (ohne Rücksicht auf Störungen), so ist:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2(r_0^2)}{dt^2} - \frac{k_0^2}{r_0} - h = 0. \tag{4a}$$

Sei nun $r = r_0 + \delta r$, so wird $r^2 - r_0^2 = (2r - \delta r)\delta r = 2r\delta r - (\delta r)^2$

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = -\frac{\delta r}{rr_0} = -\frac{r\delta r}{r_0 r^2} = -\frac{r\delta r}{r_0^3}\left[1 - 2\left(\frac{\delta r}{r_0}\right) + 3\left(\frac{\delta r}{r_0}\right)^2 \dots\right]$$

daher

$$\frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + k_0^2\frac{(r\delta r)}{r_0^3} = 2\int d'\Omega + r\frac{\partial\Omega}{\partial r} + \frac{1}{2}\frac{d^2(\delta r)^2}{dt^2} - 2k_0^2 \cdot \frac{r(\delta r)^2}{r_0^4} + \dots$$

Wenn die von den zweiten und höheren Potenzen von $\delta r$ abhängigen Glieder in erster Näherung vernachlässigt werden, so wird

$$\frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + k_0^2\frac{(r\delta r)}{r_0^3} = 2\int d'\Omega + r\frac{\partial\Omega}{\partial r}. \tag{5}$$

Diese Gleichung geht aus (4a) hervor, wenn man die rechte Seite in (4) als das aus der Variation von (4a) entstehende Zusatzglied ansieht.

Für die Bestimmung der Störungen in Länge und Breite dienen die zweite und dritte Formel (*C*). Mit Hilfe des Integrales der lebendigen Kraft lässt sich jedoch ein Differentialquotient eliminiren. Führt man zunächst an Stelle der Länge $l$ den wahren, vom Radiusvector beschriebenen Winkel $L$ (die wahre Länge in der osculirenden Bahn) ein, so ist:

$$dl^2 \cos b^2 + db^2 = dL^2. \tag{6}$$

Die Gleichung für die lebendige Kraft wird dann, wenn an Stelle von $\Omega$ wieder $\frac{k_0^2}{r} + \Omega$ gesetzt wird:

---

[1]) Man erhält diese Gleichung auch, wenn man die drei Differentialgleichungen *C* der Reihe nach mit $\frac{dr}{dt}, \frac{dl}{dt}, \frac{db}{dt}$ multiplicirt und integrirt.

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{dL}{dt}\right)^2 = 2\frac{k_0^2}{r} + 2\int d'\Omega + h. \tag{6a}$$

Subtrahirt man von dieser Gleichung die Gleichung (4) und beachtet, dass[1])

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \tfrac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{dt^2} = -r\frac{d^2r}{dt^2}$$

ist, so erhält man

$$r^2\left(\frac{dL}{dt}\right)^2 - r\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{k_0^2}{r} = -r\frac{\partial\Omega}{\partial r}. \tag{7}$$

Für die ungestörte Bewegung ist wieder

$$r_0^2\left(\frac{dL_0}{dt}\right)^2 - r_0\frac{d^2r_0}{dt^2} - \frac{k_0^2}{r_0} = 0.$$

Subtrahirt man die beiden Gleichungen und vernachlässigt Grössen zweiter Ordnung der Störungen, so kann man das Resultat einfach durch Variation der linken Seite von (7) erhalten, und findet:

$$2r^2\frac{dL}{dt}\frac{d\delta L}{dt} + 2r\left(\frac{dL}{dt}\right)^2\delta r - \delta r\frac{d^2r}{dt^2} - r\frac{d^2\delta r}{dt^2} + \frac{k_0^2 r\delta r}{r^3} = -r\frac{\partial\Omega}{\partial r}$$

$$2r^2\frac{dL}{dt}\frac{d\delta L}{dt} = -\delta r\frac{d^2r}{dt^2} - 3k^2\frac{r\delta r}{r^3} + r\frac{d^2\delta r}{dt^2} + 2\delta r\frac{\partial\Omega}{\partial r} - r\frac{\partial\Omega}{\partial r}.$$

Substituirt man hier für $r\delta r$ seinen Ausdruck aus (5), so folgt:

$$2r^2\frac{dL}{dt}\frac{d\delta L}{dt} = -\delta r\frac{d^2r}{dt^2} + 3\frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + r\frac{d^2\delta r}{dt^2} - 6\int d'\Omega - 3r\frac{\partial\Omega}{\partial r} + 2\delta r\frac{\partial\Omega}{\partial r} - r\frac{\partial\Omega}{\partial r}$$

$$= 2\frac{d}{dt}\left[\frac{dr}{dt}\delta r + 2r\frac{d\delta r}{dt}\right] - 6\int d'\Omega - 4r\frac{\partial\Omega}{\partial r} + 2\delta r\frac{\partial\Omega}{\partial r}.$$

Mit Vernachlässigungen der zweiten Potenzen der Störungen ist aber $r^2 dL$ in dem Coëfficienten von $d\delta L$ gleich seinem Werthe in der ungestörten Bewegung, also gleich $k_0\sqrt{a(1-e^2)}$. Vernachlässigt man dann ebenso rechts das Product von $\delta r$ in die störenden Kräfte, so folgt durch Integration[2]):

$$\delta L = \frac{1}{k_0\sqrt{a}\sqrt{1-e^2}}\left[\frac{dr}{dt}\delta r + 2r\frac{d\delta r}{dt} - 3\int dt\int d'\Omega - 2\int r\frac{\partial\Omega}{\partial r}dt\right]. \tag{8}$$

Die dritte zu verwendende Differentialgleichung wird:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k^2z}{r^3} = \frac{\partial\Omega}{\partial z}. \tag{9}$$

Die Gleichungen (5), (8), (9) (mit Benützung der Beziehung $z = rs$) sind die von LAPLACE für die Theorie der grossen Planeten verwendeten Differentialgleichungen. Die Gleichungen (5) und (9) integriren sich unmittelbar nach (1), (2); in der Gleichung (8) treten nebst der bereits bekannten Grösse $\delta r$ und ihrem ersten Differentialquotienten nur Quadraturen auf. Aus dem Werthe $L$ lässt sich $l$ leicht ermitteln; es ist nach (6):

$$\frac{dl^2}{1+s^2} = dL^2 - \left(\frac{ds}{1+s^2}\right)^2,$$

daher

---

[1]) Würde man die Variation der Gleichung (6a) bilden, so erhielte man $\delta r$ und $\frac{d\delta r}{dt}$ in nicht unmittelbar integrabler Form.

[2]) Da $k_0 = \mu a^{\frac{1}{2}}$ ist, so wird $\frac{1}{k_0\sqrt{a}} = \frac{1}{\mu a^2}$ oder $\frac{1}{k_0\sqrt{a}} = \frac{\mu a}{k_0^2}$. LAPLACE verwendet für die ersten beiden Glieder die erste, für die beiden letzten Glieder die zweite Form.

$$dl = \frac{dL}{\sqrt{1+s^2}}\sqrt{(1+s^2)^2 - \left(\frac{ds}{dL}\right)^2}. \tag{10}$$

Nimmt man als Fundamentalebene die ungestörte Bahnebene, so ist $l = L$ zu setzen.

Um hiernach die Störungen zu berechnen, braucht man die Ausdrücke $\frac{\partial \Omega}{\partial r}$, $\frac{\partial \Omega}{\partial s}$ und $d'\Omega$.

Was zunächst die letztere Grösse anbetrifft, so hat man offenbar

$$d'\Omega = \mu \frac{\partial \Omega}{\partial M_0} dt; \tag{11a}$$

denn entwickelt man alle Variabeln nach *cos* und *sin* der Vielfachen der mittleren Anomalien, so werden nur diese nach der Zeit veränderlich sein, das totale Differential nach allen Veränderlichen des gestörten Himmelskörpers wird daher gleich dem totalen Differentiale nach der mittleren Anomalie. Zur Bildung des Ausdruckes $r\frac{\partial \Omega}{\partial r}$ hätte man in dem Ausdrucke für $\Omega$ vor der Einführung der mittleren Anomalie zu differenziren. Da aber $r = a(1+\sigma)$ ist, und $a$ nur durch diesen Werth, nicht aber durch andere Variable eingeführt wird, so wird

$$\frac{\partial \Omega}{\partial r} = \frac{\partial \Omega}{\partial a}\frac{da}{dr} = \frac{\partial \Omega}{\partial a}\frac{1}{1+\sigma},$$

folglich

$$r\frac{\partial \Omega}{\partial r} = a\frac{\partial \Omega}{\partial a} \tag{11b}$$

welche Operation auch auf den entwickelten Ausdruck von $\Omega$ angewendet werden kann.

**48. Beispiel:** Es sollen nun hier beispielsweise die Ausdrücke bis einschliesslich den ersten Ordnungen der Excentricitäten und Neigungen entwickelt werden. In der Zerlegung 37 (4) ist $\Omega''$ von der zweiten Ordnung der Neigungen; für die Differentiation nach $s$ müssen diese Glieder mitgenommen werden, weil sie sich durch die Differentiation um eine Einheit erniedrigen; hingegen können sie bei der Differentiation nach $r$ weggelassen werden. Man hat daher für die hier festgesetzte Näherung:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial r} = \frac{\partial \Omega'}{\partial r}; \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial s} = \frac{\partial \Omega''}{\partial s}. \tag{1}$$

Für die Entwickelung von $\Omega'$ kann der bereits berechnete Ausdruck 37 (20) verwendet werden; mit den Ausdrücken 37 (21) wird für den vorliegenden Fall:

$$Q = M - M' + \pi_0 - \pi_0'$$

$$\Omega' = \Sigma k^2 m' \left\{\Sigma B_0^{(\varkappa)} \cos \varkappa Q - ae\cos M \Sigma \frac{\partial B_0^{(\varkappa)}}{\partial a}\cos\varkappa Q \right.$$
$$\left. - a'e'\cos M' \Sigma \frac{\partial B_0^{(\varkappa)}}{\partial a'}\cos\varkappa Q - (2e\sin M - 2e'\sin M')\Sigma\varkappa B_0^{(\varkappa)}\sin\varkappa Q\right\}. \tag{2}$$

In den in 37 entwickelten Ausdrücken für $\Omega''$ erhalten $\zeta$, $\zeta_0$ die Ausdrücke 34 (3), (5); da $\rho$, $r'$ von $s$ unabhängig sind, so wird nach 37 (4):

$$\frac{\partial \Omega''}{\partial s} = \Sigma k^2 m' \left\{-\frac{1}{2}\frac{1}{\rho^3}\frac{\partial \zeta}{\partial s} + \frac{1}{r'^3}\frac{d\zeta_0}{ds} \ . \quad . \right\}$$

und indem man in $\zeta$, $\zeta_0$ die von $s$ unabhängigen Glieder weglässt:

$$(\zeta_0) = -r's\sin(v' + \pi_0')\sin J - ss'\cos J$$
$$(\zeta) = -2r's\sin(v' + \pi_0')\sin J - 2ss'\cos J + s^2.$$

Da übrigens $s'$ von der Ordnung der Störungen des störenden Himmelskörpers ist, so wird man $s' = 0$ setzen können, und hat:

$$\frac{\partial \Omega''}{\partial s} = \Sigma k^2 m' \left\{ \frac{r' \sin(v' + \pi_0') \sin J + s}{\rho^3} - \frac{\sin(v' + \pi_0') \sin J}{r'^2} \right\}.$$

Hier sind noch die von der Excentricität abhängigen Glieder wegzulassen, und es wird

$$\frac{\partial \Omega}{\partial s} = \Sigma k^2 m' \sin J \left\{ a' \sin(M' + \pi_0') \Sigma B_1^{(x)} \cos x Q - \frac{1}{a'^2} \sin(M' + \pi_0') \right\} + s \Sigma \frac{k^2 m'}{\rho^3}. \quad (8)$$

Schreibt man Kürze halber $\pi_0 - \pi_0' = \chi$, so wird $Q = M - M' + \chi$, und

$$\Omega' = \Sigma k^2 m' \{ \Sigma B_0^{(x)} \cos(xM - xM' + x\chi) - \tfrac{1}{2} ae \Sigma \frac{\partial B_0^{(x)}}{\partial a} [\cos[(x+1)M - xM' + x\chi]$$
$$+ \cos[(x-1)M - xM' + x\chi]]$$
$$- \tfrac{1}{2} a'e' \Sigma \frac{\partial B_0^{(x)}}{\partial a'} [\cos[xM - (x+1)M' + x\chi] + \cos[xM - (x-1)M' + x\chi]]$$
$$- e \Sigma x B_0^{(x)} [\cos[(x-1)M - xM' + x\chi] - \cos[(x+1)M - xM' + x\chi]]$$
$$+ e' \Sigma x B_0^{(x)} [\cos[xM - (x+1)M' + x\chi] - \cos[xM - (x-1)M' + x\chi]] \}.$$

Führt man hier, da die Summen von $-\infty$ bis $+\infty$ zu nehmen sind, in den Gliedern, in denen $x - 1$ vorkommt, den Summationsindex $x = -x'$ ein, so folgt daraus, da dann $x'$ ebenfalls von $-\infty$ bis $+\infty$ geht, und $B_0^{(x)} = B_0^{(-x)}$ ist:

$$\Omega' = \Sigma k^2 m' \{ \Sigma B_0^{(x)} \cos(xM - xM' + x\chi) - ae \Sigma \frac{\partial B_0^{(x)}}{\partial a} \cos[(x+1)M - xM' + x\chi]$$
$$- a'e' \Sigma \frac{\partial B_0^{(x)}}{\partial a'} \cos[xM - (x+1)M' + x\chi] + 2e \Sigma x B_0^{(x)} \cos[(x+1)M - xM' + x\chi]$$
$$+ 2e' \Sigma x B_0^{(x)} \cos[xM - (x+1)M' + x\chi] \}$$

oder

$$\Omega' = \Sigma k^2 m' \{ \Sigma B_0^{(x)} \cos(xM - xM' + x\chi)$$
$$+ 2e \Sigma \left( x B_0^{(x)} - \tfrac{1}{2} a \frac{\partial B_0^{(x)}}{\partial a} \right) \cos[(x+1)M - xM' + x\chi]$$
$$+ 2e' \Sigma \left( x B_0^{(x)} - \tfrac{1}{2} a' \frac{\partial B_0^{(x)}}{\partial a'} \right) \cos[xM - (x+1)M' + x\chi] \}.$$

Um den Vorgang zu zeigen, nach welchem der Ausdruck $\int d'\Omega + r\frac{\partial \Omega}{\partial r}$ gebildet wird, soll dieses Beispiel weiter entwickelt werden[1]. Bei der Differentiation nach $M_0$ werden alle Werthe verschwinden, welche von $M$ unabhängig sind; scheidet man diese Glieder aus, und transformirt zu diesem Zwecke den Summationsindex so, dass überall $xM$ auftritt, wodurch man in allen Summen das Glied für $x = 0$ absondern kann, so wird:

$$\Omega' = \Sigma k^2 m' \left\{ B_0^{(0)} - 2e \left( B_0^{(1)} + \tfrac{1}{2} a \frac{\partial B_0^{(1)}}{\partial a} \right) \cos(M' - \chi) - e'a' \frac{\partial B_0^{(0)}}{\partial a'} \cos M' \right.$$
$$+ \Sigma B_0^{(x)} \cos(xM - xM' + x\chi) + 2e \Sigma \left( (x-1) B_0^{(x-1)} - \tfrac{1}{2} a \frac{\partial B_0^{(x-1)}}{\partial a} \right) \cos[xM - (x-1)M' + (x-1)\chi]$$
$$\left. + 2e' \Sigma \left( x B_0^{(x)} - \tfrac{1}{2} a' \frac{\partial B_0^{(x)}}{\partial a'} \right) \cos[xM - (x+1)M' + x\chi) \right\}$$

[1]) Vergl. auch Mécanique céleste, Bd. I, 2. Buch, 6. Cap.

$$-\frac{1}{\mu}\, d'\Omega' = \Sigma k^2 m' \Big\{ \Sigma \varkappa \overline{B}_0^{(\varkappa)} \sin(\varkappa M - \varkappa M' + \varkappa\chi) \qquad (4)$$

$$+ 2e\Sigma\varkappa\left((\varkappa-1)\overline{B}_0^{(\varkappa-1)} - \tfrac{1}{2}a\,\frac{\partial \overline{B}_0^{(\varkappa-1)}}{\partial a}\right)\sin[\varkappa M - (\varkappa-1)M' + (\varkappa-1)\chi]$$

$$+ 2e'\Sigma\varkappa\left(\varkappa \overline{B}_0^{(\varkappa)} - \tfrac{1}{2}a'\,\frac{\partial \overline{B}_0^{(\varkappa)}}{\partial a'}\right)\sin[\varkappa M - (\varkappa+1)M' + \varkappa\chi]\Big\}$$

$$\int d'\Omega' = \tfrac{1}{2}C + \Sigma k^2 m' \Big\{ \Sigma \frac{\mu}{\mu-\mu'+\chi'}\, \overline{B}_0^{(\varkappa)} \cos(\varkappa M - \varkappa M' + \varkappa\chi) \qquad (4\text{a})$$

$$+2e\Sigma\frac{\varkappa\mu}{\varkappa\mu-(\varkappa-1)\mu'+(\varkappa-1)\chi'}\left((\varkappa-1)\overline{B}_0^{(\varkappa-1)} - \tfrac{1}{2}a\frac{\partial \overline{B}_0^{(\varkappa-1)}}{\partial a}\right)\cos[\varkappa M-(\varkappa-1)M'+(\varkappa-1)\chi]$$

$$+2e'\Sigma\frac{\varkappa\mu}{\varkappa\mu-(\varkappa+1)\mu'+\varkappa\chi'}\left(\varkappa \overline{B}_0^{(\varkappa)} - \tfrac{1}{2}a'\frac{\partial \overline{B}_0^{(\varkappa)}}{\partial a'}\right)\cos[\varkappa M-(\varkappa+1)M'+\varkappa\chi]\Big\}$$

$$r\frac{\partial\Omega'}{\partial r} = \Sigma k^2 m' \Big\{ a\frac{\partial \overline{B}_0^{(0)}}{\partial a} - e\left(3a\frac{\partial \overline{B}_0^{(1)}}{\partial a} + a^2\frac{\partial^2 \overline{B}_0^{(1)}}{\partial a^2}\right)\cos(M'-\chi) -$$

$$- e'aa'\frac{\partial^2 \overline{B}_0^{(0)}}{\partial a\,\partial a'}\cos M' + \Sigma a\frac{\partial \overline{B}_0^{(\varkappa)}}{\partial a}\cos(\varkappa M - \varkappa M' + \varkappa\chi) \qquad (4\text{b})$$

$$+2e\Sigma\left((\varkappa-1)a\frac{\partial \overline{B}_0^{(\varkappa+1)}}{\partial a} - \tfrac{1}{2}a\frac{\partial \overline{B}_0^{(\varkappa-1)}}{\partial a} - \tfrac{1}{2}a^2\frac{\partial^2 \overline{B}_0^{(\varkappa-1)}}{\partial a^2}\right)\cos[\varkappa M-(\varkappa-1)M'+(\varkappa-1)\chi]$$

$$+2e'\Sigma\left(\varkappa a\frac{\partial \overline{B}_0^{(\varkappa)}}{\partial a} - \tfrac{1}{2}aa'\frac{\partial^2 \overline{B}_0^{(\varkappa)}}{\partial a\,\partial a'}\right)\cos[\varkappa M - (\varkappa+1)M' + \varkappa\chi]\Big\}$$

$$Y = 2\int d'\Omega' + r\frac{\partial\Omega}{\partial r} = C + \Sigma k^2 m' \Big\{ a\frac{\partial \overline{B}_0^{(0)}}{\partial a} - e\left(3a\frac{\partial \overline{B}_0^{(1)}}{\partial a} + a^2\frac{\partial^2 \overline{B}_0^{(1)}}{\partial a^2}\right)\cos(M'-\chi) -$$

$$- aa'e'\frac{\partial^2 \overline{B}_0^{(0)}}{\partial a\,\partial a'}\cos M' + \Sigma\left(a\frac{\partial \overline{B}_0^{(\varkappa)}}{\partial a} + \frac{2\mu}{\mu-\mu'+\chi'}\overline{B}_0^{(\varkappa)}\right)\cos(\varkappa M - \varkappa M' + \varkappa\chi) +$$

$$+2e\Sigma\Bigg[\left((\varkappa-1)\overline{B}_0^{(\varkappa-1)} - \tfrac{1}{2}a\frac{\partial \overline{B}_0^{(\varkappa-1)}}{\partial a}\right)\frac{2\varkappa\mu}{\varkappa\mu-(\varkappa-1)\mu'+(\varkappa-1)\chi'} + \qquad (5)$$

$$+\left((\varkappa-\tfrac{1}{2})a\frac{\partial \overline{B}_0^{(\varkappa-1)}}{\partial a} - \tfrac{1}{2}a^2\frac{\partial^2 \overline{B}_0^{(\varkappa-1)}}{\partial a^2}\right)\Bigg]\cos[\varkappa M-(\varkappa-1)M'+(\varkappa-1)\chi] +$$

$$+2e'\Sigma\Bigg[\left(\varkappa \overline{B}_0^{(\varkappa)} - \tfrac{1}{2}a'\frac{\partial \overline{B}_0^{(\varkappa)}}{\partial a'}\right)\frac{2\varkappa\mu}{\varkappa\mu-(\varkappa+1)\mu'+\varkappa\chi'} +$$

$$+\left(\varkappa a\frac{\partial \overline{B}_0^{(\varkappa)}}{\partial a} - \tfrac{1}{2}aa'\frac{\partial^2 \overline{B}_0^{(\varkappa)}}{\partial a\,\partial a'}\right)\Bigg]\cos[\varkappa M - (\varkappa+1)M' + \varkappa\chi]\Big\}.$$

Der Ausdruck (5) ist nun in die Gleichung 47 (5) einzusetzen; dabei aber hat man für den Coëfficienten von $(r\delta r)$ eine Constante anzunehmen. Setzt man dementsprechend in erster Näherung $r_0 = a$, so folgt:

$$N^2 = \frac{k_0^2}{a^3} = \mu^2.$$

Die particulären Integrale werden

$$z_1 = \sin\mu t = \sin M; \quad z_2 = \cos\mu t = \cos M.$$

In den beiden Gliedern $C_1 z_1 + C_2 z_2$ erhält man daher die von der ersten Potenz der Excentricität abhängigen Glieder der elliptischen Bewegung. Betrachtet man diese als gegeben, so reducirt sich die Gleichung 47 (2b) auf:

$$(r\delta r) = \frac{\sin\mu t}{\mu}\int Y\cos\mu t\,dt - \frac{\cos\mu t}{\mu}\int Y\sin\mu t\,dt. \qquad (6)$$

Die Ausführung der Integration ist nach den Bemerkungen auf pag. 124 des I. Bandes ohne weiteres klar. Integrationsvariable ist an Stelle von $l$ die Zeit $t$. Die Störungsfunction setzt sich aus Gliedern zusammen, bei denen sich unter den Argumenten der trigonometrischen Functionen auch der Werth $m = 1$ vorfindet; damit ist aber das Auftreten von Seculargliedern der Form $t \sin q t$ verbunden. Diese können aber vernachlässigt werden, wenn man die Secularvariationen der Elemente berücksichtigt. Es tritt überdiess in $Y$ noch eine Constante $\left(C + \Sigma k^2 m' a \frac{\partial B_0^{(0)}}{\partial a}\right)$ auf. Diese giebt in $(r \delta r)$ ein Glied

$$\frac{1}{\mu^2}\left(C + \Sigma k^2 m' a \frac{\partial B_0^{(0)}}{\partial a}\right),$$

welches sich mit dem constanten Gliede $a$ des Radiusvectors verbinden würde. Ist aber $a$ die thatsächliche mittlere Entfernung des Himmelskörpers, so können constante Zusatzglieder nicht mehr auftreten, und die Integrationsconstante $C$ wird so zu bestimmen, dass das letzterwähnte Glied verschwindet; d. h. es wird:

$$C = -\Sigma k^2 m' a \frac{\partial B_0^{(0)}}{\partial a}.$$

Substituirt man dann den erhaltenen Werth für $\delta r$ und die Werthe (4a), (4b) in 47 (8), so folgt $\delta L$. Zu bemerken ist, dass aus den constanten Theilen der Entwickelungen der Zeit proportionale Glieder entstehen. Ist $C''$ der constante Theil von $\left(\frac{dr}{dt}\delta r + 2r\frac{d\delta r}{dt}\right)$ und $C'$ die Constante, die bei der Integration der letzten beiden Glieder von (8) entsteht, so wird in $\delta L$ ein Glied

$$\frac{1}{k_0\sqrt{a}\sqrt{1-e^2}}\left[C' + C'' - \left(\tfrac{1}{2}C + 2\Sigma k^2 m' a \frac{\partial B_0^{(0)}}{\partial a}\right)t\right]$$

auftreten. Die Constante $C' + C''$ verbindet sich mit der Constante $L_0$ der Epoche, und das von $t$ abhängige Glied wird durch Einführung des Werthes von $C$:

$$-\left(\frac{1}{2k_0\sqrt{a}\sqrt{1-e^2}}\Sigma k^2 m' a \frac{\partial B_0^{(0)}}{\partial a}\right)t.$$

Der hier auftretende Coëfficient von $t$ ist die in 42 mit $\lambda$ bezeichnete Grösse.

**49.** Die canonische Differentialgleichung. Setzt man voraus, dass in der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \varphi(t)y = \Phi(t, y), \tag{1}$$

welche in dieser Form in der Störungstheorie immer wieder auftritt und daher als canonische Differentialgleichung der Störungstheorie[1]) bezeichnet werden kann, $\Phi(t, y)$ sehr klein ist, etwa von der Ordnung der störenden Masse, und $\varphi(t)$ sich von einer Constante nur um ebensolche Glieder unterscheidet, so dass

$$\varphi(t) = p + \psi(t)$$

ist, so kann das Glied $\psi(t) \cdot y$ mit $\Phi(t, y)$ vereinigt werden, und die Gleichung geht über in

$$\frac{d^2y}{dt^2} + py = P, \tag{2}$$

welche mit 47 (1) zusammenfällt. Denkt man sich $P$ in eine Reihe von trigonometrischen Functionen entwickelt, so dass

[1]) Eine Verwechselung mit der von JACOBI eingeführten »canonischen Form der Differentialgleichungen der Bewegung« kann aus dieser Bezeichnung nicht entstehen.

$$P = \Sigma k_i \cos(\varkappa_i t + K_i) + \Sigma k_i' \sin(\varkappa_i' t + K_i') \qquad (3)$$

ist, wo in der Entwickelung entweder Sinus oder Cosinus auftreten können, oder auch beide Functionen mit denselben oder auch verschiedenen Argumenten, so erhält man, durch Substitution dieser Glieder in 47 (2b) die entsprechenden Zusatzglieder, wenn $N = \sqrt{p}$ gesetzt wird. Noch einfacher erhält man dieselben, wenn man das Integral sofort in der Form voraussetzt:

$$y = h_1 \sin\sqrt{p}\, t + h_2 \cos\sqrt{p}\, t + \Sigma l_i \cos(\varkappa_i t + K_i) + \Sigma l_i' \sin(\varkappa_i' t + K_u) \qquad (4)$$

wo jedem Gliede der Reihe (3) ein Glied in dem Integral (4) entspricht. Substituirt man (4) und (3) in (2) so erhält man leicht:

$$l_i = \frac{k_i}{p - \varkappa_i^2}; \qquad l_i' = \frac{k_i'}{p - \varkappa_i'^2}. \qquad (4')$$

Enthält $P$ ein constantes Glied $k_0$, so wird auch $y$ ein solches $l_0$ erhalten, und es wird

$$l_0 = \frac{k_0}{p}. \qquad (4'')$$

Durch die Integration entstehen daher die bereits im I. Bande pag. 127 erwähnten secularen Glieder, wenn eines der $\varkappa$ oder $\varkappa'$ gleich $\sqrt{p}$ ist, und langperiodische Glieder, wenn diese Gleichheit sehr nahe stattfindet.

Für den Fall nun, dass die Grösse $P$ Glieder mit dem Argumente $(\sqrt{p}\,t + K)$ enthält, wird die Integration in dieser Form unmöglich, und es wird die Aufgabe entstehen, die Integration so vorzunehmen, dass seculare Glieder nicht auftreten.

Der erste Versuch in dieser Richtung rührt von D'ALEMBERT her[1]. Im wesentlichen kommt seine Methode darauf hinaus, die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = X_0 + X_1 y + X_2 y^2 + \ldots \qquad (5)$$

unter der Voraussetzung, dass $X_0\ X_1\ X_2 \ldots$ Constante sind, durch ein Integral von der Form

$$y = a_0 + a_1 \cos(\lambda v + \Lambda) + a_2 \cos 2(\lambda v + \Lambda) + \ldots \qquad (5a)$$

zu integriren. Führt man diesen Ausdruck in die Differentialgleichung ein, so bleiben $a_1$ und $\lambda$ unbestimmt, was in der Natur der Sache gelegen ist, da dieses die beiden Integrationsconstanten der Differentialgleichung zweiter Ordnung sind, während sich für die übrigen Constanten die Werthe ergeben[2]:

$$a_0 = X_0 + \tfrac{1}{2} X_2 a_1^2 + \ldots + X_0 X_1 + \tfrac{1}{2}(X_1 X_2 + 3 X_0 X_3) a_1^2 + \ldots$$
$$a_2 = -\tfrac{1}{6} X_2 a_1^2 + \ldots - (\tfrac{1}{6} X_1 X_2 + \tfrac{1}{4} X_0 X_3) a_1^2 + \ldots \qquad (5b)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\lambda = 1 - \tfrac{1}{2} X_1 - \tfrac{3}{8} X_3 a_1^2 - \ldots - X_0 X_2 - \tfrac{1}{8} X_1^2 - (\tfrac{3}{16} X_1 X_3 + \tfrac{5}{12} X_2^2) a_1^2 \ldots$$

Ein Mangel, welcher dieser Methode anhaftet, ist, dass die $X$ als Constante vorausgesetzt werden. Dass die Form des Integrals als bekannt vorausgesetzt wird, ist nicht so wesentlich, da es naheliegend ist, dieselbe anzunehmen, indem sie den analytischen Ausdruck für die Bewegung der Apsiden enthält (vergl. den I. Band, pag. 128).

T. MAYER[3]) bringt die Differentialgleichung auf die Form (5), wobei

$$X_0 = -\frac{X}{k_0^2 y^2 p_0}; \quad X_1 = -\frac{2P}{k_0\sqrt{p_0}} + \frac{P^2}{k_0^2 p_0}; \quad P = \int \frac{Y}{y}\, dv$$

[1]) Mémoiren der Pariser Akademie für 1745, pag 383.

[2]) Vergl. auch O. BACKLUND in den Astron. Nachrichten, No. 2469.

[3]) »Theoria lunae juxta systema Newtonianum«, Londini 1767 (pag. 17).

Die Ausführung der Integration ist nach den Bemerkungen auf pag. 124 des I. Bandes ohne weiteres klar. Integrationsvariable ist an Stelle von $l$ die Zeit $t$. Die Störungsfunction setzt sich aus Gliedern zusammen, bei denen sich unter den Argumenten der trigonometrischen Functionen auch der Werth $n = 1$ vorfindet; damit ist aber das Auftreten von Seculargliedern der Form $t \sin gt$ verbunden. Diese können aber vernachlässigt werden, wenn man die Secularvariationen der Elemente berücksichtigt. Es tritt überdiess in $Y$ noch eine Constante $\left(C + \Sigma k^2 m' a \frac{\partial B_0^{(0)}}{\partial a}\right)$ auf. Diese giebt in $(r\delta r)$ ein Glied

$$\frac{1}{\mu^2}\left(C + \Sigma k^2 m' a \frac{\partial B_0^{(0)}}{\partial a}\right),$$

welches sich mit dem constanten Gliede $a$ des Radiusvectors verbinden würde. Ist aber $a$ die thatsächliche mittlere Entfernung des Himmelskörpers, so können constante Zusatzglieder nicht mehr auftreten, und die Integrationsconstante $C$ wird so zu bestimmen, dass das letzterwähnte Glied verschwindet; d. h. es wird:

$$C = -\Sigma k^2 m' a \frac{\partial B_0^{(0)}}{\partial a}.$$

Substituirt man dann den erhaltenen Werth für $\delta r$ und die Werthe (4a), (4b) in 47 (8), so folgt $\delta L$. Zu bemerken ist, dass aus den constanten Theilen der Entwickelungen der Zeit proportionale Glieder entstehen. Ist $C''$ der constante Theil von $\left(\frac{dr}{dt}\delta r + 2r\frac{d\delta r}{dt}\right)$ und $C'$ die Constante, die bei der Integration der letzten beiden Glieder von (8) entsteht, so wird in $\delta L$ ein Glied

$$\frac{1}{k_0\sqrt{a}\sqrt{1-e^2}}\left[C' + C'' - \left(\tfrac{1}{2}C + 2\Sigma k^2 m' a \frac{\partial B_0^{(0)}}{\partial a}\right)t\right]$$

auftreten. Die Constante $C' + C''$ verbindet sich mit der Constante $L_0$ der Epoche, und das von $t$ abhängige Glied wird durch Einführung des Werthes von $C$:

$$-\left(\frac{1}{2k_0\sqrt{a}\sqrt{1-e^2}}\Sigma k^2 m' a \frac{\partial B_0^{(0)}}{\partial a}\right)t.$$

Der hier auftretende Coëfficient von $t$ ist die in 42 mit $\lambda$ bezeichnete Grösse.

**49.** Die canonische Differentialgleichung. Setzt man voraus, dass in der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \varphi(t)y = \Phi(t, y), \tag{1}$$

welche in dieser Form in der Störungstheorie immer wieder auftritt und daher als canonische Differentialgleichung der Störungstheorie[1]) bezeichnet werden kann, $\Phi(t, y)$ sehr klein ist, etwa von der Ordnung der störenden Masse, und $\varphi(t)$ sich von einer Constante nur um ebensolche Glieder unterscheidet, so dass

$$\varphi(t) = p + \psi(t)$$

ist, so kann das Glied $\psi(t)\cdot y$ mit $\Phi(t, y)$ vereinigt werden, und die Gleichung geht über in

$$\frac{d^2y}{dt^2} + py = P, \tag{2}$$

welche mit 47 (1) zusammenfällt. Denkt man sich $P$ in eine Reihe von trigonometrischen Functionen entwickelt, so dass

---

[1]) Eine Verwechselung mit der von JACOBI eingeführten »canonischen Form der Differentialgleichungen der Bewegung« kann aus dieser Bezeichnung nicht entstehen.

ist, und $X$, $Y$ störende Kräfte sind, und integrirt die Gleichung nach der Methode der unbestimmten Coefficienten.

Von wesentlicher Bedeutung waren die Arbeiten von LAGRANGE und LAPLACE. LAGRANGE[1]) schreibt die Differentialgleichung in der Form

$$\frac{d^2y}{dv^2} + K^2y + L + \alpha My^2 + \alpha^2 Ny^3 + \ldots = 0, \tag{5}$$

wobei $\alpha M$ eine Function der ersten Ordnung der störenden Massen, $\alpha^2 N$ von der zweiten Ordnung u. s. w. ist. Setzt man zunächst $M = 0$, $N = 0$, $L$ constant, so wird das Integral

$$y = \frac{f}{K}\cos Kv + \frac{g}{K}\sin Kv + \frac{L}{K^2}(\cos Kv - 1) \tag{5a}$$

wo $f$, $g$ die Integrationsconstanten sind. Setzt man der Einfachheit wegen $g = 0$, $\frac{f}{K} + \frac{L}{K^2} = F$ und substituirt, so erhält man:

$$\frac{d^2y}{dv^2} + K^2y + L + \alpha M\left(\frac{F^2}{2} + \frac{L^4}{K^4}\right) - 2\alpha M\frac{LF}{K}\cos Kv + \frac{\alpha MF^2}{2}\cos 2Kv + \ldots \tag{6}$$

Das Integral dieser Gleichung würde aber, auf dem gewöhnlichen Wege integrirt Glieder von der Form $t \sin Kt$ ergeben. In (5) würde nämlich jedes Glied $a \cos(Kt + A')$ ein Glied mit dem Nenner $K^2 - a^2$ geben; um diese Glieder zum Verschwinden zu bringen, verfährt LAGRANGE auf folgende Weise: Multiplicirt man (5) mit $\frac{dy}{dv} = x$ und integrirt, so folgt:

$$x^2 + K^2y^2 + 2Ly + H + 2\frac{\alpha M}{3}y^3 + \frac{2\alpha^2 N}{4}y^4 + \ldots \tag{7}$$

und aus dieser Gleichung erhalt man, wenn man nun die von $M$, $N$ abhängigen Glieder vernachlässigt:

$$y = \frac{1}{K^2}\left[-L \pm \sqrt{L^2 - K^2H - K^2x^2}\right].$$

Verwendet man diesen Werth für die Bestimmung der von $y^3$, $y^4$ ... abhängigen Glieder in (7), so folgt hieraus, da dabei kein unendlich anwachsendes Glied entsteht, dass $y$ stets endlich bleibt. Setzt man nun:

$$y = y' + \lambda + \alpha\mu + \alpha^2\nu,$$

wo $\lambda$, $\mu$, $\nu$ unbestimmte Constanten sind, so geht die Gleichung (5) über in:

$$\frac{d^2y'}{dv^2} + R^2y' + A + \alpha(B + My'^2) + \alpha^2(C + 3N\lambda y'^2 + Ny'^3) + \ldots = 0, \tag{8}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} R^2 &= K^2 + 2\alpha M\lambda + \alpha^2(2M\mu + 3N\lambda^2) \\ A &= L + K^2\lambda \\ B &= K^2\mu + M\lambda^2 \\ C &= K^2\nu + 2M\mu\lambda + N\lambda^3 \end{aligned}\right\} \tag{8a}$$

ist. Integrirt man (8) nach der früheren Methode, so wird in erster Näherung

$$y' = \frac{f'}{R}\cos Rv + \frac{A}{R^2}(\cos Rv - 1).$$

Setzt man dieses Glied in (8) ein, so entsteht ein Glied mit $\cos Rv$, dessen Coëfficient

$$-2\alpha M\frac{A}{R^2}\left(\frac{f'}{R} + \frac{A}{R^2}\right)$$

---

[1]) »Solutions de différents problèmes de calcul intégral«; Miscell. Taurinensia III 1762/5; Oeuvres I, pag. 469.

ist. Dieses Glied, welches wieder seculare Glieder geben würde, kann zum Verschwinden gebracht werden, wenn $A = 0$ gesetzt wird. Dann wird

$$\lambda = \frac{L}{K^2},$$

und hierdurch ist man im Stande, die secularen Glieder zu vermeiden.

Complicirter wird die Aufgabe, wenn die Functionen $M$, $N$ veränderlich sind. LAGRANGE erhält dann die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dv^2} + K^2y + \alpha\left(My\cos Hv + N\frac{dy}{dv}\sin Hv\right) = T, \tag{9}$$

welche er durch Einführung der Functionen:

$$y\cos Hv = u \qquad y\cos 2Hv = w$$
$$y\sin Hv = U \qquad y\sin 2Hv = W$$

auf ein System von fünf simultanen Differentialgleichungen in $y$, $u$, $w$, $U$, $W$ zurückführt.

LAPLACE leitet zur Elimination der Secularglieder zwei Methoden ab; die eine besteht im Wesentlichen in Folgendem:

Erscheint das Integral einer Differentialgleichung (1) in der Form

$$y = X + tY + t^2Z,$$

wobei $X$, $Y$, $Z$ . . . periodische Functionen von $t$ und von gewissen constanten Parametern sind, so werden sich die ausserhalb der trigonometrischen Functionen vorkommenden Coëfficienten $t$, $t^2$ . . . zum Verschwinden bringen lassen, wenn man die in den Functionen $X$, $Y$, $Z$ enthaltenen Parameter nicht mehr constant, sondern veränderlich ansieht; führt man für die betreffenden Parameter, welche nichts anderes sind, als die elliptischen Elemente, die Grössen $\Xi$, $\Pi$ . . . ein, so erhält man für die Bestimmung derselben gerade die Differentialgleichungen 40 (8), (9), welche die Secularveränderung der Elemente bestimmen. Daraus folgt, dass man die Secularglieder im Radiusvector und in der Breite einfach weglassen kann, wenn man nicht feste Elemente zu Grunde legt, sondern die Polarcoordinaten auf die um die Secularvariationen corrigirten Elemente bezieht. In den durch die Differentialgleichungen 47 (5) und (9) gegebenen Ausdrücken sind dann nur die periodischen Störungen beizubehalten. In Gleichung 47 (8) treten in $\delta r$ auch nur die periodischen Glieder ein; für die durch die beiden Integrale auftretenden Secularglieder gilt das in 48 Gesagte.

Nach der zweiten Methode werden die Elemente als constant vorausgesetzt, und die Secularänderungen von Knoten und Pericentrum direkt durch die Integration der Störungsgleichungen für Radiusvector und Breite erhalten. Die Auseinandersetzung dieser Methode s. u. No. 59.

Die Wegschaffung der Glieder gelingt auf diese Weise nicht vollständig. Bei Berücksichtigung der höheren Potenzen der Massen erscheint zunächst wieder die Zeit als Coëfficient der periodischen Glieder $[at\cos(\alpha t + \lambda)]$, später auch in nur secularen Gliedern $[at]$. Erfolgreicher waren in dieser Beziehung die Bestrebungen der neueren Zeit, über welche später in den §§ 71 ff. gesprochen wird.

**50. Ideale Coordinaten, HANSEN's Methode der Störungsrechnung.** So einfach wie die vorliegenden Entwickelungen werden nun dieselben bei der Mitnahme der höheren Potenzen der Excentricitäten nicht. Wesentlich complicirter gestaltet sich die Durchführung aber, wenn man auch die höheren Potenzen der Massen berücksichtigt. Zunächst dürfen dann in 47 (4) die von $(\delta r)^2$ abhängigen Glieder nicht vernachlässigt werden, und ebenso würden in 47 (8) rechts Glieder auftreten, welche die zweiten Potenzen der Störungen explicite enthalten. Deshalb

hatte auch schon LAPLACE für seine Mondtheorie die Differentialgleichungen ($D$) gewählt[1]. Die Berücksichtigung der höheren Potenzen der Excentricitäten und Neigungen wird aber eine Nothwendigkeit bei den kleinen Planeten, deren Excentricitäten und Neigungen wesentlich grösser sind, sehr oft beträchtlicher als diejenigen der Mercursbahn; eine Excentricität über 19° haben[2]: (33) mit $\varphi = 19° 40'{\cdot}2$; (164) mit $\varphi = 20° 17'{\cdot}9$; (183) mit $\varphi = 20° 18'{\cdot}2$ und (324) mit $\varphi = 19° 41'{\cdot}5$; die grössten Neigungen finden sich bei (2) mit $i = 34° 41'{\cdot}8$; (31) mit $i = 26° 28'{\cdot}1$ und (183) mit $i = 26° 26'{\cdot}0$.

Schon bei den erstentdeckten Planeten machte sich dies bei der Berechnung der Störungen als Uebelstand fühlbar. Für die Planeten (2) und (3) sind die Excentricitätswinkel $\varphi = 13° 41'{\cdot}8$, bezw. $14° 48'{\cdot}6$, die Neigungen $i = 34° 41'{\cdot}8$, bezw. $13° 1'{\cdot}9$. Da überdies die grosse Nähe des Jupiter den Einfluss der störenden Kräfte bedeutend vermehrt, so bietet die Bestimmung der Störungen der kleinen Planeten nicht unbedeutende Schwierigkeiten.

P. A. HANSEN hatte nun, um dieselben zu heben, bei seiner Berechnung der absoluten Störungen eine von der früheren prinzipiell verschiedene Methode angewendet. Die Unterschiede bestehen: 1) in der Einführung der »idealen Coordinaten«, 2) den Entwickelungen nach der excentrischen Anomalie und 3) der numerischen Integration und Multiplikation.

Unter idealen Coordinaten versteht HANSEN[3]) solche, welche die Eigenschaft haben, dass nicht nur sie selbst, sondern auch ihre ersten Differentialquotienten nach der Zeit in der gestörten Bewegung dieselbe Form haben, wie in der ungestörten Bewegung. Sie verhalten sich demnach zu irgend welchen anderen Coordinaten, wie osculirende Elemente zu beliebigen anderen Elementen. Sei in der ungestörten Bewegung irgend eine Coordinate (rechtwinkelige oder polare) $u$, und sei dieselbe als Function der Zeit und der constanten Elemente:

$$u = F(t, a_0, e_0, \omega_0, \Omega_0, i_0, M_0^{(0)}); \quad \frac{du}{dt} = f(t, a_0, e_0, \omega_0, \Omega_0, i_0, M_0^{(0)}),$$

so wird in der gestörten Bewegung ebenfalls:

$$U = F(t, a, e, \omega, \Omega, i, M_0); \quad \frac{dU}{dt} = f(t, a, e, \omega, \Omega, i, M_0)$$

sein, wenn man einzelne oder alle Elemente nunmehr veränderlich annimmt. Hieraus folgt, dass, sofern man es nur mit ersten Differentialquotienten zu thun hat, d. h. mit Entwickelungen von ersten Differentialquotienten, oder mit dem Uebergange von diesen auf ihre Integrale, in den Ausdrücken für die idealen Coordinaten die Elemente als constant angesehen werden können, und die Infinitesimaloperationen nur in Rücksicht auf die explicite vorhandene Zeit vorzunehmen sind. Um diesen Vorgang besonders zu charakterisiren, führt HANSEN für die ausserhalb der Elemente vorhandene Zeit einen andern Buchstaben $\tau$ an Stelle von $t$ ein, und unterscheidet die hierdurch entstehenden Ausdrücke von den mit den veränderlichen Elementen zu berechnenden durch besondere Typen. Es möge die zu $U$ gehörige Coordinate, wenn in

---

[1]) S. hierüber § 56. Ausführliche Entwickelungen der Störungsfunction finden sich z. B. in PONTÉCOULANT, Théorie analytique du système du monde, Bd. 3, 4; in den Annalen der Pariser Sternwarte von LE VERRIER; in den Astronomical Papers, III Bd. von NEWCOMB u. s. w.

[2]) Vergl. hierfür den Artikel »Planeten«.

[3]) HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode die absoluten Störungen der kleinen Planeten zu berechnen. Abhandl. der königl. sächs. Gesellsch. der Wissenschaften Bd. 5, 6, 7; A. N. No. 166, 244, 426, 799, 882.

derselben die Elemente als Constante, und nur $t$ als Veränderliche angesehen wird, also $\tau$ an Stelle von $t$ gesetzt wird, mit $U'$ bezeichnet werden. Soll dann nach den vorzunehmenden Differentiationen wieder $t$ an Stelle von $\tau$ restituirt werden, so wird dieses dadurch angedeutet, dass der betreffende Ausdruck überstrichen wird; es bedeutet daher

$$\overline{\frac{dU'}{d\tau}} \quad (a); \qquad \overline{\int \frac{dU'}{d\tau} dt}, \quad (b)$$

dass in dem Werthe von $U$ die Elemente als constant anzusehen sind, d. h. $\tau$ an Stelle von $t$ zu setzen ist, dann nach $\tau$ zu differenziren ist, worauf bei *(a)* nach vollzogener Differentiation wieder $\tau$ durch $t$ zu ersetzen ist. Bei *(b)* ist noch nach $t$ zu integriren, und nach der Integration $t$ für $\tau$ zu setzen. Schreibt man $\frac{dU}{dt}$, so wäre das Resultat dasselbe, wie bei *(a)*, aber es wäre nach $t$ total zu differenziren, d. h. es wären auch die Elemente als veränderlich anzusehen. Wenn aber $U$ eine ideale Coordinate ist, so werden nach der Differentiation die von der Veränderlichkeit der Elemente herrührenden Glieder von selbst wegfallen, welche bei der Differentiation nach $\tau$ gar nicht entwickelt zu werden brauchen.

Ist weiter $L$ irgend eine Function von idealen Coordinaten, oder osculirenden Elementen, so wird zufolge der angeführten Eigenschaft derselben auch der erste Differentialquotient von $L$ im Resultate identisch, ob man auf die Veränderlichkeit der Elemente Rücksicht nimmt oder nicht. Man kann daher auch derartige Functionen als ideale Coordinaten im weiteren Sinne bezeichnen[1]).

Sind nun $x$, $y$, $z$ ideale Coordinaten, so werden in den Transformationsformeln 2 (1), $x'$ $y'$ $z'$ ebenfalls ideale Coordinaten sein, wenn

$$\begin{aligned} x\frac{d\alpha_1}{dt} + y\frac{d\alpha_2}{dt} + z\frac{d\alpha_3}{dt} &= 0 \\ x\frac{d\beta_1}{dt} + y\frac{d\beta_2}{dt} + z\frac{d\beta_3}{dt} &= 0 \\ x\frac{d\gamma_1}{dt} + y\frac{d\gamma_2}{dt} + z\frac{d\gamma_3}{dt} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

ist. Substituirt man in diesen Gleichungen die Ausdrücke 2 (1), so erhält man mit Rücksicht auf 2 (18), wenn hier $\lambda$, $\mu$, $\nu$ an Stelle der bereits in anderer Bedeutung verwendeten Zeichen $p$, $q$, $r$ gesetzt werden:

$$\nu y' - \mu z' = 0; \qquad \lambda z' - \nu x' = 0; \qquad \mu x' - \lambda y' = 0. \tag{2}$$

Da die Gleichungen (1) immer erfüllbar sind, weil vermöge der Gleichungen 2 (14) die Determinante der Coëfficienten

$$\Sigma \pm \frac{d\alpha_1}{dt}\frac{d\beta_2}{dt}\frac{d\gamma_3}{dt}$$

verschwindet, so wird es unendlich viele Systeme idealer Coordinaten geben; setzt man noch fest, dass $z' = 0$ sein soll, d. h., dass die $X'Y'$-Ebene stets durch den gestörten Radiusvector gehen soll, so folgt aus (2): $\nu = 0$, d. h.

$$\beta_1\frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_2\frac{d\alpha_2}{dt} + \beta_3\frac{d\alpha_3}{dt} = 0 \qquad \alpha_1\frac{d\beta_1}{dt} + \alpha_2\frac{d\beta_2}{dt} + \alpha_3\frac{d\beta_3}{dt} = 0. \tag{3}$$

Die beiden ersten Gleichungen 2 (11) geben

$$\alpha_1\frac{d\alpha_1}{dt} + \alpha_2\frac{d\alpha_2}{dt} + \alpha_3\frac{d\alpha_3}{dt} = 0 \qquad \beta_1\frac{d\beta_1}{dt} + \beta_2\frac{d\beta_2}{dt} + \beta_3\frac{d\beta_3}{dt} = 0, \tag{3a}$$

[1]) l. c., Band VI, pag. 96.

daher nach bekannten Sätzen der Determinantentheorie aus (8) und (8a):

$$\frac{d\alpha_1}{dt}:\frac{d\alpha_2}{dt}:\frac{d\alpha_3}{dt}=(\beta_2\alpha_3-\beta_3\alpha_2):(\beta_3\alpha_1-\beta_1\alpha_3):(\beta_1\alpha_2-\beta_2\alpha_1)$$

und ebenso für die Differentialquotienten der $\beta$; somit nach 2 (8), (9) und (10)

$$\frac{d\alpha_1}{dt}:\frac{d\alpha_2}{dt}:\frac{d\alpha_3}{dt}=\frac{d\beta_1}{dt}:\frac{d\beta_2}{dt}:\frac{d\beta_3}{dt}=\gamma_1:\gamma_2:\gamma_3,$$

folglich nach 2 (12), (13):

$$\lambda=\frac{1}{\gamma_i}\frac{d\beta_i}{dt};\quad \mu=-\frac{1}{\gamma_i}\frac{d\alpha_i}{dt}. \tag{4}$$

Aus den Gleichungen 2 (1) folgt durch zweimalige Differentiation für $z'=0$ wegen der Bedingung, dass $x, y, z$ ideale Coordinaten seien:

$$\frac{dx}{dt}=\alpha_1\frac{dx'}{dt}+\beta_1\frac{dy'}{dt};\quad \frac{d^2x}{dt^2}=\alpha_1\frac{d^2x'}{dt^2}+\beta_1\frac{d^2y'}{dt^2}+\frac{d\alpha_1}{dt}\frac{dx'}{dt}+\frac{d\beta_1}{dt}\frac{dy'}{dt}$$

ebenso für $y, z$, und daraus:

$$\gamma_1\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma_2\frac{d^2y}{dt^2}+\gamma_3\frac{d^2z}{dt^2}=-\mu\frac{dx'}{dt}+\lambda\frac{dy'}{dt}.$$

Die Differentialgleichungen 12 (1) geben daher

$$-\mu\frac{dx'}{dt}+\lambda\frac{dy'}{dt}=-(M+m)f(r)\frac{z'}{r}=\frac{\partial\Omega}{\partial z'}. \tag{5}$$

Verbindet man hiermit die dritte Gleichung (2):

$$-\mu x'+\lambda y'=0,$$

so erhält man

$$\left(y'\frac{dx'}{dt}-x'\frac{dy'}{dt}\right)\lambda=-x'\frac{\partial\Omega}{\partial z'};\quad \left(y'\frac{dx'}{dt}-x'\frac{dy'}{dt}\right)\mu=-y'\frac{\partial\Omega}{\partial z'}. \tag{6}$$

Da nun

$$x'\frac{dy'}{dt}-y'\frac{dx'}{dt}=k_0\sqrt{p}$$

ist ($x'$ $y'$ sind ideale Coordinaten, stehen daher mit osculirenden Elementen in derselben Beziehung wie in der ungestörten Bewegung) so wird, wenn für $\lambda$, $\mu$ ihre Werthe aus (4) substituirt werden:

$$\frac{d\alpha_i}{dt}=-\frac{\gamma_i y'}{k_0\sqrt{p}}\frac{\partial\Omega}{\partial z'};\quad \frac{d\beta_i}{dt}=+\frac{\gamma_i x'}{k_0\sqrt{p}}\frac{\partial\Omega}{\partial z'}. \tag{7}$$

Zwischen den in den Gleichungen 2 (21) auftretenden Winkeln $\omega$, $\Omega$, $i$, welche im allgemeinen von einander unabhängig sind, wird aber hier gemäss den Beziehungen (8) eine Beziehung bestehen. Der Werth von $\omega$ werde in diesem Falle mit $-\sigma$ bezeichnet; setzt man die Werthe 2 (22) in die Gleichung (8) ein, so erhält man

$$0=(\beta_2\alpha_1-\beta_1\alpha_2)\frac{d\Omega}{dt}-\frac{d\sigma}{dt}$$

$$\frac{d\sigma}{dt}=\gamma_3\frac{d\Omega}{dt}=\cos i\,\frac{d\Omega}{dt}. \tag{8}$$

Unter der hier gemachten Voraussetzung fällt daher die $X'$-Axe nicht in die Richtung des Perihels. ($\sigma$ bedeutet daher nicht den Abstand des Perihels vom Knoten.)

**51. Differentialgleichungen für Länge und Radiusvector.** In der Ausführung geht Hansen von den in 26 abgeleiteten Differentialgleichungen aus, welche jedoch gegenüber der ihnen von Hansen ursprünglich gegebenen Form für die allgemeinen Störungen etwas modificirt sind. Mit den idealen

Coordinaten r, $v$, welche sich aus den osculirenden Elementen $a$, $e$, ... nach den Formeln

$$M = M_0 + \mu t = E - e \sin E \qquad l = v + \pi$$
$$r \cos v = a(\cos E - e) \qquad \mu = \frac{k_0}{a^{\frac{3}{2}}} \tag{1}$$
$$r \sin v = a \cos \varphi \sin E$$

ergeben, stellt HANSEN die Formeln

$$M' = M_0^{(0)} + \Delta M_0 + \mu_0 t = E' - e_0 \sin E' \qquad r = r_0(1 + \nu)$$
$$r_0 \cos V = a_0(\cos E' - e_0) \qquad l = V + \pi_0 \tag{2}$$
$$r_0 \sin V = a_0 \cos \varphi_0 \sin E' \qquad \mu_0 = \frac{k_0}{a_0^{\frac{3}{2}}}$$

zusammen, in denen $a_0$, $e_0$ ... constante Elemente sind. Vergleicht man diese Formeln mit 26 (IV), so sieht man, dass die dort in zwei Theile zerfällte Störung in $V$ und $N$ hier zusammengezogen erscheint[1], da $N$ den constanten Werth $\pi_0$ hat. Man hat daher $dN : dt = 0$ und

$$r^2 \frac{dV}{dt} = k_0\sqrt{p_0} + \int Q\,dt,$$

wobei hier $p_0$ an Stelle von $p$ gesetzt ist, weil die in 26 (5) eingeführte Grösse $p$ eine Integrationsconstante bezeichnet und der Index »0« dort nur wegblieb, weil die Elemente daselbst überhaupt nicht veränderlich waren. Substituirt man hier für $dV : dt$ den auf pag. 346 erhaltenen Werth, so folgt:

$$k_0\sqrt{p_0}\, \frac{r^2}{r_0^2}\left(1 + \frac{d\Delta t}{dt}\right) = k_0\sqrt{p_0} + \int Q\,dt,$$

daher, wenn $\nu$ eingeführt und die corrigirte (gestörte) Zeit $t + \Delta t = T$ gesetzt wird:

$$\frac{dT}{dt} = 1 + \frac{d\Delta t}{dt} = \frac{1}{(1+\nu)^2}\left(1 + \frac{1}{k_0\sqrt{p_0}}\int Q\,dt\right)$$

$$\frac{d\Delta t}{dt} = \frac{\dfrac{1}{k_0\sqrt{p_0}}\displaystyle\int Q\,dt - 2\nu - \nu^2}{(1+\nu)^2}. \tag{3}$$

Die Differentialgleichung für $\nu$ wird aus 26 (12) erhalten; es ist

$$\frac{d^2\nu}{dt^2} + \frac{k_0^2}{r^3}\nu = R_0(1+\nu) + 2\frac{k_0\sqrt{p_0}}{r^4}\int Q\,dt + \frac{1}{r^4}\left[\int Q\,dt\right]^2. \tag{4}$$

Dann ist $\Delta M_0 = \mu_0 \Delta t$ und die Coordinaten des Himmelskörpers werden aus (2) erhalten.

Um diese Gleichungen in für die Praxis verwendbarer Form zu bringen, werden die Grössen $\nu$ und $T$ durch osculirende Elemente ausgedrückt, in welcher Form sie dann als ideale Coordinaten behandelt werden können. Aus (1) und (2) erhält man zunächst durch Vergleichung $l = v + \pi = V + \pi_0$;

$$v = V - (\pi - \pi_0)$$

$$\frac{a}{r} = \frac{1 + e\cos v}{\cos^2\varphi}; \quad \frac{r_0 a}{r a_0} = \frac{r_0}{a_0 \cos^2\varphi}\left[1 + e\cos V \cos(\pi - \pi_0) + e\sin V \sin(\pi - \pi_0)\right]$$

und da

$$\frac{r_0}{a_0} = \cos^2\varphi_0 - \frac{r_0}{a_0}\, e_0 \cos V$$

ist, so wird

$$\frac{r_0 a}{r a_0} = \frac{1}{1+\nu}\frac{a}{a_0} = \frac{\cos^2\varphi_0}{\cos^2\varphi}\left(1 - \frac{r_0 e_0 \cos V}{a_0 \cos^2\varphi_0} + \frac{r_0}{a_0}\frac{e\cos V}{\cos^2\varphi_0}\cos(\pi - \pi_0) + \frac{r_0}{a_0}\frac{e\sin V}{\cos^2\varphi_0}\sin(\pi - \pi_0)\right). \tag{5}$$

[1]) Dieses ist jedoch nur ein rein formaler Unterschied; dem Wesen nach ist die Methode dieselbe: die Berechnung der Störung der mittleren Anomalie.

An Stelle von $a$, $e$, $\pi$ werden nun drei Funktionen $\xi$, $\eta$, $\chi$ derselben eingeführt durch die Beziehungen:

$$\mu = \mu_0(1+\chi) \qquad (6) \qquad \begin{aligned} e\sin(\pi-\pi_0) &= \eta\cos^2\varphi_0 \\ e\cos(\pi-\pi_0) &= \xi\cos^2\varphi_0 + \sin\varphi_0. \end{aligned} \qquad (7)$$

Quadrirt und addirt man die beiden Gleichungen (7) und zieht von der Einheit ab, so wird

$$\cos^2\varphi = [1 - 2\xi\sin\varphi_0 - (\xi^2+\eta^2)\cos^2\varphi_0]\cos^2\varphi_0 \qquad (8)$$

während die Gleichung (5)

$$\frac{r_0 a}{r a_0} = \frac{1}{1+\nu}\frac{a}{a_0} = \frac{\cos^2\varphi_0}{\cos^2\varphi}\left[1 + \frac{r_0}{a_0}\xi\cos V + \frac{r_0}{a_0}\eta\sin V\right]. \qquad (9)$$

wird. Bestimmt man hieraus $1+\nu$, setzt für $a$, $a_0$ ihre Ausdrücke durch $\mu$, $\mu_0$ ein, so wird mit Rücksicht auf (6) und (8):

$$1+\nu = \frac{1 - 2\xi\sin\varphi_0 - (\xi^2+\eta^2)\cos^2\varphi_0}{(1+\chi)^{\frac{2}{3}}\left[1 + \xi\frac{r_0}{a_0}\cos V + \eta\frac{r_0}{a_0}\sin V\right]}. \qquad (10)$$

Weiter ist, wenn $\pi$ ein osculirendes Element, daher $l$ eine ideale Coordinate ist:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{dV}{dt};\quad \frac{dv}{dt} = \mu\frac{dv}{dM} = \mu\frac{a^2}{r^2}\cos\varphi$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dM'}\frac{dM'}{dt} = \frac{a_0^2}{r_0^2}\cos\varphi_0\frac{dM'}{dt} = \mu_0\frac{a_0^2}{r_0^2}\cos\varphi_0\frac{dT}{dt},$$

somit

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\mu}{\mu_0}\frac{a^2}{a_0^2}\frac{r_0^2}{r^2}\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_0}. \qquad (11)$$

Führt man hier für $\frac{r_0 a}{r a_0}$ seinen Werth aus (9) und für $\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_0}$ seinen Werth aus (8) ein, so folgt:

$$\frac{dT}{dt} = (1+\chi)\frac{\left(1 + \xi\frac{r_0}{a_0}\cos V + \eta\frac{r_0}{a_0}\sin V\right)^2}{[1 - 2\xi\sin\varphi_0 - (\xi^2+\eta^2)\cos^2\varphi_0]^{\frac{3}{2}}}. \qquad (12)$$

Die Formeln werden etwas einfacher, wenn man an Stelle von $\chi$ das Verhältniss der Parameter

$$\frac{p}{p_0} = \theta^2 \qquad (7a)$$

einführt. Dann wird aus Gleichung (11):

$$\frac{dT}{dt} = \sqrt{\frac{a}{a_0}}\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_0}\frac{r_0^2}{r^2} = \frac{\theta}{(1+\nu)^2};\quad \frac{d\Delta t}{dt} = \frac{\theta}{(1+\nu)^2} - 1 \qquad (13)$$

und aus Gleichung (9):

$$\begin{aligned} \frac{\theta^2}{1+\nu} &= A \\ A &= 1 + \xi\frac{r_0}{a_0}\cos V + \eta\frac{r_0}{a_0}\sin V \end{aligned} \qquad (14)$$

Die Gleichungen (13) und (14) bestimmen gemeinschaftlich die Werthe von $\frac{dT}{dt}$ und $\nu$ durch die Grössen $\xi$, $\eta$, $\theta$. Man kann an Stelle einer dieser Gleichungen auch eine beliebige Combination derselben setzen. Nun ist

$$\frac{dT}{dt} = \frac{2\theta}{1+\nu} - \theta\frac{1+2\nu}{(1+\nu)^2} = \frac{2A}{\theta} - \theta\left[1 - \frac{\nu^2}{(1+\nu)^2}\right].$$

Der Ausdruck

$$W = \frac{2A}{\theta} - \theta - 1 = \frac{2}{\theta}\left(1 + \xi\frac{r_0}{a_0}\cos V + \eta\frac{r_0}{a_0}\sin V\right) - \theta - 1 \qquad (15)$$

erhält, da $\vartheta$ sehr nahe die Einheit ist, stets kleine Werthe, und man erhält:

$$\frac{dT}{dt} = 1 + W + \vartheta\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2; \quad \frac{d\Delta t}{dt} = W + \vartheta\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2. \qquad (16)$$

Da $T$ und $\nu$ den Charakter idealer Coordinaten haben, so erhält man aus (13) und (16):

$$\frac{dT'}{d\tau} = \frac{\vartheta}{(1+\nu')^2}; \qquad \frac{dT'}{d\tau} = 1 + W' + \vartheta\left(\frac{\nu'}{1+\nu'}\right)^2,$$

und durch Differentiation nach $\tau$

$$\frac{\frac{d^2T'}{d\tau^2}}{\frac{dT'}{d\tau}} = -2\,\frac{\frac{d\nu'}{d\tau}}{1+\nu'}$$

$$\frac{d^2T'}{d\tau^2} = \frac{\partial W'}{\partial T'}\frac{dT'}{d\tau} + \vartheta\,\frac{2\nu'}{(1+\nu')^3}\frac{d\nu'}{d\tau} = \frac{\partial W'}{\partial T'}\frac{\vartheta}{(1+\nu')^2} + \frac{2\nu'\vartheta}{(1+\nu')^3}\frac{d\nu'}{d\tau},$$

folglich

$$-2\frac{d\nu'}{d\tau}\cdot\frac{\vartheta}{(1+\nu')^3} = \frac{\partial W'}{\partial T'}\frac{\vartheta}{(1+\nu')^2} + \frac{2\nu'\vartheta}{(1+\nu')^3}\frac{d\nu'}{d\tau}$$

$$\frac{d\nu'}{d\tau} = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial W'}{\partial T'}; \qquad \frac{d\nu}{dt} = -\tfrac{1}{2}\overline{\frac{\partial W'}{\partial T'}}, \qquad (16\text{a})$$

während $\Delta t$ durch die Differentialgleichung (16) bestimmt ist. Durch Integration folgt demnach:

$$\nu = c - \tfrac{1}{2}\int\overline{\frac{\partial W'}{\partial T'}}\,dt; \quad \Delta t = \int\left[\overline{W'} + \vartheta\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2\right]dt. \qquad (17)$$

Mit Rücksicht auf die ersten Potenzen der störenden Massen ergiebt sich hieraus:

$$\nu = c - \tfrac{1}{2}\int\overline{\frac{\partial W_0'}{\partial\tau}}\,dt; \quad \Delta M = \mu_0\int\overline{W_0'}\,dt, \qquad (17\text{a})$$

wo in $W_0'$ Störungen nicht berücksichtigt sind. Um hieraus die Störungen mit Rücksicht auf die zweiten Potenzen der Massen zu erhalten, hat man zu beachten, dass

$$W' = W_0' + \left(\frac{dW_0'}{d\tau}\right)\Delta T' + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2W_0'}{d\tau^2}\right)\Delta T'^2 + \ldots$$

$$\frac{dW'}{dT'} = \left(\frac{dW_0'}{d\tau}\right) + \left(\frac{d^2W_0'}{d\tau^2}\right)\Delta T' + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^3W_0'}{d\tau^3}\right)\Delta T'^2 + \ldots$$

ist, und daher

$$\left.\begin{aligned} \nu &= c - \tfrac{1}{2}\int\left\{\overline{\frac{dW_0'}{d\tau}} + \overline{\left(\frac{d^2W_0'}{d\tau^2}\right)\Delta T'}\right\}dt \\ \Delta M_0 &= \mu_0\int\left\{\overline{W_0'} + \overline{\frac{dW_0'}{d\tau}\Delta T'} + \nu^2\right\}dt. \end{aligned}\right\} \qquad (17\text{b})$$

Hier sind daher die Störungen $\nu$ und $\Delta M$ auf drei Functionen $\xi$, $\eta$, $\vartheta$ der osculirenden Elemente zurückgeführt. In der Function $W_0'$ sind für diese auch nur die Störungen erster Ordnung zu berücksichtigen, welche selbst von den störenden Kräften abhängig sind. Um diese einzuführen, kann auf zwei Arten vorgegangen werden. Ersetzt man $\xi$, $\eta$ durch ihre Ausdrücke (7), so wird[1]), da nach (1) und (2):

$$V' + \pi_0 - \pi = v + V' - V \text{ ist:}$$

---

[1]) HANSEN, Abh. der königl. sächs. Gesellsch. der Wissenschaften, Bd. 5, pag. 100. Bei HANSEN ist $\frac{h_0}{h}$ für $\vartheta$ gesetzt.

$$W' = \frac{2}{\vartheta} - \vartheta - 1 + \frac{2}{\vartheta}\frac{\mathfrak{r}_0'}{a_0}\left\{\frac{\cos V'}{\cos^2\varphi_0}\left[e\cos(\pi-\pi_0) - e_0\right] + \frac{\sin V'}{\cos^2\varphi_0}\, e\sin(\pi-\pi_0)\right\}$$

$$W' = \frac{2\mathfrak{r}_0'}{\vartheta}\left\{\frac{1}{\mathfrak{r}_0'} + \frac{e\cos(v+V'-V)}{a_0\cos^2\varphi_0} - \frac{e_0\cos V'}{a_0\cos^2\varphi_0}\right\} - \vartheta - 1$$

$$W' = \frac{2\mathfrak{r}_0'}{\vartheta a_0\cos^2\varphi_0} + \frac{2\mathfrak{r}_0' e\cos(v+V'-V)}{\vartheta a_0\cos^2\varphi_0} - \vartheta - 1.$$

Um die störenden Kräfte einzuführen, muss nach $t$ differenzirt, und zu diesem Zwecke zunächst $e\cos v$, $e\sin v$ nach 17 durch die Differentialquotienten von $v$ und $r$ ersetzt werden. Es wird:

$$W' = \frac{2\mathfrak{r}_0'}{\vartheta p_0}\left[1-\cos(V'-V)\right] + \frac{2\mathfrak{r}_0'}{k_0\sqrt{p_0}}\left\{\cos(V'-V)\,\mathfrak{r}\frac{dv}{dt} - \sin(V'-V)\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right\} - \vartheta - 1.$$

Hier sind $V'$, $\mathfrak{r}_0'$ nur von $\tau$ abhängig, daher als constant anzusehen, und nur $\mathfrak{r}$, $v$, $V$ nebst $\vartheta$ veränderlich. Da

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\vartheta}\right) = \sqrt{p_0}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) = -Q\,\frac{\mathfrak{r}\sqrt{p_0}}{k_0 p}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\vartheta}\right) = -\frac{\mathfrak{r}}{\vartheta^2}\frac{Q}{k_0\sqrt{p_0}};\quad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\mathfrak{r}Q}{k_0\sqrt{p_0}} \tag{18}$$

ist, so wird:

$$\frac{dW'}{dt} = \frac{2\mathfrak{r}_0'}{p_0}\left[1-\cos(V'-V)\right]\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\vartheta}\right) - \frac{d\vartheta}{dt}$$

$$+ \frac{2\mathfrak{r}_0'}{k_0\sqrt{p_0}}\left[-\sin(V'-V)\right]\left\{\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} - \mathfrak{r}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right\} + \cos(V'-V)\left(\mathfrak{r}\frac{d^2v}{dt^2} + 2\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\frac{dv}{dt}\right)$$

$$\frac{dW'}{dt} = \frac{2\mathfrak{r}_0'}{k_0\sqrt{p_0}}\left\{\frac{\cos(V'-V)}{\mathfrak{r}} - \frac{1-\cos(V'-V)}{p_0\vartheta^2} - \frac{1}{2\mathfrak{r}_0'}\right\}\frac{\partial\Omega}{\partial v} - \frac{2\mathfrak{r}_0'}{k_0\sqrt{p_0}}\sin(V'-V)\frac{\partial\Omega}{\partial\mathfrak{r}}. \tag{19}$$

Würde hier vor der Integration $t = \tau$ gesetzt, so erhielte man sofort $V' = V$, $\mathfrak{r}_0' = \mathfrak{r}_0$, und da in $W_0$: $\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{r}$ zu setzen ist, so würde[1])

$$\frac{dW_0'}{dt} = \frac{1}{k_0\sqrt{p_0}}\frac{\partial\Omega}{\partial v};\quad W_0 = W_0' = \int\frac{1}{k_0\sqrt{p_0}}\frac{\partial\Omega}{\partial v}\,dt.$$

Setzt man diese Werthe in (17a), (17b) ein, so verfällt man auf die Ausgangsgleichungen. In manchen Fällen, wo es sich nur um die Entwickelung einzelner Glieder handelt, hat HANSEN dieses Verfahren auch thatsächlich gewählt[2]). Im allgemeinen aber wird $\frac{dW'}{dt}$ erst nach (19) entwickelt, sodann nach $t$ integrirt, und nach der Integration $\tau = t$ gesetzt[3]). Die Ursache ist im wesentlichen die, dass hierdurch die Reihenentwickelungen selbst bei grösseren Excentricitäten convergenter werden[4]).

In der dritten Abhandlung[5]) wird eine zweite Entwickelung von $W_0$ vorgenommen, welche auf die Störungen der Elemente führt. Aus dem Ausdrucke (15) erhält man

$$W = \frac{2}{\vartheta} - \vartheta - 1 - \frac{8e_0}{\vartheta}\,\xi + \frac{2}{\vartheta}\,\xi\left(\frac{\mathfrak{r}_0}{a_0}\cos V + \tfrac{3}{2}e_0\right) + \frac{2}{\vartheta}\,\eta\,\frac{\mathfrak{r}_0}{a_0}\sin V$$

---

1) l. c., pag. 101.

2) z. B. Bd. 6, pag. 45.

3) Vergl. l. c., Bd. 6, pag. 63, 76, 126, 146; Bd. 7, pag. 104 u. s. w.

4) l. c. Bd. 5, pag. 89.

5) Bd. 7, pag. 87.

$$W = \mathrm{X} + \Upsilon\left(\frac{r_0}{a_0}\cos V + \tfrac{3}{2}e_0\right) + \Psi\frac{r_0}{a_0}\sin V \qquad (20)$$

$$\mathrm{X} = \frac{2}{\theta} - \theta - 1 - \frac{3e_0}{\theta}\xi = 2\left(\frac{1}{\theta} - 1\right) - (\theta - 1) - 3\frac{e_0}{\theta\cos^2\varphi_0}[e\cos(\pi - \pi_0) - e_0]$$

$$\Upsilon = \frac{2}{\theta}\xi = \frac{2}{\theta\cos^2\varphi_0}[e\cos(\pi - \pi_0) - e_0]$$

$$\Psi = \frac{2}{\theta}\eta = \frac{2}{\theta\cos^2\varphi_0}e\sin(\pi - \pi_0). \qquad (20a)$$

Berücksichtigt man zunächst nur Störungen erster Ordnung[1]), so wird $W_0$ an Stelle von $W$ zu setzen sein, dann wird aber, wenn mit $\delta$ die Störungen erster Ordnung bezeichnet werden:

$$\frac{1}{\theta} - 1 = \delta\left(\frac{1}{\theta}\right); \qquad \theta - 1 = \delta(\theta)$$

$$e\cos(\pi - \pi_0) - e_0 = \delta e; \quad e\sin(\pi - \pi_0) = e_0\delta\pi.$$

Es ist aber

$$\frac{dp}{dt} = \cos^2\varphi\frac{da}{dt} - 2ae\frac{de}{dt};$$

$$\frac{d}{dt}\sqrt{\frac{p}{p_0}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{pp_0}}\left(\cos^2\varphi\frac{da}{dt} - 2ae\frac{de}{dt}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{aa_0}}\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_0}\frac{da}{dt} - \frac{1}{\cos\varphi\cos\varphi_0}\sqrt{\frac{a}{a_0}}\,e\frac{de}{dt}$$

und demnach, da für die Störungen erster Ordnung in den Coefficienten

$$\frac{a}{a_0} = 1, \quad \frac{p}{p_0} = 1, \quad \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_0} = 1, \quad \frac{e}{e_0} = 1$$

zu setzen ist:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\frac{1}{a_0}\frac{da}{dt} - \frac{e_0}{\cos^2\varphi_0}\frac{de}{dt}; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\theta}\right) = -\frac{1}{\theta^2}\frac{d\theta}{dt}$$

daher durch Integration:

$$\delta\theta = \frac{1}{2}\delta\frac{a}{a_0} - \frac{e_0}{\cos^2\varphi_0}\delta e; \qquad \delta\frac{1}{\theta} = -\frac{1}{2}\delta\frac{a}{a_0} + \frac{e}{\cos^2\varphi_0}\delta e$$

$$\mathrm{X}_0 = -\frac{3}{2}\delta\frac{a}{a_0}; \quad \Upsilon_0 = +2\frac{\delta e}{\cos^2\varphi_0}; \quad \Psi_0 = +\frac{2}{\cos^2\varphi_0}e_0\delta\pi$$

$$W_0' = -\frac{3}{2}\delta\frac{a}{a_0} + 2\frac{\delta e}{\cos^2\varphi_0}\left(\frac{r_0'}{a_0}\cos V' + \tfrac{3}{2}e_0\right) + 2\frac{e_0\delta\pi}{\cos^2\varphi_0}\frac{r_0'}{a_0}\sin V'. \qquad (21)$$

**52. Entwickelung der Störungen in Breite.** Die Gleichungen 17 (5)

$$\cos\beta\sin(\lambda - \Omega) = \cos i\sin(l - \sigma)$$
$$\cos\beta\cos(\lambda - \Omega) = \cos(l - \sigma) \qquad (1)$$
$$\sin\beta = \sin i\sin(l - \sigma)$$

geben die heliocentrischen Coordinaten $\lambda$, $\beta$, mit den gestörten Werthen der Elemente $\omega$, $i$, $\Omega$ und dem gestörten Werthe von $v$, wobei zu beachten ist, dass die Länge in der Bahn $l$ von demselben Anfangspunkte wie $\sigma$ gezählt wird, also von dem durch (50) (8) fixirten Punkte. Es handelt sich jedoch darum, die Störungen der Breite direkt zu finden; dabei können auch zweckmässig gleich die beiden ersten Formeln (1) so umgeformt werden, dass sie aus Hauptgliedern, von den ungestörten Elementen und kleinen, von den Störungen abhängigen Zusatzgliedern bestehen. Schreibt man daher an Stelle von (1):

---

[1]) Berücksichtigt man in X, Υ, Ψ auch die zweiten Potenzen der Störungen, so kann man dann sofort die Formeln (17) verwenden (vergl. l. c. Bd. 7, pag. 95—97); doch wird hiervon kein Gebrauch gemacht, in pag. 98 wird auf die Formeln (17b) für die zweiten Potenzen der Störungen zurückgegangen.

$$\begin{aligned} \cos\beta \sin(\lambda - \Omega_0 - \Gamma) &= \cos i_0 \sin(l - \Omega_0) - sA\cos\omega \\ \cos\beta\cos(\lambda - \Omega_0 - \Gamma) &= \cos(l - \Omega_0) + sA\sin\omega \\ \sin\beta &= \sin i_0 \sin(l - \Omega_0) + s \end{aligned} \tag{2}$$

so sind die Grössen $\Omega_0$, $\Gamma$, $i_0$, $A$, $\omega$, $s$ so zu bestimmen, dass die von $s$ abhängigen Zusatzglieder kleine Grössen sind. Da zur Bestimmung von 6 Unbekannten drei Gleichungen bestehen, so können noch drei Bedingungen erfüllt werden. Bezeichnet wieder e die Basis der natürlichen Logarithmen, i die imaginäre Einheit, so wird, wenn Kürze halber $\lambda - \Omega_0 - \Gamma = \eta$ gesetzt wird:

$$\cos\beta(e^{+i\eta} - e^{-i\eta}) = \cos i_0(e^{+i(l-\Omega_0)} - e^{-i(l-\Omega_0)}) - isA(e^{+i\omega} + e^{-i\omega})$$
$$\cos\beta(e^{+i\eta} + e^{-i\eta}) = (e^{+i(l-\Omega_0)} + e^{-i(l-\Omega_0)}) - isA(e^{+i\omega} - e^{-i\omega}).$$

Diese Gleichungen geben, addirt

$$\cos\beta e^{+i\eta} = \cos^2 \tfrac{1}{2} i_0 e^{i(l-\Omega_0)} + \sin^2 \tfrac{1}{2} i_0 e^{-i(l-\Omega_0)} - isAe^{i\omega}. \tag{3a}$$

Die Gleichung, die durch Subtraction entsteht, braucht nicht angeschrieben zu werden, da sie durch die Vertauschung von $+i$ mit $-i$ entsteht. Aus Gleichung (1) folgt in derselben Weise:

$$\cos\beta(e^{+i(\lambda-\Omega)} - e^{-i(\lambda-\Omega)}) = \cos i(e^{+i(l-\sigma)} - e^{-i(l-\sigma)})$$
$$\cos\beta(e^{+i(\lambda-\Omega)} + e^{-i(\lambda-\Omega)}) = e^{+i(l-\sigma)} + e^{-i(l-\sigma)}$$
$$\cos\beta e^{+i(\lambda-\Omega)} = \cos^2 \tfrac{1}{2} i\, e^{i(l-\sigma)} + \sin^2 \tfrac{1}{2} i\, e^{-i(l-\sigma)},$$

daher

$$\cos\beta e^{i\eta} e^{i(\Omega_0-\Omega+\Gamma)} = e^{-i(\sigma-\Omega_0)} \cos^2 \tfrac{1}{2} i\, e^{i(l-\Omega_0)} + e^{+i(\sigma-\Omega_0)} \sin^2 \tfrac{1}{2} i\, e^{-i(l-\Omega_0)}. \tag{3b}$$

Die Vergleichung der dritten Gleichung (1) mit der dritten Gleichung (2) liefert:

$$s = \sin i \sin(l - \sigma) - \sin i_0 \sin(l - \Omega_0)$$
$$2is = \sin i(e^{+i(l-\sigma)} - e^{-i(l-\sigma)}) - \sin i_0(e^{+i(l-\Omega_0)} - e^{-i(l-\Omega_0)})$$
$$= \sin i(e^{+i(\Omega_0-\sigma)} e^{+i(l-\Omega_0)} - e^{-i(\Omega_0-\sigma)} e^{-i(l-\Omega_0)}) - \sin i_0(e^{+i(l-\Omega_0)} - e^{-i(l-\Omega_0)}).$$

Führt man den Werth von $is$ in (3a) ein, setzt

$$e^{-i\omega} = y; \quad e^{-i(\Omega_0-\sigma)} = a; \quad e^{-i\omega} e^{-i(\Omega_0-\Omega+\Gamma)} = x, \tag{4}$$

so wird

$$y\cos\beta e^{i\eta} = y\cos^2 \tfrac{1}{2} i_0 e^{+i(l-\Omega_0)} + y \sin^2 \tfrac{1}{2} i_0 e^{-i(l-\Omega_0)}$$
$$- \tfrac{1}{2} A\left[\sin i\left(\frac{1}{a} e^{+i(l-\Omega_0)} - a e^{-i(l-\Omega_0)}\right) - \sin i_0(e^{+i(l-\Omega_0)} - e^{-i(l-\Omega_0)})\right]$$
$$y\cos\beta e^{i\eta} = \frac{x}{a}\cos^2 \tfrac{1}{2} i\, e^{+i(l-\Omega_0)} + ax\sin^2 \tfrac{1}{2} i\, e^{-i(l-\Omega_0)}. \tag{5}$$

An Stelle von $\Gamma$, $\Omega_0$, $\omega$ treten hier $y$, $a$, $x$; $s$ ist eliminiert; die Unbekannte $\eta$ tritt an Stelle der heliocentrischen Länge $\lambda$.

Als nächste Bedingung kann nun die Forderung gestellt werden, dass die Ausdrücke für $x$ und $y$ von $l$ unabhängig seien; dann werden in der Differenz der beiden Gleichungen (5) die Coëfficienten von $e^{+i(l-\Omega_0)}$ und $e^{-i(l-\Omega_0)}$ für sich gleich Null zu setzen sein, wodurch man erhält:

$$\begin{aligned} y\cos^2 \tfrac{1}{2} i_0 - \tfrac{1}{2}\frac{A}{a}\sin i + \tfrac{1}{2} A \sin i_0 - \frac{x}{a}\cos^2 \tfrac{1}{2} i &= 0 \\ y\sin^2 \tfrac{1}{2} i_0 + \tfrac{1}{2} Aa\sin i - \tfrac{1}{2} A \sin i_0 - xa\sin^2 \tfrac{1}{2} i &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Hiermit erhält man für die Verhältnisse $\frac{A}{x}$ und $\frac{A}{y}$ ($a$ und $i_0$ bleiben dabei beliebig):

$$y(a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} i \cos^2 \tfrac{1}{2} i_0 - \cos^2 \tfrac{1}{2} i \sin^2 \tfrac{1}{2} i_0) - \tfrac{1}{2} A[a\sin i - \sin i_0(a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} i + \cos^2 \tfrac{1}{2} i)] = 0$$
$$x(a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} i \cos^2 \tfrac{1}{2} i_0 - \cos^2 \tfrac{1}{2} i \sin^2 \tfrac{1}{2} i_0) + \tfrac{1}{2} A[a\sin i_0 - \sin i(a^2 \cos^2 \tfrac{1}{2} i_0 + \sin^2 \tfrac{1}{2} i_0)] = 0.$$

Diese beiden Gleichungen sind durch $a\sin \tfrac{1}{2} i \cos \tfrac{1}{2} i_0 - \cos \tfrac{1}{2} i \sin \tfrac{1}{2} i_0$ theilbar; dividirt man durch diesen gemeinschaftlichen Faktor, so folgt:

$$\frac{A}{y}=\frac{a\cos\frac{1}{2}i_0\sin\frac{1}{2}i+\sin\frac{1}{2}i_0\cos\frac{1}{2}i}{\cos\frac{1}{2}i_0\cos\frac{1}{2}i-a\sin\frac{1}{2}i_0\sin\frac{1}{2}i};\quad \frac{A}{x}=\frac{a\cos\frac{1}{2}i_0\sin\frac{1}{2}i+\sin\frac{1}{2}i_0\cos\frac{1}{2}i}{a\cos\frac{1}{2}i_0\cos\frac{1}{2}i-\sin\frac{1}{2}i_0\sin\frac{1}{2}i}$$
$$\frac{x}{y}=\frac{a\cos\frac{1}{2}i_0\cos\frac{1}{2}i-\sin\frac{1}{2}i_0\sin\frac{1}{2}i}{\cos\frac{1}{2}i_0\cos\frac{1}{2}i-a\sin\frac{1}{2}i_0\sin\frac{1}{2}i}. \tag{7a}$$

Durch Vertauschung von + i mit — i entstehen zwei den Gleichungen (6) analoge, in denen an Stelle von $x, y, a$ ihre reciproken Werthe stehen. Man erhält daher aus diesen:

$$Ay=\frac{\cos\frac{1}{2}i_0\sin\frac{1}{2}i+a\sin\frac{1}{2}i_0\cos\frac{1}{2}i}{a\cos\frac{1}{2}i_0\cos\frac{1}{2}i-\sin\frac{1}{2}i_0\sin\frac{1}{2}i};\quad Ax=\frac{\cos\frac{1}{2}i_0\sin\frac{1}{2}i+a\sin\frac{1}{2}i_0\cos\frac{1}{2}i}{\cos\frac{1}{2}i_0\cos\frac{1}{2}i-a\sin\frac{1}{2}i_0\sin\frac{1}{2}i}$$
$$\frac{y}{x}=\frac{\cos\frac{1}{2}i_0\cos\frac{1}{2}i-a\sin\frac{1}{2}i_0\sin\frac{1}{2}i}{a\cos\frac{1}{2}i_0\cos\frac{1}{2}i-\sin\frac{1}{2}i_0\sin\frac{1}{2}i} \tag{7b}$$

und da $y+\frac{1}{y}=2\cos\omega,\ y-\frac{1}{y}=-2i\sin\omega$ ist, und ähnlich für $x$, so wird:

$$A\sin\omega=\frac{\sin i\sin(\sigma-\Omega_0)}{\varkappa}$$
$$A\cos\omega=\frac{\sin i_0\cos i+\cos i_0\sin i\cos(\sigma-\Omega_0)}{\varkappa}$$
$$\sin(\Omega-\Omega_0-\Gamma)=\frac{(\cos i+\cos i_0)\sin(\sigma-\Omega_0)}{\varkappa} \tag{8}$$
$$\cos(\Omega-\Omega_0-\Gamma)=\frac{(1+\cos i\cos i_0)\cos(\sigma-\Omega_0)-\sin i\sin i_0}{\varkappa}$$
$$\varkappa=1+\cos i\cos i_0-\sin i\sin i_0\cos(\sigma-\Omega_0),$$

$i_0$, $\Omega_0$ sind dabei keinen weiteren Bedingungen unterworfen. Wählt man für $\Omega_0$ eine Constante, die sich von $\Omega$ nur wenig entfernt, so werden $A$, $\omega$ und $s$ kleine Grössen; für $s$ erhält man

$$s=\sin i\sin(l-\Omega_0)\cos(\Omega_0-\sigma)+\sin i\cos(l-\Omega_0)\sin(\Omega_0-\sigma)$$
$$-\sin i_0\sin(l-\Omega_0).$$

Setzt man daher

$$\sin i\sin(\sigma-\Omega_0)=p$$
$$\sin i\cos(\sigma-\Omega_0)-\sin i_0=q, \tag{9a}$$

so wird

$$s=q\sin(l-\Omega_0)-p\cos(l-\Omega_0) \tag{9b}$$

und die Gleichungen (2) werden dann:

$$\cos\beta\sin(\lambda-\Omega_0-\Gamma)=\cos i_0\sin(l-\Omega_0)-s\left(\tang i_0+\frac{q}{\varkappa\cos i_0}\right)$$
$$\cos\beta\cos(\lambda-\Omega_0-\Gamma)=\cos(l-\Omega_0)+\frac{sp}{\varkappa} \tag{10}$$
$$\sin\beta=\sin i_0\sin(l-\Omega_0)+s.$$

Die Zusatzglieder $\frac{sp}{\varkappa}$, $\frac{sq}{\varkappa\cos i_0}$ werden, wenn $s$, $p$, $q$ als kleine Grössen erster Ordnung angesehen werden, von der zweiten Ordnung. Da aus Gleichung (8):

$$\sin(\sigma-\Omega_0)-\sin(\Omega-\Omega_0-\Gamma)=$$
$$=\frac{[(1-\cos i)(1-\cos i_0)-\sin i\sin i_0\cos(\sigma-\Omega_0)]\sin(\sigma-\Omega_0)}{\varkappa}$$

folgt, so wird auch $\Gamma$ von derselben Ordnung wie $q$, $s$; $p$ wird numerisch noch kleiner. Führt man an Stelle von $s$ eine neue Variable $u$ durch die Beziehung

$$u=\frac{r_0}{a_0}s$$

ein, so wird

$$u = \frac{r_0}{a_0} q \sin(V + \pi_0 - \Omega_0) - \frac{r_0}{a_0} p \cos(V + \pi_0 - \Omega_0). \tag{11}$$

Es wird daher, wenn man τ an Stelle von $t$ einführt, und den dadurch entstehenden Werth mit $u'$ bezeichnet:

$$\begin{aligned} u' &= \frac{r_0'}{a_0} q \sin(V' + \pi_0 - \Omega_0) - \frac{r_0'}{a_0} p \cos(V' + \pi_0 - \Omega_0) \\ \frac{du'}{dt} &= \frac{r_0'}{a_0} \sin(V' + \pi_0 - \Omega_0)\frac{dq}{dt} - \frac{r_0'}{a_0} \cos(V' + \pi_0 - \Omega_0)\frac{dp}{dt}. \end{aligned} \tag{11a}$$

Es ist aber:

$p = -\alpha_2 \cos\Omega_0 - \beta_2 \sin\Omega_0$; $\qquad q = +\beta_2 \cos\Omega_0 - \alpha_2 \sin\Omega_0 = \sin i_0$,

demnach mit Rücksicht auf 50 (7):

$$\frac{dp}{dt} = -\left(\frac{\gamma_2 y'}{k_0\sqrt{p}}\cos\Omega_0 - \frac{\gamma_2 x'}{k_0\sqrt{p}}\sin\Omega_0\right)\frac{\partial\Omega}{\partial z'}; \qquad \frac{dq}{dt} = -\left(\frac{\gamma_2 x'}{k_0\sqrt{p}}\cos\Omega_0 + \frac{\gamma_2 y'}{k_0\sqrt{p}}\sin\Omega_0\right)\frac{\partial\Omega}{\partial z'}$$

und da $y' = r \sin l$; $x' = r\cos l$ ist (gezählt von der nach 50 (8) definirten $X'$-Axe), so wird:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{r\sin(l - \Omega_0)}{k_0\sqrt{p}}\cos i\,\frac{\partial\Omega}{\partial z'}; \qquad \frac{dq}{dt} = -\frac{r\cos(l - \Omega_0)}{k_0\sqrt{p}}\cos i\,\frac{\partial\Omega}{\partial z'}$$

$$\frac{du'}{dt} = \frac{r r_0' \cos i}{a_0 k_0 \sqrt{p}}\sin(V' - V)\frac{\partial\Omega}{\partial z'}. \tag{12}$$

53. **Entwickelung der Störungsfunction für grosse Excentricitäten und Neigungen.** Die Entwickelungen haben im Wesen den Zweck, die entstehenden Reihen convergenter zu machen. Nebst der Wahl der Coordinaten für die Differentialgleichungen und die Integrationsmethode selbst ist hierzu in erster Linie maassgebend die Entwickelung der Störungsfunction, für welche HANSEN die Entwickelung nach der excentrischen Anomalie[1]) und wie bereits erwähnt, ein mechanisches Integrations- und Multiplikationsverfahren zur Erleichterung der Rechnung[2]) vorschlägt.

Für die Entwickelung von $\frac{1}{r_{01}}$ ist zunächst:

$$\left(\frac{r_{01}}{a}\right)^2 = \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \left(\frac{r'}{a'}\right)^2\alpha^2 - 2\frac{r}{a}\frac{r'}{a'}\alpha\left[\cos(v + \pi_0)\cos(v' + \pi_0') + \sin(v + \pi_0)\sin(v' + \pi_0')\cos J\right] \tag{1}$$

$$\alpha = \frac{a'}{a}.$$

Setzt man

$$\begin{aligned} \cos J \sin\pi_0' &= k\sin K & \qquad \sin\pi_0' &= k_1 \sin K_1 \\ \cos\pi_0' &= k\cos K & \qquad \cos J\cos\pi_0' &= k_1\cos K_1 \end{aligned} \tag{2}$$

und substituirt für r, r' ihre Ausdrücke durch die excentrische Anomalie, so wird

$$\left(\frac{r_{01}}{a}\right)^2 = \gamma_0 - \gamma_1\cos E' - \beta_1 \sin E' + \beta_2\cos E'^2, \tag{3}$$

wobei[3])

---

[1]) Dieses ist an sich klar, da der Coëfficient von $\sin E$, $\cos E$ als Function von $v$ nur die Hälfte des Coëfficienten von $\sin v$, $\cos v$ ist.

[2]) Vergl. auch HANSEN: Untersuchungen über die gegenseitigen Störungen des Jupiter und Saturn, Berlin 1831.

[3]) Ueber die für die Praxis vortheilhafteste Form zur Berechnung der Coëfficienten $\gamma_0$, $\gamma_1$, $\beta_1$ s. Abh. der königl. sächs. Gesellsch. der Wissenschaften, Bd. 5, pag. 139.

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= 1 + a^2 - 2e\cos E + e^2\cos^2 E - 2aee'k\cos(\pi_0 - K)\\
&\quad + 2ae'k\cos(\pi_0 - K)\cos E - 2ae'\cos\varphi\cdot k\sin(\pi_0 - K)\sin E\\
\gamma_1 &= 2a^2e' - 2aek\cos(\pi_0 - K) + 2ak\cos(\pi_0 - K)\cos E - 2a\cos\varphi\,k\sin(\pi_0 - K)\sin E\\
\beta_1 &= -2ae\cos\varphi' k_1\sin(\pi_0 - K_1) + 2a\cos\varphi\cos\varphi' k_1\cos(\pi_0 - K_1)\sin E\\
&\quad + 2a\cos\varphi' k_1\sin(\pi_0 - K_1)\cos E\\
\beta_2 &= a^2e'^2.
\end{aligned}\qquad (3a)$$

Hierin ist $\gamma_0$ nahe 1; $\gamma_1$, $\beta_1$ sind von der ersten, $\beta_2$ von der zweiten Ordnung der Excentricitäten. Der Ausdruck (3) kann stets in zwei lineare Faktoren mit reellen Coëfficienten zerlegt werden, so dass

$$\left(\frac{r_{01}}{a}\right)^2 = [C - q\cos(E' - Q)][1 - q_1\cos(E' + Q)]. \qquad (4)$$

Multiplicirt man, und vergleicht mit (3), so folgen die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= C - qq_1\sin^2 Q & \beta_2 &= qq_1\\
\gamma_1 &= (q + q_1 C)\cos Q & \beta_1 &= (q - q_1 C)\sin Q,
\end{aligned}\qquad (5)$$

aus denen die Unbekannten $q$, $q_1$, $Q$, $C$ zu bestimmen sind. $q$, $q_1$ sind von der ersten Ordnung der Excentricitäten, $C$ von der nullten Ordnung. Setzt man

$$\begin{aligned}
q\sin Q &= \beta_1 + \xi\\
q\cos Q &= \gamma_1 - \eta\\
C &= \gamma_0 + \zeta
\end{aligned}\quad (6)\qquad \text{so wird}\qquad
\begin{aligned}
q_1 C\sin Q &= \xi\\
q_1 C\cos Q &= \eta\\
qq_1\sin^2 Q &= \zeta
\end{aligned}\qquad (7)$$

und man hat die Unbekannten $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $q_1$ zu bestimmen. $\xi$, $\eta$ sind von der ersten Ordnung, $\zeta$ von der zweiten Ordnung. Es wird

$$\begin{aligned}
(\beta_1 + \xi)\xi &= \zeta(\gamma_0 + \zeta)\\
(\gamma_1 - \eta)\eta &= (\beta_2 - \zeta)(\gamma_0 + \zeta)
\end{aligned}\qquad \frac{\beta_1 + \xi}{\xi} = \frac{\gamma_1 - \eta}{\eta}. \qquad (8)$$

Setzt man $\frac{\beta_1 + \xi}{\xi} = \theta$, so wird auch $\frac{\gamma_1 - \eta}{\eta} = \theta$, und daraus:

$$\xi = \frac{\beta_1}{\theta - 1};\quad \eta = \frac{\gamma_1}{\theta + 1};\quad \beta_1 + \xi = \beta_1\frac{\theta}{\theta - 1};\quad \gamma_1 - \eta = \gamma_1\frac{\theta}{\theta + 1}. \qquad (9)$$

Demnach werden die Gleichungen (8):

$$\beta_1^2\frac{\theta}{(\theta - 1)^2} = \zeta(\gamma_0 + \zeta);\qquad \gamma_1^2\frac{\theta}{(\theta + 1)^2} = (\beta_2 - \zeta)(\gamma_0 + \zeta). \qquad (10)$$

Um aus diesen Gleichungen $\theta$ und $\zeta$ zu bestimmen, erhält man successive:

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma_1^2}{\beta_1^2}\left(\frac{\theta - 1}{\theta + 1}\right)^2 = \frac{\beta_2 - \zeta}{\zeta};\qquad \frac{\theta - 1}{\theta + 1} = \frac{\beta_1}{\gamma_1}\sqrt{\frac{\beta_2 - \zeta}{\zeta}}\\
&\theta = \frac{\gamma_1\sqrt{\zeta} + \beta_1\sqrt{\beta_2 - \zeta}}{\gamma_1\sqrt{\zeta} - \beta_1\sqrt{\beta_2 - \zeta}}
\end{aligned}\qquad (11)$$

$$\theta - 1 = \frac{2\beta_1\sqrt{\beta_2 - \zeta}}{\gamma_1\sqrt{\zeta} - \beta_1\sqrt{\beta_2 - \zeta}};\qquad \theta + 1 = \frac{2\gamma_1\sqrt{\zeta}}{\gamma_1\sqrt{\zeta} - \beta_1\sqrt{\beta_2 - \zeta}}$$

$$\frac{\theta}{(\theta - 1)^2} = \frac{\gamma_1^2\zeta - \beta_1^2(\beta_2 - \zeta)}{4\beta_1^2(\beta_2 - \zeta)};\qquad \frac{\theta}{(\theta + 1)^2} = \frac{\gamma_1^2\zeta - \beta_1^2(\beta_2 - \zeta)}{4\gamma_1^2\zeta}$$

$$\gamma_1^2\zeta - \beta_1^2(\beta_2 - \zeta) = 4(\beta_2 - \zeta)\zeta(\gamma_0 + \zeta)$$

$$\zeta^3 + (\gamma_0 - \beta_2)\zeta^2 + \tfrac{1}{4}(\beta_1^2 + \gamma_1^2 - 4\gamma_0\beta_2)\zeta - \tfrac{1}{4}\beta_1^2\beta_2 = 0 \qquad (12)$$

Diese Gleichung hat, da sie ungraden Grades, und das letzte Glied negativ ist, nothwendig eine reelle Wurzel[1]); da $\zeta$ eine sehr kleine Grösse ist, so kann sie durch Näherungen bestimmt werden; ein erster Näherungswerth wäre (mit Vernachlässigung von $\zeta^2$, $\zeta^3$):

[1]) Die beiden andern Wurzeln sind ebenfalls reell; es entsprechen ihnen aber imaginäre Werthe von $\xi$, $\eta$; l. c. Bd. 5, pag. 143.

$$\zeta = \frac{\beta_1^2}{\beta_1^2 + \gamma_1^2 - 4\gamma_0\beta_2}\beta_2,$$

da aber, wie erwähnt, $\zeta$ von der zweiten Ordnung der Excentricitäten ist, so sind in (12) nur $\zeta^3$ und $\beta_2\zeta^2$ von der sechsten Ordnung, die übrigen Glieder (vierter Ordnung) geben die Gleichung

$$\gamma_0\zeta^2 + \tfrac{1}{4}(\beta_1^2 + \gamma_1^2 - 4\gamma_0\beta_2)\zeta - \tfrac{1}{4}\beta_1^2\beta_2 = 0 \tag{12a}$$

deren Lösungen

$$\zeta = -\tfrac{1}{8}\frac{\beta_1^2 + \gamma_1^2 - 4\gamma_0\beta_2}{\gamma_0} \pm \sqrt{\frac{1}{64}\frac{(\beta_1^2 + \gamma_1^2 - 4\gamma_0\beta_2)^2}{\gamma_0^2} + \tfrac{1}{4}\frac{\beta_1^2\beta_2}{\gamma_0}}$$

sind; für das untere Zeichen wird $\zeta$ negativ, daher $\theta$, folglich auch $\xi$, $\eta$, imaginär; es ist daher

$$\zeta = \frac{1}{8\gamma_0}[\sqrt{(\beta_1^2 + \gamma_1^2 - 4\gamma_0\beta_2)^2 + 16\beta_1^2\beta_2\gamma_0} - (\beta_1^2 + \gamma_1^2 - 4\gamma_0\beta_2)]. \tag{13}$$

Dann erhält man $\theta$ nach (11); $\xi$, $\eta$ nach (9); $q$, $Q$, $C$ nach (6) und $q_1$ nach einer der Formeln (7). Ist die Excentricität des gestörten Planeten wesentlich grösser[1]), so wird man an Stelle von (13)

$$\zeta = \frac{\beta_1^2}{\beta_1^2 + \gamma_1^2}\beta_2 \tag{13a}$$

setzen können. Aus (7) folgt dann:

$$\left(\frac{a}{r_{01}}\right)^n = [C - q\cos(E' - Q)]^{-\frac{n}{2}}[1 - q_1\cos(E' + Q)]^{-\frac{n}{2}}.$$

Jeder dieser Faktoren kann ohne Schwierigkeiten nach der in 15 angegebenen Methode in einer nach *cos* der Vielfachen von $(E' \mp Q)$ fortlaufenden Reihe entwickelt werden, wobei für die Bestimmung der Coefficienten ein dem in 25 angegebenen ähnlicher Algorithmus auftritt. Sei

$$\begin{aligned} A^{(n)} &= [C - q\cos(E'-Q)]^{-\frac{n}{2}} = \alpha_0^{(n)} + 2\alpha_1^{(n)}\cos(E'-Q) + 2\alpha_2^{(n)}\cos 2(E'-Q) + \ldots \\ B^{(n)} &= [1 - q_1\cos(E'+Q)]^{-\frac{n}{2}} = \beta_0^{(n)} + 2\beta_1^{(n)}\cos(E'+Q) + 2\beta_2^{(n)}\cos 2(E'+Q) + \ldots \end{aligned} \tag{14}$$

so ist noch zu beachten, dass die Coëfficienten $C$, $q$, $q_1$ demnach auch $\alpha_0^{(n)}$, $\alpha_1^{(n)}$ ... $\beta_0^{(n)}$, $\beta_1^{(n)}$ ... und $Q$ Functionen von $E$ sind. Sei $E_\kappa$ ein bestimmter Werth von $E$, für welchen sich nach (8a) die zugehörigen Werthe von $\gamma_0$, $\gamma_1$, $\beta_1$, $\beta_2$, daher auch ganz bestimmte Werthe $C_\kappa$, $q_\kappa$, $Q_\kappa$, $q_{1\kappa}$ ergeben, denen die Werthe $\alpha_{0\kappa}^{(n)}$, $\alpha_{1\kappa}^{(n)}$ .... $\beta_{0\kappa}^{(n)}$, $\beta_{1\kappa}^{(n)}$ ... entsprechen, so muss

$$\begin{aligned} A_\kappa^{(n)} &= \alpha_{0\kappa}^{(n)} + 2\Sigma\alpha_{i\kappa}^{(n)}\cos i(E' - Q_\kappa) = \alpha_{0\kappa}^{(n)} + 2\Sigma\alpha_{i\kappa}^{(n)}\cos[i(E' - E_\kappa) - i(Q_\kappa - E_\kappa)] \\ &= \alpha_{0\kappa}^{(n)} + 2\Sigma\alpha_{i\kappa}^{(n)}\cos i(Q_\kappa - E_\kappa)\cos i(E' - E_\kappa) + 2\Sigma\alpha_{i\kappa}^{(n)}\sin i(Q_\kappa - E_\kappa)\sin i(E' - E_\kappa). \end{aligned}$$

Setzt man die einem gegebenen Werthe von $E_\kappa$ zugehörigen, leicht zu berechnenden Werthe

$$\alpha_{0\kappa}^{(n)} = S_{0\kappa}^{(n)}, \qquad \begin{aligned} \alpha_{i\kappa}^{(n)}\cos i(Q_\kappa - E_\kappa) &= S_{i\kappa}^{(n,c)} \\ \alpha_{i\kappa}^{(n)}\sin i(Q_\kappa - E_\kappa) &= S_{i\kappa}^{(n,s)}, \end{aligned} \tag{15}$$

so wird

$$\begin{aligned} A_\kappa^{(n)} = S_{0\kappa}^{(n)} &+ 2S_{1\kappa}^{(n,c)}\cos(E' - E_\kappa) + 2S_{2\kappa}^{(n,c)}\cos 2(E' - E_\kappa) + \ldots \\ &+ 2S_{1\kappa}^{(n,s)}\sin(E' - E_\kappa) + 2S_{2\kappa}^{(n,s)}\sin 2(E' - E_\kappa) + \ldots \end{aligned} \tag{16}$$

---

[1]) HANSEN berücksichtigt nur den Fall grosser Excentricitäten, wo $\beta_1$, $\gamma_1$ numerisch gegen $\sqrt{\beta_2}$ überwiegen und erhält dann die Formel (13a).

Aus den Coefficienten (15) kann man aber die Coefficienten der allgemeinen Entwickelungen

$$\begin{aligned} A^{(n)} = S_0^{(n)} + 2S_1^{(n,c)} \cos(E'-E) + 2S_2^{(n,c)} \cos 2(E'-E) + \dots \\ + 2S_1^{(n,s)} \sin(E'-E) + 2S_2^{(n,s)} \sin 2(E'-E) + \dots \end{aligned} \tag{17}$$

nach bekannten Methoden leicht finden, wenn man die Werthe der $S_{\kappa}$ auf eine Reihe über den ganzen Kreis äquidistant vertheilter Werthe von $E_{\kappa}$ bestimmt[1]).

Hat man auf diese Weise die Reihen für $A^{(n)}$, $B^{(n)}$ in der Form (17) mit numerischen Coëfficienten dargestellt, so werden dieselben weiter numerisch multiplicirt, wodurch man

$$\left(\frac{a}{r_{01}}\right)^n = \Sigma\Sigma(i\,i'c)\cos(iE - i'E') + \Sigma\Sigma(i\,i's)\sin(iE - i'E')$$

erhält. In diesen Reihen wird an Stelle der excentrischen Anomalie $E'$ des störenden Planeten dessen mittlere Anomalie $M'$ eingeführt[2]), was in der mehrfach erörterten Weise geschieht, wodurch die Reihen die Form annehmen:

$$\left(\frac{a}{r_{01}}\right)^n = \Sigma\Sigma([i\,i'c])\cos(iE - i'M') + \Sigma\Sigma([i\,i's])\sin(iE - i'M').$$

Der zweite Theil der Störungsfunction kann auf dieselbe Form gebracht werden. Wird endlich in der Summe

$$M' = M_0' + \mu' t = M_0' + \frac{\mu'}{\mu}(M - M_0) = M_0' - \frac{\mu'}{\mu}M_0 + \frac{\mu'}{\mu}(E - e\sin E)$$

substituirt, so erhält man die Störungfunction in der Form:

$$\begin{aligned} \Omega = \Sigma\Sigma[i\,i'c]\cos\left\{\left(i - i'\frac{\mu'}{\mu}\right)E - i'\left(M_0' - \frac{\mu'}{\mu}M_0\right)\right\} \\ + \Sigma\Sigma[i\,i's]\sin\left\{\left(i - i'\frac{\mu'}{\mu}\right)E - i'\left(M_0' - \frac{\mu'}{\mu}M_0\right)\right\} \end{aligned}$$

wo $E$ die einzige Variable ist.

Durch die Einführung der Grössen $k$, $k_1$, $K$, $K_1$ (Formeln 2) und die numerische Bestimmung der Grössen $\gamma_0$, $\gamma_1$, $\beta_1$, $\beta_2$ nebst den davon abhängigen $q$, $q_1$, $Q$, $C$ sind die für grosse Excentricitäten und Neigungen schwach convergenten Entwickelungen umgangen. Analytische Entwickelungen für diesen Fall hat zuerst Le Verrier (Annalen der Pariser Sternwarte I. Bd.) vorgeschlagen, die später mehrfach von anderen weiter ausgeführt wurden.

**54. Osculirende Elemente; mittlere Elemente.** Die vollständige Ausführung der hier angedeuteten Principien würde an dieser Stelle viel zu weit führen, und muss auf die hier gegebenen Erörterungen beschränkt bleiben. Allein bezüglich der Integration sind noch einige sehr wichtige Bemerkungen nöthig.

Die Elemente, wie sie für die Störungen der Hauptplaneten in Anwendung kommen, wurden durch Vergleichung der Beobachtungen mehrerer Jahrhunderte erhalten, und repräsentiren mittlere Werthe derselben. Bei den kleinen Planeten werden aus den Beobachtungen einer einzigen Opposition (einer Erscheinung) bereits Elemente abgeleitet, welche dann eine Bahn darstellen, die sich den gegebenen Beobachtungen am Besten anschmiegt, d. h. eine osculirende Bahn. Da die verschiedenen osculirenden Bahnen nur um die Störungen von einander

[1]) Vgl. den Artikel »Mechanische Quadratur, II«; Hansen, l. c., pag. 159.

[2]) Für den störenden Planeten wird hierdurch die Convergenz nicht wesentlich verändert, da die Excentricitäten der störenden Körper klein sind. Beim Uebergange von $M'$ auf $E$ wird die Convergenz nicht schwächer, sondern eher etwas erhöht.

verschieden sein können, so wird man bei der Berechnung der Störungen mit verschiedenen Elementensystemen Fehler begehen, die von der zweiten Ordnung der störenden Massen sind, welche sich aber bei genügend weit getriebener Annäherung ausgleichen müssen, da ja die Störungen, welche Elemente immer für die Bewegung derselben zu Grunde gelegt werden, durch die gegenseitige Lage der Himmelskörper eindeutig bestimmt sind. Ein Unterschied kann nur in den Werthen der Integrationsconstanten liegen.

Diese sind stets sechs an Zahl. Sie sind entweder selbst Incremente (Verbesserungen) der zu Grunde gelegten Elemente, oder sie sind Functionen dieser Incremente. Bestimmt man die Integrationsconstanten so, dass die Störungen für eine gewisse Epoche verschwinden, so werden die aus denselben sich ergehenden Elemente für diese Epoche osculiren. Natürlich werden die osculirenden Elemente successiv erhalten, denn jede weitere Näherung bringt Correctionen der Elemente, welche bezw. von der ersten, zweiten, dritten . . . Potenz der störenden Massen sind.

An Stelle der osculirenden Elemente, welche sich der Definition nach nur für eine gewisse Epoche der Bewegung möglichst nahe anschliessen, wird es besser **mittlere Elemente** einzuführen, welche **dahin definirt werden, dass sie zwischen den überhaupt möglichen Grenzen der osculirenden Elemente in der Mitte liegen.** Für diese werden daher die Störungen zu beiden Seiten gleichmässig, daher, absolut genommen, kleiner, als unter Zugrundelegung irgend welcher osculirender Elemente: Daraus folgt, dass in den Ausdrücken für die Störungen jene Glieder, welche die grössten periodischen Störungen erzeugen, für mittlere Elemente verschwinden müssen. Nun bilden die Störungen Reihen, in denen die von $\cos E$, $\sin E$, $\cos 2E$, $\sin 2E$ . . . abhängigen Glieder immer kleinere Coëfficienten erhalten; die grössten Coëfficienten erhalten in den Ausdrücken für $v$ und $u$ diejenigen Glieder, die von $\sin E$ und $\cos E$ abhängen; setzt man deren Coefficienten gleich Null, so werden die absoluten Beträge der Störungen nunmehr den Maximalwerth der Coëfficienten der nächsten Glieder erreichen, daher die gestellte Bedingung für die mittleren Elemente erfüllt[1]). Damit sind dann die mittleren Werthe für $\Omega$, $i$, $e$, $\omega$, festgelegt, wobei aber noch zu erwähnen ist, dass der analytische Ausdruck dieser mittleren Elemente noch seculare Glieder enthält, also $\Omega = \Omega_0 + \Omega' t$ u. s. w. und daher irgend ein System numerischer Werthe derselben sich auf eine gewisse Epoche bezieht.

Der mittlere Werth der mittleren Bewegung $\mu$ ist selbstverständlich derjenige, bei welchem in den Störungen der Länge keine von der Zeit abhängigen Glieder auftreten. Er ist also $\mu + \lambda = (\mu)$ (Vergl. No. 49) und stimmt mit dem aus den Beobachtungen sehr langer Zeiträume erhaltenen wahren Werthe der mittleren Bewegung überein. Hierzu tritt dann noch in der mittleren Länge ein dem Quadrate der Zeit proportionales Glied, die Secularänderung der mittleren Länge[2]).

---

[1]) Bd. 6, pag. 90. Eigentlich ist die Aufgabe ein Problem des Maximums und Minimums; denn es kann ganz wohl vorkommen, dass die Störungen noch geringer werden, wenn die Coëfficienten von $\sin E$, $\cos E$ in den beiden Ausdrücken für $v$ und $u$ sehr kleine, aber endliche, nicht verschwindende Werthe erreichen. Die Bestimmung dieses Minimums wäre eine etwas complicirtere, dabei aber im Grunde unnöthige Aufgabe; die HANSEN'sche Methode läuft auf die Definition hinaus: Mittlere Elemente sind jene, in welchen die auftretenden Störungen von der zweiten Ordnung der kleinen Parameter werden.

[2]) HANSEN, Bd. 6, pag. 122: Ueber die Verwandlung der von osculirenden Elementen abhängigen Störungen in solche, die von mittleren Elementen abhängen, vergl. HANSEN, Bd. 7, pag. 508.

**55. Proportionalcoordinaten.** OPPOLZER'sche Methode. Beachtet man den in 26 abgeleiteten Ausdruck:

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{\mathfrak{r}^3} - \tfrac{1}{2}\frac{s^2}{\mathfrak{r}^5}f,$$

so lassen sich die Formeln 28 (8)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k_0^2\frac{x}{\mathfrak{r}^3} = X; \quad \frac{d^2y}{dt^2} + k_0^2\frac{y}{\mathfrak{r}^3} = Y; \quad \frac{d^2z}{dt^2} + k_0^2\frac{z}{\mathfrak{r}^3} = Z \tag{1}$$

schreiben, wobei

$$X = X_1 + \Delta\cdot x, \quad Y = Y_1 + \Delta\cdot y, \quad Z = Z_1 + \Delta\cdot z$$
$$\Delta = \tfrac{1}{2}k_0^2\frac{s^2}{\mathfrak{r}^5}f \tag{2}$$

ist. Es mögen nun die Coordinaten $x$, $y$ in andere $\bar{x}$, $\bar{y}$ und eine Störung $\Gamma$, welche als ein Proportionalitätsfaktor desselben auftritt, derart zerlegt werden, dass vorerst über $\bar{x}$, $\bar{y}$ und über $\Gamma$ nur die eine Annahme gemacht wird, dass

$$\bar{x} = x\Gamma; \quad \bar{y} = y\cdot\Gamma, \quad \text{daher} \quad \bar{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}\cdot\Gamma \tag{3}$$

sei. Weiter wird an Stelle der Zeit $t$ eine andere Variable $\zeta$ eingeführt, welche durch die Beziehung definirt ist.

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\Gamma^2}{U} \quad \text{oder} \quad \frac{dt}{d\zeta} = \frac{U}{\Gamma^2}, \tag{4}$$

wobei $U$ ebenfalls eine vorläufig noch willkürlich gelassene Function ist. Aus (3) folgt:

$$\frac{d\bar{x}}{d\zeta} = x\frac{d\Gamma}{d\zeta} + \frac{U}{\Gamma}\frac{dx}{dt} \tag{5}$$

und durch nochmalige Differentiation und entsprechende Reduction

$$\begin{aligned}\Gamma\frac{d^2\bar{x}}{d\zeta^2} - \bar{x}\frac{d^2\Gamma}{d\zeta^2} - \frac{\Gamma}{U}\frac{dU}{d\zeta}\left(\frac{d\bar{x}}{d\zeta} - \frac{\bar{x}}{\Gamma}\frac{d\Gamma}{d\zeta}\right) &= U\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dt}{d\zeta}\\ \Gamma\frac{d^2\bar{y}}{d\zeta^2} - \bar{y}\frac{d^2\Gamma}{d\zeta^2} - \frac{\Gamma}{U}\frac{dU}{d\zeta}\left(\frac{d\bar{y}}{d\zeta} - \frac{\bar{y}}{\Gamma}\frac{d\Gamma}{d\zeta}\right) &= U\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{d\zeta}.\end{aligned} \tag{6}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man durch Multiplication mit $-\bar{y}$ und $\bar{x}$, bezw. mit $+\bar{x}$ und $+\bar{y}$ und Addition

$$\begin{aligned}&\bar{x}\frac{d^2\bar{y}}{d\zeta^2} - \bar{y}\frac{d^2\bar{x}}{d\zeta^2} - \frac{1}{U}\frac{dU}{d\zeta}\left(\bar{x}\frac{d\bar{y}}{d\zeta} - \bar{y}\frac{d\bar{x}}{d\zeta}\right) = U\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{dt}{d\zeta}\\ &\bar{x}\frac{d^2\bar{x}}{d\zeta^2} + \bar{y}\frac{d^2\bar{y}}{d\zeta^2} - \frac{1}{U}\frac{dU}{d\zeta}\left(\bar{x}\frac{d\bar{x}}{d\zeta} + \bar{y}\frac{d\bar{y}}{d\zeta}\right) - \frac{\bar{\mathfrak{r}}^2}{\Gamma}\left(\frac{d^2\Gamma}{d\zeta^2} - \frac{1}{U}\frac{dU}{d\zeta}\frac{d\Gamma}{d\zeta}\right)\\ &\qquad = \frac{U^2}{\Gamma^2}\left(x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2}\right).\end{aligned} \tag{7}$$

Es ist aber nach (1):

$$\begin{aligned}x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} &= x\left(Y - k_0^2\frac{y}{\mathfrak{r}^3}\right) - y\left(X - k_0^2\frac{x}{\mathfrak{r}^3}\right) = xY - yX = \mathfrak{r}Q_1 = Q\\ x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} &= x\left(X - k_0^2\frac{x}{\mathfrak{r}^3}\right) + y\left(Y - k_0^2\frac{y}{\mathfrak{r}^3}\right) = xX + yY - k_0^2\frac{x^2+y^2}{\mathfrak{r}^3} =\\ &= P - \frac{k_0^2}{\mathfrak{r}},\end{aligned} \tag{8}$$

wobei die Bedeutung der störenden Kräfte $Q$, $P$ aus 26 leicht ersichtlich ist.

Bisher war zwischen den Grössen $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\zeta$ nur eine einzige Beziehung festgesetzt, nämlich: $\bar{x}:\bar{y} = x:y$; denn in der Differentialgleichung für $\zeta$ liegt keine

Beschränkung, da dieselbe durch die Wahl der noch unbestimmten Function $U$ unter allen Umständen erfüllt werden kann. Es soll nunmehr angenommen werden[1]), dass $\bar{x} = x_0$, $\bar{y} = y_0$ die ungestörten Coordinaten für die ungestörte Zeit $\zeta$ seien, so dass

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_0}{d\zeta^2} + \frac{k_0^2 x_0}{r_0^3} &= 0 \\ \frac{d^2 y_0}{d\zeta^2} + \frac{k_0^2 y_0}{r_0^3} &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

ist. Hiermit erscheinen die noch erforderlichen zwei Bedingungen festgelegt, daher werden $\Gamma$ und $U$ bestimmt sein. Man hat zunächst:

$$x_0 \frac{dy_0}{d\zeta} - y_0 \frac{dx_0}{d\zeta} = k_0\sqrt{p_0}$$

$$x_0 \frac{d^2 y_0}{d\zeta^2} - y_0 \frac{d^2 x_0}{d\zeta^2} = 0,$$

folglich entsteht aus (7) mit Rücksicht auf (8):

$$-k_0\sqrt{p_0}\,\frac{1}{U}\,\frac{dU}{d\zeta} = UQ\,\frac{dt}{d\zeta}$$

oder

$$-\frac{1}{U^2}\,\frac{dU}{dt} = \frac{Q}{k_0\sqrt{p_0}}$$

und integrirt:

$$\frac{1}{U} = C + \frac{1}{k_0\sqrt{p_0}}\int Q\,dt.$$

Da ohne Rücksicht auf Störungen $dt = d\zeta$ sein müsste, so wird $C = 1$. Setzt man daher das Integral

$$\frac{1}{k_0\sqrt{p_0}}\int Q\,dt = \mathrm{I}, \tag{I}$$

so wird

$$\frac{1}{U} = 1 + \mathrm{I}; \quad \frac{d\zeta}{dt} = \Gamma^2(1 + \mathrm{I}). \tag{10}$$

Wird nunmehr $\Gamma = 1 + \gamma$ gesetzt, so wird

$$\frac{d\zeta}{dt} = (1 + \gamma)^2(1 + \mathrm{I}). \tag{10a}$$

Dann folgt aus den Gleichungen (6), wenn man für den Augenblick

$$x_0 \frac{d\gamma}{d\zeta} - \gamma\,\frac{dx_0}{d\zeta} = q$$

setzt:

$$\frac{dq}{d\zeta} - \frac{1}{U}\,\frac{dU}{d\zeta}\,q = UR \tag{11}$$

wobei

$$R = -\left(U - \frac{1}{U}\right)\frac{d^2 x_0}{d\zeta^2} - \frac{1}{U^2}\,\frac{dU}{d\zeta}\,\frac{dx_0}{d\zeta} - \frac{U}{(1+\gamma)^3}\,X. \tag{11a}$$

Das Integral der linearen Differentialgleichung (11) wird nach bekannten Methoden[2]):

---

[1]) Eine andere Annahme s. No. 72.

[2]) In der ersten Abhandlung: »Ermittelung der Störungswerthe in den Coordinaten durch Variation entsprechend gewählter Constanten«, Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, Bd. 46, pag. 49, wird die Integration ohne Uebergang auf diese lineare Differentialgleichung vorgenommen. Dadurch werden in den Formeln (48), l. c. pag. 53 die Differentialquotienten der Ausdrücke II, III von $\alpha$, also von den Integralen II, III selbst ab-

$$q = U\left(C + \int \frac{1}{U} U R\, d\zeta\right)$$

und da für $R = 0$ auch $q = 0$ werden muss, demnach $C = 0$ ist:

$$x_0 \frac{d\gamma}{d\zeta} - \gamma \frac{dx_0}{d\zeta} = \frac{1}{1+\mathrm{I}} \int R\, d\zeta.$$

Es ist aber entsprechend transformirt:

$$R = -X \frac{dt}{d\zeta} - \frac{1}{(1+\mathrm{I})^2} \frac{dx_0}{d\zeta} \frac{d\mathrm{I}}{d\zeta} + \frac{d}{d\zeta}\left(\frac{2\mathrm{I}+\mathrm{I}^2}{1+\mathrm{I}} \frac{dx_0}{d\zeta}\right).$$

Setzt man daher

$$\begin{aligned} \mathrm{II} &= \frac{1}{k_0\sqrt{p_0}} \int \left(Y + \frac{1}{(1+\mathrm{I})^2} \frac{dy_0}{d\zeta} \frac{d\mathrm{I}}{dt}\right) dt \\ \mathrm{III} &= \frac{1}{k_0\sqrt{p_0}} \int \left(X + \frac{1}{(1+\mathrm{I})^2} \frac{dx_0}{d\zeta} \frac{d\mathrm{I}}{dt}\right) dt, \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

so wird

$$\begin{aligned} x_0 \frac{d\gamma}{d\zeta} - \gamma \frac{dx_0}{d\zeta} &= -\frac{\mathrm{III}}{1+\mathrm{I}} k_0\sqrt{p_0} + \frac{2\mathrm{I}+\mathrm{I}^2}{(1+\mathrm{I})^2} \frac{dx_0}{d\zeta} \\ y_0 \frac{d\gamma}{d\zeta} - \gamma \frac{dy_0}{d\zeta} &= -\frac{\mathrm{II}}{1+\mathrm{I}} k_0\sqrt{p_0} + \frac{2\mathrm{I}+\mathrm{I}^2}{(1+\mathrm{I})^2} \frac{dy_0}{d\zeta}. \end{aligned} \qquad (12)$$

Würde aus diesen Gleichungen $\frac{d\gamma}{d\zeta}$ bestimmt werden, so erhielte man durch eine nochmalige Integration $\gamma$; der erhaltene Werth muss aber die beiden Gleichungen (12) identisch erfüllen, und daher mit dem aus denselben durch Elimination von $\frac{d\gamma}{d\zeta}$ erhaltenen Werthe identisch sein. Multiplicirt man daher diese Gleichungen mit $y_0$ bezw. $-x_0$ und addirt, so erhält man sofort:

$$\gamma = -\frac{2\mathrm{I}+\mathrm{I}^2}{(1+\mathrm{I})^2} + \frac{\mathrm{II}x_0 - \mathrm{III}y_0}{1+\mathrm{I}} \qquad (13)$$

oder wenn

$$\mathrm{II}x_0 - \mathrm{III}y_0 = S \qquad \text{(III)}$$

gesetzt wird:

$$1 + \gamma = \frac{1}{(1+\mathrm{I})^2} + \frac{S}{1+\mathrm{I}}. \qquad (14)$$

Setzt man die Werthe aus (12) in (5) ein und berücksichtigt (8) und (10), so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= k_0\sqrt{p_0}\,\mathrm{III} + \frac{1}{1+\mathrm{I}} \frac{dx_0}{d\zeta} \\ \frac{dy}{dt} &= k_0\sqrt{p_0}\,\mathrm{II} + \frac{1}{1+\mathrm{I}} \frac{dy_0}{d\zeta}. \end{aligned} \qquad \text{(IV)}$$

Aus der Gleichung (10) kann man nun die zu einer gewissen Zeit gehörige Störung der mittleren Anomalie erhalten; es wird

---

hängig. Diese Formeln werden daher eigentlich simultane Differentialgleichungen erster Ordnung, und da die Coëfficienten von derselben Ordnung sind, wie die von II und III unabhängigen Glieder ($x$ und $s$ sind nahe 1), so werden die Quadraturen im allgemeinen die angestrebte Genauigkeitsgrenze nicht zu erreichen gestatten. Die Ableitung in der zweiten Abhandlung »Entwurf einer Mondtheorie«, Denkschriften, Bd. 51, ist hiervon befreit, da die Gleichung (17) pag. 88 als Integral der linearen Differentialgleichung (15) pag. 87 auf diesen Umstand entsprechend Rücksicht nimmt. Die schliesslich auftretenden linearen Differentialgleichungen (16), (17) sind mit Rücksicht auf die in denselben auftretenden Coëfficienten anderer Natur, indem für specielle Störungen die rechts auftretenden, von den Integralen selbst abhängigen Glieder aus den früheren Näherungen entnommen werden können.

$$\frac{d\Delta M_0}{dt} = \mu \left(\frac{d(\zeta - t)}{dt}\right) = \mu[(1 + \mathrm{I})(1 + \gamma)^2 - 1],$$

daher mit Berücksichtigung von (14):

$$\frac{dM_0}{dt} = \mu \left[\frac{1}{(1 + \mathrm{I})^3} + \frac{2\Xi}{(1 + \mathrm{I})^2} + \frac{\Xi^2}{(1+\mathrm{I})}\right]. \tag{V}$$

Die Gleichungen I, II, III, IV, V bestimmen die gestörte Bewegung in Länge. Die in diesen Formeln auftretenden Grössen $\frac{dx_0}{d\zeta}$, $\frac{dy_0}{d\zeta}$ werden aus den Formeln in No. 17 für die ungestörte Bewegung ermittelt. Für die Bestimmung der Störung in $z$ erhält man aus (1):

$$\begin{aligned} y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} &= \int (yZ - zY)\,dt \\ x\frac{dz}{dt} - z\frac{dx}{dt} &= \int (xZ - zX)\,dt. \end{aligned} \tag{15}$$

Setzt man daher

$$z_0 = z(1 + \gamma), \tag{8a}$$

wobei zu beachten ist, dass $z_0$ kein der ungestörten Bewegung angehöriger Werth ist[1]), und

$$\mathrm{IV} = \frac{1}{k_0\sqrt{p_0}} \int \frac{y_0 Z - z_0 Y}{1 + \gamma}\,dt; \quad \mathrm{V} = \frac{1}{k_0\sqrt{p_0}} \int \frac{x_0 Z - z_0 X}{1 + \gamma}\,dt, \tag{VI}$$

so wird

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = k_0\sqrt{p_0}\cdot \mathrm{IV}; \quad x\frac{dz}{dt} - z\frac{dx}{dt} = k_0\sqrt{p_0}\cdot \mathrm{V}$$

und daraus durch Multiplication mit $-x$, bezw. $+y$ und Addition, da mit Rücksicht auf (8) und (I):

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = (1 + \mathrm{I})k_0\sqrt{p_0}$$

ist:

$$(1 + \mathrm{I})z = \mathrm{V}\cdot y - \mathrm{IV}\cdot x,$$

folglich

$$z_0 = \frac{\mathrm{V}\cdot y_0 - \mathrm{IV}\cdot x_0}{1 + \mathrm{I}}; \quad z = \frac{z_0}{1 + \gamma}. \tag{VII}$$

In den störenden Kräften $X$, $Y$ treten die gestörten Coordinaten $x$, $y$ auf. Setzt man für diese die aus (8) folgenden Werthe, so sieht man, dass in den drei Integralen I, II, III [Formeln (I) und (II)] die Ausdrücke $1 + \mathrm{I}$ und $1 + \gamma$ in verschiedenen positiven und negativen Potenzen auftreten. Sieht man I und $\gamma$ als Grössen erster Ordnung von den störenden Massen an, so werden sich die rechten Seiten in (I) und (II) nach steigenden Potenzen von I und $\gamma$, und da letztere Grösse von den Integralen I, II, III selbst abhängt, nach steigenden Potenzen dieser drei Grössen entwickeln lassen. Man erhält, wenn man sich auf die ersten Potenzen beschränkt:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathrm{I}}{dt} &= a_{01} + a_{11}\mathrm{I} + a_{21}\mathrm{II} + a_{31}\mathrm{III} \\ \frac{d\mathrm{II}}{dt} &= a_{02} + a_{12}\mathrm{I} + a_{22}\mathrm{II} + a_{32}\mathrm{III} \\ \frac{d\mathrm{III}}{dt} &= a_{03} + a_{13}\mathrm{I} + a_{23}\mathrm{II} + a_{33}\mathrm{III}. \end{aligned} \tag{16}$$

---

1) $z_0$ wird erst nach den Formeln (VII) bestimmt, sobald für die Integrale IV, V, erste Näherungen bekannt sind, in denen z. B. zuerst $z_0 = 0$ angenommen werden kann.

Ebenso folgt dann, wenn I, II, III bereits ermittelt sind:

$$\begin{aligned}\frac{d\,\mathrm{IV}}{dt} &= a_{04} + a_{44}\,\mathrm{IV} + a_{54}\,\mathrm{V}\\ \frac{d\,\mathrm{V}}{dt} &= a_{05} + a_{45}\,\mathrm{IV} + a_{55}\,\mathrm{V}.\end{aligned}\tag{17}$$

Zur Integration dieser Gleichungen durch successive Näherungen schlägt v. OPPOLZER den folgenden Weg ein. Da

$$uv = -\frac{du}{dt}\int v\,dt + \frac{d}{dt}\left(u\int v\,dt\right)$$

ist, so können die Gleichungen (16) und (17) in folgender Weise geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathrm{I}}{dt} = a_{01} - \frac{d\mathrm{I}}{dt}\int a_{11}\,dt - \frac{d\mathrm{II}}{dt}\int a_{21}\,dt - \frac{d\mathrm{III}}{dt}\int a_{31}\,dt&\\ + \frac{d}{dt}\left\{\mathrm{I}\int a_{11}\,dt + \mathrm{II}\int a_{21}\,dt + \mathrm{III}\int a_{31}\,dt\right\}&\\ \frac{d\mathrm{IV}}{dt} = a_{04} - \frac{d\mathrm{IV}}{dt}\int a_{44}\,dt - \frac{d\mathrm{V}}{dt}\int a_{54}\,dt + \frac{d}{dt}\left\{\mathrm{IV}\int a_{44}\,dt + \mathrm{V}\int a_{54}\,dt\right\}&\end{aligned}\tag{17a}$$

und ebenso für die vier übrigen. Setzt man nun:

$$\begin{aligned}n_1 &= c_1 + \int\left\{a_{01} - \frac{d\mathrm{I}}{dt}\int a_{11}\,dt - \frac{d\mathrm{II}}{dt}\int a_{21}\,dt - \frac{d\mathrm{III}}{dt}\int a_{31}\,dt\right\}dt\\ n_2 &= c_2 + \int\left\{a_{02} - \frac{d\mathrm{I}}{dt}\int a_{12}\,dt - \frac{d\mathrm{II}}{dt}\int a_{22}\,dt - \frac{d\mathrm{III}}{dt}\int a_{32}\,dt\right\}dt\\ n_3 &= c_3 + \int\left\{a_{03} - \frac{d\mathrm{I}}{dt}\int a_{13}\,dt - \frac{d\mathrm{II}}{dt}\int a_{23}\,dt - \frac{d\mathrm{III}}{dt}\int a_{33}\,dt\right\}dt\\ n_4 &= c_4 + \int\left\{a_{04} - \frac{d\mathrm{IV}}{dt}\int a_{44}\,dt - \frac{d\mathrm{V}}{dt}\int a_{54}\,dt\right\}dt\\ n_5 &= c_5 + \int\left\{a_{05} - \frac{d\mathrm{IV}}{dt}\int a_{45}\,dt - \frac{d\mathrm{V}}{dt}\int a_{55}\,dt\right\}dt,\end{aligned}\tag{18}$$

so erhält man durch Integration von (17a):

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &= n_1 + \mathrm{I}\int a_{11}\,dt + \mathrm{II}\int a_{21}\,dt + \mathrm{III}\int a_{31}\,dt\\ \mathrm{II} &= n_2 + \mathrm{I}\int a_{12}\,dt + \mathrm{II}\int a_{22}\,dt + \mathrm{III}\int a_{32}\,dt\\ \mathrm{III} &= n_3 + \mathrm{I}\int a_{13}\,dt + \mathrm{II}\int a_{23}\,dt + \mathrm{III}\int a_{33}\,dt\end{aligned}\tag{19a}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{IV} &= n_4 + \mathrm{IV}\int a_{44}\,dt + \mathrm{V}\int a_{54}\,dt\\ \mathrm{V} &= n_5 + \mathrm{IV}\int a_{45}\,dt + \mathrm{V}\int a_{55}\,dt.\end{aligned}\tag{19b}$$

Beschränkt man sich in den Gleichungen (18) zunächst auf die ersten Glieder, so werden die $n_i$ bekannte Grössen; damit kann man dann die Gleichungen (19a), (19b) auflösen, und erhält die Integrale I, II .... als Grössen von der Ordnung der $a_{ik}$. Substituirt man die resultirenden Werthe in (18), so würden daraus Zusatzglieder entstehen, die aber von der zweiten Ordnung der $a_{ik}$ sind, so dass hierdurch eine Lösung durch successive Näherungen gegeben ist. Würde man in (16), (17) die Produkte von I, II .. in die $a_{ik}$ sofort vernachlässigt haben, so erhielte man die Lösungen I $= n_1$, II $= n_2$ ..... In der Form (18), (19) erscheint bereits bei der ersten Integration eine grössere Annäherung erreicht.

Die in den Entwickelungen der Coëfficienten $a_{ik}$ auftretenden Constanten geben Anlass zum Entstehen von der Zeit proportionalen Gliedern, u. z. gemäss der Form der Coëfficienten in den Ausdrücken für $n_2$ und $n_5$. Da jedoch bei

der Entwickelung auch $\frac{d\Omega}{dt}$, $\frac{d\omega}{dt}$ erscheinen, so kann man diese so bestimmen, dass auch in den Integralen II und V die der Zeit proportionalen Glieder verschwinden, wodurch sich aus der Entwickelung selbst die Bewegungen des Knotens und des Perigäums bestimmen lassen.

**56. Theorie der Bewegung der Satelliten. Entwickelung der Störungsfunction.** Es war schon in No. 87 bemerkt worden, dass die Entwickelungen für die Satelliten sich dadurch von denjenigen für die Planeten unterscheiden, dass das Verhältniss der mittleren Entfernungen $\alpha$ bei denselben eine sehr kleine Grösse ist. Es genügt dann zumeist, die erste Potenz dieses Verhältnisses beizubehalten, die von diesem abhängigen Glieder jedoch abzutrennen, und speziell zu berechnen. Wegen des von dem Verhältniss der Parallaxen bei diesen auftretenden Faktors werden diese Glieder mit dem Namen der parallaktischen Glieder belegt. Sie erlangen auch insofern eine besondere Bedeutung, als sie zur Bestimmung des Verhältnisses $\alpha$ dienen können, wenn der Coëfficient der aus denselben resultirenden Störung durch Beobachtungen mit genügender Genauigkeit bestimmt werden kann, wie dieses z. B. für den Erdmond der Fall ist (vergl. No. 68).

Es ist nicht schwer, diese Trennung der Glieder in den Ausdrücken für $B_i^{(k)}$ selbst durchzuführen, doch wird es einfacher, die Störungsfunction für diesen Fall direkt zu entwickeln. Die Ableitungen gelten ebenso gut für die übrigen Satelliten wie für den Mond, müssen aber für diesen weitaus genauer sein, sowohl wegen seiner grossen Nähe zur Erde, in Folge deren die Beobachtungen viel mehr Unregelmässigkeiten zu constatiren gestatten, als auch andererseits, weil bei den anderen Satelliten die wechselseitigen Störungen zumeist überwiegen; es sollen daher die Darlegungen mit Beziehung auf den Erdmond erfolgen.

Bezeichnet man Kürze halber die Entfernung $r_{01} = \Delta$ (indem zunächst nur auf die Störung durch die Sonne Rücksicht genommen wird), so wird:

$$\Omega = k^2 M\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{rH}{r'^2}\right), \tag{1}$$

wobei $M$ die Sonnenmasse bezogen auf die Erdmasse als Einheit, und

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'H; \qquad H = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'} \tag{2}$$

ist. Hieraus folgt bis einschliesslich der dritten Potenz des Verhältnisses der Entfernungen:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r'}\left(1 - \frac{2r}{r'}H + \frac{r^2}{r'^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r'}\left(1 + \frac{r}{r'}H - \frac{1}{2}\frac{r^2}{r'^2} + \frac{3}{2}\frac{r^2}{r'^2}H^2 - \frac{3}{2}\frac{r^3}{r'^3}H + \frac{5}{2}\frac{r^3}{r'^3}H^3\right),$$

daher

$$\Omega = k^2 M\left[\frac{1}{r'} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{r'^3}(1 - 3H^2) - \frac{1}{2}\frac{r^3}{r'^4}(3H - 5H^3)\right].$$

Bei den Differentiationen von $\Omega$ nach den Coordinaten des Mondes ($r$, $u$, $i$, $l$ u. s. w.) wird das erste Glied verschwinden, so dass es sofort weggelassen werden kann. (Die Störungen des Mondes, welche in $\frac{1}{r'}$ vorkommen, geben nach der Bemerkung in 10 keinen Betrag.) Es wird daher:

$$\Omega = \frac{1}{2}k^2 M\frac{r^2}{r'^3}\left[(3H^2 - 1) + \frac{r}{r'}(5H^3 - 3H)\right]. \tag{3}$$

Es sollen beispielsweise kurz die Hauptglieder durch Integration der Differentialgleichung in No. 47 ermittelt werden[1]). Hierzu ist jedoch zu bemerken, dass in diesem Falle die für $\frac{\partial\Omega}{\partial z}$ in 48 angeführte Vereinfachung nicht gestattet ist, wenn, wie dies für die Satelliten gewöhnlich geschieht, nicht die Bahn des gestörten Himmelskörpers (des Satelliten) sondern die Bahn des Hauptplaneten (die Ekliptik) als Fundamentalebene gewählt wird[2]).

---

[1]) Auf Vollständigkeit kann selbst bei den Hauptgliedern nicht gesehen werden. Sollten auch nur diese völlig richtig entwickelt werden, so müssten auch zweite und dritte Potenzen der Excentricitäten und die höheren Potenzen der Massen berücksichtigt werden. Hier soll jedoch nur der Weg angedeutet werden, auf welchem die Integration vorgenommen wird, um qualitativ die Resultate übersehen zu können.

[2]) Um die Entwickelung der Störungsfunction noch an einem zweiten Beispiele zu zeigen, mögen die Entwickelungen von LAPLACE kurz erwähnt werden. LAPLACE geht von den Differentialgleichungen 10 $D$ aus. Daher muss $\Omega$ durch $u$, $s$, $L$ ausgedrückt werden. Es ist aber (Vergl. No. 16):

$$r = \frac{\sqrt{1+s^2}}{u}; \quad x = \frac{\cos L}{u}; \quad y = \frac{\sin L}{u}; \quad z = \frac{s}{u},$$

wo $L$ die Länge des Mondes, gezählt in der Ekliptik, ist. Für die Sonne wird ebenso:

$$r' = \frac{\sqrt{1+s_1^2}}{u_1}; \quad x' = \frac{\cos L_1}{u_1}; \quad y' = \frac{\sin L_1}{u_1}; \quad z' = \frac{s_1}{u_1},$$

daher

$$H = \frac{\cos(L-L_1) + ss_1}{uu_1} \cdot \frac{uu_1}{\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+s_1^2}}$$

oder da $s_1 = 0$ gesetzt werden kann:

$$H = \frac{\cos(L-L_1)}{\sqrt{1+s^2}}; \quad 3H^2 - 1 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos 2(L-L_1) - s^2}{1+s^2};$$

$$5H^3 - 3H = \frac{\frac{3}{4}\cos(L-L_1) + \frac{5}{4}\cos 3(L-L_1) - 3s^2\cos(L-L_1)}{(1+s^2)\sqrt{1+s^2}}$$

$$\Omega = \frac{1}{4}k^2 M\frac{u_1^3}{u^2}[1 + 3\cos 2(L-L_1) - 2s^2] +$$

$$+ \frac{1}{8}k^2 M\frac{u_1^4}{u^3}[5\cos 3(L-L_1) + 3\cos(L-L_1) - 12s^2\cos(L-L_1)]$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial u} = -\frac{1}{2}k^2 M\frac{u_1^3}{u^3}[1 + 3\cos 2(L-L_1) - 2s^2] -$$

$$- \frac{3}{8}k^2 M\frac{u_1^4}{u^4}[5\cos 3(L-L_1) + 3\cos(L-L_1) - 12s^2\cos(L-L_1)]$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial L} = -\frac{3}{2}k^2 M\frac{u_1^3}{u^2}\sin 2(L-L_1) - \frac{3}{8}k^2 M\frac{u_1^4}{u^3}[5\sin 3(L-L_1) + \sin(L-L_1) - 4s^2\sin(L-L_1)]$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial s} = -\frac{1}{2}k^2 M\frac{u_1^3}{u^2}2s - \frac{3}{8}k^2 M\frac{u_1^4}{u^3}\cdot 8s\cos(L-L_1)$$

$$\frac{S}{u^2} = -\frac{1}{2}k^2 M\frac{u_1^3}{u^4}[s + s\cos 2(L-L_1)] -$$

$$- \frac{3}{8}k^2 M\frac{u_1^4}{u^5}[5s\cos 3(L-L_1) + 11s\cos(L-L_1) - 4s^3\cos(L-L_1)] - \frac{ds}{dL}\frac{\partial\Omega}{\partial L}$$

$$\frac{U}{u^2} = -\frac{1}{2}k^2 M\frac{u_1^3}{u^3}[1 + 3\cos 2(L-L_1)] -$$

$$- \frac{3}{8}k^2 M\frac{u_1^4}{u^4}[5\cos 3(L-L_1) + 3\cos(L-L_1) - 4s^2\cos(L-L_1)] - \frac{du}{dL}\frac{\partial\Omega}{\partial L}.$$

Diese Ausdrücke sind noch innerhalb der ersten beiden Potenzen von $\frac{r}{r'}$ strenge. Für das weitere braucht man $\frac{ds}{dL}$ und $\frac{du}{dL}$. Für die Berechnung der Störungen von der ersten Potenz der Masse werden für $s$ und $u$ die elliptischen Werthe substituirt; für diese ist

Legt man der Einfachheit halber die $X$-Axe in die Richtung der Knotenlinie der Mondbahn und ist $\omega_1$ der Abstand des Sonnenperigeums von diesem Knoten, so werden die Sonnencoordinaten

$$x' = r' \cos(\omega_1 + v'); \quad y' = r' \sin(\omega_1 + v'); \quad z' = 0$$

und die Coordinaten des Mondes:

$$x = r \cos(\omega + v); \quad y = r \sin(\omega + v) \cos i; \quad z = r \sin(\omega + v) \sin i,$$

demnach

$$\begin{aligned} H &= \cos(v + \omega)\cos(v' + \omega_1) + \sin(v + \omega)\sin(v' + \omega_1)\cos i \\ &= \cos(v + \omega - v' - \omega_1) - 2 \sin(v + \omega)\sin(v' + \omega_1)\sin^2 \tfrac{1}{2} i. \end{aligned}$$

Behält man vorläufig die zweiten Potenzen der kleinen Parameter (Excentricität und Neigungen) bei, so wird, wenn die mittleren Anomalien der Sonne und des Mondes mit $\odot$, $\text{☾}$ bezeichnet werden, und man Kürze halber $\sin \frac{1}{2} i = \gamma$ setzt:

$$\begin{aligned} r^2 &= a^2(1 + \tfrac{3}{2} e^2 - 2e \cos \text{☾} - \tfrac{1}{2} e^2 \cos 2\,\text{☾}) \\ r^3 &= a^3(1 - 3e \cos \text{☾}) \\ \frac{1}{r'^3} &= \frac{1}{a_1^3}(1 + \tfrac{3}{2} e_1^2 + 3 e_1 \cos \odot + \tfrac{9}{2} e_1^2 \cos 2\odot) \\ \frac{1}{r'^4} &= \frac{1}{a_1^4}(1 + 4 e_1 \cos \odot) \\ \frac{r^2}{r'^3} &= \frac{a^2}{a_1^3}[1 + \tfrac{3}{2} e^2 + \tfrac{3}{2} e_1^2 - 2e \cos \text{☾} + 3 e_1 \cos \odot - \tfrac{1}{2} e^2 \cos 2\,\text{☾} + \tfrac{9}{2} e_1^2 \cos 2\odot \\ &\qquad - 3 e e_1 \cos(\odot + \text{☾}) - 3 e e_1 \cos(\odot - \text{☾})] \\ \frac{r^3}{r'^4} &= \frac{a^3}{a_1^4}(1 - 3e \cos \text{☾} + 4 e_1 \cos \odot) \end{aligned}$$

---

$$u = \frac{\sqrt{1 + s^2}}{r} = \frac{\sqrt{1 + s^2}}{a(1 - e^2)}(1 + e \cos \text{☾}); \quad s = \tang i \sin(L - \Omega)$$

$$\sin(\text{☾} + \omega) = \frac{\sin(L - \Omega)}{\cos i \sqrt{1 + \tang^2 i \sin^2 (L - \Omega)}}$$

$$\cos(\text{☾} + \omega) = \frac{\cos(L - \Omega)}{\sqrt{1 + \tang^2 i \sin^2 (L - \Omega)}},$$

demnach

$$\cos \text{☾} = \frac{\cos\omega \cos(L - \Omega)\cos i + \sin\omega \sin(L - \Omega)}{\cos i \sqrt{1 + \tang^2 i \sin^2 (L - \Omega)}} = \frac{\cos(L - \pi) - 2 \sin^2 \frac{1}{2} i \cos\omega \cos(L - \Omega)}{\cos i \sqrt{1 + \tang^2 i \sin^2 (L - \Omega)}}.$$

Die weitere Entwickelung ist nunmehr ohne weiteres klar. LAPLACE führt nun aber die Ableitung in der Art, dass sofort in der ersten Näherung jene Rechnungen vorgenommen werden, welche die folgenden Näherungen mit zu erledigen gestatten. Zu diesem Zwecke werden nicht die elliptischen Werthe, sondern die wahren Werthe $u_0 + \delta u$, $s_0 + \delta s$ substituirt, wo $u_0$, $s_0$ die elliptischen Werthe, $\delta u$, $\delta s$ die noch unbekannten Störungswerthe in der Form von trigonometrischen Reihen mit unbestimmten Coëfficienten $A$, $B$ in die Störungsfunction substituirt werden. Diese treten dann in den störenden Kräften, also multiplicirt mit dem kleinen Faktor $\mu^2 = \frac{1}{170}$ auf, und gehen in die analytischen Ausdrücke für die Coëfficienten selbst über, welche die Form erhalten:

$$A_p = A_p^{(0)} + a\mu^2 A_{\text{I}} + a'\mu^2 A_{\text{II}} + \ldots + b\mu^2 B_{\text{I}} + b'\mu^2 B_{\text{II}} + \ldots$$

$$B_p = B_p^{(0)} + c\mu^2 A_{\text{I}}' + c'\mu^2 A_{\text{II}}' + \ldots + d\mu^2 B_{\text{I}}' + d'\mu^2 B_{\text{II}}' + \ldots$$

Die erste Näherung ist $A_p = A_p(0)$; $B_p = B_p(0)$; werden diese Werthe in die folgenden Ausdrücke substituirt, so erhält man bessere Werthe u. s. w. Da $\mu^2$ sehr klein ist, so wird die Rechnung im allgemeinen convergent.

$$v = \leftmoon + 2e\sin\leftmoon + \tfrac{5}{4}e^2\sin 2\leftmoon$$
$$\sin v = \sin\leftmoon\,(1 - 2e^2\sin^2\leftmoon) + \cos\leftmoon\,(2e\sin\leftmoon + \tfrac{5}{4}e^2\sin 2\leftmoon)$$
$$\sin v = +(1-e^2)\sin\leftmoon + e\sin 2\leftmoon + \tfrac{1}{8}e^2\sin\leftmoon + \tfrac{9}{8}e^2\sin 3\leftmoon$$
$$\cos v = -e + (1-e^2)\cos\leftmoon + e\cos 2\leftmoon - \tfrac{1}{8}e^2\cos\leftmoon + \tfrac{9}{8}e^2\cos 3\leftmoon$$
$$\sin(v+\omega) = (1-e^2)\sin(\leftmoon+\omega) - e\sin\omega + e\sin(2\leftmoon+\omega) + \tfrac{1}{8}e^2\sin(\leftmoon-\omega) + \tfrac{9}{8}e^2\sin(3\leftmoon+\omega)$$
$$\cos(v+\omega) = (1-e^2)\cos(\leftmoon+\omega) - e\cos\omega + e\cos(2\leftmoon+\omega) - \tfrac{1}{8}e^2\cos(\leftmoon-\omega) + \tfrac{9}{8}e^2\cos(3\leftmoon+\omega)$$
$$\cos(v+\omega-v'-\omega_1) = \cos(\leftmoon+\omega-\odot-\omega_1) - e_1\cos(\leftmoon+\omega-\omega_1) + e_1\cos(\leftmoon+\omega-2\odot-\omega_1) - e\cos(\omega-\odot-\omega_1) + e\cos(2\leftmoon+\omega-\odot-\omega_1) + P'$$
$$H = \cos(\leftmoon+\omega-\odot-\omega_1) - e_1\cos(\leftmoon+\omega-\omega_1) + e_1\cos(\leftmoon+\omega-2\odot-\omega_1) - e\cos(\omega-\odot-\omega_1) + e\cos(2\leftmoon+\omega-\odot-\omega_1) + P$$
$$\begin{aligned} P = {} & P' - 2\sin(v+\omega)\sin(v'+\omega_1)\sin^2\tfrac{1}{2}i \\ = {} & -(e^2+e_1^2)\cos(\leftmoon+\omega-\odot-\omega_1) \\ & - \tfrac{1}{8}e_1^2\cos(\leftmoon+\omega+\odot-\omega_1) + \tfrac{9}{8}e_1^2\cos(\leftmoon+\omega-3\odot-\omega_1) \\ & - \tfrac{1}{8}e^2\cos(\leftmoon-\omega+\odot+\omega_1) + \tfrac{9}{8}e^2\cos(3\leftmoon+\omega-\odot-\omega_1) \\ & + ee_1\cos(\omega-\omega_1) - ee_1\cos(2\odot+\omega_1-\omega) - ee_1\cos(2\leftmoon+\omega-\omega_1) \\ & + ee_1\cos(2\leftmoon+\omega-2\odot-\omega_1) \\ & - \sin^2\tfrac{1}{2}i\,[\cos(\leftmoon+\omega-\odot-\omega_1) - \cos(\leftmoon+\omega+\odot+\omega_1)]. \end{aligned}$$

Die Anzahl der Glieder, die von der zweiten Potenz der Excentricität abhängen, wächst nun ziemlich rasch an, und sollen deshalb weiterhin nur die ersten Potenzen berücksichtigt werden, wobei allerdings die Neigung herausfällt. Dann wird:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(3H^2-1) = {} & \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}\cos 2(\leftmoon+\omega-\odot-\omega_1) - \tfrac{3}{4}e_1\cos(2\leftmoon+2\omega-\odot-2\omega_1) + \\ & + \tfrac{3}{4}e_1\cos(2\leftmoon+2\omega-3\odot-2\omega_1) - \\ & - \tfrac{3}{2}e\cos(\leftmoon+2\omega-2\odot-2\omega_1) + \tfrac{3}{2}e\cos(3\leftmoon+2\omega-2\odot-2\omega_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\frac{r^2}{r'^3}(3H^2-1) = \frac{a^2}{a_1^3}\Big[ & \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}\cos 2(\leftmoon+\omega-\odot-\omega_1) - \tfrac{1}{2}e\cos\leftmoon + \tfrac{3}{4}e_1\cos\odot - \\ & - \tfrac{3}{4}e\cos(\leftmoon+2\omega-2\odot-2\omega_1) + \tfrac{3}{4}e\cos(3\leftmoon+2\omega-2\odot-2\omega_1) - \\ & - \tfrac{3}{4}e\cos(\leftmoon+2\omega-2\odot-2\omega_1) - \tfrac{3}{4}e\cos(3\leftmoon+2\omega-2\odot-2\omega_1)\Big] + \\ & - \tfrac{3}{4}e_1\cos(2\leftmoon+2\omega-\odot-2\omega_1) + \tfrac{3}{4}e_1\cos(2\leftmoon+2\omega-3\odot-2\omega_1) + \\ & + \tfrac{3}{8}e_1\cos(2\leftmoon+2\omega-\odot-2\omega_1) + \tfrac{9}{8}e_1\cos(2\leftmoon+2\omega-3\odot-2\omega_1) \end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{r^3}{r'^4}(5H^3-3H) = \frac{a^3}{a_1^4}\left[\tfrac{3}{8}\cos(\leftmoon+\omega-\odot-\omega_1) + \tfrac{5}{8}\cos 3(\leftmoon+\omega-\odot-\omega_1)\right]$$

demnach

$$\begin{aligned} \Omega = k^2M\frac{a^2}{a_1^3}\Big\{ & \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}e\cos\leftmoon^{*} + \tfrac{3}{4}e_1\cos\odot^{\dagger} + \tfrac{3}{4}\cos 2(\leftmoon+\omega-\odot-\omega_1)^{*\dagger} - \\ & - \tfrac{3}{2}e\cos(\leftmoon+2\omega-2\odot-2\omega_1)^{*} + \tfrac{3}{4}e\cos(3\leftmoon+2\omega-2\odot-2\omega_1 + \\ & + \tfrac{21}{8}e_1\cos(2\leftmoon+2\omega-3\odot-2\omega_1) - \tfrac{3}{8}e_1\cos(2\leftmoon+2\omega-\odot-2\omega_1 + \\ & + \frac{a}{a_1}\left[\tfrac{3}{8}\cos(\leftmoon+\omega-\odot-\omega_1)^{*} + \tfrac{5}{8}\cos 3(\leftmoon+\omega-\odot-\omega_1)\right]\Big\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Das Verhältniss $\frac{a}{a_1}$ ist für den Erdmond nahe $\frac{1}{400}$; für den äussersten Jupitersmond, ebenso wie für den äussersten Saturnsmond etwa ebenso gross, für die übrigen Satelliten dieser Planeten, sowie auch für die Satelliten der anderen Planeten noch wesentlich kleiner. Eine Berücksichtigung derselben wird daher nur für den Erdmond nöthig. Es mag jedoch gleich bemerkt werden, dass das constante Glied in $\Omega$

$$C = \tfrac{1}{4}(1 + \tfrac{3}{2}e^2 + \tfrac{3}{2}e_1^2 - 6\gamma^2 + \text{Glieder 4. Ordnung}) \quad (5)$$

wird.

**57. Integration der Differentialgleichung für die Länge und den Radiusvector.** Bei der Integration der Gleichung 47 (5) treten nun gemäss 49 (4) Nenner $p - x^2$ auf, wenn $p$ den constanten Coefficienten von $(r\delta r)$ bezeichnet. Dieser ist nahe gleich $\frac{k_0^2}{a^3} = L'^2$, wenn $L'$ die mittlere siderische Bewegung des Mondes ist. Glieder mit kleinen Nennern treten daher auf, wenn $x$ sehr nahe $\pm L'$ ist. Wäre $x = L'$, so würden hieraus seculare Glieder entstehen; indem aber auch $\Omega$ und $\omega$ veränderlich gewählt wird, kann dieser Nachtheil behoben werden. Kleine Nenner treten nur auf bei den mit * bezeichneten Gliedern; das erste würde sich mit der Mittelpunktsgleichung verbinden, das zweite giebt die Evection das dritte die parallactische Ungleichheit. Ungleichheiten dieser Art treten im Radiusvector auf, und gehen nach 47 (8) in die Länge über. In dieser tritt ausserdem noch ein Integral auf, welches kleine Nenner erhält, wenn $x$ selbst eine kleine Grösse ist; dies ist der Fall bei dem mit † bezeichneten Gliede, welches die jährliche Gleichung giebt. Daraus ersieht man, dass die jährliche Gleichung nur in dem Ausdrucke für die Länge, nicht aber in demjenigen für den Radiusvector bedeutend erscheint[1]). Eine ganz exceptionelle Stellung nimmt das mit *† bezeichnete Glied ein, da es keinen kleinen Integrationsdivisor erhält, der Coëfficient ist aber von der nullten Ordnung; aus ihm entsteht die Variation.

Beschränkt man sich auf die angeführten Glieder, nebst den Constanten, und führt statt der mittleren Anomalien die mittleren Längen $L$, $L_1$ ein, da der bisher festgehaltene Anfangspunkt (der Knoten) nicht fest ist, so wird:

$$\begin{aligned}\Omega = k^2 M \frac{a^2}{a_1^3} \Big[ C &+ \tfrac{3}{4} \cos 2(L - L_1) - \tfrac{1}{2} e \cos(L - \pi) - \tfrac{15}{8} e \cos(L - 2L_1 + \pi) + \\ &+ \tfrac{3}{4} e_1 \cos(L_1 - \pi_1) + \left(\frac{a}{a_1}\right) \tfrac{3}{8} \cos(L - L_1) \Big].\end{aligned} \tag{1}$$

Hieraus folgt, wenn man für die Gleichung 47 (5) das Glied $\frac{3}{4} e_1 \cos(L_1 - \pi_1)$ noch weglässt, und die Differentialquotienten von $L$, $L_1$, $\pi$, $\pi_1$ mit $L'$, $L_1'$, $\pi'$, $\pi_1'$ bezeichnet:

$$\begin{aligned}2\int d'\Omega = k^2 M \frac{a^2}{a_1^3} \Big[ C_1 &+ \tfrac{3}{4} \frac{L'}{L' - L_1'} \cos 2(L - L_1) - e \frac{L'}{L' - \pi'} \cos(L - \pi) \\ &- \tfrac{15}{8} e \frac{L'}{L' - 2L_1' + \pi'} \cos(L - 2L_1 + \pi) + \left(\frac{a}{a_1}\right) \tfrac{3}{4} \frac{L'}{L' - L_1'} \cos(L - L_1) \Big].\end{aligned} \tag{2}$$

Wird der Coëfficient von $\frac{a^2}{a_1^3}$ in $\Omega$ mit $A_1$, der Coefficient von $\frac{a^3}{a_1^4}$ mit $A_2$ bezeichnet, so ist

$$\Omega = k^2 M \frac{a^2}{a_1^3} A_1 + k^2 M \frac{a^3}{a_1^4} A_2,$$

und es wird

$$r \frac{\partial \Omega}{\partial r} = a \frac{\partial \Omega}{\partial a} = k^2 M \frac{a^2}{a_1^3} \cdot 2A_1 + k^2 M \frac{a^3}{a_1^4} \cdot 3A_2. \tag{3}$$

Hiermit erhält man

$$r \frac{\partial \Omega}{\partial r} + 2\int d'\Omega_1 = k^2 M \frac{a^2}{a_1^3} \Sigma\, k \cos(xt + K), \tag{4}$$

wobei

---

[1]) Das Doppelintegral kann diese kleinen Glieder nicht erhalten, da jene Glieder, in denen $L$ nicht im Argumente enthalten ist, in $d'\Omega$ verschwinden. Bei der LAPLACE'schen Methode ist dieses nicht so unmittelbar ersichtlich.

$$\Sigma h \cos(\varkappa t + K) = C_1 + 2C + \tfrac{3}{2}\left(1 + \frac{L'}{L' - L_1'}\right)\cos 2(L - L_1) -$$
$$- e\left(1 + \frac{L'}{L' - \pi'}\right)\cos(L - \pi) - \tfrac{3}{2} e\left(1 + \frac{L'}{L' - 2L_1' + \pi'}\right)\cos(L - 2L_1 + \pi) \quad (5)$$
$$+ \left(\frac{a}{a_1}\right)\tfrac{3}{8}\left(\tfrac{3}{2} + \frac{L'}{L' - L_1'}\right)\cos(L - L_1)$$

und die Differentialgleichung wird

$$\frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + \frac{k_0^2}{r_0^3}(r\delta r) = k^2 M \frac{a^2}{a_1^3}\,\Sigma h \cos(\varkappa t + K). \quad (6)$$

Es ist aber, da die Sonnenmasse in Einheiten der Erdmasse ausgedrückt ist

$$M\frac{a^3}{a_1^3} = \left(\frac{L_1'}{L'}\right)^2 = \mu^2, \quad (7)$$

wenn $\mu$ das Verhältniss der mittleren siderischen Bewegung der Sonne zu derjenigen des Mondes ist. Für die Coëfficienten von $(r\delta r)$ kann man in erster Näherung $k_0^2 a^{-3} = L'^2$ setzen, indem das Produkt der in $r_0$ von der Excentricität abhängigen Glieder mit den Störungen in der ersten Näherung vernachlässigt, in zweiter Näherung rechts berücksichtigt werden kann. Dann wird die Gleichung

$$\frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + L'^2(r\delta r) = \frac{k^2}{a}\mu^2 \Sigma h \cos(\varkappa t + K). \quad (8)$$

Die Integration liefert daher, wenn man durch $a^2$ dividirt, und mit dem rechts auftretenden Faktor $k^2 a^{-3} = L'^2$ Glied für Glied multiplicirt, wodurch nur Verhältnisse von mittleren Bewegungen auftreten[1]):

$$\left(\frac{r}{a}\right)\delta\left(\frac{r}{a}\right) = h_1 \sin L't + h_2 \cos L't +$$
$$+ \mu^2\left[C_1 + 2C - \tfrac{3}{2}\frac{(2L' - L_1')L'^2}{(L' - L_1')(5L' - 4L_1')(3L' - 4L_1')}\cos 2(L - L_1) -\right.$$
$$- \frac{eL'^2}{\pi'(L' - \pi')}\cos(L - \pi) - \tfrac{3}{2}\frac{eL'^2}{(2L_1' - \pi')(L' - 2L_1' + \pi')}\cos(L - 2L_1 + \pi) + \quad (9)$$
$$\left. + \left(\frac{a}{a_1}\right)\tfrac{3}{16}\frac{L'^2(5L' - 3L_1')}{(L' - L_1')L_1'(2L' - L_1')}\cos(L - L_1)\right].$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit

$$\frac{a}{r} = 1 + e\cos\text{☾} = 1 + e\cos(L - \pi),$$

so erhält man die von der ersten Potenz der störenden Massen abhängige Störung $\delta r$ bis einschliesslich Grössen von der ersten Ordnung der Excentricitäten.

Die bisher willkürlich gelassene Integrationsconstante $C_1$, welche durch die Integration von $d'\Omega$ eintrat, kann so bestimmt werden, dass zu $\delta r$ kein constantes

---

1) Es ist z. B. der Coëfficient der Evection:

$$-\tfrac{3}{2}e\frac{L'^2\left(1 + \frac{L'}{L' - 2L_1' + \pi'}\right)}{L'^2[L'^2 - (L' - 2L_1' + \pi')^2]} = -\tfrac{3}{2}e\frac{L'^2(2L' - 2L_1' + \pi')}{(L' - 2L_1' + \pi')(L' + L' - 2L_1' + \pi')(L' - L' + 2L_1' - \pi')}.$$

Eigentlich wäre rechts $\frac{k^2 M♁}{a^3} = \frac{k^2(M♁ + M☾)}{a^3}\,\frac{M♁}{M♁ + M☾} = \frac{L'^2}{1 + \nu''}$ zu setzen, wenn $\nu'' = \frac{M☾}{M♁}$ ist; doch kann in der hier beibehaltenen Näherung $\nu''$ vernachlässigt werden.

Glied hinzutritt; hiermit würde $C_1 = -2C$ folgen. Doch wird eine andere Bestimmung zweckmässiger, weshalb die Constante vorläufig noch beibehalten werden soll.

Die Integrationsconstanten $h_1$, $h_2$, welche aus den Beobachtungen zu bestimmen wären, können gleich Null gesetzt werden. Ist nämlich

$$h_1 = h \sin(L_0 - H); \quad h_2 = h \cos(L_0 - H),$$

so würde

$$h_1 \sin L't + h_2 \cos L't = h \cos(L_0 + L't - H) = h \cos(L - H),$$

d. h. $h$, $H$ sind mit $-e$, $\pi$ zu identificiren.

Entwickelt man nun die einzelnen Glieder in 47 (8) und schreibt für den Coëfficienten

$$\frac{1}{k_0\sqrt{a}\sqrt{1-e^2}} = \frac{a\sqrt{a}}{k_0\sqrt{1-e^2}}\,\frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2 L'\sqrt{1-e^2}},$$

so erhält man mit Vernachlässigung von $e^2$:

$$\begin{aligned}\frac{2}{a^2L'}\frac{d}{dt}(r\delta r) = 2\mu^2\Big[&+3\,\frac{(2L'-L_1')L'}{(5L'-4L_1')(3L'-4L_1')}\sin 2(L-L_1)+\\ &+\frac{9}{2}\,\frac{eL'}{2L_1'-\pi'}\sin(L-2L_1+\pi)+\frac{eL'}{\pi'}\sin(L-\pi)- \qquad (10a)\\ &-\left(\frac{a}{a_1}\right)\frac{15}{16}\,\frac{L'(5L'-3L_1')}{L_1'(2L'-L_1')}\sin(L-L_1)\Big].\end{aligned}$$

Da $\frac{dr}{dt}$ von der ersten Ordnung der Excentricitäten ist, so wird innerhalb der hier gesteckten Grenzen das erste Glied keinen Beitrag liefern; aus dem dritten Gliede entsteht, wenn wieder die mit $e$ oder $\left(\frac{a}{a'}\right)$ multiplicirten Glieder ohne kleine Integrationsdivisoren vernachlässigt werden:

$$-\frac{3}{a^2L'}\int dt\int d'\Omega = -\frac{3}{2}\mu^2\left[C_0+\int C_1 L'dt+\frac{3}{4}\,\frac{L'^2}{(L'-L_1')^2}\sin 2(L-L_1)\right]. \qquad (10b)$$

Endlich entsteht aus dem letzten Gliede

$$\begin{aligned}-\frac{2}{a^2L'}\int r\frac{\partial\Omega}{\partial r}dt = -2\mu^2\Big[&C_2+2\int CL'dt+\frac{3}{4}\,\frac{L'}{L'-L_1'}\sin 2(L-L_1)\\ &+\frac{3}{2}\,\frac{e_1L'}{L_1'-\pi_1'}\sin(L_1-\pi_1)\Big]. \qquad (10c)\end{aligned}$$

Vereinigt man die Ausdrücke von (10a), (10b), (10c), so erhält man für die Störung in Länge:

$$\begin{aligned}\delta L = \mu^2\Big\{&-\left(\tfrac{3}{2}C_0+2C_2\right)-\int\left(\tfrac{3}{2}C_1+4C\right)L'dt+\\ &+\left[6\,\frac{(2L'-L_1')L'}{(5L'-4L_1')(3L'-4L_1')}-\frac{9}{8}\,\frac{L'^2}{(L'-L_1')^2}-\frac{3}{2}\,\frac{L'}{(L'-L_1')}\right]\sin 2(L-L_1)+\\ &+2e\frac{L'}{\pi'}\sin(L-\pi)+9\,\frac{eL'}{2L_1'-\pi'}\sin(L-2L_1+\pi)-3\,\frac{e_1L'}{L_1'-\pi_1'}\sin(L_1-\pi_1)- \qquad (11)\\ &-\left(\frac{a}{a_1}\right)\frac{15}{8}\,\frac{L'(5L'-3L_1')}{L_1'(2L'-L_1')}\sin(L-L_1)\Big\}.\end{aligned}$$

Damit wird nun die wahre Mondlänge

$\lambda = L_0 + L't +$ Mittelpunktsgleichung $+ \delta L$

$= \left[L_0 - \left(\tfrac{3}{2}C_0 + 2C_2\right)\mu^2\right] + L'\left[1 - \left(\tfrac{3}{2}C_1 + 4C\right)\right]t + 2e\sin(L-\pi) +$ period. Glied.

wo das Hauptglied der Mittelpunktsgleichung besonders angeschrieben ist. Bestimmt man nun die mittlere Länge $L_0$ und die mittlere tägliche siderische

Bewegung $L'$ aus Beobachtungen, so werden diese die wahren, bereits um die Störungen corrigirten Werthe sein, daher wird man

$$\frac{3}{2}C_0+2C_2=0,\quad \frac{3}{2}C_1+4C=0$$

zu setzen haben[1]) oder $C_1=-\frac{8}{3}C$, damit wird die Constante im Radiusvector

$$C_1+2C=-\frac{1}{6}.$$

Ein weiteres, aus den Beobachtungen zu bestimmendes Element ist die Excentricität. Diese kann aus dem grossten Gliede der Mittelpunktsgleichung $2e\sin(L-\pi)$ ermittelt werden. Dabei ist aber vorausgesetzt, dass der Coëfficient dieses Gliedes eben $2e$ ist; dann aber darf in $\delta L$ kein Glied mit diesem Argumente auftreten. Dieses ist nun nicht der Fall, im Gegentheil ist hier ein Glied mit sehr kleinem Integrationsdivisor $\pi'$ enthalten, welches aus dem Glied $-\frac{1}{4}e\cos(L-\pi)$ in $\Omega$ entstanden ist. Dass dieses Glied aber zum Verschwinden gebracht werden kann, wird in No. 59 gezeigt. Dann wird:

$$\begin{aligned}\delta L=\mu^2\Bigg\{&\left[6\frac{(2L'-L_1')L'}{(5L'-4L_1')(3L'-4L_1')}-\frac{9}{8}\frac{L'^2}{(L'-L_1')^2}-\frac{3}{2}\frac{L'}{(L'-L_1')}\right]\sin 2(L-L_1)+\\&+9\frac{eL'}{2L_1'-\pi'}\sin(L-2L_1+\pi)-\frac{3e_1L'}{L_1'-\pi_1'}\sin(L_1-\pi)-\\&-\left(\frac{a}{a_1}\right)\cdot\frac{1}{4}\frac{L'(5L'-3L_1')}{L_1'(2L'-L_1')}\sin(L-L_1)\Bigg\}.\end{aligned}\tag{12}$$

Man pflegt für den Mond nicht die Entfernung, sondern seine Aequatoreal-Horizontalparallaxe anzugeben. Ist dieselbe $p$, so wird, wenn $\rho$ der Aequatorealhalbmesser der Erde ist

$$\sin p=\frac{\rho}{r_0+\delta r},$$

wenn man unter $r_0$ den elliptischen Theil des Radiusvectors versteht und die Störungen $\delta r$ abtrennt. Dann wird:

$$\sin p=\frac{\rho}{r_0+\delta r}=\frac{\rho}{r_0}\left(1-\frac{\delta r}{r_0}\right).$$

Berücksichtigt man nur die ersten Potenzen der Excentricitäten und Massen, so wird

$$\sin p=\frac{\rho}{a}\left[1+e\cos(L-\pi)-\frac{\delta r}{r_0}\right].$$

Nun ist $\frac{\delta r}{r_0}=\frac{1}{r_0^2}(r_0\delta r)$; es wird daher der Ausdruck (9) mit $1+2e\cos(L-\pi)$ zu multipliciren sein, wobei aber die mit $e$ multiplicirten Glieder ohne kleine Integrationsdivisoren in der hier beibehaltenen Näherung wegzulassen sind. Weiter wird man die Integrationsconstanten $k_1$, $k_2$ und ebenso wie in $\delta L$ auch das zweite periodische Glied, welches von dem Ausdrucke $-\frac{1}{4}e\cos(L-\pi)$ der Störungsfunction herrührt, weglassen, und dann gemäss der Bestimmung der Integrationsconstanten $C_1$: $C_1+2C=-\frac{1}{4}$ setzen. Zieht man dann die sämmtlichen constanten (nicht periodischen) Theile der Entwickelung zusammen, so wird das Produkt derselben in $\frac{\rho}{a}$ ebenfalls eine Constante, der Sinus der mittleren Aequatoreal-Horizontalparallaxe $p_0$ des Mondes; für diese ist also:

$$\frac{\rho}{a}(1+\tfrac{1}{4}\mu^2+\ldots)=\sin p_0\tag{13}$$

und dann wird[2])

[1]) Würde die Constante so bestimmt worden sein, dass zu $\delta r$ kein constantes Glied hinzutritt, so würde eine Störung in der mittleren Bewegung übrig bleiben.

[2]) Selbstverständlich sind die Coëfficienten der periodischen Theile durch den gemeinschaftlichen Faktor zu dividiren. Für die vorliegende Näherung kann dies unterbleiben.

$$\sin p = \sin p_0 \Big\{ 1 + e\cos(L-\pi) + \mu^2 \Big[ \tfrac{3}{4} \frac{(2L'-L_1')L'^2}{(L'-L_1')(5L'-4L_1')(3L'-4L_1')} \cos 2(L-L_1) + \tfrac{3}{4} \frac{eL'^2}{(2L_1'-\pi')(L'-2L_1'+\pi')} \cos(L-2L_1+\pi) - \left(\frac{a}{a_1}\right) \tfrac{3}{8} \frac{L'^2(5L'-3L_1')}{(L'-L_1')(2L'-L_1')L_1'} \cos(L-L_1) \Big] \Big\}. \tag{14}$$

Der Werth von $p_0$ [1]) ist aus Beobachtungen zu bestimmen, und er ist nach Hansen:

$$\frac{\sin p_0}{\operatorname{arc} 1''} = 3422''\cdot 7.$$

58. Integration der Differentialgleichung für die Breite. Für die Störungen in Breite hat man die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k_0^2 z}{r^3} = \frac{\partial \Omega}{\partial z}. \tag{1}$$

Es wird jedoch geocentrisch nicht $z$, sondern die Mondbreite beobachtet. Ist wieder die Tangente derselben gleich $s$, so wird

$$z = \frac{rs}{\sqrt{1+s^2}}.$$

Es sollen nunmehr, da nur Glieder erster Ordnung der kleinen Parameter berücksichtigt werden, Kürze halber sofort die Glieder zweiter Ordnung weggelassen werden, da der Gang für die Berücksichtigung derselben aus dem früheren ausreichend klar sein wird. Setzt man also

$$z = rs,$$

so wird:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{dt}\frac{ds}{dt} + \frac{s}{r}\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{k_0^2 s}{r^3} = \frac{1}{r}\frac{\partial \Omega}{\partial z}. \tag{2a}$$

Nennt man $s_0$ den ungestörten Werth von $s$, also

$$s_0 = \sin i \sin(v+\omega), \quad \frac{ds_0}{dt} = \sin i \cos(v+\omega)\left(\frac{dv}{dt} + \omega'\right),$$

so sind $s_0$ und $ds_0$ von der Ordnung der Neigung, also als Grössen erster Ordnung anzusehen. Für $s_0$ ist aber

$$\frac{d^2 s_0}{dt^2} + \frac{2}{r_0}\frac{dr_0}{dt}\frac{ds_0}{dt} + \frac{s_0}{r_0}\frac{d^2 r_0}{dt^2} + \frac{k_0^2 s_0}{r_0^3} = 0. \tag{2b}$$

Subtrahirt man die beiden Gleichungen (2a) und (2b), so folgt

$$\frac{d^2 \delta s}{dt^2} + \left(\frac{2}{r}\frac{dr}{dt} - \frac{2}{r_0}\frac{dr_0}{dt}\right)\frac{ds}{dt} + \frac{2}{r_0}\frac{dr_0}{dt}\left(\frac{ds}{dt} - \frac{ds_0}{dt}\right) + \left(\frac{s}{r} - \frac{s_0}{r_0}\right)\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{s_0}{r_0}\left(\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{d^2 r_0}{dt^2}\right) + k_0^2\left(\frac{s}{r^3} - \frac{s_0}{r_0^3}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial \Omega}{\partial z}. \tag{3}$$

Setzt man hier $s = s_0 + \delta s$, $r = r_0 + \delta r$ ein, so erhält man in der angegebenen Näherung [2])

---

[1]) Es muss hervorgehoben werden, dass in den Lehrbüchern der sphärischen Astronomie die mittlere Aequatoreal-Horizontalparallaxe des Mondes durch $\sin p_0 = \frac{\varrho}{a}$ definirt wird. Selbstverständlich ist diese vereinfachende Voraussetzung, welche für die weiteren Entwickelungen immerhin gemacht werden kann, nur richtig, wenn die Mondbahn als kreisförmig vorausgesetzt wird, d. h. sowohl auf Excentricität als Störungen nicht Rücksicht genommen wird.

[2]) Wobei jedoch noch aus den rechts mit $\delta s$ multiplicirten Gliedern die constanten Theile zu dem Coëfficienten $L'^2$ gezogen werden müssen; vergl. No. 60.

aus dem zweiten Gliede $+\frac{2}{r}\frac{dz_0}{dt}\frac{d\delta r}{dt}$;

das dritte und vierte Glied sind zu vernachlässigen,

der fünfte Ausdruck ist $\frac{z_0}{r_0}\frac{d^2\delta r}{dt^2}$,

der sechste Ausdruck $\frac{k_0^2\delta z}{r_0^3} - \frac{3k_0^2 z_0}{r_0^4}\delta r_0$;

auf der rechten Seite kann man $r_0$ für $r$ schreiben, und erhält daher

$$\frac{d^2\delta z}{dt^2} + L'^2\delta z = \frac{1}{r_0}\frac{\partial\Omega}{\partial z} - \frac{z_0}{r_0}\left(\frac{d^2\delta r}{dt^2} - \frac{3k_0^2}{r_0^3}\delta r_0\right) - \frac{2}{r_0}\frac{dz_0}{dt}\frac{d\delta r}{dt}. \tag{4}$$

Es ist nun zunächst:[1])

$$\frac{1}{r_0}\frac{\partial\Omega}{\partial z} = -\frac{k^2M}{\Delta^3}\frac{z}{r_0} = -\frac{k^2M}{r'^3}\left(1 + 3\frac{r}{r'}H\right)\sin i\sin(v+\omega)$$
$$= -\frac{k^2}{a^3}\mu^2\sin i\sin(☾+\omega)$$
$$= -L'^2\mu^2\sin i\sin(L-\Omega).$$

Weiter ist zu beachten, dass bei der Integration wieder die Nenner $L'^2-\varkappa^2$ hervortreten, welche nur merklich werden, wenn das Argument des betrachteten Gliedes der rechten Seite $L$ mit dem Coëfficienten 1 enthält.

Berücksichtigt man, dass die Hauptglieder in $\delta r$ und seinen Differentialquotienten $L$ enthalten, diese aber mit $z_0 = \sin i\sin(L-\Omega)$ multiplicirt kein derartiges Argument geben, so können diese Glieder ebenfalls wegbleiben; nur die Variation liefert einen Beitrag, indem das Produkt der trigonometrischen Functionen, deren Argument $(L-\Omega)$ ist, nebst deren Ableitungen, mit dem $\sin 2(L-L_1)$ in dem resultirenden Argumente $L$ mit dem Coëfficienten 1 erhält. Bezeichnet man für den Augenblick Kürze halber den Coëfficienten der Variation

$$\frac{-\frac{1}{2}\mu^2L'^2\left(1+\frac{L'}{L'-L_1'}\right)}{(3L'-4L_1')(5L'-4L_1')} = \mathfrak{b},$$

so wird

$$\delta r = a\mathfrak{b}\cos 2(L-L_1)$$

$$\frac{1}{a}\frac{d\delta r}{dt} = -2(L'-L_1')\mathfrak{b}\sin 2(L-L_1);\quad \frac{1}{a}\frac{d^2\delta r}{dt^2} = -4(L'-L_1')^2\mathfrak{b}\cos 2(L-L_1)$$

die drei letzten Ausdrücke geben daher den Beitrag

$$-\sin i\sin(L-\Omega)[-4(L'-L_1')^2\mathfrak{b}\cos 2(L-L_1) - 3L'^2\mathfrak{b}\cos 2(L-L_1)]$$
$$+ 4\sin i\cos(L-\Omega)(L'-\Omega')(L'-L_1')\mathfrak{b}\sin 2(L-L_1).$$

---

[1]) Es muss natürlich dasselbe Resultat aus 56 (5) hervorgehen; nur ist zu beachten, dass $H$ ebenfalls von $z$ abhängig ist. Es wird

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z} = +k^2M\frac{r}{r'^3}\frac{\partial r}{\partial z}\left[(3H^2-1)+\frac{3}{2}\frac{r}{r'}(5H^3-3H)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}k^2M\frac{r^2}{r'^3}\left[6H+\frac{r}{r'}(15H^2-3)\right]\left[\frac{\partial H}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}+\left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)\right]$$

und da für $z'=0$ der nach dem explicite vorkommenden $z$ genommene Differentialquotient: $\left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)$ null ist, und

$$\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{H}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

ist, so wird

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z} = +k^2M\frac{z}{r'^3}\left[(3H^2-1)+\frac{3}{2}\frac{r}{r'}(5H^3-3H) - 3H^2 - \frac{1}{2}\frac{r}{r'}(15H^3-3H)\right].$$

Löst man hier die Produkte auf, und berücksichtigt nur diejenigen Glieder, welche im Argumente $L$ mit dem Faktor 1 enthalten, so erhält man:

$$[-2(L'-L_1')^2 - \tfrac{1}{2}L'^2 + 2(L'-\Omega')(L'-L_1')]\mathfrak{v}\, sin\, i\, sin(L-2L_1+\Omega)$$

daher, wenn man in dem Ausdrucke

$$\frac{L'^2}{L'-L_1'} = L' + L_1'$$

setzt,

$$+\tfrac{3}{4}\mu^2 L'^2 \frac{(2L'-L_1')(3L'-L_1'+4\Omega')}{(3L'-4L_1')(5L'-4L_1')}\, sin\, i\, sin\,(L-2L_1+\Omega).$$

Die Differentialgleichung wird daher:

$$\frac{d^2\delta s}{dt^2} + L'^2\delta s = -L'^2\mu^2 sin\, i\, sin\,(L-\Omega) +$$
$$+\tfrac{3}{4}L'^2\mu^2 sin\, i\frac{(2L'-L_1')(3L'-L_1'+4\Omega')}{(5L'-4L_1')(3L'-4L_1')} sin(L-2L_1+\Omega) \tag{3a}$$

und daraus

$$\delta s = -\frac{L'^2\mu^2}{(2L'-\Omega')\Omega'} sin\, i\, sin\,(L-\Omega) +$$
$$+\tfrac{3}{4}\frac{L'^2\mu^2(2L'-L_1')(3L'-L_1'+4\Omega')}{(2L'-2L_1'+\Omega')(2L_1'-\Omega')(5L'-4L_1')(3L'-4L_1')} sin\, i\, sin(L-2L_1+\Omega). \tag{4}$$

**59. Elementäre Glieder; Secularbewegungen von Knoten und Perigeum.** In den Gleichungen 57 (9), (11) und 58 (4) treten zweierlei stark vergrösserte Glieder auf; in den einen wird die Vergrösserung durch den Faktor $\frac{L'}{L_1'} = \frac{1}{\mu}$ bewirkt, so dass die resultirenden Coëfficienten nur mehr von der Ordnung $\mu$, d. h. der Quadratwurzel aus der störenden Masse, sind; ausserdem aber eine zweite Gruppe von Gliedern, welche im Nenner $\Omega'$ und $\pi'$ haben. Die Verhältnisse $\frac{L'}{\Omega'}, \frac{L'}{\pi'}$ sind aber von der Ordnung $\frac{1}{\mu^2}$, so dass in diesen Gliedern der Faktor $\mu^2$ ganz verschwindet, die Coëfficienten von der nullten Ordnung der störenden Massen sind. Sie verlieren den Charakter der Störungen, und werden mit Gliedern der ungestörten Bewegung vergleichbar. Diese Glieder erhielten von GYLDÉN den Namen elementäre Glieder. Es können aber im weiteren Verlaufe auch Glieder auftreten, in denen nicht nur der Faktor $\mu^2$ im Zähler verschwindet, sondern wo noch überdiess die störenden Massen in den Nenner treten: es entstehen hyperelementäre Glieder. Es ist sofort klar, dass eine derartige Entwickelung unbrauchbar ist, indem man es nicht mehr mit Näherungen zu thun hat, sondern die Reihen divergent werden.

Diese Glieder haben aber die Eigenschaft, dass sie aus denjenigen Gliedern der störenden Kräfte entstehen, die ausser $L$ noch $\Omega$ oder $\pi$, aber kein anderes Argument enthalten; denn nur dann kann $(L'^2-x^2) = (L'-x)\ (L'+x)$ den Faktor $\Omega'$ oder $\pi'$ erhalten. Wenn man daher in den störenden Kräften diese Glieder zum Verschwinden bringen könnte, so würden eben auch die Glieder nicht auftreten. Hierzu giebt es aber ein Mittel, welches nicht nur zu diesem Zwecke tauglich, sondern für eine streng richtige Lösung unbedingt erforderlich ist.

Die Auflösung der canonischen Differentialgleichung ohne letztem Gliede war, da hier $\sqrt{p} = L'$ ist:

$$k\, sin\,(L't+H) = k\, sin\,(L+H),$$

wo $h$ und $H$ die Integrationsconstanten sind. Für $r$ wird $h = -e$, $H = 90° - \pi$; der aus der Beobachtung zu bestimmende Theil $- e\cos(L - \pi)$; für $s$ ist $h = \sin i$, $H = -\Omega$, das betreffende Glied $\sin i \sin(L - \Omega)$.

Diese Lösung setzt voraus, dass $\Omega$ und $\pi$ constant sind; es wäre dann nicht gestattet, bei der Integration der canonischen Differentialgleichung mit letztem Gliede diese Grössen als veränderlich anzusehen. Die Folge davon wäre aber, dass nunmehr jene Glieder, welche dieselben Argumente enthalten, und welche zur Entstehung der elementären Glieder Veranlassung geben, die Nenner $\infty$ erhalten würden. Die Lösung der canonischen Differentialgleichung in der bisher benutzten Form setzt also geradezu voraus, dass in dem letzten Gliede kein Ausdruck mit dem Argumente $(L't + K)$ vorkommt. Wenn solche Glieder auftreten, so muss die Integrationsmethode geändert werden; dies geschieht eben durch die Annahme eines veränderlichen $H$.

Es wird in der canonischen Differentialgleichung sofort jenes Glied mit dem kritischen Argumente berücksichtigt. Dann wird dieselbe, wenn sofort $L'$ für $\sqrt{p}$ geschrieben wird:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + L'^2 y = f\sin(L't + H) \tag{1}$$

und das Integral in der Form

$$y = h\sin(L't + H), \tag{2}$$

wobei jetzt $H$, und der grösseren Allgemeinheit wegen, sogleich auch $h$ als veränderlich angenommen werden. Lässt sich die Gleichung (1) durch den Ausdruck (2) unter dieser Annahme befriedigen, so wird, wie man sofort sieht, die Integration der Gleichung mit letztem Gliede zu denselben Resultaten führen, wie früher, wobei aber die in den Argumenten $K$ auftretenden Grössen $H$ ebenfalls als veränderlich angesehen werden, d. h. wo in den Werthen der $(\varkappa t + K)$ in $\varkappa t$ die sämmtlichen veränderlichen Theile eingezogen sind, wie dieses in No. 49 geschah. Nur in diesem Falle werden daher die in 49 erhaltenen Resultate theoretisch richtig.

Aus (2) folgt:

$$\frac{dy}{dt} = hL'\cos(L't + H) + \frac{dh}{dt}\sin(L't + H) + h\cos(L't + H)\frac{dH}{dt}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2} = -hL'^2\sin(L't+H) + 2\frac{dh}{dt}L'\cos(L't+H) - 2hL'\sin(L't+H)\frac{dH}{dt} + \\ + \frac{d^2h}{dt^2}\sin(L't+H) + 2\frac{dh}{dt}\cos(L't+H)\frac{dH}{dt} - \\ - h\sin(L't+H)\left(\frac{dH}{dt}\right)^2 + h\cos(L't+H)\frac{d^2H}{dt^2}.\end{aligned} \tag{3}$$

Setzt man dies in (1) ein, so folgt:

$$\begin{aligned}\left[-hL'^2 - 2hL'\frac{dH}{dt} + \frac{d^2h}{dt^2} - h\left(\frac{dH}{dt}\right)^2 + hL'^2\right]\sin(L't + H) + \\ + \left[2\frac{dh}{dt}L' + \frac{2dh}{dt}\frac{dH}{dt} + h\frac{d^2H}{dt^2}\right]\cos(L't + H) = f\sin(L't + H),\end{aligned}$$

woraus sofort zu ersehen ist, dass in der Lösung (2) für $H$ derjenige Werth genommen werden muss, der in dem kritischen Glied von (1) enthalten ist, und weiters, dass

$$\begin{aligned}h\left(\frac{dH}{dt}\right)^2 + 2hL'\frac{dH}{dt} - \frac{d^2h}{dt^2} = -f \\ h\frac{d^2H}{dt^2} + 2\frac{dh}{dt}\frac{dH}{dt} + 2\frac{dh}{dt}L' = 0\end{aligned} \tag{4}$$

gesetzt werden muss. Wird nun zunächst angenommen, dass $k$ constant ist, so werden daraus die Gleichungen folgen:

$$k\left(\frac{dH}{dt}\right)^2 + 2kL'\frac{dH}{dt} = -f$$

$$k\frac{d^2H}{dt^2} = 0. \tag{5}$$

Die zweite Gleichung giebt:

$$H = H_0 + H_1 t,$$

wo $H_0$ und $H_1$ constant sind, und dieses in die erste substituirt:

$$\begin{aligned} H_1^2 + 2L'H_1 &= -\frac{f}{k} \\ H_1 &= -L' \pm \sqrt{L'^2 - \frac{f}{k}}, \end{aligned} \tag{6}$$

wo das obere Zeichen zu nehmen ist, wenn die Veränderlichkeit von $H$ als klein vorausgesetzt wird. Es würde daher

$$H_1 = L'\left(\sqrt{1 - \frac{f}{kL'^2}} - 1\right) \tag{7}$$

oder wenn $f$ gegenüber $kL'^2$ nur klein ist:

$$H_1 = \left(\frac{dH}{dt}\right) = -\frac{1}{2}\frac{f}{kL'}. \tag{7a}$$

In dem vorliegenden Falle ist:

1) Für die Gleichung 57 (8) mit der Beziehung (7a), da

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos(L - \pi), \quad \left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 - 2e\cos(L - \pi), \quad \left(\frac{r}{a}\right)\delta\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{1}{2}\delta\left(\frac{r}{a}\right)^2$$

ist:

$$k = -2e, \quad H = 90° - \pi; \quad f = -2L'^2\mu^2 e\left(1 + \frac{L'}{L' - \pi'}\right)$$

$$H_1 = -\frac{d\pi}{dt} = -\frac{1}{2}\mu^2 L'\left(1 + \frac{L'}{L' - \pi'}\right).$$

Hier tritt allerdings rechts noch $\frac{d\pi}{dt} = \pi'$ auf; vernachlässigt man es gegenüber $L'$, so wird

$$\frac{d\pi}{dt} = +\mu^2 L'. \tag{8a}$$

2) Für die Gleichung 58 (8a) ist:

$$k = \sin i, \; H = -\Omega, \; f = -L'^2\mu^2\sin i$$

$$H_1 = -\frac{d\Omega}{dt} = +\frac{1}{2}L'\mu^2$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{1}{2}L'\mu^2. \tag{8b}$$

Die Bedingung des Verschwindens der elementären Glieder giebt also sofort eine Bestimmung für die Bewegung der Knoten und Apsiden.

Die in No. 57 und 58 erhaltenen Ausdrücke geben die Störungen, die von der ersten Potenz der Masse herrühren. Setzt man diese in die rechte Seite der Störungsfunction, so werden neue Ausdrücke entstehen, die aber, da $\Omega$ den Faktor $\mu^2$ hat, mit $\mu^4$ multiplicirt auftreten. Bei der Berücksichtigung der dritten Potenz der störenden Massen tritt noch $\mu^6$ hinzu, so dass also eine nach Potenzen von $\mu^2$ (d. i. der störenden Masse) geordnete Reihe erhalten wird; da $\mu^2$ nahe $\frac{1}{1000}$ ist, so werden die aufeinanderfolgenden Näherungen als convergent angesehen werden können, insolange nicht durch das Auftreten von kleinen Integrations-

divisoren diese Convergenz gestört wird, eine Erscheinung, die nun aber nicht zu vermeiden ist. Die Entwickelungen können vollständig numerisch, oder analytisch geordnet nach Potenzen der kleinen Parameter oder geordnet nach Potenzen von $\mu^2$ durchgeführt werden. Dem Wesen nach ist dieses die Methode von LAPLACE, welche auch mit mehr oder weniger bedeutenden Modifikationen von PLANA und DAMOISEAUX verwendet wurde. Völlig consequent hat z. B. PONTÉCOULANT die Entwickelungen nach Potenzen von $\mu^2$ vorgenommen, dabei aber auch die Nenner, welche $L' - iL_1' = L'(1 - i\mu)$ enthalten, nach steigenden Potenzen von $\mu$ aufgelöst (wodurch auch ungerade Potenzen auftreten), ein Vorgang, der jedoch vom Standpunkte der Convergenz der Reihen als nicht zulässig erklärt werden muss.

**60. Seculaacceleration.** In Gleichung 57 (11) für die mittlere Länge trat das Integral auf:

$$-\mu^2\int(\tfrac{3}{2}C_1 + 4C)L'dt,$$

in welchem die Integrationsconstante $C_1$ so bestimmt wurde, dass $L'$ die aus den Beobachtungen folgende mittlere Bewegung repräsentire, d. h. dass dieses Integral verschwinde. Die Grösse $C$ ist aber nicht völlig constant; sie ist nach 56 (5), abgesehen von Gliedern 4. Ordnung:

$$C = \tfrac{1}{4}(1 + \tfrac{3}{2}e^2 + \tfrac{3}{2}e_1^2 - 6\gamma^2) \tag{1}$$

und da die Excentricität der Erdbahn nicht constant ist, sondern einer secularen Veränderung unterliegt, so wird $C$ als variabel angesehen werden müssen. Setzt man, da die Excentricität der Erdbahn abnimmt:

$$e_1 = e_1^{(0)} - e_1't; \quad e_1^2 = e_1^{(0)2} - 2e_1^{(0)}e_1't, \tag{2}$$

so kann $C_1$ als Integrationsconstante nur so bestimmt werden, dass der constante Theil der unter dem Integral befindlichen Summe verschwindet; der von $t$ abhängige jedoch muss stehen bleiben, so dass dieses Integral in

$$+\mu^2\int 3e_1^{(0)}e_1'tL'dt = +\tfrac{3}{2}e_1^{(0)}e_1'L'\mu^2t^2 \tag{3}$$

übergeht. Dieses Glied ist zum Ausdruck 57 (12) hinzuzulegen, es giebt die Secularacceleration des Mondes.

Der Coëfficient $f$ in Gleichung 50 (1) ist aber ebenfalls von $e_1^2$ abhängig. Schreibt man:

$$f = f_1 + f_2e_1^2, \tag{4}$$

so werden jetzt die Gleichungen 59 (4):

$$\begin{aligned} &h\left(\frac{dH}{dt}\right)^2 + 2hL'\left(\frac{dH}{dt}\right) - \frac{d^2h}{dt^2} = -f_1 - f_2e_1^2 \\ &h\frac{d^2H}{dt^2} + 2\frac{dh}{dt}\frac{dH}{dt} + 2\frac{dh}{dt}L' = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

und man sieht, dass die Gleichungen 59 (5) wegen der Veränderlichkeit von $f$ nicht erfüllt werden können. Daraus folgt, dass auch $h$ veränderlich angenommen werden muss.

Die zweite Gleichung (5) lässt sich schreiben:

$$\frac{\dfrac{d^2H}{dt^2}}{L' + \dfrac{dH}{dt}} + \frac{2\dfrac{dh}{dt}}{h} = 0;$$

deren Intergration liefert

$$\log\left(L' + \frac{dH}{dt}\right) + 2\log h = \log c^2L' \tag{6}$$

oder

$$k^2 = \frac{c^2 L'}{L' + \frac{dH}{dt}}, \tag{7}$$

wo $c$ die Integrationsconstante ist. Hieraus ersieht man, dass die Veränderlichkeit von $k$ jedenfalls eine sehr geringe ist, da $\frac{dH}{dt}$ gegenüber $L'$ sehr klein ist; man kann demnach auch

$$k = c\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{L'}\frac{dH}{dt}\right) = c - \frac{1}{2}\frac{c}{L'}\frac{dH}{dt} \tag{8}$$

setzen. Sieht man daher in der ersten Gleichung (5) von dem zweiten Differentialquotienten von $k$ ab, so folgt:

$$\frac{\left(\frac{dH}{dt}\right)^2 + 2L'\frac{dH}{dt}}{\sqrt{L' + \frac{dH}{dt}}} = -\frac{1}{c\sqrt{L'}}(f_1 + f_2 e_1^2)$$

oder, wenn der Nenner entwickelt wird:

$$\frac{dH}{dt} + \frac{1}{8L'^2}\left(\frac{dH}{dt}\right)^2 = -\frac{1}{2cL'}(f_1 + f_2 e_1^2).$$

Eine Näherung wird, wie unmittelbar ersichtlich, und auch aus 59 (4) folgt:

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{1}{2cL'}(f_1 + f_2 e_1^2);$$

als genaueren Werth erhält man:

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{1}{2cL'}(f_1 + f_2 e_1^2) + \frac{1}{64c^3 L'^5}(f_1 + f_2 e_1^2)^2 \tag{9}$$

oder, wenn man die dritten Potenzen von $f$ vernachlässigt, und $e_1^2 = e_1^{(0)2} - 2e_1^{(0)} e_1' t$ einsetzt:

$$\frac{dH}{dt} = -\left(\frac{1}{2cL'}f_1 + \frac{1}{2cL'}f_2 e_1^2\right)$$
$$= -\frac{1}{2cL'}\left(f_1 + f_2 e_1^{(0)2}\right) + \frac{e_1^{(0)} e_1'}{cL'} f_2 t$$
$$H = H_0 - \frac{1}{2cL'}\left(f_1 + f_2 e_1^{(0)2}\right) t + \frac{1}{2}\frac{e_1^{(0)} e_1'}{cL'} f_2 t^2. \tag{10}$$

Es werden daher auch der Knoten und das Perigeum der Mondbahn einer Secularvariation unterliegen, überdies aber auch $k$ veränderlich sein. Der Werth von $k$ wird nämlich:

$$k = c - \frac{1}{2}\frac{c}{L'}\left[-\frac{1}{2cL'}(f_1 + f_2 e_1^2)\right]$$
$$= c + \frac{1}{4L'^2}(f_1 + f_2 e_1^{(0)2}) - \frac{1}{2}\frac{e_1^{(0)} e_1'}{L'^2} f_2 t.$$

Schreibt man daher

$$H = H_0 + H't + H''t^2; \quad k = k_0 + k't, \tag{11a}$$

so wird

$$H' = -\frac{1}{2cL'}\left(f_1 + f_2 e_1^{(0)2}\right); \quad H'' = +\frac{1}{2}\frac{e_1^{(0)} e_1'}{cL'} f_2$$
$$k_0 = c + \frac{1}{4L'^2}(f_1 + f_2 e_1^{(0)2}); \quad k' = -\frac{1}{2}\frac{e_1^{(0)} e_1'}{L'^2} f_2. \tag{11b}$$

Damit wird noch

$$cL' = k_0 L' - \frac{1}{4L'}(f_1 + f_2 e_1^{(0)2}),$$

welcher Werth in (11a), (11b) einzusetzen wäre; doch wird für die vorliegende Näherung ausreichend

$$\iota = h_0; \quad H' = -\frac{f_1}{2h_0 L'},$$

wodurch die Resultate für die Bewegung von ☊ und $\pi$ mit den in 59 (8a), (8b) erlangten identisch werden. Um die Secularvariationen zu erhalten sei:

1) Der Coëfficient von $cos(L - \pi)$ in 57 (5):

$$-e\left(1 + \frac{L'}{L' - \pi'}\right)(p_1 + q_1 e_1^2),$$

so wird in erster Näherung $p_1 = 1$ und weiter (vergl. pag. 448 den Werth von $f$):

$$f_2 = \mp 2L'^2 \mu^2 q_1 e\left(1 + \frac{L'}{L' - \pi'}\right), \quad h_0 = -2e,$$

demnach der Coefficient von $t^2$ in dem Ausdrucke für $\pi$:

$$-H'' = +\tfrac{1}{2}\frac{d^2\pi}{dt^2} = \frac{e_1^{(0)} e_1'}{-4eL'} q_1 e\left(1 + \frac{L'}{L' - \pi'}\right) \cdot 2L'^2 \mu^2$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{d^2\pi}{dt^2} = -e_1^{(0)} e_1' L' \mu^2 q_1. \tag{11c}$$

2) Sei der Coëfficient von $sin(L - ☊)$ in 58 (3a): $-L'^2 \mu^2 sin\, i (p_2 + q_2 e_1^2)$, so wird in erster Näherung ebenfalls $p_2 = 1$ sein, und

$$f_2 = -L'^2 \mu^2 sin\, i\, q_2, \quad h_0 = sin\, i$$

demnach der Coëfficient von $t^2$ in ☊

$$-H'' = \tfrac{1}{2}\frac{d^2 ☊}{dt^2} = +\tfrac{1}{2} e_1^{(0)} e_1' L' \mu^2 q_2. \tag{11d}$$

Vergleicht man die Coëfficienten von $t^2$ in den Ausdrücken (6), (11c), (11d), so findet sich

$$\tfrac{1}{2}\frac{d^2 \delta L}{dt^2} : \tfrac{1}{2}\frac{d^2\pi}{dt^2} : \tfrac{1}{2}\frac{d^2 ☊}{dt^2} = +8 : -2q_1 : +q_2.$$

**61. Andere Formen der Entwickelung.** DELAUNAY, AIRY, HANSEN. Obgleich die Entwickelung der periodischen Störungen nach diesen Principien an und für sich keine analytischen Schwierigkeiten darbietet, so erfordert dieselbe praktisch eine sehr grosse Aufmerksamkeit, damit nicht ein oder das andere merkliche Glied übergangen werde. Thatsächlich sind die bei den Untersuchungen verschiedener Forscher auftretenden Unterschiede in den Coëfficienten einzelner Glieder dem Umstande zuzuschreiben, dass bei der Berechnung derselben einzelne Combinationen von Gliedern, deren Produkte zu einem gegebenen Argumente gehören und merkliche Resultate geben, übersehen, oder als unmerklich übergangen wurden. Um diesem Uebelstande vorzubeugen, hatte DELAUNAY die Entwickelungen nach der folgenden Methode durchgeführt: Bei der Integration der Differentialgleichungen wird von der Störungsfunction zunächst nur ein einziges Glied berücksichtigt; dann lässt sich die Differentialgleichung in einfacher Weise integriren, und man erhält, ohne eine specielle Annahme über die Form des Integrals zu machen, dieselbe durch die Entwickelung der Störungsfunction direct bestimmt. Reducirt man in erster Näherung die Störungsfunction auf die Anziehung des Centralkörpers, so erhält man die ungestörte Bewegung mit den sechs Elementen als Integrationsconstanten. Man kann nun, nach der Methode der Variation der Constanten, diese als variabel betrachtend, die ganze Störungsfunction oder einen Theil derselben berücksichtigen; im letzteren Falle, wenn an Stelle der Störungsfunction $\Omega$ ein Hauptglied $\Omega'$ berücksichtigt wird, erhält man die Elemente in

der Form $E_0 + E'$, wo $E'$ von dem Gliede $\Omega'$ in der Störungsfunction herrührt. Substituirt man an Stelle der Elemente ihre Werthe $E_0 + E'$ in die Störungsfunction, so wird diese geändert, denn das berücksichtigte Glied wird, der Bestimmung von $E'$ gemäss verschwinden, während die übrigen, noch nicht berücksichtigten Glieder in Folge der Correction $E'$ geänderte Werthe erhalten. Sei die neue Entwickelung $\Omega_1$, so wird man die Integrationsconstanten der letzten Integration, welche wieder mit $E_0$ bezeichnet werden können, neuerdings als variabel ansehen, und so bestimmen, dass ein weiteres Glied $\Omega''$ von $\Omega_1$, etwa das Hauptglied dieser Entwickelung, berücksichtigt wird. Dadurch werden Störungen $E''$ auftreten, so dass die Elemente $E_0 + E' + E''$ sein werden. Substituirt man diese Werthe in $\Omega_1$, so wird der Bestimmung von $E''$ gemäss das berücksichtigte Hauptglied verschwinden, und $\Omega_1$ durch die geänderte Entwickelung $\Omega_2$ ersetzt, mit welcher in derselben Weise zu verfahren ist. Auf diese Weise werden nach und nach alle Glieder der Störungsfunction berücksichtigt, und wenn man dafür sorgt, dass immer die Hauptglieder mitgenommen werden, so werden die aufeinanderfolgenden Correctionen $E'$, $E''$, $E'''$ . . . und daher auch die in $\Omega_1$, $\Omega_2$, $\Omega_3$ auftretenden Zusatzglieder im allgemeinen immer kleiner.

Auf die weitere Ausführung der Methode kann hier nicht eingegangen werden[1]); die Methode ist, wenn auch nicht schwierig, so doch mit bedeutenden Weitläufigkeiten verbunden, die übrigens nach Maassgabe der zu berücksichtigenden Glieder, gerade so, wie bei anderen Methoden, unverhältnissmässig anwachsen. Es ist allerdings möglich gewisse Gruppen von Argumenten zusammenzufassen, ohne dass dadurch die Integration erschwert wird, und dadurch das Verfahren wesentlich abzukürzen; nichtsdestoweniger musste Delaunay bei den späteren Operationen, wo die kleineren Glieder in sehr grosser Zahl auftraten, gewisse Vereinfachungen vornehmen, und trotz des ganz ausserordentlichen Aufwandes von Arbeit kann man schliesslich praktisch nicht constatiren, ob die vernachlässigten Glieder nicht thatsächlich merkliche Werthe erreichen. Um hierüber Gewissheit zu erlangen, müsste entweder die Delaunay'sche Methode auf die von ihm vernachlässigten Glieder erweitert werden, d. h. die Grenzen für die zulässigen Vernachlässigungen müssten wesentlich weiter gesteckt werden, oder aber die erhaltenen Coëfficienten müssten in anderer Weise derart corrigirt werden, dass sie den Differentialgleichungen der Bewegung genügen. Der erstere Weg würde unzweifelhaft neuerdings eine grosse Zahl merklicher Glieder mit Argumenten ergeben, welche Delaunay selbstverständlich nicht mehr erhielt; die letztere Methode könnte nur die Correctionen der Coëfficienten derjenigen Glieder liefern, welche von Delaunay gefunden wurden. Bei der Durchführung dieser Arbeit entschloss sich Airy (»Numerical Lunar Theory«) für den zweiten Weg, welcher, obzwar selbst noch sehr umfangreich und mühsam, dennoch der kürzere schien. Airy ging von den Differentialgleichungen 16 (C) (in einer unwesentlich geänderten Form), aus. Zu den aus der Delaunay'schen Theorie folgenden gestörten Werthen der polaren Coordinaten werden die Coëfficienten je mit einer unbekannten, zu suchenden Correction versehen, so dass an Stelle des Gliedes $a \sin Arg$ oder $a' \cdot \cos Arg$ ein Glied $(a + \Delta a) \sin Arg$ bezw. $(a' + \Delta a') \cos Arg$ angenommen wird. Diese Werthe werden in die störenden

---

[1]) Für $\frac{d^2 x}{dt^2}$, $\frac{d^2 \Omega}{dt^2}$ erhält er dieselben, nach $\mu$ geordneten Reihen, wie sie in No. [illegible] angegeben sind.

Kräfte eingeführt, und die Reihen numerisch multiplicirt. Weiter werden die in den Differentialgleichungen auftretenden Combinationen der Differentialquotienten aus den für die polaren Coordinaten gegebenen Reihen abgeleitet, und durch Gleichsetzung der bezüglichen Werthe lineare Gleichungen zur Bestimmung der unbekannten Correctionen abgeleitet.

Ohne in grössere Details einzutreten, muss doch in Kürze eines sehr verdienstvollen Versuches von WEILER Erwähnung geschehen, die Störungen durch die Integration der geschlossenen Ausdrücke für die störenden Kräfte (ohne Reihenentwickelungen) zu erhalten. An Stelle derselben tritt dabei eine Reihe von partiellen Integrationen, welche so angeordnet werden, dass der zu integrirende Theil der partiellen Integration gegenüber den bereits integrirten von höherer Ordnung der Kleinheit wird, indem die kleinen Parameter als Faktoren auftreten[1]).

Auch muss hier einer sehr interessanten Arbeit von BOHLIN (Astron. Nachr. No. 2882) Erwähnung geschehen, der die Schwierigkeit der auftretenden kleinen Integrationsdivisoren durch Zurückführung der Differentialgleichungen auf partielle zu umgehen sucht. An Stelle der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\Sigma a_{i\gamma} \sin(i\zeta - \gamma n' t) \tag{1}$$

tritt die partielle Differentialgleichung

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial \zeta}\right)^2 - \frac{\partial V}{\partial \omega} = g + \Sigma \beta_{i\gamma} \cos(i\zeta - \gamma\omega), \tag{2}$$

wo Kürze halber $\omega = n't$ gesetzt ist. Ist das Integral dieser Gleichung

$$V = -\frac{1}{2} G_0 \zeta + \frac{1}{2} G_0' \omega + \Sigma G_{i\gamma} \sin(i\zeta - \gamma\omega), \tag{3}$$

so erhält man zwei Integrale von (1):

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{d\omega} &= -\frac{1}{2} G_0 - \Sigma i G_{i\gamma} \cos(i\zeta - \gamma\omega) \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial G_0}{\partial g}\zeta &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial G_0'}{\partial \omega} + 1\right)\omega + \Sigma \frac{\partial G_{i\gamma}}{\partial g} \sin(i\zeta - \gamma\omega) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Das Integral von (2) kann aber durch das Eintreten von willkürlichen Functionen so bestimmt werden, dass kleine Integrationsdivisoren nicht auftreten. Hingegen tritt an deren Stelle eine Reihe von partiellen Differentiationen nach $\zeta$, bei welchen stets ganzzahlige Coëfficienten als Faktoren auftreten, so dass es aus diesem Grunde jedenfalls »verfrüht wäre zu behaupten, dass die erhaltenen Reihen convergent sind«[2]).

Ueber die HANSEN'sche Methode genügt es hier auf das in No. 51 und 52 gesagte hinzuweisen. In der Methode völlig identisch, tritt ein Unterschied nur dadurch auf, dass auf die Bewegung des Perigeums des Mondes schon in den Differentialgleichungen Rücksicht genommen wird. Es wäre in 51 (2): $l = V + \pi_0 + \pi' t$ zu setzen, wodurch in den Differentialquotienten von $\pi'$ abhängige Zusatzglieder auftreten. Die Störungsfunction wird für den Mond nach den Cosinus der mittleren Anomalien vorgenommen, da hier mit Rücksicht auf die kleinen Excentricitäten

[1]) Vergl. u. a. a. »Astr. Nachr. 2515/6, 2762 und 3307«. In der Praxis werden jedoch die Resultate so verwickelt (vergl. Astr. Nachr. No. 2611), dass sich ihre Anwendung kaum als fruchtbringend erweist; ob die Ursache davon lediglich die von WEILER angegebene, in der Wahl der beiden wahren Anomalien als Argumente gelegene ist, bleibt nach den späteren Untersuchungen WEILER's immerhin fraglich. Ueberdies ist sowohl theoretisch wie praktisch keineswegs der Beweis erbracht, dass die Entwickelungen convergent sind.

[2]) l. c. pag. 24.

sich einfachere Entwickelungen ergeben; endlich ist zu erwähnen, dass HANSEN die Auflösung der Integrationsdivisoren in Reihen, die nach steigenden Potenzen von $\mu$ fortschreiten, als eine der Hauptursachen der mangelhaften Convergenz der Resultate, unterlässt.

**62. Die Secularacceleration des Mondes.** Für den numerischen Werth der Secularacceleration des Mondes hatte LAPLACE 10″ angegeben[1]). Dieser Werth wurde auch von PLANA und DAMOISEAUX bestätigt gefunden. AIRY fand anfangs denselben Werth; bei seinen späteren Untersuchungen den beträchtlich grösseren von 12″. Die von HANSEN gefundenen Werthe weichen von einander um ca. 1″ ab und bewegen sich zwischen 11″·5 und 12″·5.

Der Coefficient des Integrales $\int \epsilon_1^{(0)} \epsilon_1' t L' dt$ ist nach Formel 60 (8) $8\,\mu^2$. Dieses ist natürlich nur ein erster Näherungswerth, das Anfangsglied einer Reihe, welche nach Potenzen von $\mu$ fortschreitet. Nach den Entwickelungen von PLANA und DAMOISEAUX ergab sich der Coëfficient

$$A = 8\,\mu^2 - \tfrac{2187}{64}\,\mu^4,$$

ein Werth, welcher auch von HANSEN nach seiner Methode bestätigt wurde. Derselbe ergab sich jedoch in Folge eines Fehlers in der analytischen Entwickelung, den zuerst (1853) ADAMS[2]) corrigirte. Die von PLANA, DAMOISEAUX und HANSEN gemachten Vernachlässigungen lassen sich nach ADAMS dahin präcisiren, dass der Einfluss der Veränderlichkeit der Excentricität der Erdbahn auf die Tangentialbewegung, also auf die Flächengeschwindigkeit, nicht berücksichtigt erscheint, und nur die in Folge der veränderlichen Excentricität der Erdbahn auftretende Variation der störenden Kraft in der Richtung des Radiusvector in Rechnung gezogen wurde. Unter Berücksichtigung sämmtlicher Einflüsse erhielt ADAMS

$$A = 8\,\mu^2 - \tfrac{3771}{32}\,\mu^4.$$

Der Unterschied beträgt in dem Coëfficienten von $t^2$ mit den numerischen Werthen von $\epsilon_1^{(0)}$, $\epsilon_1'$, $L'$ und $\mu$: $-1''{\cdot}66$[3]).

PLANA und DAMOISEAUX erklärten jedoch die Methode von ADAMS für incorrekt, und als DELAUNAY im Jahre 1859 in der Pariser Academie der Wissenschaften die von ihm auf einem ganz anderen Wege erhaltenen mit den ADAMS'schen übereinstimmenden Resultate mittheilte, war es in erster Linie PONTÉCOULANT,

---

[1]) Die numerischen Werthe der Störungscoëfficienten sowie der Secularacceleration des Mondes, seines Knotens und Perigeums können aus den Formeln in No. 59 und 60 keineswegs erhalten werden. Die daselbst vorgenommenen Vernachlässigungen sind viel zu erheblich, als dass die Resultate der numerischen Rechnung auch nur einigermaassen auf Richtigkeit Anspruch erheben könnten. Schon die Mitnahme der zweiten Potenzen der Excentricitäten, um so mehr aber die Berücksichtigung der zweiten Potenzen der Massen würde die Coëfficienten wesentlich verändern. Es muss besonders hervorgehoben werden, dass hierbei die analytischen Operationen nur zur Andeutung des Weges dienen, denn ohne diese Darlegung würde das Auftreten von elementären Gliedern, das Wegschaffen derselben, die Bestimmung der Veränderungen in den Apsiden und Knoten aus den Differentialgleichungen für die polaren Coordinaten wohl kaum verständlich gewesen sein. Andererseits aber fällt die vollständige Theorie der Mondbewegung nicht in den Rahmen dieses Werkes. Wenn an anderen Stellen auch numerische Beispiele gegeben sind, so ist dieses immer nur dort, wo die zulässigen Vernachlässigungen u. s. w. nicht überschritten sind. Da dieses beim Monde für die Ableitung der numerischen Werthe nicht als zutreffend gelten kann, so wurde auch von den numerischen Substitutionen hier Abstand genommen.

[2]) Philosophical Transactions, Band 143, pag. 397.

[3]) l. c. pag. 405.

welcher für die Richtigkeit der älteren Werthe eintrat. ADAMS hatte inzwischen seine Untersuchungen fortgesetzt und für $A$ den Werth erhalten[1]).

$$A = 8\mu^2 - \frac{3771}{32}\mu^4 - \frac{34047}{32}\mu^5 - \frac{306865}{48}\mu^6 - \frac{17056741}{576}\mu^7 + \frac{27}{8}\mu^2 e^2 - \frac{27}{8}\mu^2\gamma^2,$$

wo $e$ die Excentricität und $\gamma$ die Tangente der Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik bedeuten. Numerisch entwickelt gab dieser Werth für den Coefficienten der Secularacceleration $5''\cdot78$, also fast die Hälfte des älteren Werthes.

Die ausgedehntesten Untersuchungen hatte aber DELAUNAY nach seiner Methode vorgenommen, welche ihm den folgenden Werth ergaben[2]).

$$\begin{aligned}A = \Big(8 &- \tfrac{27}{8}\gamma^2 + \tfrac{27}{8}e^2 + \tfrac{15}{2}e_1^2 + \tfrac{99}{32}\gamma^4 - \tfrac{9}{2}\gamma^2e^2 - \tfrac{135}{16}\gamma^2e_1^2 + \tfrac{9}{32}e^4 + \tfrac{135}{16}e^2e_1^2 + \\ &+ \tfrac{105}{8}e_1^4 - \tfrac{735}{256}\gamma^6 + \tfrac{675}{512}\gamma^4e^2 + \tfrac{4071}{512}\gamma^2e^4 + \tfrac{9}{64}e^6\Big)\mu^2 \\ &+ \Big(\tfrac{91}{16}\gamma^2 + \tfrac{2475}{16}e^2 - \tfrac{1059}{128}\gamma^4 - \tfrac{6039}{32}\gamma^2e^2 + 27\gamma^2e_1^2 - \tfrac{7425}{128}e^4 + 675e^2e_1^2\Big)\mu^3 \\ &- \Big(\tfrac{3771}{32} - \tfrac{50715}{512}\gamma^2 - \tfrac{1110765}{512}e^2 + \tfrac{28109}{32}e_1^2 + \tfrac{99729}{1024}\gamma^4 + \tfrac{6463819}{2048}\gamma^2e^2 + \tfrac{1671465}{1024}e^4\Big)\mu^4 \\ &- \Big(\tfrac{34047}{32} - \tfrac{296577}{256}\gamma^2 - \tfrac{6947287}{256}e^2 + \tfrac{722505}{64}e_1^2\Big)\mu^5 \\ &- \Big(\tfrac{306865}{48} - \tfrac{99815715}{16384}\gamma^2 - \tfrac{2677826389}{16384}e^2\Big)\mu^6 - \tfrac{5701947}{192}\mu^7 - \tfrac{22137036417}{221184}\mu^8 \\ &+ \Big[\Big(\tfrac{15}{8} - \tfrac{2435}{128}\gamma^2 + \tfrac{3636}{128}e^2\Big)\mu^2 + \tfrac{2475}{32}\mu^3 - \tfrac{2299113}{4096}\mu^4\Big]\frac{a^2}{a_1^2}.\end{aligned}$$

Für die Coëfficienten des obigen Integrales in den Ausdrücken für die Secularbewegung des Perigäums ($B$) und des Knotens ($C$) erhielt DELAUNAY[3])

$$\begin{aligned}B = -\Big(\tfrac{9}{4} &- \tfrac{9}{2}\gamma^2 - \tfrac{9}{8}e^2 + \tfrac{45}{8}e_1^2 + \tfrac{81}{64}\gamma^4 + \tfrac{225}{32}\gamma^2e^2 - \tfrac{9}{32}e^4\Big)\mu^2 - \\ &- \Big(\tfrac{825}{16} - \tfrac{693}{16}\gamma^2 - \tfrac{2475}{32}e^2 + 225e_1^2\Big)\mu^3 \\ &- \Big(\tfrac{61497}{128} - \tfrac{31943}{64}\gamma^2 - \tfrac{476745}{512}e^2\Big)\mu^4 - \tfrac{2196949}{512}\mu^5 - \tfrac{519661595}{24576}\mu^6 - \tfrac{675}{64}\mu^2\frac{a^2}{a_1^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C = \Big(\tfrac{9}{4} &- \tfrac{9}{8}\gamma^2 + \tfrac{9}{2}e^2 + \tfrac{45}{8}e_1^2 + \tfrac{87}{16}\gamma^4 + \tfrac{81}{32}\gamma^2e^2 - \tfrac{63}{64}e^4\Big)\mu^2 - \Big(\tfrac{63}{16} - \tfrac{69}{32}\gamma^2 - \tfrac{693}{16}e^2 + 9e_1^2\Big)\mu^3 \\ &- \Big(\tfrac{8073}{128} - \tfrac{7083}{512}\gamma^2 - \tfrac{30035}{64}e^2\Big)\mu^4 - \tfrac{74977}{512}\mu^5 - \tfrac{19640951}{24576}\mu^6 + \tfrac{675}{64}\mu^2\frac{a^2}{a_1^2}.\end{aligned}$$

Die Ausdrücke, welche PLANA und DAMOISEAUX hierfür erhielten, waren von diesen nicht sehr verschieden; PLANA erhielt die Glieder mit $\mu^2$, $\mu^2e^2$, $\mu^2e_1^2$, $\mu^2\gamma^2$, $\mu^3$, $\mu^3e^2$, $\mu^3e_1^2$, $\mu_3^3\gamma^2$ u. s. mit denselben numerischen Coëfficienten, ausser diesen noch die Glieder

$$\text{in } B:\ -\tfrac{61755}{128}\mu^4 - \tfrac{1811049}{512}\mu^5$$

$$\text{in } C:\ -\tfrac{3063}{128}\mu^4 - \tfrac{74601}{512}\mu^5.$$

Der Einfluss der Veränderlichkeit der Flächengeschwindigkeit auf die Secularbewegung des Knotens und des Perigeums ist also wesentlich geringer als auf die Secularbewegung in Länge.

Schon im Jahre 1853 hatte aber AIRY[4]) und 1860 HANSEN[5]) gezeigt, dass die historischen Finsternisse (die Finsternis des THALES im Jahre — 584, des XERXES — 480, des ENNIUS — 399, des AGATHOKLES — 309, endlich die Finsterniss von STIKLASTAD 1030) mit einer Verkleinerung der Secularacceleration nicht dargestellt werden, und eher eine Vergrösserung derselben

---

1) Compt. rend. Bd. 48, pag. 247 und 887.
2) Compt. rend. Bd. 48, pag. 817.
3) Compt. rend. Bd. 49, pag. 309.
4) Philosophical Transactions Bd. 143, pag. 179.
5) Compt. rend. Bd. 50, pag. 455.

erfordern. Dieses bestimmte auch LEVERRIER zu der Meinung, dass die Rechnungen von ADAMS und DELAUNAY fehlerhaft sein müssten; der Streit wurde in der französischen Academie — oft sehr persönlich — geführt. HANSEN blieb lange bei seinen theoretisch gefundenen Resultaten stehen, gab aber später die Richtigkeit der ADAMS'schen und DELAUNAY'schen Resultate zu, wobei er aber praktisch den grösseren, empirischen Werth beibehalten zu müssen glaubte, durch welchen die historischen Finsternisse dargestellt werden, und DELAUNAY vertrat schon damals die Ansicht, dass die Abweichung der auf theoretischem Wege erhaltenen von dem aus den Beobachtungen gefolgerten Werthe irgend einer bis dahin noch nicht erörterten Ursache zuzuschreiben wäre.

Im Jahre 1865 glaubte er diese Ursache, oder wenigstens eine dieser Ursachen in der Wirkung der Ebbe und Fluth gefunden zu haben[1]. Die Wirkung lässt sich kurz folgendermaassen erörtern: Der Mond wird an der ihm zugewendeten und abgewendeten Seite in der Richtung des Radiusvectors des Mondes eine Anschwellung der Erde erzeugen; diese wird sich aber im Sinne der täglichen Drehung weiterbewegen. Wenn sie stabil bliebe, so würde sie an der dem Monde zugewendeten Seite vom Monde stärker angezogen als der Erdmittelpunkt, an der abgewendeten Seite schwächer, so dass ein Drehpaar entstehen müsste, welches immer eine Drehung der Erde gegen den Mond zu, also entgegengesetzt der täglichen Bewegung erzeugen würde; dadurch müsste die Drehung der Erde verlangsamt, der Tag etwas länger werden; in diesem nach und nach immer länger werdenden Tage würde der Mond immer grössere Strecken beschreiben, so dass also, reducirt auf die als Einheit angenommene Tageslänge, der Mond sich immer schneller zu bewegen scheinen muss. Diese Anschwellung ist nun allerdings nicht stabil, sondern wird vom Monde in der Richtung des Radiusvectors stets neu erzeugt; aber da sie in Folge der stetigen Zusammenwirkung der Mondanziehung und Erdrotation immer etwas in der Richtung der Erdrotation vorgeschoben ist, so wird an der Art der Wirkung nichts geändert, nur wird die Grösse derselben wesentlich vermindert. Bald darauf hatte BERTRAND[2] bemerkt, dass diese Anschwellung auch eine Reaction auf den Mond, eine Anziehung auf denselben und darauf erfolgende Verringerung seiner Bewegung erzeugt, wodurch aber nur der numerische Werth etwas reducirt wird.

Eine andere Ursache, welche eine Acceleration in der Bewegung erzeugen kann, wurde 1884 von v. OPPOLZER in dem Niederschlagen von kosmischem Staub auf die Erde angegeben[3]. Die Wirkung derselben ist eine dreifache: 1) Durch Vergrösserung der Massen der Erde und des Mondes wird die Bewegung beschleunigt. Ist:

$$M = M_0 + M' t; \qquad m = m_0 + m' t,$$

so wird zur anziehenden Kraft $-\dfrac{k^2(M+m)}{r^2}$ die störende Kraft in der Richtung des Radiusvectors $R_0 = -\dfrac{k^2(M'+m')}{r^2}t$ hinzutreten, welche in der mittleren Länge eine Störung erzeugt, die durch die Differentialgleichung

$$\frac{d\Delta L_1}{dt} = \frac{2k(M'+m')}{a^{\frac{3}{2}}}t$$

bestimmt ist, so dass

[1] Compt. rend. Bd. 61, pag. 1023.

[2] Compt. rend. Bd. 62, pag. 162.

[3] Astron. Nachr. Bd. 108, pag. 67.

$$\Delta L_1 = \frac{k(M' + m')}{a^{\frac{3}{2}}} t^2$$

wird[1]). 2) Durch den Massenzuwachs der Erde wird die Rotationsgeschwindigkeit derselben vermindert. Nach dem Princip der Flächen muss nämlich das Produkt der Masse in die Rotationsgeschwindigkeit constant sein, wobei aber für die Masse, da man es mit einem rotirenden Körper zu thun hat, die diesen in der Entfernung 1 von der Rotationsaxe ersetzende Masse, also das Massenmoment $K$ gesetzt werden muss; es ist also:

$$K\omega = const;$$

demnach

$$d\omega = -\frac{\omega}{K} dK.$$

Für die Kugel ist das Massenmoment $K = \frac{8}{15}\pi\rho^5\delta$, daher $dK = \frac{8}{3}\pi\rho^4\delta_1 d\rho$, wenn $\delta$ die Dichte der Erde, $\delta_1$ die Dichte der abgesetzten kosmischen Massen und $\rho$ der Erdradius ist. Lagert sich im Jahrhundert eine Schicht von der Höhe $h$ ab, und nimmt man die Dichte des kosmischen Staubes gleich derjenigen der Erde, so wird in $t$ Jahrhunderten eine Schicht von der Höhe $ht$ angesetzt, demnach ist $d\rho = h\,t\,dt$

$$d\omega = -5\frac{h}{\rho} t\,\omega_0\,dt, \qquad \Delta\omega = -\frac{5}{2}\frac{h}{\rho}\omega_0 t^2.$$

Dieser Verminderung der Rotationsgeschwindigkeit entspricht eine Verlängerung des Tages um $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ und in dieser Zeit legt der Mond in seiner Bahn das Stück $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} L'$ zurück, so dass die hieraus folgende scheinbare Beschleunigung seiner Bewegung

$$\Delta L_2 = +\frac{5}{2}\frac{h}{\rho} L' t^2$$

ist. Endlich wird 3) durch den Widerstand, welchen der Mond in einem widerstehenden Mittel findet, ebenfalls ein Seculärglied von der Form $\Delta L_3 = \alpha t^2$ entstehen; die Gesammtbeschleunigung wird daher

$$\Delta L = \left[(M' + m') L' + \frac{5}{2}\frac{h}{\rho} L' + \alpha\right] t^2.$$

Durch die Substitution der numerischen Werthe erhielt v. OPPOLZER

$$\Delta L = +1''{\cdot}81\,h\,t^2,$$

wobei $h$ in Millimetern, $t$ in Einheiten des Jahrhunderts auszudrücken ist. Es genügt daher, um den Unterschied zwischen dem beobachteten und theoretisch bestimmten Werthe zu erklären

$$h = 2{\cdot}8\ mm \text{ im Jahrhundert}$$

anzunehmen.

Der hiergegen gemachte Einwurf, dass das hierfür erforderliche Quantum kosmischen Staubes viel grösser wäre, als das wirklich beobachtete, ist ungerechtfertigt; denn die beobachtete Niederschlagsmenge ist durchaus nicht zu verwechseln mit der thatsächlich erfolgten; zu den beobachteten gesellt sich noch jener Massenzuwachs, welcher durch die in der Luft stattfindenden Verbrennungen von Meteoren u. s. w. in nicht controllirbaren Mengen erfolgt, und die weitaus grösser als die beobachteten sind.

[1]) Eine genauere Untersuchung dieses Theiles der Störung gab GYLDÉN in den »Astron. Nachr.« Bd. 109, pag. 1.

Auch bei der Bestimmung der numerischen Werthe der von DELAUNAY angegebenen Wirkung muss man gewisse Voraussetzungen über das Gesetz der Dichte in der Erde machen; überdies ist hier nicht zu übersehen, dass durch die Querlagerung der Continente die Wirkung der Anschwellung wesentlich geändert wird, und sich der strengen Rechnung beinahe ganz entzieht. Ueberhaupt ist man bei derartigen numerischen Rechnungen immer auf gewisse Hypothesen oder vereinfachende Suppositionen, welche an Stelle der strengen Gesetze treten, angewiesen, und es ist ganz wohl denkbar, dass nicht eine dieser Ursachen allein, sondern mehrere zusammengenommen wirken, um einen gewissen Effekt zu erzielen.

Secularänderungen in den Elementen müssen auch entstehen, wenn die Schwerkraft sich nicht momentan fortpflanzt. Diesen Umstand hat schon LAPLACE in Rechnung gezogen unter der Voraussetzung, dass die Schwerkraft sich durch ein Fluidum *(Fluide gravifique)* fortpflanzt; neuerlich wurde diese Frage von einem anderen Standpunkte aus von LEHMANN-FILHÉS[1]) erörtert. LEHMANN-FILHÉS kommt zum Resultate, dass die Störungen um so bedeutender sind, je grösser die mittlere tägliche Bewegung und die Excentricität sind; unter den Planeten wird daher die Wirkung am bedeutendsten beim Mercur hervortreten; allein die bei diesem beobachtete anomale Bewegung des Perihels lässt sich nach LEHMANN-FILHÉS nicht durch diese Ursache erklären.

63. **Bestimmung der Ungleichheiten aus Beobachtungen; parallactische Ungleichheit; die Wirkung der Abplattung des Centralkörpers.** Von den periodischen Gliedern hat, wie bereits erwähnt, das Hauptglied der mit dem Coëfficienten $\frac{a}{a_1}$ behafteten Reihe eine wichtige theoretische Bedeutung. Dieselbe ist [vergl. 57 (12)]:

$$-\frac{a}{a_1}\, F \sin (L - L_1).$$

Aus einer grossen Reihe von Beobachtungen lässt sich aber der Coëfficient $N$ der Längenstörung $N \sin (L - L_1)$ ermitteln. Es wird hier nicht unnöthig über die Bestimmung der Coëfficienten aus den Beobachtungen einiges zu erwähnen. Angenommen, man habe auf irgend eine Weise gefunden, dass sich eine zu beobachtende Grösse in der Form

$$X = a' \sin (\alpha' t + A') + a'' \sin (\alpha'' t + A'') + a''' \sin (\alpha''' t + A''') + \ldots = \\ = X' + X'' + X''' + \ldots$$

darstellen lasse. Inductiv gelangt man zu dieser Erkenntniss dadurch, dass man zunächst die Periodicität der Erscheinung $X$ erkennt, damit die Dauer ihrer Periode und die Bewegung $\alpha'$ des Argumentes in der Zeiteinheit, aus der Amplitude derselben den Coëfficienten $a'$ und aus dem Werthe zu einer gewissen Epoche den Werth von $A'$ ermittelt. Ueberwiegt das eine Glied, so wird man unschwer den analytischen Ausdruck $X'$ oder eine dasselbe repräsentirende Formel (Epicykel) finden. Bildet man $X - X'$, so ergiebt sich ein regelmässiger Verlauf des Restes, aus dem man neuerlich einen periodischen Theil $X''$ ausscheiden kann u. s. w. Dieser Weg bei der empirischen Bestimmung der Ungleichheiten wurde ursprünglich verfolgt (vergl. hierüber die »allgemeine Einleitung in die Astronomie«, pag. 10, 26, 36, 59, 68, 89, 119). Ist jedoch die Form der Entwickelung (die Argumente) durch theoretische Untersuchungen bekannt, und es handelt

[1]) Astron. Nachr. Bd. 110, No. 2630.

sich nur um die empirische Bestimmung der Constanten $a', A', a'', A''$ .... so können diese aus einer grossen Zahl von Beobachtungen durch lineare Gleichungen ermittelt werden. Schreibt man

$$X = a' \cos A' \sin \alpha' t + a' \sin A' \cos \alpha' t + a'' \cos A'' \sin \alpha'' t + a'' \sin A'' \cos \alpha'' t + \ldots$$

so giebt jede Beobachtung eine lineare Gleichung in den Unbekannten $a' \cos A'$, $a' \sin A'$, $a'' \cos A''$, $a'' \sin A''$, .... Sind mehr Beobachtungen als Unbekannte so werden die letzteren so bestimmt, dass sich die Reihe den Beobachtungen möglichst anschliesst (nach der Methode der kleinsten Quadrate). In Folge der unvermeidlichen Beobachtungsfehler werden in der Differenz

$$X - (X' + X'' + X''' + \ldots)$$

bei Berücksichtigung aller mitgenommenen Glieder noch gewisse Fehler übrig bleiben. Zeigen dieselben einen unregelmässigen Gang, so werden sie thatsächlich den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern entsprungen sein; zeigt sich hingegen ein gesetzmässiges Verhalten (einseitiges Ansteigen oder periodisches Ansteigen und Fallen), so wird man daraus schliessen können, dass die angenommene Reihe unvollständig war und durch Hinzufügung eines weiteren Gliedes $X^{(m)} = a^{(m)} \cos(\alpha^{(m)} t + A^{(m)})$ eine bessere Uebereinstimmung erzielt werden kann. Auf diese Weise hat BÜRG in der Längenbewegung des Mondes ein Glied mit einer Periode von nahe 180 Jahren gefunden, dessen Coefficienten er zu 15''·8 angiebt. BURCKHARD fand dieselbe Ungleichheit und den Coëfficienten derselben 12''·5 (LAPLACE hat für das Argument $(\pi + \Omega - 8\pi_1)$ angegeben; die theoretischen Untersuchungen zeigten aber, dass der Coëfficient dieses Gliedes völlig unmerklich sei) u. s. w.

Bestimmt man nun auf diese Weise den Coëfficienten des Gliedes $N \sin(L - L_1)$ aus Beobachtungen, so erhält man 126'' (die älteren Bestimmungen gaben 122''; nach HANSEN ist jedoch der Coëfficient grösser). Hieraus kann man dann, da $F$ aus der Theorie bekannt ist

$$\frac{a}{a_1} = \frac{N}{F}$$

finden. Nimmt man die Mondparallaxe als bekannt an, so ergiebt sich hieraus dann die Sonnenparallaxe.

Da der in dieser Weise entstehende Fehler in $\pi_\odot$ nur etwa den 140. Theil des Fehlers von $N$ beträgt, so wird ein Fehler von 1'' in der Bestimmung von $N$ nur etwa 0''·007 von $\pi_\odot$ erzeugen, vorausgesetzt, dass $F$ hinreichend genau bestimmt ist. HANSEN findet $\frac{a}{a_1} = \frac{1}{384}$, $\pi_\odot = 8''{\cdot}916$.

Bei der Untersuchung der Bewegung des Erdmondes sind die Störungen durch die Planeten keineswegs zu vernachlässigen. Diese Wirkung äussert sich dabei in doppelter Weise. Einmal direkt durch die verschiedene Attraction auf die Erde und den sie begleitenden Mond. Nachdem zu wiederholten Malen der Ausdruck für die Störungsfunction angesetzt wurde, erscheint es überflüssig, nochmals hierauf zurückzukommen; ist die Störungsfunction entwickelt, so wird jedes Glied derselben genau so behandelt, wie die Glieder, die von der Attraction der Sonne herrühren. Nebst dieser direkten Einwirkung wird aber noch eine indirekte zu berücksichtigen sein, welche an Einfluss der ersteren nicht nachsteht, nämlich die störende Wirkung der Planeten auf die Bewegung der Erde um die Sonne. Diese verändert, insofern sie den Radiusvector und die wahre Länge der Erde beeinflusst, die Lage des grössten der störenden Körper, der Sonne gegen den Mond; man trägt diesem Umstande dadurch Rechnung,

dass man in die störenden Kräfte die gestörten Coordinaten der Erde bezw. Sonne einführt, oder indem man die aus den planetarischen Störungen der Erdbewegung herrührenden Zusatzglieder in der Störungsfunction sucht.

Endlich ist noch hervorzuheben, dass die Secularveränderung der Ekliptik auf die Lage der Mondbahn nicht ohne Einfluss bleibt. LAPLACE fand, dass die Ekliptik in ihrer Secularbewegung die Mondbahn nach sich zieht, d. h. dass die mittlere Schiefe der Mondbahn gegen die mittlere Ekliptik constant bleibt, ein Satz, den HANSEN dahin rectificirte, dass die Mondbahn gegen diejenige Ekliptik, welche drei Jahre vorher stattfand, eine constante Lage behält.

Eine letzte Gruppe von Störungen entsteht aus der Abweichung der Erde von der Kugelgestalt. Bisher wurden nämlich die Himmelskörper als Massenpunkte angesehen; die Resultate bleiben unverändert, wenn die Körper die Kugelform besitzen, oder der angezogene Körper sich beständig in der Aequatorebene des abgeplatteten Centralkörpers bewegen würde. Es folgt dieses unmittelbar aus dem Ausdrucke des Potentials eines abgeplatteten Rotationssphäorides auf einen äusseren Punkt. Derselbe ist [vergl. No. 87 (16)]:

$$V = \frac{k^2 M}{r} + \Omega; \quad \Omega = \frac{k^2 M \rho^2}{r^3} (\mathfrak{a} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{b})(\tfrac{1}{3} - \sin\delta^2),$$

wo $r$ der Radiusvector des Mondes, $\rho$ der Erdhalbmesser, $\mathfrak{a}$ die Abplattung der Erde, $\mathfrak{b}$ das Verhältniss der Centrifugalkraft zur Schwerkraft am Aequator, $\delta$ die Deklination des Mondes ($90° - \theta$ nach der Bezeichnung von No. 87) ist[1]. Der erste Ausdruck giebt die Wirkung der Erde, diese als Kugel vorausgesetzt; als Störungsfunction ist hier nur $\Omega$ zu berücksichtigen.

Bezeichnet man mit $\lambda$ die wahre Länge des Mondes, mit $\beta$ seine Breite, so ist, wenn $\varepsilon$ die Schiefe der Ekliptik ist:

$$\sin\delta = \sin\lambda \sin\varepsilon \cos\beta + \cos\varepsilon \sin\beta,$$

oder wenn $\tang\beta = s$ gesetzt wird:

$$\sin\delta = \frac{\sin\varepsilon \sin\lambda + s \cos\varepsilon}{\sqrt{1+s^2}}$$

wofür ausreichend genau

$$\sin\delta = \sqrt{1-s^2}\sin\varepsilon \sin\lambda + s\cos\varepsilon$$

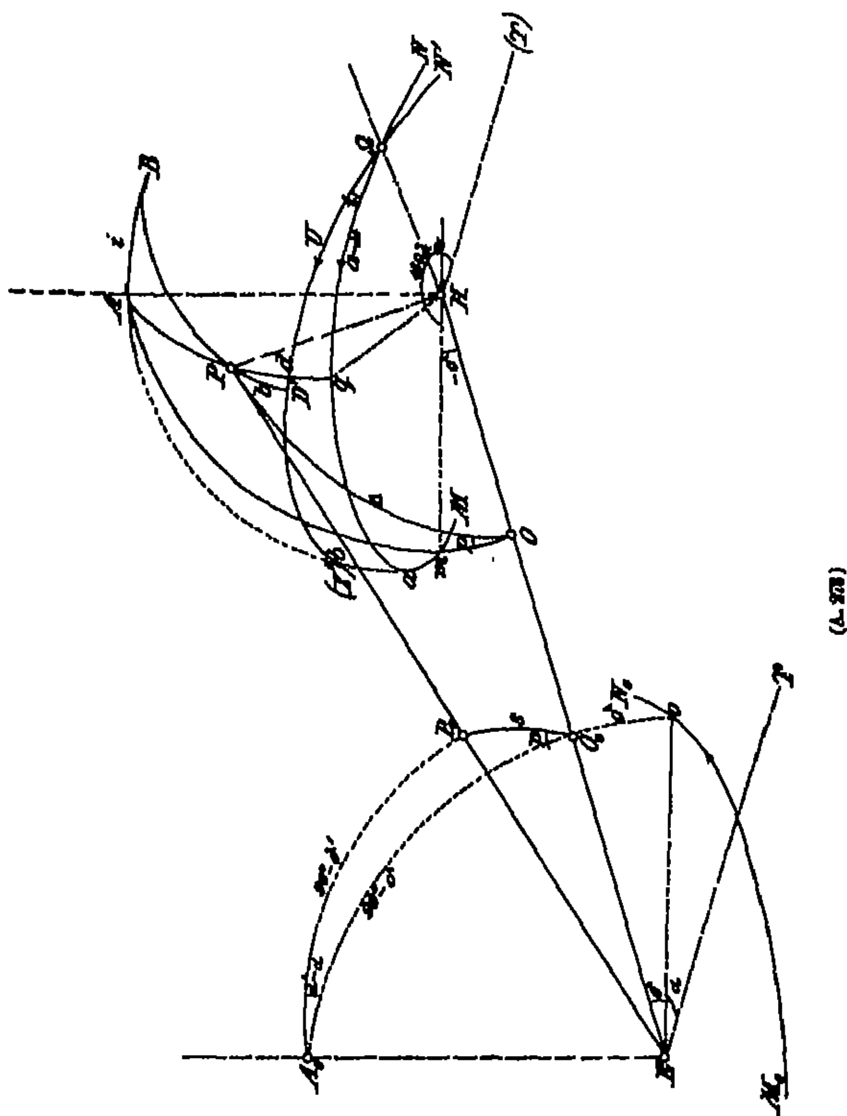
gesetzt werden kann. Wird dieser Ausdruck in $\Omega$ substituirt, und dann für $r, \lambda, s$ ihre Werthe durch die mittlere Anomalie gesetzt, so erhält man $\Omega$ in der für die Berechnung nöthigen Reihenform und kann nach irgend einer Methode die Integration vornehmen.

**64. Die Coordinaten der Satelliten in Bezug auf die Hauptplaneten.** Bevor einige, die Störungen der Satelliten betreffende Untersuchungen erwähnt werden, ist in Kürze die Art und Weise darzulegen, in welcher die Beobachtungen der Satelliten auf das Centrum der Hauptplaneten bezogen werden.

Sei $E$ Fig. 278 die Erde, $H$ ein Himmelskörper, und $P$ ein Punkt in der Nähe desselben; $EH$ die Visur von der Erde nach dem Centrum des Körpers $H$, $EP$ die Visur nach dem Punkte $P$; geocentrisch werden die Oerter von zwei einander nahe liegenden Objecten festgelegt durch ihre Distanz und ihren Positionswinkel; denkt man sich um den Erdmittelpunkt eine Kugel gelegt, und sei $M_0 N_0$ der Schnitt derselben mit der Aequatorebene (oder einer anderen

[1] Auf die Glieder, welche von einer eventuellen Verschiedenheit der beiden Erdhälften herrühren, kann hier nicht eingegangen werden; es darf übrigens nicht unerwähnt bleiben, dass aus der Abweichung des Mondes von der Kugelgestalt, welche durch die Erscheinungen der Libration ausser Zweifel gesetzt ist, Zusatzglieder derselben Art entstehen.

Fundamentalebene, z. B. der Ekliptik) also der grösste Kreis an der Himmelskugel, welcher den Aequator repräsentirt, $A_0$ der Pol dieser Fundamentalebene, endlich $O_0$, $P_0$ die Punkte, in denen die beiden Visuren $EH$, $EP$ die Himmelskugel treffen. $A_0 O_0$ ist dann der Deklinationskreis von $O_0$ welcher den Aequator in $o$ trifft, $A_0 P_0$ der Deklinatinskreis von $P_0$, so dass $O_0 P_0 = \sphericalangle HEP = s$


(A. 203.)

die Distanz der beiden Punkte, $A_0 O_0 P_0$ der Positionswinkel des Punktes $P_0$ bezogen auf den Punkt $O_0$ ist. Dieser wird von dem nördlichen Theile des Deklinationskreises nach links (also für im Süden gelegene Punkte über Ost) gezählt; sind $\alpha$, $\delta$ Rectascension und Deklination (oder Länge und Breite) des Punktes $H$, also wenn $E\Upsilon$ die Richtung nach dem Frühlingspunkte ist: $\Upsilon Eo = \alpha$; $oEO_0 = \delta$; $\alpha'$, $\delta'$ die Coordinaten des Punktes $P$, so hat man aus dem Dreieck $AO_0P_0$:

$$\begin{aligned} \cos s &= \sin\delta \sin\delta' + \cos\delta \cos\delta' \cos(\alpha' - \alpha) \\ \sin s \sin p &= \cos\delta' \sin(\alpha' - \alpha) \\ \sin s \cos p &= \cos\delta \sin\delta' - \sin\delta \cos\delta' \cos(\alpha' - \alpha). \end{aligned} \tag{1}$$

Um Punkte und Ebenen in Bezug auf den Mittelpunkt $H$ eines Himmelskörpers, also siderocentrisch (heliocentrisch, selenocentrisch, jovicentrisch, kronocentrisch, areocentrisch u. s. w.) festzulegen, denkt man sich durch $H$ eine zur Grundebene $M_0 N_0$ parallele Ebene $MN$ gelegt, welche eine um $H$ beschriebene Kugel in dem grössten Kreise $MN$ schneidet. Die durch $H$ zu $E\Upsilon$ parallele Gerade $H(\Upsilon)$ ist dann die siderocentrische Richtung nach dem Frühlingspunkte, $HA$ die Richtung nach dem Pole der Fundamentalebene, $Aq$ der siderocentrische Deklinationskreis (oder Breitenkreis) des Punktes $P$, $(\Upsilon)Hq = a$ und $qHP = d$ die siderocentrische Rectascension und Deklination (oder Länge und Breite).

Eine durch $H$ gelegte Ebene (Bahnebene eines Satelliten, Mond- oder Sonnenäquator u. s. w.) schneide die Himmelskugel in dem grössten Kreise $(X')N'$, welcher die Fundamentalebene in ☊ treffe, so ist ☊ der aufsteigende Knoten[1]) dieser Ebene, $(\Upsilon)H☊ = ☊$ die Länge des aufsteigenden Knotens, (demnach $☊Hq = a - ☊$), $(X')☊q = i$ die Neigung der Ebene. Ist $B$ der Pol der Ebene $(X')N'$, so wird auch $AB = i$ sein und der grösste Kreis $BAba$ trifft die beiden Ebenen $(X')N'$ und $MN$ in zwei Punkten $b$, $a$, welche von ☊ um 90° abstehen, so dass

$$☊b = ☊a = 90°$$

ist. Ist z. B. $(X')N'$ der Sonnenäquator, so ist ☊ die Länge des aufsteigenden Knotens des Sonnenäquators auf der Fundamentalebene, und ist $P$ ein Punkt auf der Sonnenoberfläche, so ist $PD' = b$ die heliographische Breite, $D☊ = U$ die heliographische Länge des Punktes, gezählt vom aufsteigenden Knoten des Sonnenäquators auf der Fundamentalebene. Ist $(X')N'$ der Mondäquator, so sind $U$, $b$ selenographische Länge und Breite, erstere ebenfalls vom Knoten des Mondäquators auf dem Erdäquator gezählt; ist $(X')N'$ die Bahnebene eines Satelliten, so ist, wenn $D'$ der Ort des Satelliten in seiner Bahn ist, $U$ das Argument der Breite, bezogen auf die gewählte Fundamentalebene. Da man in letzterem Falle nur $b = 0$ zu setzen hat, so soll sofort der allgemeine Fall behandelt werden, aus den gegebenen Werthen von $U$, $b$, die geocentrische Distanz und den Positionswinkel $s$, $p$ zu bestimmen.

In dem Dreiecke $ABP$ sind die Seiten

$$AB = i; \quad AP = 90° - d; \quad BP = 90° - b$$

und die Winkel

$$ABP = arc\, bD' = 90° - U;$$

$$BAP = 180° - aAq = 180° - aq = 180° - [90° - (a - ☊)] = 90° + (a - ☊).$$

Man hat daher

$$\begin{aligned} \sin d &= \sin b \cos i + \cos b \sin i \sin U \\ \cos d \cos(a - ☊) &= \cos b \cos U \\ \cos d \sin(a - ☊) &= -\sin b \sin i + \cos b \cos i \sin U. \end{aligned} \tag{2}$$

Bezieht man nun alle Punkte auf ein rechtwinkliges Axensystem, dessen $X$-Axe $E\Upsilon$, dessen $Y$-Axe senkrecht dazu in der Fundamentalebene in der Richtung der Bewegung liegt, und dessen $Z$-Axe $EA_0$ ist, und ist $EH = \rho$, $EP = \rho'$, $HP = r$, so werden

[1]) Die Bewegungsrichtung ist in der Figur durch Pfeile ausgedrückt.

die rechtwinkligen Coordinaten von $H$: $\rho\cos\delta\cos\alpha$; $\rho\cos\delta\sin\alpha$; $\rho\sin\delta$

" " " " $P$: $\rho'\cos\delta'\cos\alpha'$; $\rho'\cos\delta'\sin\alpha'$; $\rho'\sin\delta'$

Die rechtwinkligen Coordinaten von $P$, bezogen auf das durch $H$ parallel gelegte Axensystem, sind:

$$r\cos d\cos a;\quad r\cos d\sin a;\quad r\sin d;$$

demnach wird:

$$\begin{aligned}\rho'\cos\delta'\cos\alpha' &= \rho\cos\delta\cos\alpha + r\cos d\cos a\\ \rho'\cos\delta'\sin\alpha' &= \rho\cos\delta\sin\alpha + r\cos d\sin a\\ \rho'\sin\delta' &= \rho\sin\delta + r\sin d.\end{aligned}\tag{3}$$

Multiplicirt man hier die erste Gleichung mit $\cos\alpha$, die zweite mit $\sin\alpha$ und addirt, dann die erste mit $-\sin\alpha$, die zweite mit $\cos\alpha$ und addirt wieder, so erhält man:

$$\begin{aligned}\rho'\cos\delta'\cos(\alpha'-\alpha) &= \rho\cos\delta + r\cos d\cos(a-\alpha)\\ \rho'\cos\delta'\sin(\alpha'-\alpha) &= r\cos d\sin(a-\alpha).\end{aligned}\tag{3a}$$

Multiplicirt man jetzt die Gleichungen (1) mit $\rho'$ und substituirt die Ausdrücke (3) und (3a), so erhält man:

$$\begin{aligned}\rho'\cos s &= \rho + r\sin d\sin\delta + r\cos d\cos\delta\cos(a-\alpha)\\ \rho'\sin s\sin p &= r\cos d\sin(a-\alpha)\\ \rho'\sin s\cos p &= r\sin d\cos\delta - r\cos d\sin\delta\cos(a-\alpha).\end{aligned}\tag{4}$$

Für den speciellen Fall, dass man es mit der Bewegung eines Satelliten zu thun hat, ist $b = 0$; dann wird:

$$\begin{aligned}\sin d &= \sin i\sin U\\ \cos d\cos(a-\Omega) &= \cos U\\ \cos d\sin(a-\Omega) &= \cos i\sin U\end{aligned}$$

und daraus durch Multiplikation mit $\cos(\alpha-\Omega)$ und $\sin(\alpha-\Omega)$:

$$\begin{aligned}\cos d\cos(a-\alpha) &= +\cos U\cos(\alpha-\Omega) + \sin U\sin(\alpha-\Omega)\cos i\\ \cos d\sin(a-\alpha) &= -\cos U\sin(\alpha-\Omega) + \sin U\cos(\alpha-\Omega)\cos i,\end{aligned}$$

demnach

$$\begin{aligned}\rho'\cos s &= \rho + r\sin\delta\sin i\sin U +\\ &\quad + r\cos\delta\,[\cos U\cos(\alpha-\Omega) + \sin U\sin(\alpha-\Omega)\cos i]\\ \rho'\sin s\sin p &= -r\,[\cos U\sin(\alpha-\Omega) - \sin U\cos(\alpha-\Omega)\cos i]\\ \rho'\sin s\cos p &= +r\cos\delta\sin i\sin U -\\ &\quad - r\sin\delta\,[\cos U\cos(\alpha-\Omega) + \sin U\sin(\alpha-\Omega)\cos i],\end{aligned}\tag{5}$$

womit die Aufgabe gelöst ist, $s$ und $p$ durch die Elemente $\Omega$, $i$ und die von den übrigen Elementen abhängige Grössen $r$, $U$ nebst den aus den Ephemeriden bekannten, oder aus den Elementen der Hauptplaneten leicht zu berechnenden geocentrischen Coordinaten $\alpha$, $\delta$ auszudrücken. Man hat

$$U = v + \omega = v + \pi - \Omega,$$

wobei $v$ die wahre Anomalie, und $\omega$ der Abstand des Pericentrums vom Knoten, $\pi$ die Länge des Pericentrums ist.

Sind die Elemente noch verbesserungsbedürftig, so erhält man durch Differentiation von (5) drei Gleichungen von der Form:

$$f\Delta\rho' + g\Delta s + h\Delta p = A\Delta\Omega + B\Delta i + C\Delta\pi + D\Delta a + E\Delta e + F\Delta T.$$

Aus diesen Gleichungen kann man $\Delta\rho'$, $\Delta s$, $\Delta p$ bestimmen, von denen man da man $\Delta\rho'$ weder kennt, noch braucht, nur die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}\Delta s &= A'\Delta\Omega + B'\Delta i + C'\Delta\pi + D'\Delta a + E'\Delta e + F'\Delta T\\ \Delta p &= A''\Delta\Omega + B''\Delta i + C''\Delta\pi + D''\Delta a + E''\Delta e + F''\Delta T\end{aligned}$$

beibehält; jede beobachtete Distanz und jeder beobachtete Positionswinkel giebt einen Werth von $\Delta s$ und $\Delta p$, daher eine Gleichung zwischen den sechs Elementencorrektionen $\Delta ☊$, $\Delta i$, $\Delta \pi$, $\Delta a$, $\Delta e$, $\Delta T$, welche hiernach aus den beobachteten Distanzen und Positionswinkeln zu bestimmen sind. Die Bestimmung der Coëfficienten $A'$, $B'$, . . . $A''$ . . . ist eine einfache Aufgabe der Differentiation und Elimination und kann hier übergangen werden.

**65.** Anomale Bewegung des Pericentrums: die Bewegung des siebenten Saturnsatelliten. Für die Entwickelung der Secularstörungen müssen von der Störungsfunction jene Glieder beibehalten werden, welche von den mittleren Anomalien des störenden und gestörten Körpers unabhängig sind; werden hierbei die absolut constanten Glieder von denjenigen getrennt, welche die Elemente enthalten, deren Secularstörungen eben bestimmt werden sollen, so erhält man für diese simultane Differentialgleichungen, deren Integration zur Kenntniss der gesuchten Störungen führt. Hieraus folgt unmittelbar, dass, wenn in der Störungsfunction selbst durch irgend einen Umstand einzelne Glieder, welche sonst zu den periodischen gehören, denselben Charakter erhalten, diese Glieder bei der Bestimmung der Secularstörungen mit zu berücksichtigen sein werden. Ein solcher Umstand tritt aber ein, wenn in der Entwickelung der Störungsfunction einmal in einem Gliede $\alpha M + \beta M' + \gamma ☊ + \delta ☊' + \varepsilon\omega + \zeta\omega'$ die mittleren Bewegungen derart sind, dass $\alpha M + \beta M'$ oder $\alpha M + \beta M'$ + einem oder mehreren anderen Summanden nahe Null, also das Argument nahe constant wird. Sobald diese Glieder von höherer Ordnung der Excentricität werden, wie dieses bei der Bewegung der Hauptplaneten der Fall ist, werden dieselben allerdings für die Berechnung der Secularstörungen gegenüber den Hauptgliedern der Entwickelung, in 40 unmerklich und nur durch das Auftreten kleiner Integrationsdivisoren in den bereits betrachteten Gliedern langer Periode zu berücksichtigen. Anders aber ist es, wenn die Glieder von der ersten Ordnung der Excentricität, also prädominirend werden. Ein auffallendes Beispiel dieser Art bietet sich unter den Satelliten des Saturn. Die acht Saturnsatelliten bilden drei durch weite Zwischenräume getrennte Ringe; zum innern gehören fünf Satelliten, deren äusserster 9·5 Saturnshalbmesser entfernt ist; nach einem beträchtlichen Zwischenraum folgen dann die beiden: Titan und Hyperion in den Entfernungen von 22 und 26·8 Saturnshalbmessern und abermals durch einen weiten Zwischenraum getrennt der achte: Japetus in 64 Saturnshalbmessern Entfernung. Besonders merklich werden daher die Störungen, die der siebente Satellit durch den sechsten, Titan erfährt, um so mehr, als dieser der hellste und daher wahrscheinlich grösste ist. Die mittleren Bewegungen sind:[1])

$$\text{für Titan:} \quad \mu_1 = 22^\circ{\cdot}57700$$
$$\text{für Hyperion:} \quad \mu = 16^\circ{\cdot}91988,$$

so dass $4\mu - 3\mu_1 = -0^\circ{\cdot}0515$ täglich, oder $-18^\circ{\cdot}8$ jährlich beträgt. Berücksicht man nur die ersten Potenzen der kleinen Parameter, was hier völlig ausreicht, so hat man in der Störungsfunction $\Omega$ den von der Neigung abhängigen Theil gleich Null zu setzen, und aus 37 (20) nur die mit $\epsilon$, $\epsilon_1$, multiplicirten Glieder beizubehalten, welche das Argument $4M - 3M_1$ enthalten. Nebst den in 39 (2) eingeführten Gliedern entstehen noch, wenn wieder der Kürze halber

$$Q = M - M_1 + \pi - \pi_1$$

gesetzt wird:

---

[1]) Die folgenden Ableitungen sind den Untersuchungen von NEWCOMB, »On the motion of Hyperion. A new case in Celestial Mechanics« entnommen.

aus dem zweiten Gliede: $a e \Sigma \frac{\partial \overline{B}_1^{(\varkappa)}}{\partial a} \cos \varkappa Q$:

$$-ae \cos M \frac{\partial B_1^{(3)}}{\partial a} \cos 3Q = -\tfrac{1}{2} ae \frac{\partial B_0^{(3)}}{\partial a} \cos(4M - 3M_1 + 3\pi - 3\pi_1)$$

aus dem dritten Gliede: $a_1 e_1 \Sigma \frac{\partial \overline{B}_0^{(\varkappa)}}{\partial a_1} \cos \varkappa Q$:

$$-a_1 e_1 \cos M_1 \frac{\partial B_1^{(4)}}{\partial a_1} \cos 4Q = -\tfrac{1}{2} a_1 e_1 \frac{\partial B_0^{(4)}}{\partial a_1} \cos(4M - 3M_1 + 4\pi - 4\pi_1)$$

aus dem vierten Gliede: $-(\nu - \nu_1)\Sigma \varkappa \overline{B}_0^{(\varkappa)} \sin \varkappa Q$:

$$\begin{cases} -2e \sin M \cdot 3B_0^{(3)} \sin 3Q = +3eB_0^{(3)} \cos(4M - 3M_1 + 3\pi - 3\pi_1) \\ +2e_1 \sin M_1 \cdot 4B_0^{(4)} \sin 4Q = -4e_1 B_0^{(4)} \cos(4M - 3M_1 + 4\pi - 4\pi_1). \end{cases}$$

Diese Glieder sind zu verdoppeln, da dieselben Werthe für positive und negative $\varkappa$ entstehen. Berücksichtigt man, dass $M + \pi = L$,

$$\begin{aligned} V &= 4M - 3M_1 + 3\pi - 3\pi_1 = 4L - 3L_1 - \pi \\ V_1 &= 4M - 3M_1 + 4\pi - 4\pi_1 = 4L - 3L_1 - \pi_1 \end{aligned} \qquad (1)$$

ist, so folgt:

$$\Omega = \frac{k^2 m_1}{a}\Big[C' + C_0 e^2 + 2C_1 e e_1 \cos(\pi - \pi_1) + 2e C_2 \cos V + 2e_1 C_3 \cos V_1\Big] \qquad (2)$$

wobei die Constante $C$ von No. 85 in einen von $e$ unabhängigen und einen mit $e^2$ multiplicirten Theil zerlegt und der Coëfficient $C_1$ ebenfalls durch $C_1 : a$ ersetzt ist. Dabei ist, gemäss 89 (9b) mit Vernachlässigung des von $e_1^2$ abhängigen Gliedes:

$$C' = P_0^{(0)} + \tfrac{1}{2} e_1^2 b_0; \quad C_0 = \tfrac{1}{2} b_0; \quad C_1 = \tfrac{1}{2} P_0^{(1)} - \tfrac{1}{2} b_1$$

und nach 86 (9):

$$C_2 = +\tfrac{7}{2} P_0^{(3)} - \tfrac{1}{2}\alpha \frac{dP_0^{(3)}}{d\alpha}; \quad C_3 = -4P_0^{(4)} - \tfrac{1}{2}\alpha \frac{dP_0^{(4)}}{d\alpha}.$$

Es wird daher weil $\alpha = 0{\cdot}825$ ist

$C_0 = +2{\cdot}266$; $C' = +1{\cdot}804$; $C_1 = -2{\cdot}078$; $C_2 = +1{\cdot}686$; $C_3 = -1{\cdot}415$.

Da dieser Theil der Störungsfunction von $i$ und $\Omega$ unabhängig ist, so wird $\frac{\partial \Omega}{\partial i}$, $\frac{\partial \Omega}{\partial \Omega}$ verschwinden, demnach

$$\frac{d\Omega}{dt} = 0, \quad \frac{di}{dt} = 0,$$

oder $\Omega = \Omega_0$, $i = i_0$ constant. Für die übrigen Elemente folgt, wenn man im Resultate die Glieder zweiter Ordnung weglässt:

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{3}{a^2}\frac{\partial \Omega}{\partial L_0} = +3\frac{k^2 m_1}{a^4}(3eC_2 \sin V + 3e_1 C_3 \sin V_1)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\cos\varphi}{a^2\mu \sin\varphi}\frac{\partial \Omega}{\partial \pi} = +\frac{2k^2 m_1}{a^3\mu}(C_1 e_1 \sin(\pi - \pi_1) - C_2 \sin V)$$

$$\frac{d\pi}{dt} = +\frac{\cos\varphi}{a^2\mu \sin\varphi}\frac{\partial \Omega}{\partial e} = +\frac{2k^2 m_1}{a^3\mu e}(C_0 e + C_1 e_1 \cos(\pi - \pi_1) + C_2 \cos V)$$

$$\frac{d\Delta L_0}{dt} = -\frac{2}{a\mu}\frac{\partial \Omega}{da} = -\frac{2k^2 m_1}{a\mu}\left(\frac{\partial \frac{C'}{a}}{\partial a} + 2e\frac{\partial \frac{C_2}{a}}{\partial a}\cos V + 2e_1 \frac{\partial \frac{C_3}{a}}{\partial a}\cos V_1\right)$$

oder da $\frac{k^2}{a^3} = \mu^2$ ist:

$$\frac{d\mu}{dt} = + m_1 \mu^2 (24 e C_2 \sin V + 24 e_1 C_3 \sin V_1)$$
$$\frac{de}{dt} = - m_1 \mu (2 C_2 \sin V)$$
$$\frac{d\pi}{dt} = + m_1 \mu \left(2 C_0 + 2 C_1 \frac{e_1}{e} \cos(\pi - \pi_1) + \frac{2 C_2}{e} \cos V\right)$$
$$\frac{d \Delta L_0}{dt} = - m_1 \mu \left[2\left(a \frac{\partial C'}{\partial a} - C'\right) + 4 e \left(a \frac{\partial C_2}{\partial a} - C_2\right) \cos V + 4 e_1 \left(a \frac{\partial C_3}{\partial a} - C_3\right) \cos V_1\right]$$

und man findet leicht

$$a \frac{\partial C'}{\partial a} = - \alpha \frac{d P_1^{(0)}}{d\alpha}; \quad a \frac{\partial C_2}{\partial a} = - \alpha [\tfrac{1}{2} P_1^{(3)} + P_1^{(4)} - 3 \alpha P_1^{(3)}];$$
$$a \frac{\partial C_3}{\partial a} = + \alpha [3 P_1^{(3)} + P_1^{(5)} - \tfrac{1}{2} \alpha P_1^{(4)}]$$

und numerisch

$$a \frac{\partial C'}{\partial a} = + 1{\cdot}194; \quad a \frac{\partial C_2}{\partial a} = - 3{\cdot}918; \quad a \frac{\partial C_3}{\partial a} = + 9{\cdot}099.$$

Mit den Excentricitäten $e = 0{\cdot}1000$ (für Hyperion); $e_1 = 0{\cdot}0287$ (für Titan) wird

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{dt} &= m_1 \mu^2 (+ 3{\cdot}927 \sin V - 0{\cdot}375 \sin V_1) \\ \frac{de}{dt} &= m_1 \mu (- 3{\cdot}278 \sin V) \\ \frac{d\pi}{dt} &= m_1 \mu (4{\cdot}551 - 1{\cdot}193 \cos(\pi - \pi_1) + 32{\cdot}728 \cos V) \\ \frac{d \Delta L_0}{dt} &= m_1 \mu (+ 0{\cdot}219 + 4{\cdot}220 \cos V - 1{\cdot}207 \cos V_1) \end{aligned} \qquad (3)$$

Die jährlichen Bewegungen der Argumente $V$, $V_1$, sind nun

$$V' = 4\mu - 3\mu_1 - \pi' = - (18^{\circ}{\cdot}8 + \pi')$$
$$V_1' = 4\mu - 3\mu_1 - \pi_1' = - (18^{\circ}{\cdot}8 + \pi_1').$$

In Folge der Kleinheit von $4\mu - 3\mu_1$ ist dessen Werth mit den Bewegungen der Perisaturnien vergleichbar. Da $\pi_1' = + 0^{\circ}{\cdot}5$ jährlich ist, so wird in der Bewegung des Perisaturniums des Titan ein langperiodisches Glied der Periode von $(4\mu - 3\mu_1)$ auftreten. Bei der Bewegung des Hyperion ergiebt sich nun aber die anomale Erscheinung einer retrograden Bewegung des Perisaturniums in dem Betrage von $\pi' = - 20^{\circ}{\cdot}3$ jährlich, so dass

$$4\mu - 3\mu_1 - \pi' = + 1^{\circ}{\cdot}5$$

jährlich wird, wodurch ein Glied mit der Periode von 240 Jahren entstehen würde, so dass wegen des grossen Coëfficienten von $\cos V$ sich umgekehrt wieder die retrograde Bewegung als zeitweilig ergeben würde. Wenn jedoch $\pi'$ nur um wenige zehntel Grade geändert wird, so wird die Periode ebenso wie der Coëfficient noch bedeutend vergrössert, und wenn $\pi' = - 18^{\circ}{\cdot}8$ wäre, so wird $4M - 3M' - \pi$ constant, und es wird von dem Werthe, den dieser Ausdruck zu irgend einer Zeit (also stets) annimmt, abhängen, wie gross der negative Coëfficient in $\frac{d\pi}{dt}$ ist. Andererseits ist zu untersuchen, ob die Constanz von $V$ dem wirklichen Zustande entspricht.

Durch zweimalige Differentiation erhält man:

$$\frac{dV}{dt} = 4 \frac{dL}{dt} - 3 \frac{dL'}{dt} - \frac{d\pi}{dt} = 4\mu - 3\mu_1 - 4 \frac{d\Delta L}{dt} - \frac{d\pi}{dt} - 3 \frac{d\Delta L'}{dt} \qquad (4)$$
$$\frac{d^2 V}{dt^2} = 4 \frac{d\mu}{dt} - 3 \frac{d\mu'}{dt} - 4 \frac{d^2 \Delta L}{dt^2} - \frac{d^2 \pi}{dt^2} - 3 \frac{d^2 \Delta L'}{dt^2}. \qquad (5)$$

Hier wären nun in aller Strenge die Störungen des Titan auch zu berücksichtigen; da aber Titan, wie schon erwähnt, der grösste der Trabanten ist, so werden die von Hyperion in seiner Bewegung bewirkten Störungen viel schwächer; vernachlässigt man dieselben und berücksichtigt nur die von den Argumenten $V$ und $V_1$ abhängigen Glieder, so wird:

$$4\frac{d\mu}{dt} = m_1\mu^2(+15{\cdot}71 \sin V - 3{\cdot}90 \sin V_1)$$
$$-4\frac{d^2\Delta L_2}{dt^2} = m_1\mu\left(+16{\cdot}88 \sin V\frac{dV}{dt} - 4{\cdot}88 \sin V_1\frac{dV_1}{dt}\right)$$
$$-\frac{d^2\pi}{dt^2} = m_1\mu\left(+32{\cdot}78 \sin V\frac{dV}{dt}\right),$$

sodass

$$\frac{d^2V}{dt^2} = m_1\mu^2\left(15{\cdot}71 \sin V - 3{\cdot}90 \sin V_1 - 4{\cdot}88 \sin V_1\frac{dV_1}{\mu dt} + 49{\cdot}61 \sin V\frac{dV}{\mu dt}\right) \quad (6)$$

ist. Jedenfalls ist $\frac{dV}{dt}$ wegen der zwischen $\mu$, $\mu_1$ und $\pi'$ stattfindenden Beziehung eine sehr kleine Grösse, und kann weggelassen werden. Leitet man in derselben Weise eine Differentialgleichung für $V_1$ ab, so folgt, wieder mit Vernachlässigung von $dV$:

$$\frac{d^2V_1}{dt^2} = m\mu_1^2\left(15{\cdot}71 \sin V - 3{\cdot}90 \sin V_1 + 6{\cdot}0 \sin V_1\frac{dV_1}{\mu dt}\right). \quad (6a)$$

Nun ist zwar $dV_1$ nicht Null, da $4\mu - 3\mu_1 - \pi_1'$ von Null verschieden ist; doch wird sein Werth so klein, dass die damit multiplicirten Glieder vernachlässigt werden können; durch Vergleichung der Gleichungen (6) und (6a) erhält Newcomb dann die Beziehung[1])

$$\begin{gathered} 15{\cdot}71 \sin V - 3{\cdot}90 \sin V_1 = 0; \qquad \sin V_1 = 0{\cdot}249 \sin V \\ V = 180° - 14°{\cdot}2 \sin V_1 \\ \cos V = -0{\cdot}985 - 0{\cdot}015 \cos 2V_1, \end{gathered} \quad (7)$$

oder wenn $V_1 - V = \pi - \pi_1$ berücksichtigt wird:

$$\cos V = -0{\cdot}985 - 0{\cdot}015 \cos 2[(\pi - \pi_1) + V].$$

Hier kann man wegen der Kleinheit des Coëfficienten den Näherungswerth $V = 180°$ setzen, und erhält mit diesen Werthen

$$\frac{d\pi}{dt} = m_1\mu[-27{\cdot}71 - 1{\cdot}19 \cos(\pi - \pi_1) - 0{\cdot}49 \cos 2(\pi - \pi_1)].$$

Der seculare Theil der Bewegung des Perisaturniums wäre daher

$$\pi = \pi_0 - 27{\cdot}71\, m_1\mu. \quad (8)$$

Da nach (7) $V$ nur einer Libration unterliegt, so müssten $4\mu - 3\mu_1$ und $\pi'$ einander gleich sein; nimmt man für beide Werthe das Mittel 19°·8, so wird für die Masse des Titan hieraus folgen

---

1) Die Coëfficienten sind bei Newcomb etwas anders. Es ist jedoch zu bemerken, dass die Libration $-14°{\cdot}2 \sin V$ nicht durch Integration entstanden ist und daher weder mit der physischen noch mit der sogenannten willkürlichen Libration vergleichbar ist; die letztere wäre $k \sin(\sqrt{15{\cdot}64 m_1}\mu t + H)$ und hätte daher die Periode $\frac{360°}{\sqrt{15{\cdot}71 m_1}\,\mu}$ also mit der Masse $m_1 =$ [illegible] gleich 1·4 Jahre, während die Periode des von Newcomb berücksichtigten Gliedes 18·6 Jahre ist. Für die seculare Bewegung des Perisaturniums ist dies übrigens belanglos, da dieselbe von der Libration unabhängig ist. Vergl. übrigens auch die ähnlichen Entwickelungen für die beiden Systeme: Mimas — Thetis und Enceladus — Dione von H. Struve in den Astron. Nachr. No. 2983/4.

$$m_1 \cdot 27{\cdot}71\,\mu = 19^{\circ}{\cdot}8,$$

wenn $\mu$ die mittlere Bewegung des Hyperion in einem Jahre ist, und es wird

$$m_1 = \frac{19{\cdot}8}{27{\cdot}71 \times 365{\cdot}25 \cdot \times 16{\cdot}91988} = \frac{1}{8800}.$$

**66. Die Bewegung der Jupitersatelliten.** Die zwischen den mittleren Bewegungen der drei mittleren[1]) Jupitersatelliten bestehende Beziehung erfordert es, dass für diese auch die Störungen von den zweiten Potenzen der Massen berücksichtigt werden, indem erst bei diesen Argumente mit den mittleren Bewegungen dreier Körper auftreten (vergl. No. 46).

Störungen mit dem Argumente

$$\varphi = M_2 - 3M_3 - 2M_4$$

werden erscheinen, wenn man in die Störungsfunction die Störungen erster Ordnung substituirt, wobei man je nach dem Grade der zu erreichenden Genauigkeit die Auswahl unter den zu berücksichtigenden Gliedern treffen wird. In erster Linie werden natürlich jene Störungsglieder erster Ordnung zu berücksichtigen sein, welche in Folge kleiner Integrationsdivisoren selbst bedeutend geworden sind; diese sind jene, welche die Nenner $\mu_2 - 2\mu_3$ oder $\mu_3 - 2\mu_4$ erlangen. Berücksichtigt man von der Störungsfunction 37 (20) nur die von den Excentricitäten unabhängigen Glieder, so wird

$$\Omega' = \Sigma k^2 m_i [B_1^{(0)} + \Sigma \overline{B}_1^{(x)} \cos x(M - M_i + \chi)]$$

$$2\int d'\Omega' + r\frac{\partial \Omega'}{\partial r} = C +$$

$$+ \Sigma k^2 m_i \left[a\frac{\partial B_1^{(0)}}{\partial a} + \Sigma\left(a\frac{\partial \overline{B}_1^{(x)}}{\partial a} + \frac{2\mu}{(\mu - \mu' + \chi')} \overline{B}_1^{(x)}\right) \cos x(M - M_i + \chi)\right] \qquad (1)$$

und es sind nun zunächst die Hauptglieder in den Störungen erster Ordnung zu suchen, welche durch kleine Integrationsdivisoren beträchtlich werden. Integrirt man zunächst die Gleichung 47 (5) als canonische Differentialgleichung, so wird in dem Integral nach 49 (4) aus jedem Gliede der Entwickelung (1) ein Glied mit demselben Argumente entstehen. Der Coëfficient von $(r\delta r)$ muss dabei constant angenommen werden; er wird $\frac{k^2}{a^3}$, oder wenn aus der Entwickelung der rechten Seite eine Summe von Gliedern $2\mu\nu(r\delta r)$ entstehen sollte[2]), die Form annehmen:

$$\left(\frac{k^2}{a^3} + 2\mu\nu\right)(r\delta r) = \mu^2\left(1 + \frac{2\nu}{\mu}\right)(r\delta r) = M^2(r\delta r).$$

Es wird daher, wenn man von den Integrationsconstanten absieht, welche die elliptische Bewegung darstellen, die aus (1) entstehenden Zusatzglieder für einen der störenden Körper:

$$-k^2 m' \frac{a\frac{\partial \overline{B}_1^{(x)}}{\partial a} + \frac{2\mu}{\mu - \mu' + \chi'}\overline{B}_1^{(x)}}{(x\mu - x\mu')^2 - M^2} \cos(xM - xM' + x\chi). \qquad (2)$$

[1]) Der fünfte, zuletzt entdeckte ist der innerste, und müsste in der Reihenfolge derselben als der erste bezeichnet werden. Es mögen daher die drei übrigen als der zweite, dritte und vierte und der äusserste als der fünfte bezeichnet werden. Der erste und fünfte Satellit sind, nach ihren Umlaufszeiten von dem Systeme der drei mittleren auszuschliessen.

[2]) Der Coëfficient dieser Glieder $C$ wird sehr klein sein, und ist in die Form $2\mu\nu$ gesetzt, sodass also $\nu$ der Quotient dieses Coëfficienten $C$ durch $2\mu$ ist.

Der Nenner $(\varkappa\mu - \varkappa\mu' - M)(\varkappa\mu - \varkappa\mu' + M)$ wird sehr klein, wenn einer der Faktoren sehr klein wird. Es ist aber

$$M = \mu\left(1 + \frac{2\nu}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} = \mu\left(1 + \frac{\nu}{\mu}\right) = \mu + \nu,$$

demnach der Nenner

$$-[\nu - (\varkappa - 1)\mu + \varkappa\mu'][\nu + (\varkappa + 1)\mu - \varkappa\mu'],$$

woraus man die kleinen Divisoren für die verschiedenen Satelliten erhalten wird. Es ist nun auch ersichtlich, warum der Ausdruck $\nu$ berücksichtigt wird[1], durch seine Vernachlässigung kann nämlich der kleine Integrationsdivisor wesentlich alterirt werden. Bei denjenigen Divisoren, welche selbst nicht klein werden, kann derselbe natürlich weggelassen werden. Man erhält kleine Divisoren:

a) für den zweiten Satelliten bei der Störung durch den dritten $m_3$, wenn $\varkappa = 2$ ist; der erste Faktor wird $\mu_2 - 2\mu_3 - \nu_2$, der zweite $3\mu_2 - 2\mu_3 + \nu_2$ oder wenn $\nu_2$ und $\mu_2 - 2\mu_3$ gleich Null gesetzt werden, einfach $2\mu_2$. Die Störung wird daher, wenn man die Bewegung der Perijovien vernachlässigt:

$$\frac{(r\delta r)_2}{a_2^2} = + \frac{\mu_2 m_3 A_2}{2(\mu_2 - 2\mu_3 - \nu_2)} \cos(2M_2 - 2M_3 + 2\pi_2 - 2\pi_3)$$

$$A_2 = -a_2^2 \frac{\partial B_{23}^{(2)}}{\partial a_2} - \frac{2\mu_2}{\mu_2 - \mu_3} a_2 B_{23}^{(2)}, \tag{3a}$$

wobei der Index 0 bei $B$ weggelassen wird, da nur $B_0^{(\varkappa)}$ vorkommt, und statt dessen der Doppelindex 23 gesetzt ist, welcher auf die Störung des zweiten

---

[1]) Um den Werth von $\nu$ zu erhalten, hat man in $\Omega'$ jene Glieder, welche $(r\delta r)$ enthalten, mit dem zweiten Gliede der linken Seite der Differentialgleichung 47 ($h$) zu vereinigen. Die Berücksichtigung dieser Glieder ist nicht schwer. Es war $r = a(1 + \sigma)$ gesetzt worden (34, 6). Versteht man nun unter $a\sigma$ nicht die von der Excentricität abhängigen Glieder, sondern die Störung, so wird in 37 (20) $\delta r$ an Stelle von $a\sigma$ zu setzen sein; der hieraus entstehende Ausdruck in $2\int d'\Omega' + r\frac{\partial \Omega'}{\partial r}$ wird dann

$$-\delta r\left(\frac{3}{2}\frac{\partial B_0^{(0)}}{\partial a} + \frac{1}{2}a\frac{\partial^2 B_0^{(0)}}{\partial a^2}\right)$$

und weiter:

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{a^3\left(1 + \frac{\delta r}{a}\right)^3} = \frac{1}{a^3}\left(1 - 3\frac{\delta r}{a}\right).$$

Bezeichnet man den constanten Theil von $\delta r$ mit $\Delta$, so wird damit das zweite Glied der Differentialgleichung:

$$k^2\frac{r\delta r}{a^3}\left[1 - \frac{3\Delta}{a} + \Sigma\frac{m'}{2}a^2\left(3\frac{\partial B_0^{(0)}}{\partial a} + a\frac{\partial^2 B_0^{(0)}}{\partial a^2}\right)\right].$$

Hierzu sind noch zwei Glieder zu setzen: das eine, von der Einwirkung der Sonne herrührend, entsteht aus der Störungsfunction $\Omega$ in 56 (3), wenn man hier ebenfalls $r + \delta r$ an Stelle von $r$ setzt; der zweite von der Ellipticität des Jupiter abhängige Theil wird aus dem Ausdrucke für $\Omega$ in 63 erhalten. $\Delta$ ist dabei vorerst unbekannt, und wird nach der Bestimmung von $r\delta r$ (Durchführung der ersten Näherung) als der constante Theil der Störung angesetzt. Es wird dann, alles zusammengefasst:

$$1 + \frac{2\nu}{\mu} = 1 - \frac{3\Delta}{a} - \frac{\mathfrak{a} - \frac{1}{2}\mathfrak{b}}{a^2} - 2\frac{\odot^2}{\mu^2} + \Sigma m'a^2\left(\frac{3}{2}\frac{\partial B_0^{(0)}}{\partial a} + \frac{1}{2}a\frac{\partial^2 B_0^{(0)}}{\partial a^2}\right)$$

und daraus

$$\nu = \mu\left[-\frac{3}{2}\frac{\Delta}{a} - \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{a} - \frac{1}{2}\mathfrak{b}}{a^2} - \frac{\odot^2}{\mu^2} + \frac{1}{2}\Sigma m'a^2\left(\frac{3}{2}\frac{\partial B_0^{(0)}}{\partial a} + \frac{1}{2}a\frac{\partial^2 B_0^{(0)}}{\partial a^2}\right)\right],$$

wobei sich das Summenzeichen auf die Wirkung aller andern Satelliten auf den betrachteten bezieht. Vergl. LAPLACE, Méc. céleste, IV. Bd., pag. 15.

Satelliten durch den dritten hindeutet. Die hieraus resultirende Störung in Länge erhält man aus 47 (8); in den beiden letzten Gliedern, welche nur Quadraturen enthalten, können die kleinen Integrationsdivisoren nicht auftreten; mit Vernachlässigung der Excentricität wird weiter $dr = 0$, und

$$\frac{1}{k_0\sqrt{a_2}\sqrt{1-e_2^2}} = \frac{a_2^{\frac{3}{2}}}{k_0 a_2^2} = \frac{1}{\mu_2 a_2^2},$$

demnach

$$(\delta L)_2 = \frac{2}{\mu_2 a_2^2}\frac{d(r\delta r)_2}{dt} = -\frac{2\mu_2 m_3(2\mu_2 - 2\mu_3)A_2}{2\mu_2(\mu_2 - 2\mu_3 - \nu_2)} \sin(2M_2 - 2M_3 + 2\pi_2 - 2\pi_3).$$

Setzt man hier noch in den nicht kleinen Coëfficienten $\mu_2 = 2\mu_3$, so wird

$$(\delta L)_2 = -\frac{\mu_2 m_3 A_2}{\mu_2 - 2\mu_3 - \nu_2} \sin(2M_2 - 2M_3 + 2\pi_2 - 2\pi_3). \qquad (3\,b)$$

Bei den Störungen des zweiten Satelliten durch den vierten treten keine kleinen Divisoren auf.

b) Beim dritten Satelliten wird für die Störung durch die Einwirkung des zweiten der Nenner klein für $\varkappa = 1$; der Nenner wird:

$$(\mu_2 + \nu_3)(\mu_2 - 2\mu_3 - \nu_3),$$

folglich wenn $2\mu_3$ an Stelle von $\mu_2 + \nu_3$ gesetzt wird

$$\frac{(r\delta r)_3'}{a_3^2} = +\frac{\mu_3 m_2 A_3}{2(\mu_2 - 2\mu_3 - \nu_3)} \cos(M_2 - M_3 + \pi_2 - \pi_3) \qquad (4\,a)$$

$$A_3 = -a_3^2\frac{\partial B_{23}^{(1)}}{\partial a_3} + \frac{2\mu_3}{\mu_2 - \mu_3} a_3 B_{23}^{(1)}$$

$$(\delta L)_3' = -\frac{\mu_3 m_2 A_3}{\mu_2 - 2\mu_3 - \nu_3} \sin(M_2 - M_3 + \pi_2 - \pi_3). \qquad (4\,b)$$

Für die Einwirkung des vierten Satelliten tritt ein kleiner Nenner auf für $\varkappa = 2$; er wird $(\mu_3 - 2\mu_4 - \nu_3)(3\mu_3 - 2\mu_4)$. Demnach die Störungen:

$$\frac{(r\delta r)_3''}{a_3^2} = +\frac{\mu_3 m_4 A_3'}{2(\mu_3 - 2\mu_4 - \nu_3)} \cos(2M_3 - 2M_4 + 2\pi_3 - 2\pi_4) \qquad (5\,a)$$

$$A_3' = -a_3^2\frac{\partial B_{34}^{(2)}}{\partial a_3} - \frac{2\mu_3}{\mu_3 - \mu_4} a_3 B_{34}^{(2)}$$

$$(\delta L)_3'' = -\frac{\mu_3 m_4 A_3'}{\mu_3 - 2\mu_4 - \nu_3} \sin(2M_3 - 2M_4 + 2\pi_3 - 2\pi_4). \qquad (5\,b)$$

In Folge der Beziehung

$$L_2 - 3L_3 + 2L_4 = 180^\circ$$

ist nun aber

$$2M_3 - 2M_4 + 2\pi_3 - 2\pi_4 = 180^\circ + (M_2 - M_3 + \pi_2 - \pi_3),$$

und da auch $\mu_3 - 2\mu_4 = \mu_2 - 2\mu_3$ ist, so lassen sich die Wirkungen des zweiten und vierten vereinigen, und es folgt:

$$\frac{(r\delta r)_3}{a_3^2} = +\frac{\mu_3(m_2 A_3 - m_4 A_3')}{2(\mu_2 - 2\mu_3 - \nu_3)} \cos(M_2 - M_3 + \pi_2 - \pi_3) \qquad (6\,a)$$

$$(\delta L)_3 = -\frac{\mu_3(m_2 A_3 - m_4 A_3')}{\mu_2 - 2\mu_3 - \nu_3} \sin(M_2 - M_3 + \pi_2 - \pi_3). \qquad (6\,b)$$

c) Für den vierten Satelliten ist nur die Wirkung des dritten zu berücksichtigen, da der zweite kein Glied mit kleinem Integrationsdivisor liefert. Ein kleiner Divisor entsteht aus der Wirkung des dritten für $\varkappa = 1$; er wird

$$-(\mu_3 + \nu_4)(2\mu_4 - \mu_3 + \nu_4)$$

und die Störung:

$$\frac{(r\delta r)_4}{a_4^2} = +\frac{\mu_4 m_3 A_4}{2(\mu_3 - 2\mu_4 - \nu_4)} \cos(M_3 - M_4 + \pi_3 - \pi_4) \qquad (7\text{a})$$

$$A_4 = -a_4^2 \frac{\partial B_{43}^{(1)}}{\partial a_4} + \frac{2\mu_4}{\mu_3 - \mu_4} a_4 B_{43}^{(1)}$$

$$(\delta L)_4 = -\frac{\mu_4 m_3 A_4}{\mu_3 - 2\mu_4 - \nu_4} \sin(M_3 - M_4 + \pi_3 - \pi_4). \qquad (7\text{b})$$

Bei der Bestimmung der Störungen, welche von der zweiten Potenz der Masse abhängig sind, wird es ausreichen, von allen Störungsgliedern der ersten Potenz, deren Bestimmung im wesentlichen keine Schwierigkeiten hat, die in den Formeln (8), (6), (7) gefundenen zu berücksichtigen. Auch von diesen werden aber einige auszuschliessen sein; zunächst jene, bei denen der kleine Nenner $\mu_2 - 2\mu_3$ oder $\mu_3 - 2\mu_4$ nicht neuerdings auftritt; aber selbst jene Glieder, bei denen dieser Nenner heraustritt, werden klein gegenüber denjenigen, bei denen die zweite Potenz von $(\mu_2 - 3\mu_3 - 2\mu_4)$ erscheinen würde. Es sind also zunächst diese zu untersuchen[1]).

Die zweite Potenz des erwähnten Nenners tritt in dem Doppelintegral

$$-\frac{3}{\mu a^2}\int dt \int d'\Omega$$

in Formel 47 (8) auf, wenn Argumente

$$V = M_2 - 3M_3 + 2M_4 + \pi_2 - 3\pi_3 + 2\pi_4 = L_2 - 3L_3 + 2L_4$$

vorkommen. Substituirt man $r + \delta r$ an Stelle von $r$ in $\Omega$, so tritt $a\sigma + \delta r$ an Stelle von $a\sigma$ und wenn man, was für diese Zwecke ausreicht, die Glieder, die von der Excentricität abhängen, weglässt, um nur die grössten Störungsglieder zu erhalten, so tritt einfach $\delta r$ an Stelle von $a\sigma$, ebenso $\delta r'$ an Stelle von $a_1\sigma'$, $\delta L$ an Stelle von $\nu$, $\delta L'$ an Stelle von $\nu'$. Da dies ebensowohl in $\frac{1}{\rho}$ in 37 (2), als auch in dem zweiten Theile von $\Omega'$ in 37 (4) geschieht, so sind wieder an Stelle von $B_0^{(x)}$ die $\overline{B}_0^{(\nu)}$ zu setzen, und es werden die hieraus entstehenden Zusatzglieder aus 37 (20):

$$k^2 m'\left[\delta r \Sigma \frac{\partial \overline{B}_0^{(x)}}{\partial a} \cos x Q_l + \delta r' \Sigma \frac{\partial \overline{B}_0^{(x)}}{\partial a'} \cos x Q_l - (\delta L - \delta L')\Sigma x \overline{B}_0^{(x)} \sin x Q_l\right].$$

Die Störungen des zweiten Satelliten brauchen nicht berücksichtigt zu werden; in die Störungsfunction für die gegenseitigen Störungen des zweiten und dritten Satelliten substituirt, entsteht

$$\frac{\cos}{\sin} x(M_2 - M_3) \frac{\cos}{\sin} 2(M_2 - M_3),$$

---

1) Bei der Entwickelung aller Störungsglieder erhält man dieselben nebst vielen anderen; aber die Theorie der Satelliten wird durch den Umstand in etwas vereinfacht, dass man sich in allen Fällen auf die Berechnung der Hauptglieder beschränken kann, weil die Unregelmässigkeiten der jovicentrischen Bewegungen von der Erde aus betrachtet, so stark verringert werden, dass die kleinen Unregelmässigkeiten sich der Beobachtung überhaupt entziehen. Dadurch entfallen auch für die Jupitersatelliten viele Schwierigkeiten, welche in der Theorie des Erdmondes auftreten; umgekehrt treten bei diesem die Complicationen nicht auf, welche aus der Wechselwirkung mehrerer Satelliten nothwendig entstehen. Evection, Variation, jährliche Gleichung (mit der Periode der Umlaufszeit des Jupiter) und parallactische Gleichung treten bei den Jupitersatelliten wohl auch auf, ihr Einfluss verschwindet aber gegenüber demjenigen der wechselseitigen Störungen.

sodass $M_4$ gar nicht eintritt, und für die gegenseitigen Störungen des zweiten und vierten bezw. dritten und vierten, bleibt überall $2M_3$ bezw. $2M_2$ stehen, sodass ein Argument $V$ nicht entstehen kann. Aus denselben Gründen sind, wie man auf dieselbe Weise findet, die Störungen des vierten Satelliten nicht weiter zu berücksichtigen. Es ist demnach für die Störungsglieder zweiter Ordnung, die von $V$ abhängen

$$(\delta r)_2 = 0, \quad (\delta r)_4 = 0, \quad (\delta L)_2 = 0, \quad (\delta L)_4 = 0$$

zu setzen, und nur die Störungen $(\delta r)_3$, $(\delta L)_3$ zu betrachten. In diesen aber müssen die beiden Theile getrennt behandelt werden[1], der erste Theil mit dem Argumente $(L_2 - L_3)$ giebt nur durch Combination mit dem Argumente $2(L_3 - L_4)$ das Argument $V$; der zweite mit dem Argumente $(2L_3 - 2L_4)$ nur durch Combination mit dem Argumente $(L_2 - L_3)$; der erste Theil ist daher nur in der Störungsfunction des dritten und vierten, bei ihren gegenseitigen Störungen, der zweite Theil nur in der Störungsfunction des zweiten und dritten zu berücksichtigen.

a) Für den zweiten Satelliten wird das zu berücksichtigende Glied der Störungsfunction:

$$k^2 m_3 \left[ (\delta r_3)'' \frac{\partial \bar{B}_{23}^{(1)}}{\partial a_3} \cos (L_2 - L_3) + (\delta L_3)'' \bar{B}_{23}^{(1)} \sin (L_2 - L_3) \right].$$

Hier ist nun aber die am Schlusse von 10 gemachte Bemerkung zu berücksichtigen, dass man bei den vorzunehmenden Differentiationen die Störungen als constant anzusehen hat. Man erhält daher, bei der Differentiation nach $t$, insofern es von den Coordinaten des zweiten Satelliten abhängt, d. h. nach $\mu_2 t$, und nachherigem Einsetzen der Störungen:

$$-\frac{k^2 m_3 \mu_2 m_4 \cdot \mu_2}{\mu_2 - 2\mu_4 - \nu_2} \Big[ \tfrac{1}{2} a_2 A_3' \frac{\partial \bar{B}_{23}^{(1)}}{\partial a_2} \cos (2L_3 - 2L_4) \sin (L_2 - L_3) +$$
$$+ A_3' \bar{B}_{23}^{(1)} \sin (2L_3 - 2L_4) \cos (L_2 - L_3) \Big];$$

entwickelt man hier, und behält nur das Argument $V$, so folgt

$$\frac{k^2 m_3 m_4 \mu_2 \mu_2 A_3'}{\mu_2 - 2\mu_4 - \nu_2} \left[ \tfrac{1}{4} a_2 \frac{\partial \bar{B}_{23}^{(1)}}{\partial a_2} - \tfrac{1}{2} \bar{B}_{23}^{(1)} \right] \sin V$$

oder

$$\frac{d^2 \delta L_2}{dt^2} = + \frac{3}{\mu_2 a_2^2} \cdot \frac{k^2 m_3 m_4 \mu_2 \mu_2 A_3'}{\mu_2 - 2\mu_4 - \nu_2} \cdot \left[ \tfrac{1}{4} a_2 \frac{\partial \bar{B}_{23}^{(1)}}{\partial a_2} - \tfrac{1}{2} \bar{B}_{23}^{(1)} \right] \sin V.$$

Berücksichtigt man, dass

$$\frac{k^2}{a_2^3 \mu_2} = \mu_2 a_2$$

und sehr nahe $\mu_3 = \frac{1}{2}\mu_2$, $\mu_2 - 2\mu_4 = \mu_2 - 2\mu_3$ ist, so wird

$$\frac{d^2 \delta L_2}{dt^2} = - \tfrac{3}{4} \frac{\mu_2^3 m_3 m_4}{\mu_2 - 2\mu_3 - \nu_2} A_3' G_2 \sin V \tag{8}$$

$$G_2 = - a_2 a_3 \frac{\partial \bar{B}_{23}^{(1)}}{\partial a_2} + 2 a_2 \bar{B}_{23}^{(1)}. \tag{8a}$$

---

[1]) Die Zusammenziehung der Argumente ist nur numerisch gestattet, nicht aber für analytische Untersuchungen; hingegen können jene Argumente für die numerische Summation auch vor der Integration zusammengefasst werden, da nicht nur die Beziehung für die Argumente selbst, sondern auch die analoge für die Aenderungen derselben bestehen.

b) Für den dritten Satelliten hat man als Theil der Störungsfunction:

$$k^2 m_2\left[(\delta r_3)''\frac{\partial B^{(1)}_{32}}{\partial a_3}\cos(L_3-L_2)-(\delta L_3)''B^{(1)}_{32}\sin(L_3-L_2)\right]$$
$$+\,k^2 m_4\left[(\delta r_3)'\frac{\partial B^{(2)}_{34}}{\partial a_4}\cos 2(L_3-L_4)-(\delta L_3)'\cdot 2B^{(2)}_{34}\sin 2(L_3-L_4)\right],$$

daher durch Differentiation nach $\mu_3 t$ und Einsetzen der Störungswerthe:

$$k^2 m_2\frac{\mu_3 m_4 A_3'\mu_3}{\mu_3-2\mu_4-\nu_3}\left[-\tfrac{1}{2}a_3\frac{\partial B^{(1)}_{32}}{\partial a_3}\sin(L_3-L_2)\cos(2L_3-2L_4)+\right.$$
$$\left.+\,B^{(1)}_{32}\cos(L_3-L_2)\sin(2L_3-2L_4)\right]$$
$$+\,k^2 m_4\frac{\mu_3 m_2 A_3\cdot 2\mu_3}{\mu_3-2\mu_3-\nu_3}\left[-\tfrac{1}{2}a_3\frac{\partial B^{(2)}_{34}}{\partial a_3}\sin 2(L_3-L_4)\cos(L_3-L_2)+\right.$$
$$\left.+\,2B^{(2)}_{34}\cos 2(L_3-L_4)\sin(L_3-L_2)\right],$$

demnach

$$\frac{d^2\delta L_3}{dt^2}=+\tfrac{1}{4}\frac{\mu_3^2 m_2 m_4 A_3' G_3}{\mu_3-2\mu_4-\nu_3}\sin V+\tfrac{1}{4}\frac{\mu_3^2 m_2 m_4 A_3 G_3'}{\mu_3-2\mu_3-\nu_3}\sin V \tag{9}$$

$$G_3=-a_3^2\frac{\partial B^{(1)}_{32}}{\partial a_3}+2a_3B^{(1)}_{32};\quad G_3'=-a_3^2\frac{\partial B^{(2)}_{34}}{\partial a_3}-4a_3\,2B^{(2)}_{34}. \tag{9a}$$

c) Für den vierten Satelliten hat man als Theil der Störungsfunction:

$$k^2 m_3\left[(\delta r_3)'\frac{\partial B^{(2)}_{43}}{\partial a_4}\cos 2(L_4-L_3)+(\delta L_3)'\cdot 2B^{(2)}_{43}\sin 2(L_4-L_3)\right],$$

also durch Differentiation nach $\mu_4 t$ und nachheriger Substitution der Störungen

$$k^2 m_3\frac{\mu_3 m_2 A_3\cdot 2\mu_4}{\mu_3-2\mu_3-\nu_3}\left[-\tfrac{1}{2}a_3\frac{\partial B^{(2)}_{43}}{\partial a_3}\cos(L_3-L_2)\sin 2(L_4-L_3)-\right.$$
$$\left.-\,2B^{(2)}_{43}\sin(L_3-L_2)\cos 2(L_4-L_3)\right]$$

$$\frac{d^2\delta L_4}{dt^2}=-3\frac{\mu_4^2 m_2 m_3 A_3 G_4}{\mu_3-2\mu_3-\nu_3}\sin V \tag{10}$$

$$G_4=-a_3a_4\frac{\partial B^{(2)}_{43}}{\partial a_3}-4a_4B^{(2)}_{43}. \tag{10a}$$

Die Coëfficienten in diesen Gleichungen lassen sich noch wesentlich vereinfachen. Es sind nämlich $B^{(1)}_{32}$ und $B^{(1)}_{23}$ Entwickelungscoëfficienten von $r_{32}^{-1}$ und $r_{23}^{-1}$, also identisch; weiter ist

$$B^{(1)}_{32}=\mathfrak{B}^{(1)}_{32}-\frac{a_2}{a_3^2};\quad \mathfrak{B}^{(1)}_{23}=B^{(1)}_{23}-\frac{a_3}{a_2^2}$$
$$\mathfrak{B}^{(1)}_{32}=\mathfrak{B}^{(1)}_{23}-\frac{a_3}{a_2^2}+\frac{a_2}{a_3^2}.$$

Führt man hier die angezeigten Differentiationen aus, so folgt

$$G_3=\frac{a_3}{a_2}\left(-a_2^2\frac{\partial\mathfrak{B}^{(1)}_{23}}{\partial a_2}+2a_2\mathfrak{B}^{(1)}_{23}-4\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_2^4}{a_3^3}\right).$$

Es ist aber

$$-4\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_2^4}{a_3^4}=-\frac{a_2}{a_3}\left(4-\frac{a_2^3}{a_3^3}\right)=-\frac{a_2}{a_3}\left(4-\frac{\mu_3^2}{\mu_2^2}\right)=0$$

mit Rücksicht auf die Beziehung zwischen $\mu_2$ und $\mu_3$. Berücksichtigt man diese Beziehungen auch bei den Coëfficienten $A$, so erhält man

$$A_3 = -a_3^2 \frac{\partial B_{2,3}^{(1)}}{\partial a_3} + 2a_3 B_{2,3}^{(1)} \qquad G_2 = \frac{a_2}{a_3} A_3$$
$$G_3 = A_3 \tag{11}$$
$$A_3' = -a_3^2 \frac{\partial B_{3,4}^{(2)}}{\partial a_3} - 4a_3 B_{3,4}^{(2)} \qquad G_3' = A_3'$$
$$G_4 = \frac{a_4}{a_3} A_3'.$$

Führt man überdiess, um die Ausdrücke vergleichen zu können, überall $\mu_3$ und im Nenner die Differenz $\mu_2 - 2\mu_3$ ein, so erhält man:

$$\frac{d^2 \delta L_2}{dt^2} = -3 \frac{\mu_3^2 m_3 m_4 A_3' A_3}{\mu_2 - 2\mu_3 - \nu_3} \frac{a_2}{a_3} \sin V$$
$$\frac{d^2 \delta L_3}{dt^2} = +\tfrac{3}{4} \frac{\mu_3^2 m_2 m_4 A_3 A_3'}{\mu_2 - 2\mu_3 - \nu_3} \sin V \tag{12}$$
$$\frac{d^2 \delta L_4}{dt^2} = -\tfrac{3}{8} \frac{\mu_3^2 m_2 m_3 A_3 A_3'}{\mu_2 - 2\mu_3 - \nu_3} \frac{a_4}{a_3} \sin V.$$

Nun ist $V' = \frac{dV}{dt} = \mu_2 - 3\mu_3 + 2\mu_4$ äusserst klein; die doppelte Integration der Ausdrücke (12) würde daher, wie schon bemerkt, durch das Auftreten des Quadrates dieses Nenners nebst dem bereits vorhandenen kleinen Nenner $(\mu_2 - 2\mu_3 - \nu_3)$ ausserordentlich vergrössert, und diese Störungswerthe werden gegenüber den andern weitaus überwiegen. Setzt man nun

$$L_i = L_i^{(0)} + \delta L_i \qquad i = 2, 3, 4,$$

wo $L_i^{(0)}$ der der Zeit proportionale Werth der mittleren Länge, und $\delta L_i$ die aus (12) folgenden Störungswerthe sind, so wird

$$\frac{d^2 L_i}{dt^2} = \frac{d^2 \delta L_i}{dt^2}$$

und damit aus (12):

$$\frac{d^2 L_2}{dt^2} - 3\frac{d^2 L_3}{dt^2} + 2\frac{d^2 L_4}{dt^2} = -\tfrac{3}{4} \frac{m_2 m_3 m_4}{a_3} \frac{\mu_3^2 A_3 A_3'}{\mu_2 - 2\mu_3 - \nu_3} \left(\frac{4a_2}{m_2} + \frac{9a_3}{m_3} + \frac{a_4}{m_4}\right) \sin V.$$

Setzt man die Constante

$$+\tfrac{3}{4} \frac{m_2 m_3 m_4}{a_3} \frac{\mu_3^2 A_3 A_3'}{\mu_2 - 2\mu_3 - \nu_3} \left(\frac{4a_2}{m_2} + \frac{9a_3}{m_3} + \frac{a_4}{m_4}\right) = k,$$

so wird

$$\frac{d^2 V}{dt^2} = -k \sin V. \tag{13}$$

Multiplicirt man mit $\frac{dV}{dt}$ und integrirt, so folgt

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 = c' + 2k \cos V = c - 4k \sin^2 \tfrac{1}{2} V,$$

wenn mit $c'$ oder $c' + 2k = c$ die Integrationsconstante bezeichnet wird. Es folgt daher

$$dt = \frac{dV}{\pm\sqrt{c - 4k \sin^2 \frac{1}{2} V}}. \tag{14}$$

1) Ist $c > 4k$ (oder $c' > 2k$), so wird der Nenner stets reell bleiben, $V$ wird mit wachsendem $t$ ebenfalls beständig wachsen (oder abnehmen, je nachdem das Radical mit positivem oder negativem Zeichen genommen wird); der Ausdruck $L_2 - 3L_3 + 2L_4$ wird im Laufe der Zeiten den ganzen Umkreis durchlaufen; dieses entspricht nicht den Beobachtungen.

2) Wenn $c < 4k$ (oder $c' < 2k$) ist, so wird der Nenner innerhalb gewisser Grenzen imaginär werden; ist $k$ positiv, so muss $c$ ebenfalls positiv sein, da sonst das Radical beständig imaginar wäre; setzt man dann

$$\frac{c}{4k} = \sin^2 \varepsilon,$$

so wird

$$dt = \frac{dV}{\pm\sqrt{c}\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \frac{1}{2} V}{\sin^2 \varepsilon}}} \tag{14a}$$

und es muss

$$-\varepsilon < \tfrac{1}{2} V < +\varepsilon$$

bleiben, d. h. $V$ schwankt um den Nullwerth zwischen den Grenzen $\pm 2\varepsilon$.

3) Wenn $k$ negativ $= -k_1$ ist, so wird

$$dt = \frac{dV}{\pm\sqrt{c + 4k_1 \sin^2 \frac{1}{2} V}}.$$

Wäre $c$ positiv, so würde das Radical stets reell, und wie im ersten Falle $V$ durch den ganzen Umkreis im positiven oder negativen Sinne wachsend; dieser Fall ist wieder auszuschliessen; es muss daher auch $c$ negativ sein $= -c_1$, das Integral wird:

$$dt = \frac{dV}{\pm\sqrt{4k_1 \sin^2 \frac{1}{2} V - c_1}},$$

und es muss numerisch $c_1 < 4k_1$ sein (welche Bedingung identisch ist mit $c > 4k$), da sonst das Integral stets imaginär wäre; daher kann man

$$\frac{c_1}{4k_1} = \sin^2 \varepsilon_1$$

setzen, und es wird

$$dt = \frac{dV}{\pm\sqrt{c_1}\sqrt{\frac{\sin^2 \frac{1}{2} V}{\sin^2 \varepsilon_1} - 1}}. \tag{14b}$$

Hier muss nun $\sin \frac{1}{2} V_1 > \sin \varepsilon_1$ bleiben, d. h.

$$\varepsilon_1 < \tfrac{1}{2} V < 180^\circ - \varepsilon_1,$$

d. h. $V$ schwankt um 180° herum zwischen den Grenzen $+2\varepsilon_1$ und $360^\circ - 2\varepsilon_1$.

Da nach den Beobachtungen $V$ sehr nahe 180° ist, so wird für die Jupitersatelliten der letzte Fall stattfinden; es ist eine Schwankung, eine Libration um 180° herum. Die Grösse derselben hängt von $c_1$ und $k_1$ ab. $k_1$ ist eine gegebene Grösse; die Integrationsconstante $c_1$ wird daher bestimmt werden können, sobald die Amplitude der Libration bekannt ist. Bisher ist eine solche noch nicht constatirt worden, woraus folgt, dass die Constante $c_1$ gegenüber $4k_1$ jedenfalls eine kleine Grösse ist. Da übrigens $k = -k_1$ negativ sein muss, so folgt daraus, dass der Coëfficient

$$\left(\frac{A_2 A_3'}{\mu_3 - 2\mu_2 - \nu}\right)$$

nothwendig negativ sein muss.

Die nächste Folge ist, dass $\frac{dV}{dt}$ jedenfalls nur eine periodische Function ohne constantem Anfangsglied ist, demnach $V$ für die Integration der Gleichungen (12) als constant anzusehen ist, sodass durch die Integration keine Vergrösserung der Coëfficienten eintritt. Wäre aber $V$ von 180° nur um einen

sehr geringen Betrag verschieden, so würde hierdurch eine Secularbewegung der mittleren Längen der drei Satelliten auftreten, und zwar beim zweiten und vierten eine Secularbeschleunigung, beim dritten eine Secularverzögerung, jedoch so, dass auch diese in derjenigen Beziehung stehen, dass $V$ constant bleibt, und nur dann wenn $V = 0$ oder $180^\circ$ ist, wird eine solche nicht stattfinden.

Das Verhältniss dieser Secularbeschleunigungen wäre:

$$-\,8a_2 : +\tfrac{9}{4}a_3 : -\tfrac{1}{8}a_4 = -\,8a_2 : +\,6a_3 : -\,a_4$$

oder mit den numerischen Werthen sehr nahe

$$-\,45{\cdot}588 : +\,54{\cdot}899 : -\,14{\cdot}462 = -\,3{\cdot}152 : +\,3{\cdot}761 : -\,1.$$

Seculargleichungen dieser Art treten nicht auf; hingegen ist es nicht ausgeschlossen, dass $V$ einer periodischen Ungleichheit unterliegt; diese ist gemäss den Beobachtungen jedenfalls sehr klein; setzt man aber demgemäss $V$ sehr nahe $180^\circ$ voraus, so kann die Gleichung auch geschrieben werden:

$$\frac{d^2 V}{dt^2} = -\,k(180^\circ + V),$$

deren Integral

$$V = 180^\circ + \alpha \sin(\sqrt{k}\,t + A) \tag{15}$$

ist, wobei $\alpha$ und $A$ die Integrationsconstanten sind. Der wahre Werth von $V$ wird daher einer Schwankung mit der Amplitude $2\alpha$ um $180^\circ$ herum unterliegen, d. h. $\alpha$ entspricht dem in (14) auftretenden Werthe $s_1$. Setzt man den Werth (15) in (12) ein, so folgt, da $\alpha$ sehr klein ist:

$$\frac{d^2\,\delta L_2}{dt^2} = +\,\frac{4k_0}{m_2}\,a_2\,\alpha \sin(\sqrt{k}\,t + A)$$

$$\frac{d^2\,\delta L_3}{dt^2} = -\,\frac{3k_0}{m_3}\,a_3\,\alpha \sin(\sqrt{k}\,t + A)$$

$$\frac{d^2\,\delta L_4}{dt^2} = +\,\tfrac{1}{2}\,\frac{k_0}{m_4}\,a_4\,\alpha \sin(\sqrt{k}\,t + A)$$

deren Integrale, da

$$\frac{k_0}{k} = \frac{1}{4\dfrac{a_2}{m_2} + 9\dfrac{a_3}{m_3} + \dfrac{a_4}{m_4}}$$

ist:

$$\delta L_2 = -\,\frac{4\dfrac{a_2}{m_2}}{4\dfrac{a_2}{m_2} + 9\dfrac{a_3}{m_3} + \dfrac{a_4}{m_4}}\,\alpha \sin(\sqrt{k}\,t + A)$$

$$\delta L_3 = +\,\frac{3\dfrac{a_3}{m_3}}{4\dfrac{a_2}{m_2} + 9\dfrac{a_3}{m_3} + \dfrac{a_4}{m_4}}\,\alpha \sin(\sqrt{k}\,t + A) \tag{16}$$

$$\delta L_4 = -\,\frac{\tfrac{1}{2}\dfrac{a_4}{m_4}}{4\dfrac{a_2}{m_2} + 9\dfrac{a_3}{m_3} + \dfrac{a_4}{m_4}}\,\alpha \sin(\sqrt{k}\,t + A)$$

sind. Die Periode dieser Libration ist nahe 2270 Tage oder etwas mehr als 6 Jahre.

**67. Die Störungen in der Bewegung der Kometen.** Für die Berechnung der Störungen der nicht periodischen Kometen erscheint es, wie schon

in 88 erwähnt wurde, am geeignetsten, sich auf die Berechnung der speciellen Störungen zu beschränken, und dabei die Methode der Berechnung derselben in rechtwinkligen oder in polaren Coordinaten zu verwenden. Für die Störungen von periodischen Kometen wird es sich jedoch empfehlen, nicht die Zeit, sondern die excentrische Anomalie als Unbekannte zu wählen, da dann einerseits eine gleichmässigere Eintheilung der Bahn stattfindet, und andererseits eine Reihe von Coëfficienten für jeden Umlauf des Kometen wieder verwendet werden können. Dieser Vorgang soll hier für die Berechnung der Störungen in den Elementen durchgeführt werden[1]). Es ist, wenn $F$ irgend eine Function bedeutet:

$$\frac{dF}{dE} = \frac{dF}{dt}\frac{dt}{dE} \quad \text{und} \quad \frac{dt}{dE} = \frac{r\sqrt{a}}{k_0}.$$

Leitet man in dieser Weise die Differentialquotienten der Elemente nach der excentrischen Anomalie $E$ ab, und setzt

$$\frac{P}{k_0^2 m_1} = (P); \quad \frac{Q}{k_0^2 m_1} = (Q); \quad \frac{Z^{(0)}}{k_0^2 m_1} = (Z), \tag{1}$$

so wird aus den Formeln 19 (11):

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dE} &= [2a^2 e\, r \sin v\,(P) + 2a^2 p\,(Q)]f \\
\frac{de}{dE} &= [p\, r \sin v\,(P) + p\, r\,(\cos E + \cos v)\,(Q)]f \\
\frac{d\pi}{dE} &= \left[-\frac{rp}{e}\cos v(P) + \frac{r(r+p)}{e}\sin v(Q) + r^2 \sin(v+\omega)\,tang\tfrac{1}{2}i(Z)\right]f \\
\frac{d\Omega}{dE} &= \frac{r^2 \sin(v+\omega)}{\sin i}(Z)f \\
\frac{di}{dE} &= \frac{r^2 \cos(v+\omega)}{\sin i}(Z)f \\
\left(\frac{dM_0}{dE}\right)_1 &= [r(p \cot\varphi \cos v - 2r\cos\varphi)(P) - r\cot\varphi \sin v\,(p+r)(Q)]f \\
\left(\frac{dM_0}{dE}\right)_2 &= \frac{r\sqrt{a}}{k_0}\int\frac{dM}{dE}dE
\end{aligned} \tag{2}$$

$$f = m_1 \sec\varphi \tag{2a}$$

Um nach diesen Formeln[2]) die speziellen Störungen eines Kometen zu be-

---

[1]) Nach v. OPPOLZER: Sitzungsberichte der k. Acad. der Wissenschaften in Wien 1870, Bd. 52, pag. 661.

[2]) An Stelle der Störung in $a$ kann auch gesetzt werden:

$$\frac{dp}{dE} = 2pr^2(Q)f; \quad \text{oder} \quad \frac{d\mu}{dE} = \left[-\frac{3k_0}{\sqrt{a}}e\,r\sin v\,(P) - \frac{3k_0}{\sqrt{a}}p\,(Q)\right]f.$$

Da die Hauptstörung in die Nähe des Perihels fällt, so wird man auch manchmal mit Vortheil die Eintheilung nach der wahren Anomalie wählen können. Dadurch wird von selbst eine Eintheilung in relativ engen Intervallen während der Zeit des Perihels und in immer grösseren Intervallen bei der Entfernung vom Perihel eintreten. Da

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial E}\cdot\frac{dE}{dv} \quad \text{und} \quad \frac{dE}{dv} = \frac{r\sqrt{1-e^2}}{p}$$

ist, so bleiben die Formeln genau dieselben, nur ist an Stelle von $m_1 \sec\varphi$ der Faktor

$$f_1 = \frac{m_1 r}{p} \tag{2b}$$

zu setzen, wo aber für die Berechnung der Faktor $r$ von dem constanten Theile $\frac{m_1}{p}$ abzutrennen und mit den Coëfficienten in (2) zu vereinigen ist.

rechnen, theilt man den Umkreis in $n$ Theile; dann werden für jedes Intervall $r$, $v$, $E$ dieselben Werthe haben, es werden daher die Coëfficienten der störenden Kräfte für alle Umläufe dieselben bleiben; an Stelle von $dE$ tritt $\Delta E = \frac{360^0}{n}$ und drückt man $\Delta E$ in Bogensecunden aus, so erhält man die Elementenstörungen ebenfalls in Bogensecunden. Von den störenden Kräften ist die störende Masse abgetrennt, indem dieselbe in den Coëfficienten $m'_1 \sec\varphi \Delta E$ gezogen wird, welcher in allen Formeln auftritt. Es wird daher:

$$(P) = x'\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) - \frac{r}{\rho^3}$$
$$(Q) = y'\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) \qquad (8)$$
$$(Z) = z'\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right).$$

$\delta a$ und $\delta e$ sind, da sie nicht in Bogensecunden gegeben werden, mit $arc\, 1''$ zu multipliciren. Will man die Aenderung des Excentricitätswinkels $\varphi$ an Stelle derjenigen von $e$, so wird

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{de}{dt}; \qquad \delta\varphi = \frac{1}{\cos\varphi}\delta e.$$

Zu berücksichtigen ist dabei noch, dass man die Coordinaten $x'$, $y'$, $z'$ des störenden Himmelskörpers für jene Zeitmomente nimmt, welche den einzelnen Intervallen von $E$ entsprechen.

Für die Entwickelung von allgemeinen Störungen wird hierzu in die Ausdrücke für die heliocentrischen Coordinaten des störenden Himmelskörpers die mittlere Anomalie $\mu' t$ oder die Zeit durch die excentrische Anomalie des Kometen zu ersetzen sein, wozu am bequemsten der von HANSEN eingeschlagene Weg (vergl. No. 58) gewählt werden kann.

Die Störungen der Kometen, welche sich in parabolischen Bahnen bewegen, oder innerhalb elliptischer Bahnen mit sehr grossen Halbaxen, werden nur innerhalb des Bereiches des Sonnensystems von Bedeutung; in sehr grossen Entfernungen wird die Bahn als eine Ellipse angesehen werden können, deren Brennpunkt der gemeinsame Schwerpunkt der sämmtlichen anziehenden Massen ist. Berechnet man die Störungen eines Kometen für sehr grosse Entfernungen von der Sonne und vom störenden Himmelskörper, so hat man in der Entwickelung der störenden Kräfte (vergl. No. 28):

$$X_1 = k^2 m_1\left(\frac{x_1 - x}{r_{01}^3} - \frac{x_1}{r_1^3}\right); \; Y_1 = k^2 m_1\left(\frac{y_1 - y}{r_{01}^3} - \frac{y_1}{r_1^3}\right); \; Z_1 = k^2 m_1\left(\frac{z_1 - z}{r_{01}^3} - \frac{z_1}{r_1^3}\right)$$

$$r_{01} = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2} = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2(xx_1 + yy_1 + zz_1)}$$

$r$ gegenüber $r_1$ sehr gross zu nehmen. Da nun

$$\frac{1}{r_{01}^3} = \frac{1}{r^3}\left(1 - 2\frac{(xx_1 + yy_1 + zz_1)}{r^2} + \frac{r_1^2}{r^2}\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{r^3} + 3\frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r^5}$$

ist, so werden die Differentialgleichungen der Bewegung unter Vernachlässigung der Kometenmasse, wenn man mit $x$, $y$, $z$ die ungestörten Coordinaten, und mit $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ die gestörten Coordinaten, mit $r + \delta r$ die gestörte Entfernung bezeichnet:

$$\frac{d^2(x + \xi)}{dt^2} + \frac{k^2(x + \xi)}{(r + \delta r)^3} = k^2 m_1\frac{x_1 - x}{r^3} - k^2 m_1\frac{x_1}{r_1^3} + 3k^2 m_1\frac{x_1 - x}{r^5}(xx_1 + yy_1 + zz_1),$$

wobei in den störenden Kräften die ungestörten Coordinaten verwendet wurden, weil auf Störungen zweiter Potenz der Massen nicht Rücksicht genommen wird. Vernachlässigt man in dem letzten Ausdrucke, welcher $r^4$ im Nenner hat, die Quadrate der Coordinaten des störenden Himmelskörpers, und berücksichtigt, dass

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k^2x}{r^3} = 0$$

$$r\,\delta r = x\xi + y\eta + z\zeta$$

ist, so folgt

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{k^2\xi}{r^3} - \frac{3k^2x(x\xi + y\eta + z\zeta)}{r^5} + k^2m_1\frac{x - x_1}{r^3} + k^2m_1\frac{x_1}{r_1^3} +$$
$$+ 3k^2m_1\frac{x}{r^5}(xx_1 + yy_1 + zz_1) = 0$$

und zwei ähnliche Gleichungen für $\eta$ und $\zeta$. Diesen Gleichungen wird genügt durch

$$\begin{aligned} \xi &= \tfrac{1}{3}m_1x + m_1x_1 \\ \eta &= \tfrac{1}{3}m_1y + m_1y_1 \\ \zeta &= \tfrac{1}{3}m_1z + m_1z_1. \end{aligned} \tag{4}$$

68. **Bewegung der Kometen bei grosser Annäherung an einen Planeten.** Wesentlich complicirter werden die Verhältnisse bei grosser Annäherung eines Kometen an einen Planeten. Es war schon früher (vergl. den Artikel »Kometen und Meteore«) der bedeutenden Störungen gedacht worden, welche die Kometen erfahren, wenn sie in die Nähe eines grösseren Planeten gelangen. Kommt der Komet in so grosse Nähe der Planeten, dass die ursprünglich als störende Kraft des Planeten angesehene Wirkung derselben grösser wird, als die direkte Kraft der Sonne auf den Kometen, so wird man, gerade so, wie man bei den Nebenplaneten die Sonne als störenden Körper ansieht, auch hier den Planeten als Centralkörper, und die Sonne als störenden Körper anzusehen haben. Geht man von den Differentialgleichungen der Bewegung in rechtwinkligen Coordinaten aus, so hat man, wenn Kürze halber wieder $\rho$ für $r_{01}$ geschrieben wird, für den Kometen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2(M + m)\frac{x}{r^3} - \frac{k^2m_1(x_1 - x)}{\rho^3} + k^2m_1\frac{x_1}{r_1^3} = 0, \tag{5a}$$

und für den Planeten, für welchen beispielsweise Jupiter gesetzt werden kann:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + k^2(M + m_1)\frac{x_1}{r_1^3} - \frac{k^2m(x - x_1)}{\rho^3} + k^2m\frac{x}{r^3} = 0. \tag{5b}$$

Für den Uebergang auf die jovicentrische Bewegung müssen nun die jovicentrischen Coordinaten der Sonne und des Kometen eingeführt werden. Die ersteren sind $x_1' = -x_1$; $y_1' = -y_1$; $z_1' = -z_1$; der jovicentrische Radiusvector der Sonne ist $r_1$; die jovicentrischen Coordinaten des Kometen sind $x - x_1 = x'$; $y - y_1 = y'$; $z - z_1 = z'$; der jovicentrische Radiusvector des Kometen daher $\rho$ und ferner $r$ die Entfernung des Kometen von dem störenden Himmelskörper, der Sonne. Durch Subtraktion der Gleichungen (5a), (5b) folgt aber

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + \frac{k^2(m + m_1)x'}{\rho^3} + k^2M\frac{x}{r^3} + k^2M\frac{x_1'}{r_1^3} = 0$$

oder wenn hier $x = x_1 + x' = x' - x_1'$ gesetzt wird:

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + \frac{k^2(m_1 + m)x'}{\rho^3} - \frac{k^2M(x_1' - x')}{r^3} + k^2M\frac{x_1'}{r_1^3} = 0, \tag{6}$$

welche Differentialgleichungen man auch unmittelbar hätte aufstellen können, indem sie aus den Gleichungen (5a), (5b) mutatis mutandis hervorgehen.

Nach (5a) ist nun aber das Verhältniss der Wirkung der Sonne zur störenden Wirkung des Jupiter

$$V_1 = \frac{\frac{k^2(M+m)x}{r^3}}{\frac{k^2 m_1(x-x_1)}{\rho^3}+k^2 m_1\frac{x_1}{r_1^3}} = \frac{M+m}{m_1}\,\frac{\frac{x}{r^3}}{\frac{x-x_1}{\rho^3}+\frac{x_1}{r_1^3}}$$

und nach (6) das Verhaltniss der Wirkung des Jupiter zur störenden Wirkung der Sonne:

$$V_2 = \frac{\frac{k^2(m_1+m)(x-x_1)}{\rho^3}}{k^2 M\frac{x}{r^3} - k^2 M\frac{x_1}{r_1^3}} = \frac{m_1+m}{M}\,\frac{\frac{x-x_1}{\rho^3}}{\frac{x}{r^3}-\frac{x_1}{r_1^3}}.$$

Je nachdem $V_1 > V_2$ oder $V_2 > V_1$ ist, wird man die Differentialgleichungen (5a) oder diejenigen (6) verwenden. Der Uebergang von der heliocentrischen Bewegung auf die jovicentrische wird vorzunehmen sein, wenn $V_2 > V_1$ wird, und die Grenze hierfür wird gegeben durch $V_1 = V_2$, d. h. durch

$$\frac{M+m}{m_1}\,\frac{x}{r^3}\left(\frac{x}{r^3}-\frac{x_1}{r_1^3}\right) = \frac{m_1+m}{M}\,\frac{x-x_1}{\rho^3}\left(\frac{x-x_1}{\rho^3}+\frac{x_1}{r_1^3}\right). \tag{7}$$

Für den einfachsten Fall, dass die drei Körper in gerader Linie sind, wird $x = r$; $x_1 = r_1$; $x_1 - x = \rho = r_1 - r$; demnach wenn die Kometenmasse $m$ vernachlässigt wird:

$$M^2\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r_1^2}\right) = m_1^2\frac{1}{(r_1-r)^2}\left[\frac{1}{(r_1-r)^2}-\frac{1}{r_1^2}\right]$$

oder

$$M^2\frac{(r_1-r)(r_1+r)}{r^4} = m_1^2\frac{2rr_1-r^2}{(r_1-r)^4}.$$

Man kann aber wegen der grossen Annäherung des Kometen an den Planeten genügend genau $r_1 + r = 2r$, $2rr_1 - r^2 = r^2$ setzen, und dann wird

$$2M^2\frac{r_1-r}{r^3} = m_1^2\frac{r^2}{(r_1-r)^4},$$

mithin

$$r_1 - r = r\sqrt[5]{\tfrac{1}{2}\left(\frac{m_1}{M}\right)^2}. \tag{8}$$

Diesen Werth bezeichnet man nach Laplace als die Wirkungssphäre des Planeten.

Für Jupiter ist $\frac{m_1}{M} = \frac{1}{1047}$, demnach $r_1 - r = 0{\cdot}0589\,r$;

fur Saturn ist $\frac{m_1}{M} = \frac{1}{3510}$ und damit $r_1 - r = 0{\cdot}0382\,r$.

Im Ausdrucke (6) kommen die jovicentrischen Coordinaten des Kometen vor; dieselben für jeden einzelnen Zeitmoment aus den heliocentrischen Coordinaten nach den Formeln $x' = x - x_1$ u. s. w. abzuleiten, wäre sehr unpraktisch, da sie zur Zeit der grossen Annäherung sich als Differenzen sehr nahe gleicher Grössen ergeben würden. Es wird in diesem Falle am besten, jovicentrische Elemente des Kometen zu berechnen. Ist für einen gegebenen Moment die Gleichung (8) nahe erfüllt, so berechnet man für diesen Moment die heliocen-

trischen Coordinaten und Geschwindigkeiten des Jupiter und des Kometen nach 17 (8) und (12) und hierauf die jovicentrischen Coordinaten und Geschwindigkeiten des Kometen für diesen Moment nach

$$x' = x - x_1; \quad y' = y - y_1; \quad z' = z - z_1$$

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}; \qquad \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt}; \qquad \frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt} - \frac{dz_1}{dt}.$$

Man erhält dann sofort die für den betrachteten Moment osculirende jovicentrische Bahn nach den Formeln 17 (18) und den Formeln 25 (2) bis (6); wenn die jovicentrische Bahn nicht als Ellipse anzusehen ist, so erhält man die Zeit des Durchgangs durch das Perijovium, indem man die Zwischenzeit sucht, welche der Komet braucht, um die wahre Anomalie $v$, wie sie sich durch 25 (8) ergab, zu durchlaufen, also nach

$$\frac{k\sqrt{m_1 + m}}{\sqrt{2}\, q^{\frac{3}{2}}}(t - T_0) = tang \tfrac{1}{2} v + \tfrac{1}{3} tang^3 \tfrac{1}{2} v.$$

Zu bemerken ist hierzu nur, dass sich die Bahnelemente auf eine Fundamentalebene beziehen, welche durch den Jupitermittelpunkt parallel zur ursprünglichen Fundamentalebene gelegt ist. Waren also heliocentrische Coordinaten und Geschwindigkeiten ursprünglich auf die Ekliptik bezogen, so erhält man die jovicentrische Bahn bezogen auf eine durch den Jupiter parallel zur Ekliptik bezogene Fundamentalebene, also auf eine jovicentrische Ekliptik, und der Anfangspunkt der Längen ist eine durch den Jupiter parallel zur Richtung nach dem Frühlingspunkte gelegte Linie, also das jovicentrische Aequinoktium. Es sind also jovicentrische Elemente, bezogen auf die Ekliptik und das Aequinoctium einer gegebenen Epoche.

Hat man hierauf die Störungen der Sonne in irgend einer Weise z. B. nach der Methode der speciellen Störungen in rechtwinkeligen Coordinaten, welche sich hiefür am meisten empfiehlt, gerechnet, bis der Komet aus der Wirkungssphäre, d. h. aus der Sphäre innerhalb welcher die Wirkung des Jupiter stärker ist, als diejenige der Sonne heraustritt, so wird für diesen Punkt neuerdings die Gleichung (6) erfüllt sein, und dann wird man mit den gestörten jovicentrischen Coordinaten und Geschwindigkeiten, welche direkt durch die Störungsrechnung in rechtwinkligen Coordinaten gegeben sind, oder welche aus den osculirenden Elementen für diesen Moment abgeleitet werden, und mit den zugehörigen heliocentrischen Coordinaten und Geschwindigkeiten des Jupiter neuerdings die heliocentrischen Coordinaten und Geschwindigkeiten des Kometen berechnen nach den Formeln

$$x = x' + x_1; \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + \frac{dx_1}{dt}; \ldots$$

Mittels dieser heliocentrischen Werthe werden neue osculirende heliocentrische Elemente des Kometen abgeleitet, mit denen die Störungsrechnung fortgesetzt werden kann.

**Beispiel:** Für den Kometen 1889 V wurde die Störungsrechnung bis 1886 Oct. 4 fortgeführt (vergl. pag. 359). Für 1886 Oct. 8 erhält man nun die osculirenden Elemente:

$$\left.\begin{aligned} M_0 &= 210°\ 57'\ 14''{\cdot}06 \\ \pi &= \phantom{0}\ 2\ \ \ 46\ \ 44{\cdot}92 \\ \Omega &= \ 18\ \ \ 55\ \ 14{\cdot}39 \\ i &= \phantom{0}\ 7\ \ \ 45\ \ 15{\cdot}49 \\ \varphi &= \ 32\ \ \ 36\ \ 33{\cdot}56 \\ \mu &= 527''{\cdot}7210 \end{aligned}\right\}\ \text{Ekliptik und mittleres Aequinoct. 1890·0}$$

und aus diesen die heliocentrischen Coordinaten und Geschwindigkeiten des Kometen:

$$x = -5{\cdot}203720;\qquad y = -1{\cdot}297106;\qquad z = +0{\cdot}062683$$

$$\frac{dx}{dt} = +0{\cdot}018484;\qquad \frac{dy}{dt} = -0{\cdot}037054;\qquad \frac{dz}{dt} = -0{\cdot}005589.$$

Stellt man hiermit die heliocentrischen Coordinaten und Geschwindigkeiten des Jupiter zusammen, so erhält man die jovicentrischen Coordinaten und Geschwindigkeiten des Kometen

$$x' = +0{\cdot}081869;\qquad y' = +0{\cdot}288758;\qquad z' = -0{\cdot}001127$$

$$\frac{dx'}{dt} = +0{\cdot}002174;\qquad \frac{dy'}{dt} = +0{\cdot}018069;\qquad \frac{dz'}{dt} = -0{\cdot}005426,$$

und hiermit die jovicentrischen Elemente (Hyperbel):

Zeit des Perijoviums: $T =$ 1886 Juli 19·9904.

| | | |
|---|---|---|
| $\pi = 282°\ 50'\ 2''{\cdot}2$<br>$\Omega = 256\ \ 16\ \ 19{\cdot}5$<br>$i = \ 68\ \ \ 8\ \ 48{\cdot}8$ | Mittlere Ekliptik u. Aequinoct. 1890·0. | $\log e = 0{\cdot}004613$<br>$\log a = 8_n{\cdot}980000$<br>$\log q = 6{\cdot}958555.$ |

Mit dem Werthe für Jupiter (vergl. pag. 303): $\log k = 6{\cdot}725426$ und das Intervall $w = 8$ Tage wird mit der Sonnenmasse $M_\odot = 1047{\cdot}879$

$$\log (wk)^2 M_\odot 10^6 = 4{\cdot}277848.$$

Hiermit erhält man z. B. für October 4 als störende Kräfte:

$$X_1 = k^2 M_\odot \frac{x_1 - x}{\rho^3} = +638{\cdot}84;\qquad X_2 = -k^2 M_\odot \frac{x_1}{r_1^3} = -611\ 85$$

$$Y_1 = k^2 M_\odot \frac{y_1 - y}{\rho^3} = +156{\cdot}57;\qquad Y_2 = -k^2 M_\odot \frac{y_1}{r_1^3} = -175{\cdot}26$$

$$Z_1 = k^2 M_\odot \frac{z_1 - z}{\rho^3} = -\ \ 8{\cdot}02;\qquad Z_2 = -k^2 M_\odot \frac{z_1}{r_1^3} = +\ \ 14{\cdot}44,$$

daher die störenden Kräfte

$$X_\odot = +26{\cdot}99;\qquad Y_\odot = -18{\cdot}69;\qquad Z_\odot = +6{\cdot}42.$$

Diese kurzen Andeutungen werden mit Rücksicht auf die früheren ausführlicheren Beispiele genügen, um das Verfahren auch numerisch anzudeuten Auf einige andere, die Berechnung erleichternde Details kann an dieser Stelle nicht eingegangen werden.

Rühren starke Aenderungen der Elemente eines Kometen von der Attraction eines Planeten her, in dessen Nähe derselbe kam, so muss zwischen den beiden verschiedenen Elementensystemen eine Beziehung bestehen, welche zuerst von TISSERAND angegeben wurde. Im folgenden soll die sehr elegante Ableitung dieser Beziehung mitgetheilt werden, welche von SEELIGER in den A. N. No. 2965 gegeben wurde. Multiplicirt man die drei Gleichungen (5a) mit $2\frac{dx}{dt}$, $2\frac{dy}{dt}$, $2\frac{dz}{dt}$, und integrirt, so folgt, da $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = v^2$, die Geschwindigkeit des Kometen ist, wenn die Integrationsconstante mit $c$ bezeichnet wird:

$$v^2 = c + \frac{2k^2(M+m)}{r} + 2k^2 m_1 \int \frac{dt}{\rho^3}\left[(x_1 - x)\frac{dx}{dt} + (y_1 - y)\frac{dy}{dt} + \right.$$

$$\left. + (z_1 - z)\frac{dz}{dt}\right] - 2k^2 m_1 \int \frac{dt}{r_1^3}\left[x_1 \frac{dx}{dt} + y_1 \frac{dy}{dt} + z_1 \frac{dz}{dt}\right].$$

Da nun

$$(x_1 - x)\frac{dx}{dt} = -(x_1 - x)\frac{d(x_1 - x)}{dt} + (x_1 - x)\frac{dx_1}{dt}$$

$$-x_1\frac{dx}{dt} = (x_1 - x)\frac{d(x_1 - x)}{dt} - (x_1 - x)\frac{dx_1}{dt} - x\frac{dx}{dt}$$

und

$$(x_1 - x)\frac{d(x_1 - x)}{dt} + (y_1 - y)\frac{d(y_1 - y)}{dt} + (z_1 - z)\frac{d(z_1 - z)}{dt} = \rho\frac{d\rho}{dt}$$

ist, so wird

$$v^2 = c + \frac{2k^2(M+m)}{r} + \frac{2k^2m_1}{\rho} + 2k^2m_1\int dt\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right)\left[(x_1 - x)\frac{dx_1}{dt} + (y_1 - y)\frac{dy_1}{dt} + (z_1 - z)\frac{dz_1}{dt}\right] + 2k^2m_1\int\frac{dt}{r_1^3}\left(\rho\frac{d\rho}{dt} - \frac{r\,dr}{dt}\right). \quad (9)$$

Während der Zeit, während welcher der Komet in der Nähe des störenden Planeten weilt, kann man dessen Bahn als kreisförmig und mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen ansehen[1]), also $r_1$ und $\frac{dv_1}{dt} = \mu_1$ constant ansehen, und dann hat man, wenn man noch die Bahnebene des störenden Planeten als Fundamentalebene, also $z_1 = \frac{dz_1}{dt} = 0$ annimmt:

$$x_1 = r_1\cos v_1; \quad \frac{dx_1}{dt} = -r_1\sin v_1\frac{dv_1}{dt} = -\mu_1 y_1$$

$$y_1 = r_1\sin v_1; \quad \frac{dy_1}{dt} = +r_1\cos v_1\frac{dv_1}{dt} = +\mu_1 x_1,$$

demnach

$$v^2 = c + \frac{2k^2(M+m)}{r} + \frac{2k^2m_1}{\rho} + 2k^2m_1\mu_1\int dt\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right)(xy_1 - x_1y) + \frac{k^2m_1}{r_1^3}(\rho^2 - r^2).$$

Multiplicirt man aber die Gleichungen (5a) (für $x$ und $y$) mit $-y$, $+x$, und addirt, so erhält man nach der Integration

$$k^2m_1\int\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right)(xy_1 - x_1y)\,dt = \left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = k\sqrt{M+m}\sqrt{p}\cos i,$$

wenn die Integrationsconstante weggelassen wird, welche sich nach der Substitution mit $c$ vereinigt. Die Gleichung für $v^2$ wird daher

$$v^2 = c + \frac{2k^2(M+m)}{r} + \frac{2k^2m_1}{\rho} + 2k\sqrt{M+m}\,\mu_1\sqrt{p}\cos i + \frac{k^2m_1}{r_1^3}(\rho^2 - r^2).$$

Es ist aber

$$v^2 = k^2(M+m)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

demnach

$$0 = c + \frac{k^2(M+m)}{a} + \frac{2k^2m_1}{\rho} + 2k\sqrt{M+m}\,\mu_1\sqrt{p}\cos i + \frac{k^2m_1}{r_1^3}(\rho^2 - r^2).$$

Da die mittlere Bewegung des störenden Körpers allgemein:

$$(\mu_1) = \frac{k\sqrt{M+m_1}}{a_1^{3/2}}$$

[1]) Diese Voraussetzung, welche bei der Ableitung des Satzes wesentlich ist, ist durchaus nicht unanfechtbar, im Gegentheil wird die Bewegung meist viel eher geradlinig (hyperbolisch mit sehr kleiner Distanz des Pericentrums) sein.

ist, die Geschwindigkeiten in den verschiedenen Theilen der Bahn aber sich verkehrt wie die Quadrate der Entfernung verhalten, so wird

$$\mu_1:(\mu_1) = a_1^2:r_1^2; \qquad \mu_1 = \frac{k\sqrt{M+m_1}\sqrt{a_1}}{r_1^2}.$$

Dividirt man daher die letzte Gleichung durch $k^2(M+m)$ und bezeichnet die selbst willkürliche Constante $\frac{c}{k^2(M+m)}$ wieder mit $c$ und setzt:

$$\frac{m_1}{M+m} = m_0; \qquad \sqrt{\frac{M+m_1}{M+m}}\,\frac{\sqrt{a_1}}{r_1^2} = \mu_0,$$

so wird

$$0 = c + \frac{1}{a} + \frac{2m_0}{\rho} + 2\mu_0\sqrt{p}\cos i + \frac{m_0}{r_1^3}(\rho^2 - r^2). \qquad (10a)$$

Betrachtet man nun einen Kometen an zwei verschiedenen Orten seiner Bahn, in denen er dieselbe Entfernung von dem störenden Planeten hat, das eine Mal also in seiner Bahn vor der Annäherung an den Planeten, das zweite Mal nach der grossen Störung, so werden die Elemente $a$, $p$, $i$ sich in $a'$, $p'$, $i'$ verwandelt haben; die heliocentrische Entfernung des Kometen wird im ersten Falle $r$, im zweiten $r'$ sein, und es gilt demnach vor der grossen Störung die Gleichung (10a) und nach derselben die Gleichung:

$$0 = c + \frac{1}{a'} + \frac{2m_0}{\rho} + 2\mu_0\sqrt{p'}\cos i' + \frac{m_0}{r_1^3}(\rho^2 - r'^2), \qquad (10b)$$

wobei während der Dauer der Störung $r$ constant angesehen wurde. Aus den Gleichungen (10a), (10b) folgt durch Subtraction:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a'} + 2\mu_0\sqrt{p}\cos i - 2\mu_0\sqrt{p'}\cos i' + \frac{m_0}{r_1^3}(r'^2 - r^2) = 0.$$

Vernachlässigt man das mit der Masse des störenden Planeten multiplicirte Glied, so folgt daraus der Tisserand'sche Satz:

$$\frac{1}{a} + 2\mu_0\sqrt{p}\cos i = \frac{1}{a'} + 2\mu_0\sqrt{p'}\cos i' = K. \qquad (11)$$

Die Constanz der Verbindung $\frac{1}{a} + 2\mu_0\sqrt{p}\cos i$ zwischen grosser Axe, Excentricität und Neigung bildet daher ein Kriterium dafür, ob die Aenderung der Bahn eines Kometen durch die Annäherung desselben an einen Planeten stattgefunden hat, oder nicht. Zunächst gilt diese Formel allerdings ihrer Ableitung nach nur für jene Punkte der Bahn, in welchen der Komet gleich weit von dem störenden Planeten entfernt ist, und für die Bahnebene des störenden Planeten als Fundamentalebene; da aber die Bahnelemente, abgesehen von der grossen Störung keine durchgreifenden Aenderungen erfahren, und die Bahnneigungen der störenden Planeten sehr klein sind, so kann man dieselben für beide Theile der Bahn vor und nach der grossen Störung als constant betrachten, und diese Gleichung gilt dann für Elementensysteme vor und nach dieser Störung.

Dass die Bedeutung dieser Gleichung stark überschätzt wurde, wurde bereits in dem Artikel »Kometen und Meteore« hervorgehoben.

**69. Anomale Bewegungserscheinungen bei Kometen.** Berücksichtigt man bei der Untersuchung der Bewegung des Kometen die Störungen, so weit sie durch die Einwirkung der Planeten entstehen, so lässt sich wohl für kleine Zeiträume, also bei den nicht periodischen Kometen, dann während einiger

weniger Umläufe eines periodischen Kometen eine hinreichende Uebereinstimmung zwischen der Theorie und den Beobachtungen erzielen. Hingegen ergab sich zunächst bei dem von PONS entdeckten, von ENCKE untersuchten und nach ihm benannten Kometen mit etwa $3\frac{1}{3}$ Jahren Umlaufszeit, wie schon im I. Bande pag. 160 erwähnt wurde, aus der Discussion einer grossen Anzahl von Umläufen, dass sich die Umlaufszeit stetig verkürze: ENCKE zog daraus den Schluss, dass die Bewegung in einem widerstehenden Mittel stattfinde.

Um zunächst zu untersuchen, ob nicht eine Störung anderer Art die Ursache dieser Erscheinung sein könne, möge angenommen werden, dass irgend eine unbekannte störende Wirkung in der Richtung des Radiusvectors wirke; dann erhält man, da in den Formeln 67 (2) $(Q) = 0$ zu setzen ist:

$$\frac{d\mu}{dv} = -\frac{3k}{\sqrt{a}}\, er \sin v (P) f_1; \qquad \frac{d\varphi}{dv} = \frac{pr}{\cos\varphi} \sin v (P) f_1. \tag{1}$$

Daraus folgt, wenn man das Integral

$$\int_0 r \sin v (P) f_1 \, dv = J \tag{2}$$

setzt, für die Aenderungen der mittleren Bewegung und des Excentricitätswinkels von der Zeit des Periheldurchganges bis zur Anomalie $v$:

$$\delta\mu = -\frac{3k}{\sqrt{a}} \sin\varphi J; \qquad \delta\varphi = \frac{p}{\cos\varphi} J, \tag{3}$$

demnach für das Verhältniss $V$ dieser Aenderungen:

$$V = \frac{\delta\mu}{\delta\varphi} = -\frac{3k}{a\sqrt{a}} \tan g\, \varphi. \tag{4}$$

Für den ENCKE'schen Kometen ist $\log a = 0{\cdot}346$, $\varphi = 57°\,48'$, demnach $V = -0{\cdot}0248$.

Legt man die von v. ASTÉN für einen vollen Umlauf gefundenen Zahlen

$$\delta\mu = +0''{\cdot}1044; \quad \delta\varphi = -3''{\cdot}68$$

zu Grunde, so wird

$$\frac{\delta\mu}{\delta\varphi} = -0{\cdot}0284.$$

Eine selbst vollkommene Uebereinstimmung dieses Verhältnisses, mit dem aus den Beobachtungen folgenden Werthe ist jedoch noch nicht ausreichend, um das Vorhandensein von Kräften dieser Art als erwiesen zu betrachten. Nächstdem kommt es ja auf die absoluten Beträge der Störungen selbst an. Nimmt man an, dass z. B.

$$(P) = -\frac{W}{r^3}\left(\frac{dr}{dt}\right)^n \tag{5}$$

ist, so wird, wenn der constante Faktor $m_1$ mit $W$ vereinigt wird:

$$J = -W\int_0^v \frac{r^3}{p} \sin v \cdot \frac{1}{r^3}\left(\frac{dr}{dt}\right)^n dv = -\frac{W}{p}\int_0^v \left(\frac{dr}{dt}\right)^n \sin v\, dv.$$

Es ist aber

$$\frac{dr}{dt} = \frac{k_0}{\sqrt{p}}\, e \sin v,$$

demnach

$$J = -\frac{k_0^n}{p^{\frac{n+2}{2}}} W \int_0^v e^n \sin^{n+1} v\, dv$$

und damit

$$\delta\mu = +\frac{3k_0^{n+1} e^{n+1} W}{(\sqrt{p})^{n+3}} \cos\varphi \int_0^v \sin^{n+1} v\, dv.$$

Ist nun $n$ gerade, so wird das Integral über einen vollen Umlauf verschwinden, demnach $\delta\mu = 0$ sein; ist $n$ ungerade, so wird

$$\delta\mu = \frac{8k_0^{n+1}e^{n+1}W\cos\varphi}{(\sqrt{p})^{n+3}}\binom{n+1}{\frac{n+1}{2}}\cdot\frac{\pi}{2^n}. \qquad (6a)$$

Weiter wird

$$\frac{d\pi}{dv} = +\frac{rp}{e}\cos v\,\frac{W}{r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^n\cdot\frac{r}{p}$$

$$\delta\pi = \left(\frac{k_0}{\sqrt{p}}\right)^n W e^{n-1}\int_0^v \sin^n v\cos v\,dv, \qquad (6b)$$

daher das Integral über einen vollen Umkreis genommen für jedes beliebige $n$ gleich Null. Daraus folgt demnach, dass ein in Form des WEBER'schen Gesetzes modificirtes Attractionsgesetz wohl geeignet wäre, eine Beschleunigung der mittleren Bewegungen zu erklären, dass jedoch das WEBER'sche Gesetz selbst solche Störungen nicht zu erklären vermag, da in demselben $n = 2$ ist. Für $n = 1$ würde folgen:

$$\delta\mu = \frac{8\pi k_0^2 e^2}{a^2\cos^3\varphi}W.$$

$W$ kann dabei als eine absolute Constante angesehen werden, indem die Abhängigkeit der Kraft $P$ von dem verkehrten Quadrate der Entfernung bereits durch den Nenner $r^2$ ausgedrückt erscheint. Das Attractionsgesetz wird dann gegeben durch die Formel[1]):

$$\frac{k_0^2}{r^2}\left(1 - W\frac{dr}{dt}\right).$$

Nimmt man hier $W$ als absolute Constante an, so wäre für zwei verschiedene Himmelskörper

$$\delta\mu : \delta\mu_1 = \frac{e^2}{a^2\cos^3\varphi} : \frac{e_1^2}{a_1^2\cos^3\varphi_1}. \qquad (7)$$

Das Auftreten des Faktors $e^2$ bei $\delta\mu$ ist nicht ausreichend, um die Erscheinung zu erklären, dass bei den Planeten eine Secularbeschleunigung nicht stattfindet; insbesondere aber ist hervorzuheben, dass Kräfte dieser Art nach (6b) nicht geeignet sind, die anomale Bewegung des Mercurperihels zu erklären.

Es sollen noch in Kürze wenigstens die Resultate angeführt werden, welche man erhält, wenn $W$ nicht constant, sondern mit $r$ veränderlich angenommen wird. Man kann dann annehmen, dass

$$(P) = -\frac{W}{r^m}\left(\frac{dr}{dt}\right)^n \qquad (8)$$

ist, wo nunmehr $W$ wieder als constant angenommen werden kann. Man erhält dann, wenn $\left[\frac{m}{2}\right]$ die grösste in $\frac{m}{2}$ enthaltene ganze Zahl ist:

a) für gerade $n$:

$$\delta\mu = 0$$

$$\delta\pi = \frac{k^n W\left(\frac{e}{2}\right)^n\cdot 2\pi}{(\sqrt{p})^{n+2m-4}}\binom{n}{\frac{n}{2}}\sum_{\mu=1}^{\mu=\left[\frac{m-2}{2}\right]-1}\frac{(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-2\mu)}{(n+2)(n+4)\ldots\ldots(n+2\mu)}\,\frac{1}{(\mu-1)!}\left(\frac{e^2}{2}\right)^{\mu-1}.$$

[1]) Vergl. v. OPPOLZER, Astr. Nachr. No. 2319.

b) Für ungerade $n$:

$$\delta\mu = \frac{2k^{n+1}W\left(\frac{e}{2}\right)^{n+1}\cdot 2\pi}{(\sqrt{p})^{n+2m-1}}\cos\varphi\binom{n+1}{\frac{n+1}{2}}\sum_{\mu=0}^{\mu=\left[\frac{m-2}{2}\right]}\frac{(m-2)(m-3)\ldots(m-2\mu-1)}{(n+3)(n+5)\ldots(n+2\mu+1)}\frac{1}{\mu!}\left(\frac{e^2}{2}\right)^{\mu}$$

$\delta\pi = 0.$

Diese Resultate zeigen daher die Unvereinbarkeit der Annahme dieser Attractionsgesetze mit den Bewegungserscheinungen der Himmelskörper.

Die Untersuchung der Wirkung von Kräften, die in der Richtung senkrecht zum Radiusvector stehen, hat praktisch keine Bedeutung, da keinerlei Grund für die Annahme von solchen vorliegt.

**70. Bewegungswiderstände.** Die unter dem geringen äusseren Drucke stattfindenden Gasausströmungen und Verdunstungen von Flüssigkeiten, theils von den festen und flüssigen Bestandtheilen, theils von den Gashüllen der Himmelskörper müssen nothwendig zur Folge haben, dass der Weltraum mit einem wenn auch äusserst feinen Fluidum erfüllt ist. Dieses Fluidum hat man sich dann als einen gas- oder dampfförmigen Körper von äusserst geringer Dichte zu denken[1]), der sich in der Nähe der Himmelskörper zu Atmosphären ballt, oder eigentlich die in den Weltraum sich erstreckende und mehr und mehr verdünnende Atmosphäre ist. Wie die Atmosphäre selbst kann dann dieses Medium um die Weltkörper kreisen, aber in immer grösseren Entfernungen nach Massgabe desselben immer langsamer, sodass jene Himmelskörper, welche immer in nahe derselben Entfernung bleiben (Bahnen von kleinen Excentricitäten beschreiben) in ihren Bewegungen nicht wesentlich gehindert werden; hingegen solche, deren Entfernungen stark variiren (welche stark excentrische Bahnen beschreiben) merkliche Störungen erfahren können, und zwar um so stärker, je dichter das Medium ist.

Es finden sich aber im Weltraume nebst den grossen planetarischen Massen eine sehr grosse Zahl von sehr kleinen Körperchen, welche als Meteorschwärme regelmässige Bahnen beschreiben, und zwar entweder im Bereiche eines Sonnensystems diesem zugehörig, oder als stellare Schwärme, sich in parabolischen oder hyperbolischen Bahnen im Weltraume bewegend. Hierzu kommen vereinzelte Meteormassen, die sich als Meteorite, Feuerkugeln u. s. w. offenbaren, so dass man die Annahme wenigstens nicht ganz von der Hand weisen darf, dass der Weltraum von derartigen discreten, relativ kleinen, aber festen Körperchen erfüllt ist. Diese Massen werden, wenn sie in die Attractionssphäre einer relativ grossen Masse (eines Fixsternes oder einer Planetenmasse) gelangen, von dieser angezogen sich dieser nähern, oder um dieselbe mit der dieser Entfernung eigenthümlichen Geschwindigkeit kreisen; so werden um die grossen Massen Anhäufungen, Verdichtungen von Massenpartikelchen stattfinden.

Wenn auch die Verfolgung der Bewegungen dieser Massen, sofern es sich um die einzelnen derselben handelt, ganz bedeutende Schwierigkeiten darbieten würde, so ist es nicht schwer, sich ein Bild von ihrer Wirkung im ganzen zu machen — genau so, wie man in der kinetischen Gastheorie die Bewegung der Gasmoleküle nicht ins einzelne verfolgen, hingegen ein Bild der Gesammtwirkung erhalten kann. Es ist dann aber auch zum mindesten denkbar, dass die Wirkung derartiger kosmischer Massen in ihrer Totalität auf die Bewegung

[1]) Indessen bleibt dasselbe ein ponderabler Stoff und darf mit dem hypothetischen Weltäther, der als Träger der Licht- und Wärmewellen gedacht wird, nicht verwechselt werden.

der zu untersuchenden Himmelskörper als qualitativ gleichartig mit der Einwirkung von Gasmassen auf terrestrische Objekte sei, und sich mit derjenigen eines wirklich gasförmigen Mediums confundirt. Dass hierbei ein quantitativer Unterschied stattfinden kann, ist selbstverständlich; doch wird dadurch nur das ohnehin unbekannte Gesetz der Dichten und des Widerstandes alterirt.

Es möge zunächst über die Dichte $\rho$ dieses Mediums, ob es nun in der Form einer Gasmasse allein, oder von kosmischen, ihrer Grösse nach mit kleinen[1]) terrestrischen Objekten vergleichbaren Körperchen gedacht werde, nur die eine sehr wahrscheinliche Annahme gemacht werden, dass sie eine Function der Entfernung vom anziehenden Körper sei. Die Wirkung dieses Mediums wird man nach dem gewöhnlichen Widerstandsgesetze in der Richtung der Tangente, entgegengesetzt der Bewegungsrichtung annehmen können. Ueber die Abhängigkeit des Widerstandes von der Dichte und Geschwindigkeit soll jedoch vorerst nur die, ebenfalls sehr natürliche Annahme gemacht werden, dass der Widerstand in der Nähe der Sonne am stärksten ist, nach Maassgabe der Entfernung aber nach einem vorläufig ebenfalls nicht näher zu bestimmenden Gesetze abnimmt. Bezeichnet man den Widerstand mit $-k_0^2 W$, so werden seine Componenten

$$X = -k_0^2 W \frac{dx}{ds}; \quad Y = -k_0^2 W \frac{dy}{ds}; \quad Z = -k_0^2 W \frac{dz}{ds}. \tag{1}$$

Wählt man als Fundamentalebene die Bahn des gestörten Himmelskörpers, so werden $z$ und $\frac{dz}{ds}$ sehr klein, und $Z$ kann gleich Null gesetzt werden. Geht man auf polare Coordinaten über, so wird:

$$x = r \cos l, \qquad y = r \sin l.$$

Wenn man nur Störungen erster Ordnung berücksichtigt, d. h. in den störenden Kräften die Elemente als constant ansieht, so wird sich ergeben:

$$\frac{dx}{dt} = -\sin l \frac{k_0}{\sqrt{p}}(1 + e\cos v) + \cos l \frac{k_0}{\sqrt{p}} e \sin v$$

$$\frac{dy}{dt} = +\cos l \frac{k_0}{\sqrt{p}}(1 + e\cos v) + \sin l \frac{k_0}{\sqrt{p}} e \sin v$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{k_0}{\sqrt{p}} \sqrt{1 + 2e\cos v + e^2}$$

und damit:

$$\frac{dx}{ds} = -\sin l \frac{1 + e\cos v}{R} + \cos l \frac{e \sin v}{R}$$

$$\frac{dy}{ds} = +\cos l \frac{1 + e\cos v}{R} + \sin l \frac{e \sin v}{R}, \tag{2}$$

wobei

$$R = \sqrt{1 + 2e\cos v + e^2} \tag{3a}$$

gesetzt ist. Durch Einführung der excentrischen Anomalie erhält man

$$R = \sqrt{1 - e^2}\sqrt{\frac{1 + e\cos E}{1 - e\cos E}}. \tag{3b}$$

---

[1]) Schon die Bezeichnung »klein« ist eine relative, und man braucht nicht allzu minimale Objekte zu wählen, um das Verhältniss derselben zur Sonnenmasse als Grösse derselben Ordnung zu erkennen mit derjenigen von Gasmolekülen zu »kleinen« terrestrischen Objecten.

Setzt man die Werthe (2) in (1) ein, so folgt

$$X = -\frac{k_0^2 W}{R}[e\cos l\sin v - \sin l(1 + e\cos v)]$$

$$Y = -\frac{k_0^2 W}{R}[e\sin l\sin v + \cos l(1 + e\cos v)].$$

Hiermit folgt nach 19 (3) (in welcher Formel jedoch $v$ durch $l$ zu ersetzen ist):

$$P = -\frac{k_0^2 W}{R} e\sin v \qquad Q = -\frac{k_0^2 W}{R}(1 + e\cos v).$$

Vergleicht man diese Werthe mit den in 67 (2) auftretenden, so folgt, dass man

$$(P) = e\sin v, \quad (Q) = 1 + e\cos v \tag{4}$$

und an Stelle von $w_1$ den Faktor $-\frac{W}{R}$ einzuführen hat; es wird daher $f = -\frac{W\sec\varphi}{R}$ und man erhält für die Variation der Elemente

$$\begin{aligned}
&\frac{da}{dE} = +2a^2p(1 + e\cos E)f & &\frac{d\Omega}{dE} = 0\\
&\frac{d\mu}{dE} = -3\sqrt{p}\,k_0\cos\varphi(1 + e\cos E)f & &\frac{di}{dE} = 0\\
&\frac{de}{dE} = +2p^2\cos E\cdot f & &\left(\frac{dM_0}{dE}\right)_1 = -\frac{2pa}{e}\sin E(1 - e^2\cos E)f\\
&\frac{d\pi}{dE} = +2pa\,\mathrm{cotang}\,\varphi\sin E\cdot f & &\left(\frac{dM_0}{dE}\right)_2 = -3pr\int(1 + e\cos E)f\,dE.
\end{aligned} \tag{5}$$

Hieraus folgt zunächst $\Omega = \Omega_0$ und $i = i_0$ constant; die Lage der Bahnebene wird daher durch den Widerstand eines Mediums nicht geändert, was ja an und für sich klar ist, da der Widerstand in der Bahnebene selbst wirkt. Führt man als unabhängige Veränderliche $v$ ein, so wird

$$\begin{aligned}
&\frac{da}{dv} = -\frac{2a^2r^2}{p}WR & &\frac{d\left(\frac{1}{a}\right)}{dv} = +\frac{2r^2}{p}WR\\
&\frac{de}{dv} = -2r^2(e + \cos v)\frac{W}{R} & &\frac{d\mu}{dv} = +\frac{3kr^2}{\sqrt{ap}}WR\\
&\frac{d\pi}{dv} = -2r^2\,\frac{\sin v}{e}\,\frac{W}{R}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Sei nun

$$\int_0^v r^2 WR\,dv = J(v), \quad \int_0^v r^2\frac{W}{R}dv = J_1(v), \tag{7}$$

so wird

$$\delta\mu = +\frac{3k}{\sqrt{ap}}J(v); \quad \delta e = -\frac{1}{e}J(v) + \frac{1 - e^2}{e}J_1(v),$$

folglich

$$\frac{\delta e}{\delta\mu} = -\frac{\sqrt{ap}}{3ke} + \frac{1 - e^2}{e}\,\frac{\sqrt{ap}}{3k}\,\frac{J_1(v)}{J(v)},$$

daher das Verhältniss $V$

$$V = \frac{\delta\mu}{\delta\varphi} = -\frac{3k}{a^{\frac{3}{2}}}\mathrm{tang}\,\varphi\frac{1}{1 - \cos^2\varphi\frac{J_1(v)}{J(v)}} = -\frac{3k}{p^{\frac{3}{2}}}\sin\varphi\cos^2\varphi\,\frac{1}{1 - \cos^2\varphi\frac{J_1(v)}{J(v)}}. \tag{8}$$

Nimmt man die Integrale $J$, $J_1$ von 0 bis 360°, so erhält man die Veränderungen $\delta\mu$, $\delta e$, $\delta\pi$ während eines vollen Umlaufs des Kometen. Je näher $e$ an die Ein-

heit kommt, desto mehr wird sich der Werth von $\cos^2\varphi \frac{J_1(v)}{J(v)}$ der Null nähern, desto näher kommt daher das Verhältniss $V$ dem Ausdrucke $-\frac{3k}{p^{\frac{1}{2}}}\sin\varphi\cos^2\varphi$, wird daher von dem Gesetze des Widerstandes völlig unabhängig. Im Allgemeinen aber wird $V$ von dem Verhältniss der beiden Integrale $J(v)$, $J_1(v)$ welche Functionen des Widerstandes sind, abhängig sein, und der numerische Werth dieses Verhältnisses wird eine Entscheidung darüber gestatten, in wieweit sich aus den beobachteten Veränderungen der Excentricität und mittleren Bewegung auch ein Widerstandsgesetz folgern lässt. Der Coëfficient $-\frac{3k}{a^{\frac{1}{2}}}\tang\varphi$ ist übrigens völlig identisch mit dem in 69 (4) unter ganz anderen Voraussetzungen erhaltenen; die Uebereinstimmung dieses Verhältnisses mit den Beobachtungen kann daher noch kein Kriterium für die Richtigkeit der einen oder anderen Hypothese bilden. Dass der aus den Beobachtungen folgende Werth von $V$ mit dem ersten, von dem Widerstandsgesetze unabhängigen Faktor übereinstimmt, könnte allerdings zu dem Schlusse führen, dass, wenn die anomalen Bewegungserscheinungen Folge eines Widerstand leistenden Mediums wären, das Widerstandsgesetz ein solches sein müsste, bei welchem das Verhältniss $\frac{J_1(v)}{J(v)}$ jedenfalls sehr klein ist[1]). Immerhin wird es nöthig, die absoluten Werthe der Störungen zu bestimmen. Dabei wird es jedoch etwas bequemer die excentrische Anomalie als Integrationsvariable beizubehalten, wobei der Fall $e = 1$ von der Betrachtung ausgeschlossen werden kann. Es wird

$$f = -\frac{W\sec\varphi}{R} = -\frac{W}{1-e^2}\sqrt{\frac{1-e\cos E}{1+e\cos E}}.$$

Nimmt man an, dass das Widerstandsgesetz analog dem auf der Erde beobachteten der Dichte und dem Quadrate der Geschwindigkeit direkt proportional sei, so wird

$$W = \rho\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \tag{9}$$

wo der Proportionalitätsfaktor in $\rho$ hineingezogen werden kann. LAPLACE setzt nun

$$pr^2\frac{W}{R} = k_0^2\rho r^2 R = A + eB\cos v + e^2 C\cos 2v + \ldots.$$

Dann wird

$$pr^2 WR = A + eB\cos v + e^2 C\cos 2v \ldots\ldots.)(1 + 2e\cos v + e^2) =$$
$$= [A(1+e^2) + Be^2] + \text{periodische Glieder}$$

$$r^2(e+\cos v)\frac{W}{R} = \frac{1}{p}(Ae + \tfrac{1}{2}Be) + \text{periodische Glieder}$$

und damit

$$\frac{d\frac{1}{a}}{dv} = \frac{2}{p^2}[A(1+e^2) + Be^2]$$
$$\frac{de}{dv} = -\frac{2}{p}(A + \tfrac{1}{2}B)e.$$

---

[1]) v. OPPOLZER setzt in den Astr. Nachrichten No. 2319 für den Faktor $1 + e\cos E$ im Ausdrucke für $\frac{d\mu}{dt}$ den Wert 2, wodurch dann die Willkürlichkeit des Widerstandsgesetzes, allerdings nicht ganz strenge, gefolgert wird.

Diese beiden Gleichungen enthalten $a$ und $e$ nicht getrennt; LAPLACE leitet daraus eine Gleichung zwischen $a$ und $e$ ab; man findet leicht durch Division

$$\frac{de}{da} = \frac{(2A+B)e(1-e^2)}{2a[A+(A+B)e^2)]}.$$

Hieraus erhält man zunächst eine Functionalbeziehung zwischen $a$ und $e$; drückt sich z. B. $a$ durch $e$ aus, und substituirt man den Ausdruck für $a$ in die Gleichung für $\frac{de}{dv}$, so erhält man dann $e$ und damit auch $a$ durch $v$ ausgedrückt. Die Gleichung ist übrigens leichter zu behandeln, als es auf den ersten Blick erscheint; es lassen sich nämlich die Variabeln trennen, und man erhält

$$\frac{2[A+(A+B)e^2]}{e(1-e^2)}\,de = \frac{(2A+B)da}{a}$$

oder

$$\left(\frac{2A}{e} + \frac{2A+B}{1-e} - \frac{2A+B}{1+e}\right) de = (2A+B)\frac{da}{a},$$

woraus durch Integration

$$ca = \frac{1}{1-e^2}\, e^{\frac{2A}{2A+B}}$$

folgt; $c$ bestimmt sich aus zusammengehörigen Werthen $a_0$, $e_0$; es ist

$$c = \frac{1}{p_0}\, e_0^{\frac{2A}{2A+B}}.$$

Hiermit wird

$$\frac{de}{dv} = -c\,(2A+B)\,e^{\frac{B}{2A+B}},$$

demnach

$$e^{-\frac{B}{2A+B}}de = -c(2A+B)dv.$$

Durch Integration folgt:

$$\frac{e^{1-\frac{B}{2A+B}}}{1-\frac{B}{2A+B}} = c_0(2A+B) - c(2A+B)v,$$

wenn die Integrationsconstante mit $c_0(2A+B)$ bezeichnet wird. Hieraus folgt endlich

$$\frac{1}{2A}\, e^{\frac{2A}{2A+B}} = c_0 - cv$$

$$e = 2A(c_0 - cv)^{\frac{2A+B}{2A}}.$$

$c_0$ bestimmt sich aus dem Werthe $e_0$ für eine gegebene Zeit. Für die Parabel ist $e_0 = 1$, demnach $c = 0$, $e$ constant, wie auch aus dem Werthe für $\frac{de}{da}$ folgt; dann wird auch $a$ constant, d. h. eine Parabel würde bei dem Vorhandensein eines widerstehenden Mittels ihren Charakter nicht ändern. Die Ableitung ist aber durchaus nicht einwurfsfrei, sie setzt nämlich die Entwickelung in einer nach *cos* der Vielfachen der mittleren Anomalien fortschreitenden Reihe voraus.

Die Coëfficienten $A$, $B$, $C$ können natürlich erst bestimmt werden, wenn $\rho = f(r)$ bekannt ist, d. h. die Abhängigkeit des Widerstandes oder der Dichte des Mittels von der Entfernung vom Centralkörper.

Dass $e$ nicht sehr gross werden kann, selbst wenn $B$ negativ wäre, kann auf folgende Art gezeigt werden. Man hat

für $v = 0$: $\left(p\frac{W}{R}\right)_0 = (A+Be+Ce^2+\dots)\left(\frac{1+e}{p}\right)^2 = \frac{1}{p^2}[A+(2A+B)e+\dots]$

für $v = 180°$: $\left(p\frac{W}{R}\right)_1 = (A-Be+Ce^2+\dots)\left(\frac{1-e}{p}\right)^2 = \frac{1}{p^2}[A-(2A+B)e+\dots]$.

Da nun die Dichte des Mittels sowohl als auch die Geschwindigkeit des Himmelskörpers in grösserer Entfernung von der Sonne geringer sein muss, so wird

$$\left(p\frac{W}{R}\right)_0 > \left(p\frac{W}{R}\right)_1$$

sein müssen; daraus folgt, dass für den Fall einer convergenten Entwickelung, wie man dieselbe ja voraussetzen muss, $2A+B$ dasselbe Zeichen haben wird wie $A$, also $\frac{2A}{2A+B}$ jedenfalls positiv sein muss.

Führt man die excentrische Anomalie ein, so hat man

$$W = \rho\left(\frac{k_0}{\sqrt{p}}R\right)^2 = \rho\frac{k_0^2}{p}R^2;\quad f = -\sec\varphi R\cdot\rho\frac{k_0^2}{p}.$$

$$\begin{aligned}\frac{d\mu}{dE} &= +8\frac{\sqrt{a}}{p}k_0^2\cos^2\varphi\rho\sqrt{\frac{(1+e\cos E)^3}{1-e\cos E}}\\ \frac{de}{dE} &= -2p\,k_0^2\rho\cos E\sqrt{\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}}\\ \frac{d\pi}{dE} &= -2k_0^2 a\,\mathrm{cotang}\,\varphi\,\rho\sin E\sqrt{\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}},\end{aligned}\qquad (10)$$

demnach

$$\begin{aligned}\delta\mu &= +\frac{8k_0^2}{\sqrt{p}}\cos\varphi\int_0^E\rho(1+e\cos E)\sqrt{\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}}\,dE\\ \delta e &= -2pk_0^2\int_0^E\rho\cos E\sqrt{\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}}\,dE\\ \delta\pi &= -2k_0^2\,a\,\mathrm{cotang}\,\varphi\int_0^E\rho\sin E\sqrt{\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}}\,dE.\end{aligned}\qquad (10a)$$

Nimmt man für $\rho$ die Beziehung

$$\rho = \frac{\rho_0}{r^n} = \frac{\rho_0}{a^n(1-e\cos E)^n},$$

so werden für ganzzahlige $n$ die Integrale elliptische Integrale werden; die Werthe $\delta\mu$, $\delta\varphi$, $\delta\pi$ lassen sich dann durch vollständige elliptische Integrale angeben[1]), welche Tafeln entnommen werden können. Man erhält für den ENCKE'schen Kometen:

---

[1]) Vergl. PONTÉCOULANT, »Théorie analytique du système du monde«, II. Bd., pag. 288. (Die daselbst gegebenen FOURIER'schen Reihen sind jedoch nur bedingt richtig.) Ferner die Entwickelungen von BACKLUND in den »Astronom. Nachrichten« Bd. 101, No. 2414.

für $n = 0$: $\delta\mu = +0{\cdot}4102\,\rho_0$ $\delta\varphi = -\ 9{\cdot}7116\,\rho_0$ $\frac{\delta\mu}{\delta\varphi} = -0{\cdot}04224$
für $n = 2$: $+1{\cdot}4517\,\rho_0$ $-51{\cdot}4267\,\rho_0$ $-0{\cdot}02823$.

Diese beiden Zahlen zeigen thatsächlich eine Abhängigkeit des Verhältnisses $V$ vom Widerstandsgesetze; mit dem aus den Beobachtungen gefolgerten Werthe 0·0284 stimmt der zweite Werth sehr gut überein, und könnte man hiernach das Widerstandsgesetz ausdrücken durch

$$W = \frac{\rho_0}{r^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \tag{9a}$$

wobei sich, die Constante $\rho_0$ in Bogensecunden ausgedrückt

$$\rho_0 = \frac{\delta\mu}{1{\cdot}4517} = 0{\cdot}071915$$

ergiebt. Das Verhältniss derselben zur Sonnenanziehung wird

$$\frac{\rho_0\ arc\ 1''}{k^2} = 0{\cdot}001178 = \frac{1}{848{\cdot}7} \tag{11}$$

sehr nahe der ENCKE'sche Werth.

71. Absolute Bahnen; intermediäre Bahnen. GYLDÉN'sche Methode. Unter Zugrundelegung der KEPLER'schen Ellipsen werden für die Störungen der Himmelskörper Reihen erhalten, deren Convergenz nicht nur nicht nachgewiesen ist, sondern in welchen bei Berücksichtigung der höheren Potenzen der Massen jedenfalls die Zeit ausserhalb der trigonometrischen Functionen erscheint. Derartige Lösungen können natürlich nur für beschränkte, wenn auch relativ sehr lange Zeiträume als gültig angenommen, jedoch keinesfalls als wirklich correcte Entwickelungen einer absolut richtigen Lösung angesehen werden. Unter einer »absoluten« Lösung versteht nun GYLDÉN[1]) eine solche, welche, sei es durch strenge geschlossene Integration der Differentialgleichungen, oder auf dem Wege der successiven Näherungen erhalten, geschlossene Ausdrücke oder Reihen für die Coordinaten der Himmelskörper giebt, welche auf unbeschränkte Zeiträume gültig sind, d. h. bei denen die Zeit nur in den Ausdrücken für die den ganzen Umkreis durchlaufenden Coordinaten (Länge, Knoten und Perihel) sonst aber nicht ausserhalb der periodischen Functionen auftreten darf, und bei denen die in jeder Näherung eventuell auftretenden Reihen an sich selbst, aber auch die aufeinanderfolgenden Näherungen convergent sind. Von der Voraussetzung ausgehend, dass es nur eine einzige absolute Lösung geben kann, nämlich die sich in der Natur darbietende, in der mathematischen Analyse in verschiedene Formen gekleidete, kann dann geschlossen werden, dass das Resultat der successiven Näherungen, wenn diese den zuletzt erwähnten Bedingungen genügen, mit dem Resultate der Entwickelung der auf strengem Wege erhaltenen geschlossenen Integralformen identisch sein müsse. Dass die sämmtlichen, im früheren erwähnten Methoden absolute Lösungen in dem angeführten Sinne nicht geben, ist klar. Will man zu einer solchen gelangen, so muss man von vornherein die Rechnung so anlegen, dass bereits in der ersten Näherung jene Glieder gewonnen werden, welche, als zweite Näherung angesehen, viel zu gross sind, um die Methode als convergent erscheinen zu lassen. Es gilt dies ebensowohl für die Mondbewegung als für die Planetenbewegung; aber in erster Linie ist hierbei an die Entwickelungen für

[1]) Astron. Nachrichten 2453, Acta mathematica Bd. I; »Eine Näherungsmethode im Problem der drei Körper«; Traité des orbites absolues.

den Mond zu denken, da bei den Planeten die störende Wirkung der übrigen Himmelskörper gegenüber der Anziehung des Centralkörpers bedeutend zurücktritt. Erfahrungsgemäss erscheint dies auch dadurch ersichtlich, dass die Bahn des Mondes sich schon in sehr kurzen Zeiträumen, ja selbst während eines Umlaufs so sehr von der Ellipse entfernt, dass sie kaum als solche bezeichnet werden kann, während bei den Planeten selbst während einer sehr grossen Anzahl von Umläufen eine Abweichung nicht allzu merklich hervortritt.

Soll schon in erster Näherung ein analytischer Ausdruck gewonnen werden, welcher die wahre Bahn des Mondes einigermassen genau repräsentirt, so wird es durchaus nicht ausreichen, nur die Attraction des Centralkörpers, der Erde, zu berücksichtigen. Es erscheint nothwendig, von vornherein das Dreikörperproblem als solches anzuwenden, d. h. die Bewegung des Mondes unter der Einwirkung der Erde und der Sonne zu untersuchen. Da es nun aber nicht gelingt, die wahre Bahn, d. h. eine streng absolute Lösung zu finden, so muss man wenigstens zunächst eine solche Bahn suchen, von welcher sich die wahre Bahn nur um geringe Störungsbeträge unterscheidet. Diese Bahn nennt GYLDÉN eine »intermediäre« Bahn[1]. Sie wird erhalten, wenn man von der Kräftefunction, welche die Wirkung beider attrahirender Körper berücksichtigt, und die demgemäss hier nicht in ihrer Totalität als Störungsfunction betrachtet wird, diejenigen Glieder abtrennt, die von der niedrigsten Ordnung derjenigen Grössen sind, welche die Abweichung der Bahn von der Kreisform darstellen, und, die Summe der übrigen Glieder als Störungsfunction betrachtend, die Untersuchung der Einwirkung dieser auf die Gestaltung der wahren Bahn, einer zweiten Näherung vorbehält. Welche Glieder in erster Näherung zu behalten sind, zeigt die analytische Untersuchung selbst.

Die Stabilität der Bahnen erfordert, dass sie sich zwischen endlichen, nicht verschwindenden Grenzen bewegen. Liegt daher die Bahn nicht vollständig in einer Ebene, welches der allgemeinere und auch thatsächlich in der Natur vorkommende Fall ist, so wird dieselbe ganz in dem Zwischenraume zwischen zwei homocentrischen Hohlkugeln liegen, und wird bei jedem Umlaufe sowohl die äussere als auch die innere Kugel erreichen können, oder auch nicht. Im letzteren Falle kann man aber annehmen, dass die von dem Himmelskörper beschriebene Curve thatsächlich bei jedem Umlaufe zwei Kugeln, eine äussere und eine innere, jede mindestens einmal berührt, sonst aber beständig innerhalb des zwischen beiden liegenden Zwischenraumes fällt, dass aber die Distanz dieser Kugeln von einem Umlaufe zum andern variirt. Derartige Curven nennt GYLDÉN periplegmatische Curven, den Abstand der beiden Grenzkugeln das Diastema, und es werden daher periplegmatische Curven mit constantem und veränderlichem Diastema unterschieden.

Die periplegmatischen Curven werden als Raumcurven über irgend einer angenommenen Fundamentalebene verschiedene Höhen erreichen; nimmt man als Fundamentalebene eine Ebene, über welche sich der Himmelskörper ziemlich gleichmässig zu beiden Seiten entfernt, so wird die Gesammtbewegung des Körpers in der zu dieser Ebene senkrechten Richtung, d. h. der Abstand zweier paralleler Ebenen, zwischen welchen sich der Körper beständig bewegt, ohne sich jemals über die durch dieselben gesetzten Grenzen hinaus zu entfernen,

[1]) »Undersökningar af Theorien för himlakropparnas rörelser«. Abhandlungen der k. schwedischen Academie der Wissenschaften Bd. 6 und 7. Ferner A. N. No. 2383 und »Die intermediäre Bahn des Mondes«, Acta mathematica, Bd. 7.

das **Anastema** genannt. Das Argument, welches den Radiusvector bestimmt, d. i. der Winkel, welchen dieser Radiusvector von einer festen Richtung aus gezählt, beschreibt, und von welchem eben die Grösse desselben abhangt, heisst das **diastematische Argument**; das Argument, welches die Höhen (Entfernungen von der Fundamentalebene) bestimmt, heisst das **anastematische Argument**. Das erstere entspricht der Länge oder wahren Anomalie in der elliptischen Bewegung; das zweite dem Argument der Breite.

**72.** **Aufstellung der Differentialgleichungen.** Seien r, $l$ die Projection des Radiusvector und das diastematische Argument, $x$, $y$ die rechtwinkligen Coordinaten in der Fundamentalebene $X$-$Y$, so wird

$$x = r \cos l, \; y = r \sin l. \tag{1}$$

Bestimmt man die Cordinaten $\bar{x}$, $\bar{y}$ so, dass

$$\bar{x} = x\Gamma, \; \bar{y} = y\,\Gamma, \text{ daher auch } \bar{r} = r\,\Gamma \tag{2}$$

$$\bar{x} = \bar{r} \cos \bar{l}, \; \bar{y} = \bar{r} \sin \bar{l} \tag{1a}$$

ist, so wird zunächst, da

$$\operatorname{tang} l = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{tang} \bar{l} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \frac{y}{x} \quad \text{ist,} \quad \bar{l} = l$$

sein. Führt man hier noch die **reducirte Zeit** $\zeta$ durch die Gleichung

$$\frac{dt}{d\zeta} = \frac{U}{\Gamma^2} \tag{3}$$

ein so ergeben sich hier vorerst dieselben Gleichungen die in No. 55 auftreten, wenn $\zeta$, $\Gamma$, $U$ wieder als unbestimmte Functionen betrachtet werden. Die Gleichungen 55 (7) werden unter Einführung der Polarcoordinaten (1a), wobei aber statt $\bar{l}$ sofort $l$ geschrieben wird:

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\zeta}\left(\bar{r}^2 \frac{dl}{d\zeta}\right) - \frac{1}{U}\frac{dU}{d\zeta}\cdot \bar{r}^2 \frac{dl}{d\zeta} = \frac{U^2}{\Gamma^3} Q \\ \left[\bar{r}\frac{d^2\bar{r}}{d\zeta^2} - \bar{r}^2\left(\frac{dl}{d\zeta}\right)^2\right] - \frac{1}{U}\frac{dU}{d\zeta}\cdot \bar{r}\frac{d\bar{r}}{d\zeta} - \frac{\bar{r}^2}{\Gamma}\left[\frac{d^2\Gamma}{d\zeta^2} - \frac{1}{U}\frac{dU}{d\zeta}\frac{d\Gamma}{d\zeta}\right] = \frac{U^2}{\Gamma^3}P - \frac{U^2}{\Gamma}\frac{k_0^2}{r},\end{gathered} \tag{4}$$

wo nach 55 (8):

$$P = \frac{k_0^2}{r} + (xX + yY); \quad Q = (xY - yX) \tag{5}$$

ist. Es soll nun weiter $l$ in zwei Theile $L$ und $\chi$ zerlegt werden, sodass

$$l = L + \chi \tag{6}$$

ist, und $L$ so bestimmt werden, dass

$$\bar{r}^2 \frac{dL}{d\zeta} = k_0 \sqrt{p} \tag{7}$$

wird, wobei, wie man leicht sieht, $p$ eine dem Parameter der elliptischen Bewegung analoge Bedeutung hat, vorerst jedoch nicht als constant, sondern als veränderlich angesehen werden soll.

Die erste Gleichung (4) lässt sich nun schreiben:

$$\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{1}{U}\bar{r}^2 \frac{dl}{d\zeta}\right) = \frac{UQ}{\Gamma^3},$$

demnach:

$$\bar{r}^2 \frac{dl}{d\zeta} = U\left\{C + \int \frac{U}{\Gamma^3} Q\, d\zeta\right\}$$

oder

$$k_0\sqrt{p} + \bar{r}^2 \frac{d\chi}{d\zeta} = U\left\{C + \int \frac{U}{\Gamma^3} Q\, d\zeta\right\}.$$

wobei $C$ die Integrationsconstante ist, die, wie man sofort sieht, $k_0\sqrt{p_0}$ ist. Da

$$\mathfrak{r}^2 \frac{d\chi}{d\zeta} = \mathfrak{r}^2 \cdot \frac{d\chi}{dL} \frac{dL}{d\zeta} = \frac{d\chi}{dL} \cdot k_0\sqrt{p}$$

ist, so wird

$$k_0\sqrt{p}\left\{\frac{d\chi}{dL} + 1\right\} = U\left\{k_0\sqrt{p_0} + \int \frac{U}{\mathfrak{r}^2} Q\, d\zeta\right\} \tag{8}$$

oder wegen

$$\frac{d\zeta}{dL} = \frac{\mathfrak{r}^2}{k_0\sqrt{p}}$$

$$k_0\sqrt{p}\left\{\frac{d\chi}{dL} + 1\right\} = U\left\{k_0\sqrt{p_0} + \frac{1}{k_0}\int \frac{U}{\mathfrak{r}^2} \frac{\mathfrak{r}^2}{\sqrt{p}}\, Q\, dL\right\}. \tag{8a}$$

Um die zweite Gleichung (4) in derselben Weise zu transformiren, ist:

$$\frac{d\mathfrak{r}}{d\zeta} = \frac{d\mathfrak{r}}{dL} \frac{k_0\sqrt{p}}{\mathfrak{r}^2}; \qquad \frac{d\bar{\mathfrak{r}}}{d\zeta} = \frac{d\bar{\mathfrak{r}}}{dL} \cdot \frac{k_0\sqrt{p}}{\mathfrak{r}^2}$$

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{d\zeta^2} = \frac{k_0^2 p}{\mathfrak{r}^4} \frac{d^2\mathfrak{r}}{dL^2} - 2\frac{k_0^2 p}{\mathfrak{r}^5} \frac{d\mathfrak{r}}{dL} \frac{d\mathfrak{r}}{dL} + \frac{1}{2} \frac{k_0^2}{\mathfrak{r}^4} \frac{d\mathfrak{r}}{dL} \frac{dp}{dL}$$

$$\frac{d^2\bar{\mathfrak{r}}}{d\zeta^2} = \frac{k_0^2 p}{\mathfrak{r}^4} \frac{d^2\bar{\mathfrak{r}}}{dL^2} - 2\frac{k_0^2 p}{\mathfrak{r}^5} \left(\frac{d\bar{\mathfrak{r}}}{dL}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{k_0^2}{\mathfrak{r}^4} \frac{d\bar{\mathfrak{r}}}{dL} \frac{dp}{dL}$$

folglich

$$\begin{aligned}
&\frac{k_0^2 p}{\mathfrak{r}^3} \frac{d^2\bar{\mathfrak{r}}}{dL^2} - \frac{2}{\mathfrak{r}^4} k_0^2 p \left(\frac{d\bar{\mathfrak{r}}}{dL}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{k_0^2}{\mathfrak{r}^3} \frac{d\bar{\mathfrak{r}}}{dL} \frac{dp}{dL} - \left(1 + \frac{d\chi}{dL}\right)^2 \frac{k_0^2 p}{\mathfrak{r}^3} - \\
&- \frac{k_0^2 p}{\mathfrak{r}^3} \frac{d\bar{\mathfrak{r}}}{dL} \cdot \frac{1}{U} \frac{dU}{dL} - \frac{\bar{\mathfrak{r}}^3}{\mathfrak{r}} \left[\frac{k_0^2 p}{\mathfrak{r}^4} \frac{d^2\mathfrak{r}}{dL^2} - 2\frac{k_0^2 p}{\mathfrak{r}^5} \frac{d\mathfrak{r}}{dL} \frac{d\bar{\mathfrak{r}}}{dL} + \right. \\
&\left. + \frac{1}{2} \frac{k_0^2}{\mathfrak{r}^4} \frac{d\mathfrak{r}}{dL} \frac{dp}{dL} - \frac{k_0^2 p}{\mathfrak{r}^4} \frac{d\mathfrak{r}}{dL} \cdot \frac{1}{U} \frac{dU}{dL}\right] = \frac{U^2}{\mathfrak{r}^4} P - \frac{U^2}{\mathfrak{r}^2} \frac{k_0^2}{\bar{\mathfrak{r}}}.
\end{aligned} \tag{9}$$

In dieser Formel sind noch zwei Functionen willkürlich; zunächst folgt aus (9), dass, wie immer man auch $\bar{\mathfrak{r}}$ in der intermediären Bahn wählt, $\mathfrak{r}$ hiernach so bestimmt werden kann, dass die Gleichung (4) befriedigt wird. Nimmt man nun noch für $U$ und $p$ beliebige Functionen, so folgt aus (8) $\chi$, und aus (7) (als Function von $L$, welches überall als unabhängige Variable auftritt) aus (5) und aus (6) $l$. Wählt man hingegen $\chi$ beliebig, was darauf hinauskommt, in (6) eine ganz bestimmte Zerlegung vorzunehmen, so wird durch (8) $U$ bestimmt. Hierfür erhält man durch Differentiation:

$$k_0\sqrt{p}\frac{d^2\chi}{dL^2} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{d\chi}{dL}\right) \frac{k_0}{\sqrt{p}} \frac{dp}{dL} = \frac{dU}{dL} \cdot \frac{k_0\sqrt{p}\left(1 + \frac{d\chi}{dL}\right)}{U} + U \cdot \frac{U}{\mathfrak{r}^2} Q \frac{\mathfrak{r}^2}{k_0\sqrt{p}}$$

oder

$$\frac{d^2\chi}{dL^2} + \left(1 + \frac{d\chi}{dL}\right)\left(\frac{1}{2p} \frac{dp}{dL} - \frac{1}{U} \frac{dU}{dL}\right) = \frac{U^2}{\mathfrak{r}^2} \cdot \frac{Q\mathfrak{r}^2}{k_0^2 p}. \tag{10}$$

Diese Formeln sind noch für jede beliebige Annahme über $\mathfrak{r}$ gültig; indem man für $\bar{\mathfrak{r}}$ den elliptischen Radiusvector wählen würde, erhielte man eine speciell Integrationsmethode, unter Zugrundelegung der elliptischen Bewegung als erste Näherung. Dann wäre in der Formel

$$\bar{\mathfrak{r}} = \frac{p}{1 + \rho} \tag{11}$$

$p$ constant und $\rho = e \cos v$ zu setzen. Wird nun $\bar{\mathfrak{r}}$ in derselben Form vorausgesetzt, dabei aber $p$ als veränderlich angesehen, und auch über $\rho$ vorläufig keine weitere Annahme gemacht, so erhält man aus (11)

$$\frac{d\overline{r}}{dL} = \frac{1}{1+\rho}\frac{dp}{dL} - \frac{p}{(1+\rho)^2}\frac{d\rho}{dL}$$
$$\frac{d^2\overline{r}}{dL^2} = \frac{1}{1+\rho}\frac{d^2p}{dL^2} - \frac{2}{(1+\rho)^2}\frac{dp}{dL}\frac{d\rho}{dL} + \frac{2p}{(1+\rho)^3}\left(\frac{d\rho}{dL}\right)^2 - \frac{p}{(1+\rho)^2}\frac{d^2\rho}{dL^2}. \tag{12}$$

Setzt man diese Werthe in (9) ein, so erhält man nach einiger Reduction:

$$\frac{d^2p}{dL^2} + \frac{3}{2}\frac{1}{1+\rho}\frac{dp}{dL}\frac{d\rho}{dL} - \frac{1}{2}\frac{1}{p}\left(\frac{dp}{dL}\right)^2 - \frac{p}{1+\rho}\frac{d^2\rho}{dL^2} - \frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\left(\frac{dp}{dL} - \frac{p}{1+\rho}\frac{d\rho}{dL}\right) -$$
$$- \left(1 + \frac{d\chi}{dL}\right)^2 p - \frac{p}{\Gamma}\left[\frac{d^2\Gamma}{dL^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{p}\frac{d\Gamma}{dL}\frac{dp}{dL} + \frac{2}{1+\rho}\frac{d\Gamma}{dL}\frac{d\rho}{dL} - \frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\frac{d\Gamma}{dL}\right] = \tag{13}$$
$$= \frac{U^2}{\Gamma^2}\frac{p^2}{(1+\rho)^2}\frac{P}{k_0^2} - \frac{U^2}{\Gamma}\frac{p}{1+\rho}.$$

Da hier noch drei willkürliche Functionen: $\rho$, $\chi$ und $U$ oder $p$ zur Verfügung stehen, so wird man durch passende Zerfällung an Stelle der zweiten Gleichung (4) mehrere erhalten können, welche die Bewegung bestimmen werden. Von der Art der Zerfällung wird es abhangen, die elementären Glieder des Radiusvectors sämmtlich in $\rho$ zu vereinigen, so dass in $\Gamma$ keine Glieder dieser Art mehr auftreten. Ist dann $\rho = \eta \cos[(1-\varsigma)v - \pi]$, so ist $\eta$ der Hauptsache nach das Diastema, und die Bahn ist so zu bestimmen, dass die Werthe $\rho$ und $p$ die einzigen sind, welche nicht mit störenden Massen multiplicirt auftreten (von der nullten Ordnung der störenden Massen sind).

Ehe nun an die Fortsetzung der GYLDÉN'schen Untersuchungen geschritten wird, soll eine Modifikation derselben kurz erwähnt werden, welche von HARZER gewählt wurde. Dieser setzt $\chi = 0$ und $t = \zeta$, wodurch zwei der zu wählenden Functionen bestimmt sind, so dass nur mehr eine Bedingung freisteht. Zunächst folgt dann $l = L$ und aus (10):

$$\frac{1}{2p}\frac{dp}{dl} - \frac{1}{U}\frac{dU}{dl} = \frac{U^2}{\Gamma^2}\left(\frac{Q\overline{r}^2}{k_0^2 p}\right).$$

Da überdiess $t = \zeta$ vorausgesetzt ist, so wird nach (8):

$$U = \Gamma^2.$$

Setzt man nun

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt[4]{1+\nu}},$$

sodass

$$\frac{d\Gamma}{dl} = -\frac{1}{4}\frac{1}{(1+\nu)\sqrt[4]{1+\nu}}\frac{d\nu}{dl};$$
$$\frac{d^2\Gamma}{dl^2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{(1+\nu)\sqrt[4]{1+\nu}}\left(\frac{d^2\nu}{dl^2}\right) + \frac{5}{16}\frac{1}{(1+\nu)^2\sqrt[4]{1+\nu}}\left(\frac{d\nu}{dl}\right)^2$$
$$\frac{1}{U}\frac{dU}{dl} = \frac{2}{\Gamma}\frac{d\Gamma}{dl} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+\nu}\frac{d\nu}{dl}$$

wird, so wird die Gleichung zur Bestimmung von $\nu$:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{1+\nu}\frac{d\nu}{dl} + \frac{1}{2p}\frac{dp}{dl} = \frac{1}{\sqrt{1+\nu}}\left(\frac{Q\overline{r}^2}{k_0^2 p}\right)$$

oder da

$$\overline{r}^2 = \frac{r^2}{\sqrt{1+\nu}}$$

ist:

$$\frac{d\nu}{dl} + \frac{1+\nu}{p}\frac{dp}{dl} = 2\left(\frac{Qr^2}{k_0^2 p}\right). \tag{14}$$

Weiter folgt aus (13), wenn $\nu$ an Stelle von $\Gamma$ substituirt und entsprechend reducirt wird:

$$\frac{d^2 p}{dl^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+\rho}\frac{dp}{dl}\frac{d\rho}{dl} - \frac{3}{4}\frac{1}{p}\left(\frac{dp}{dl}\right)^2 - \frac{p}{1+\rho}\frac{d^2\rho}{dl^2} - p +$$
$$+ \left[\frac{1}{4}\frac{p}{1+\nu}\frac{d^2\nu}{dl^2} - \frac{3}{16}\frac{p}{(1+\nu)^2}\left(\frac{d\nu}{dl}\right)^2 + \frac{1}{8}\frac{1}{1+\nu}\frac{d\nu}{dl}\frac{dp}{dl}\right] = \frac{r}{1+\nu}\frac{Pr}{k_0^2} - \frac{r}{1+\nu}.$$

Multiplicirt man hier mit $\frac{1+\rho}{p}$ und reducirt, so erhält man:

$$\frac{d^2\rho}{dl^2} + \rho = \left(1 - \frac{Pr}{k_0^2}\right)\frac{1}{\sqrt{(1+\nu)^2}} - 1 + \frac{1+\rho}{p}\left[\frac{d^2 p}{dl^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+\rho}\frac{dp}{dl}\frac{d\rho}{dl} - \frac{3}{4}\frac{1}{p}\left(\frac{dp}{dl}\right)^2\right] +$$
$$+ \left[\frac{1}{4}\frac{1+\rho}{1+\nu}\frac{d^2\nu}{dl^2} - \frac{3}{16}\frac{1+\rho}{(1+\nu)^2}\left(\frac{d\nu}{dl}\right)^2 + \frac{1}{8}\frac{1+\rho}{p(1+\nu)}\frac{d\nu}{dl}\frac{dp}{dl}\right]. \qquad (15)$$

Die Gleichungen (14) und (15) sind die Fundamentalgleichungen von HARZER[1]). Die Gleichung (14) dient zur Bestimmung von $\nu$. In Gleichung (15) kommen noch $\rho$, $\nu$, $p$ vor, und man kann nun noch eine Bedingung feststellen, wodurch erst die Lösung völlig bestimmt wird. Es wird die Gleichung (15) in zwei andere zerfällt, von denen die eine

$$\frac{d^2\rho}{dl^2} + (1-\varsigma)^2\rho = X \qquad (15a)$$

zur Bestimmung von $\rho$ dient, während die übrigen Glieder vereinigt, eine Gleichung zur Bestimmung von $p$ geben. $X$ wird dabei so angenommen und die störenden Kräfte ausgeschieden, dass durch die Integration von (15a) die sämmtlichen elementären Glieder in $\rho$ vereinigt auftreten[2]). Seien in (15a) diejenigen Glieder, welche zur Entstehung von elementären Gliedern führen:

$$X = -x'\cos[(1-\sigma')l - A'] - x''\cos[(1-\sigma'')l - A''] - \ldots$$

wobei $\sigma'$, $\sigma''$ ... ebenso wie $\varsigma$ von der Ordnung der störenden Massen sind, so wird das Integral von (15a):

$$\rho = \varkappa\cos[(1-\varsigma)l - B] + \frac{x'}{2(\varsigma-\sigma')[1-\frac{1}{2}(\varsigma+\sigma')]}\cos[(1-\sigma')l - A'] +$$
$$+ \frac{x''}{2(\varsigma-\sigma'')[1-\frac{1}{2}(\varsigma+\sigma'')]}\cos[(1-\sigma'')l - A''] + \ldots, \qquad (16)$$

wo $\varkappa$ und B die Integrationsconstanten sind. Setzt man:

$$\eta\cos(\pi - B) = \varkappa + \frac{x'}{2(\varsigma-\sigma')[1-\frac{1}{2}(\varsigma+\sigma')]}\cos[(\sigma'-\varsigma)l + A' - B] +$$
$$+ \frac{x''}{2(\varsigma-\sigma'')[1-\frac{1}{2}(\varsigma+\sigma'')]}\cos[(\sigma''-\varsigma)l + A'' - B] + \ldots$$
$$\eta\sin(\pi - B) = + \frac{x'}{2(\varsigma-\sigma')[1-\frac{1}{2}(\varsigma+\sigma')]}\sin[(\sigma'-\varsigma)l + A' - B] + \qquad (17)$$
$$+ \frac{x''}{2(\varsigma-\sigma'')[1-\frac{1}{2}(\varsigma+\sigma'')]}\sin[(\sigma''-\varsigma)l + A'' - B] + \ldots,$$

so folgt:

$$\rho = \eta\cos[(1-\varsigma)l - \pi]. \qquad (18)$$

Bei der Zerfällung der Gleichung (15) wurde dabei eine Grösse $\varsigma$ eingeführt, welche dann in dem Integral (16) oder (18) erscheint. Die Bestimmung des

[1]) »Untersuchungen über einen speciellen Fall des Problems der drei Körper«; Mémoiren der Academie der Wissenschaften in St. Petersburg, Bd. 34, No. 12, pag. 24.

[2]) l. c., pag. 48. Nach GYLDÉN. Vergl. »Traité des orbites absolues«, pag. 122.

Werthes von $\varsigma$, welche allerdings auch nur successiv erfolgen kann, und zwar nach Maassgabe der auf der rechten Seite von (15) immer neu eintretenden Glieder $k\rho$, mit constanten Coëfficienten $k$, ermöglicht eben die Vereinigung der elementären Glieder in $\rho$. An Stelle der Integrationsconstanten $\varkappa$, B treten hier die durch die elementären Glieder veränderten, nicht mehr constanten Grössen $\eta$, $\pi$; die durch (17) definirte Grösse $\eta$ ist das veränderliche Diastema. Erwähnt mag noch werden, dass die Differentialquotienten von $\eta$, $\pi$ nach $l$ von der Ordnung der störenden Massen sind, d. h. den Charakter der elementären Glieder verloren haben, da die Faktoren $\sigma' - \varsigma$, $\sigma'' - \varsigma$ heraustreten.

**73.** Zerfällung der Bewegungsgleichungen in Differentialgleichungen für die intermediäre Bahn und die Störungsgleichungen. Die in den Differentialgleichungen **72** (8), (10) und (13) auftretenden Functionen $\Gamma$ und $U$ sind nahe der Einheit gleich. Setzt man also

$$\Gamma = 1 + \gamma, \quad U = 1 + U',$$

so wird:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{dt}; \qquad \frac{d^2\Gamma}{dt^2} = \frac{d^2\gamma}{dt^2}.$$

Doch führt Gyldén an Stelle der Grösse $\gamma$ eine Grösse $\xi$ ein[1]), die mit $\gamma$ durch die Gleichung verbunden ist:

$$\gamma = \overline{\Gamma}\xi = \frac{p\xi}{1+\rho}. \tag{1}$$

Es wird dann

$$\Gamma = \frac{\overline{\Gamma}}{1+\overline{\Gamma}\xi} = \frac{p}{1+\rho+p\xi} \tag{2}$$

folglich

$$\frac{d\Gamma}{dL} = \frac{p}{1+\rho}\frac{d\xi}{dL} + \frac{\xi}{1+\rho}\frac{dp}{dL} - \frac{p\xi}{(1+\rho)^2}\frac{d\rho}{dL}$$

$$\frac{d^2\Gamma}{dL^2} = \frac{p}{1+\rho}\frac{d^2\xi}{dL^2} + \frac{2}{1+\rho}\frac{dp}{dL}\frac{d\xi}{dL} - \frac{2p}{(1+\rho)^2}\frac{d\rho}{dL}\frac{d\xi}{dL} - \frac{2\xi}{(1+\rho)^2}\frac{d\rho}{dL}\frac{dp}{dL} +$$
$$+ \frac{\xi}{1+\rho}\frac{d^2p}{dL^2} + \frac{2p\xi}{(1+\rho)^3}\left(\frac{d\rho}{dL}\right)^2 - \frac{p\xi}{(1+\rho)^2}\frac{d^2\rho}{dL^2}.$$

Werden diese Werthe in **72** (13) substituirt, und berücksichtigt, dass

$$\Gamma = 1 + \gamma = \frac{1+\rho+p\xi}{1+\rho}$$
$$\Gamma(1+\rho) = 1+\rho+p\xi \tag{3}$$
$$1 - \frac{p\xi}{\Gamma(1+\rho)} = \frac{1+\rho}{1+\rho+p\xi} = \frac{1}{\Gamma}$$

ist, so erhält man nach einiger Reduction:

$$\frac{d^2\rho}{dL^2} - \frac{3}{2}\frac{1}{p}\frac{dp}{dL}\frac{d\rho}{dL} + \frac{1}{2}\frac{1+\rho}{p^2}\left(\frac{dp}{dL}\right)^2 - \frac{1+\rho}{p}\frac{d^2p}{dL^2} + \frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\Gamma\left(\frac{1+\rho}{p}\frac{dp}{dL} - \frac{d\rho}{dL}\right) -$$
$$- \frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\left(\xi\frac{dp}{dL} - \frac{\xi p}{1+\rho}\frac{d\rho}{dL}\right) + \Gamma(1+\rho)\left(1+\frac{d\chi}{dL}\right)^2 + \tag{4}$$
$$+ p\left[\frac{d^2\xi}{dL^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{p}\frac{dp}{dL}\frac{d\xi}{dL} - \frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\frac{d\xi}{dL}\right] = -\frac{U^2}{\Gamma}\frac{p}{1+\rho}\frac{P}{k_0^2} + U^2.$$

---

1) Traité des orbites absolues, pag. 517; Acta mathematica, Bd. 7, pag. 134. $U$ kann zunächst Kürze halber beibehalten werden.

Nun ist

$$\frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\,\Gamma\left(\frac{1+\rho}{p}\frac{dp}{dL}-\frac{d\rho}{dL}\right)-\frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\left(\xi\frac{dp}{dL}-\frac{p\xi}{1+\rho}\frac{d\rho}{dL}\right)=$$
$$=\frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\left(\frac{1+\rho}{p}\frac{dp}{dL}-\frac{d\rho}{dL}\right)$$

$$\Gamma(1+\rho)\left(1+\frac{d\chi}{dL}\right)^2+\tfrac{3}{4}\frac{1+\rho}{p^2}\left(\frac{dp}{dL}\right)^2-\frac{1+\rho}{p}\frac{d^2p}{dL^2}+\frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\,\Gamma\left(\frac{1+\rho}{p}\frac{dp}{dL}-\frac{d\rho}{dL}\right)=$$
$$=\rho\left(1+\frac{d\chi}{dL}\right)^2+\tfrac{3}{4}\frac{\rho}{p^2}\left(\frac{dp}{dL}\right)^2-\frac{\rho}{p}\frac{d^2p}{dL^2}+\frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\frac{\rho}{p}\frac{dp}{dL}-\frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\frac{d\rho}{dL}+$$
$$+p\left[\xi\left(1+\frac{d\chi}{dL}\right)^2+\tfrac{3}{4}\frac{1}{p^3}\left(\frac{dp}{dL}\right)^2-\frac{1}{p^2}\frac{d^2p}{dL^2}\right]+p\left[\frac{1}{p}\left(1+\frac{d\chi}{dL}\right)^2+\frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\frac{1}{p^2}\frac{dp}{dL}\right].$$

Trennt man daher in Gleichung (4) die nur vom $\rho$ abhängigen Glieder von den mit $\xi$ und $U$ behafteten ab, so erhält man:

$$\frac{d^2\rho}{dL^2}-\tfrac{3}{4}\frac{1}{p}\frac{dp}{dL}\frac{d\rho}{dL}+\left[\left(1+\frac{d\chi}{dL}\right)^2+\tfrac{3}{4}\frac{1}{p^2}\left(\frac{dp}{dL}\right)^2-\frac{1}{p}\frac{d^2p}{dL^2}\right]\rho=P_0+pw \qquad (5)$$

$$\frac{d^2\xi}{dL^2}+\left(\tfrac{1}{2}\frac{1}{p}\frac{dp}{dL}-\frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\right)\frac{d\xi}{dL}+\left(1+\frac{d\chi}{dL}\right)^2\xi-\frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\cdot\frac{1}{p}\frac{d\rho}{dL}+\frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\frac{1}{p^2}\frac{dp}{dL}\rho=$$
$$=-\left[\tfrac{3}{4}\frac{1}{p^3}\left(\frac{dp}{dL}\right)^2-\frac{1}{p^2}\frac{d^2p}{dL^2}+\frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\frac{1}{p^2}\frac{dp}{dL}+\frac{1}{p}\left(1+\frac{d\chi}{dL}\right)^2\right]+P_1-w, \qquad (6)$$

wobei $w$ eine vorlaufig willkürliche Function sein kann, und

$$P_0+pP_1=S=-\frac{U^2}{\Gamma}\frac{p}{1+\rho}\frac{P}{k_0^2}+U^2 \qquad (7)$$

ist. Setzt man weiter in 72 (8):

$$t=\zeta+T, \qquad (8)$$

so wird:

$$1+\frac{dT}{d\zeta}=\frac{U}{\left(1+\frac{p\xi}{1+\rho}\right)^2},$$

oder

$$\frac{dT}{dL}=\left[\frac{U}{\left(1+\frac{p\xi}{1+\rho}\right)^2}-1\right]\frac{p^{\frac{3}{2}}}{k_0(1+\rho)^2}. \qquad (9)$$

Durch Zerfällung der Gleichung (4) in zwei andere ist für die bisher willkürlich gebliebenen Functionen die erste Verfügung getroffen, indem die Bestimmung von $\rho$ diejenige von $\xi$ (d. i. $\Gamma$) nach sich zieht oder umgekehrt. Eine analoge Zerfällung kann man mit Gleichung 72 (10) vornehmen. Sei

$$\frac{U^2}{\Gamma^2}\frac{Q\,\Gamma^{\frac{3}{2}}}{k_0^2 p}=\frac{U^2}{(1+\rho+p\xi)^2}\frac{Qp}{k_0^2}=W=Q_0+Q_1, \qquad (7a)$$

so wird man setzen können:

$$\frac{d^2\chi}{dL^2}=Q_0 \qquad (10)$$

und dann erhalt man für die Bestimmung von $p$ oder $U$ die Differentialgleichung[1]:

$$\frac{1}{2p}\frac{dp}{dL}-\frac{1}{U}\frac{dU}{dL}=\frac{Q_1}{1+\frac{d\chi}{dL}}. \qquad (11)$$

Die Art der Zerlegung in (7) und (7a) wird erst im Laufe der Integration durch die bei denselben zu erfüllenden Bedingungen näher präcisirt werden

[1]) Der Coefficient von $\frac{d\xi}{dL}$ in Gleichung (6) ist die hier in (11) auftretende Grösse.

können. Endlich tritt noch die Gleichung 72 (7) hinzu, welche in die Form gesetzt werden kann:

$$\frac{d\zeta}{dL} = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{k_0(1+\rho)^2}. \tag{12}$$

Es erübrigt noch eine Gleichung für die Bewegung in Breite abzuleiten. Setzt man in der dritten Fundamentalgleichung 9 (A):

$$z = \mathfrak{r}\mathfrak{z}, \tag{13}$$

so wird

$$\mathfrak{r}\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} + 2\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\frac{d\mathfrak{z}}{dt} + \mathfrak{z}\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = Z.$$

Nun ist

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = \frac{d\mathfrak{z}}{dL}\frac{k_0\sqrt{p}}{\mathfrak{r}^2}\frac{\Gamma^2}{U};$$

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} = \left(\frac{d^2\mathfrak{z}}{dL^2} + \frac{1}{2p}\frac{dp}{dL}\frac{d\mathfrak{z}}{dL} - \frac{2}{\bar{\mathfrak{r}}}\frac{d\bar{\mathfrak{r}}}{dL}\frac{d\mathfrak{z}}{dL} + \frac{2}{\Gamma}\frac{d\Gamma}{dL}\frac{d\mathfrak{z}}{dL} - \frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\frac{d\mathfrak{z}}{dL}\right)\frac{k_0^2 p}{\mathfrak{r}^4}\frac{\Gamma^4}{U^2}.$$

Hiermit folgt, da [vergl. No. 26 (1)]:

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \left(\frac{1}{\Gamma}\frac{d\bar{\mathfrak{r}}}{dL} - \frac{\bar{\mathfrak{r}}}{\Gamma^2}\frac{d\Gamma}{dL}\right)\cdot\frac{k_0\sqrt{p}}{\mathfrak{r}^2}\frac{\Gamma^2}{U}$$

$$\frac{d^2\bar{\mathfrak{r}}}{dt^2} = \mathfrak{r}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 - \frac{k_0^2}{\mathfrak{r}^2(1+\mathfrak{z}^2)^{\frac{3}{2}}} + P$$

$$= \left(1 + \frac{d\chi}{dL}\right)^2\frac{k_0^2 p}{\mathfrak{r}^4}\frac{\Gamma^4}{U^2} - \frac{k_0^2\Gamma^2}{\bar{\mathfrak{r}}^2(1+\mathfrak{z}^2)^{\frac{3}{2}}} + P$$

ist nach einigen leichten Reductionen:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathfrak{z}}{dL^2} + \left[\frac{1}{2p}\frac{dp}{dL} - \frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\right]\frac{d\mathfrak{z}}{dL} + \left(1+\frac{d\chi}{dL}\right)^2\mathfrak{z} = \\ = \frac{\bar{\mathfrak{r}}U^2}{k_0^2 p\,\Gamma^2}\left[\left(\frac{k_0^2\,\Gamma}{(1+\mathfrak{z}^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{P\bar{\mathfrak{r}}^2}{\Gamma}\right)\mathfrak{z} + \frac{Z\bar{\mathfrak{r}}^2}{\Gamma}\right].\end{aligned} \tag{14}$$

Die Gleichungen (10), (5), (12); (11), (6), (9), (14) sind jetzt die zu integrirenden Differentialgleichungen wobei (5), (6), (14) canonische Differentialgleichungen sind. Für die intermediäre Bahn erhält man aus Gleichung (10): $\chi$; hierauf aus (5): $\rho$, sobald über $p$ eine Annahme gemacht ist[1], und damit den intermediären Radiusvector; (12) bestimmt sodann die zur gegebenen intermediären Länge $L$ gehörige reducirte Zeit $\zeta$. Ist die intermediäre Bahn bekannt, so erhält man dann aus (11) den Werth von $U$; aus (6) die Störung des intermediären Radiusvectors, aus (9) die Störung der reducirten Zeit, endlich aus (14) die Störung in Breite. Die Form der intermediären Bahn wird nun wesentlich von der Art der Zerlegung der anziehenden Kräfte ($P_0$ und $P_1$; $Q_0$ und $Q_1$) abhängig sein. Je mehr von den bedeutendsten Gliedern der Kräftefunction benützt werden können, desto näher wird sich die Lösung der Wahrheit anschmiegen.

**74. Die Differentialgleichungen für die intermediäre Bahn des Mondes.** Sieht man $p$ als constant an, so werden die Differentialgleichungen zur Bestimmung der intermediären Bahn:

---

[1]) Statt dessen können auch gewisse zu erfüllende Bedingungen vorgeschrieben werden. Eine solche ist durch die Bedingungen (7) und (7a) theilweise fixirt. Die Störung $T$ der Zeit erfordert noch für eine absolute Lösung eine geeignete Transformation. Weiter wird man für $\mathfrak{z}$ ebenfalls eine Zerfällung vornehmen können, ähnlich derjenigen für $\rho$, doch muss selbstverständlich an dieser Stelle von zu weitgehenden Ausführungen abgesehen werden.

$$\frac{d^2\chi}{dL^2} = Q_0 \tag{1}$$

$$\frac{d^2\rho}{dL^2} + \left(1 + \frac{d\chi}{dL}\right)^2 \rho = P_0 \tag{2}$$

$$\frac{d\zeta}{dL} = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{k_0(1+\rho)^2}, \tag{3}$$

wobei $Q_0$ und $P_0$ diejenigen Theile der störenden Kräfte sind, welche eben berücksichtigt werden sollen, d. h. die Hauptglieder in den Entwickelungen:

$$Q_0 = \left\{\frac{U^2}{(1+\rho+p\xi)^2}\,\frac{Qp}{k_0^2}\right\}_0$$
$$P_0 = \left\{-\frac{U^2}{\mathrm{r}}\,\frac{p}{1+\rho}\,\frac{P}{k_0^2} + U'^2\right\}_0. \tag{4}$$

Zunächst sind demnach $P$ und $Q$ zu ermitteln. Es ist nach 72 (5):

$$P = \frac{k_0^2}{\mathrm{r}} + (xX + yY); \quad Q = (xY - yX)$$

und da es sich hier zunächst um die Bestimmung derjenigen Theile der störenden Kräfte handelt, welche die intermediäre Bahn ergeben, so können alle Ausdrücke weggelassen werden, die nur zur Entstehung sehr kleiner Glieder Veranlassung geben können. Es können also vor allem die in $s^2$ [No. 50 (2)] multiplicirten Glieder in den Kräften $X$, $Y$ weggelassen werden; sodann ist nach 28 (1), wenn man sich auf die Wirkung dreier Körper beschränkt, die Sonnenmasse gleich $M$ setzt, und Kürze halber die Entfernung des Mondes von der Sonne $r_{01} = \Delta$ setzt:

$$xX_1 + yY_1 = k^2 M\left[(xx' + yy')\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right) - \frac{r^2}{\Delta^3}\right]$$
$$xY_1 - yX_1 = k^2 M\left[(xy' - yx')\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right)\right].$$

Nach 56 (1) und (2) ist:

$$\frac{1}{\Delta^3} = \frac{1}{r'^3}\left[1 - \frac{2r}{r'}H + \frac{r^2}{r'^2}\right]^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{r'^3}\left[1 + 3\frac{r}{r'}H - \frac{3}{2}\frac{r^2}{r'^2} + \frac{15}{2}\frac{r^2}{r'^2}H^2\right],$$

daher, wenn von den parallaktischen Gliedern abgesehen wird:

$$\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} = 3\frac{r}{r'^4}H.$$

Führt man an Stelle von $r$ die Grössen $\mathrm{r}$ und $z$ ein, und analog für die Sonne, also:

$$r^2 = \mathrm{r}^2 + z^2; \quad r'^2 = \mathrm{r}'^2 + z'^2$$

und sieht dann von den Neigungen der Bahnen ab, indem zunächst die Breitenbewegungen nicht weiter in Betracht gezogen werden, so ist

$$\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} = 3\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{r}'^4}\cdot\frac{xx' + yy'}{\mathrm{r}\mathrm{r}'}.$$

Da weiter

$$xx' + yy' = +\mathrm{r}\mathrm{r}'\cos(l - l_1); \quad xy' - yx' = -\mathrm{r}\mathrm{r}'\sin(l - l_1)$$

ist, so wird

$$xX_1 + yY_1 = k^2 M \frac{r^2}{r'^3}[3\cos^2(l - l_1) - 1];$$

$$xY_1 - yX_1 = -k^2 M \frac{r^2}{r'^3} 3\sin(l - l_1)\cos(l - l_1),$$

demnach:

$$P = \frac{k_0^2}{r} + k^2 M \frac{r^2}{r'^3}[\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}\cos 2(l - l_1)]$$

$$Q = -k^2 M \frac{r^2}{r'^3}\tfrac{3}{2}\sin 2(l - l_1),$$

wobei $k_0^2 = k^2(1 + m)$ ist, wenn die Erdmasse gleich 1 gesetzt ist, und $m$ die Mondmasse bedeutet. Setzt man hier

$$r = \frac{\bar{r}}{1 + \bar{r}\xi} = \frac{p}{1 + \rho + p\xi}; \quad r' = \frac{\bar{r}'}{1 + \bar{r}'\xi'} = \frac{p_1}{1 + \rho_1 + p_1\xi_1},$$

berücksichtigt bei den für die intermediäre Bahn zu verwendenden Kräften nur die von $\xi$ unabhängigen Glieder und führt statt der wahren Längen $l$, $l_1$ die intermediären Längen $L$, $L_1$ ein, so wird:

$$\left.\begin{aligned}(Q_0) &= -\left(\frac{p}{p_1}\right)^3 \frac{M}{1 + m}\frac{(1 + \rho_1)^3}{(1 + \rho)^4}\cdot\tfrac{3}{2}\sin 2(L - L_1 + \chi - \chi_1)\\ (P_0) &= -\left(\frac{p}{p_1}\right)^3 \frac{M}{1 + m}\frac{(1 + \rho_1)^3}{(1 + \rho)^3}[\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}\cos 2(L - L_1 + \chi - \chi_1)].\end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

Hieraus lassen sich dann die **störenden** Kräfte leicht finden; wenn man die vollständigen Entwickelungen der Ausdrücke $S$, $W$, [73 (7) und (7a)] vornimmt (in denen allerdings die noch unbekannten Störungen $\xi$, $T$, $\mathfrak{z}$ und eventuell **ein** zu $p$ tretender veränderlicher Factor eintreten), so wird dann[1]:

$$Q_1 = W - Q_0; \quad P_1 = \frac{S - P_0}{p}. \tag{5}$$

Aus (3) folgt

$$\frac{dL}{d\zeta} = \frac{k_0(1 + \rho)^2}{p^{\frac{3}{2}}}. \tag{3a}$$

Sei der Radius der äusseren Grenzkugel $a(1 + e)$, derjenige der inneren $a(1 - e)$, so ist $2ae$ der Normalabstand der beiden Kugeln, zwischen denen sich die periplegmatische Curve bewegt; $a$ ist das arithmetische Mittel aus den beiden Halbmessern; $a(1 + e)$ ist der grösste Werth, den der Radiusvector erreichen wird, $a(1 - e)$ der kleinste. Setzt man

$$p = a(1 - \theta) \tag{6}$$

so wird in der intermediären Bahn (d. h. abgesehen von **Störungen**):

$$\text{der Minimalwerth:} \quad r_0 = \frac{a(1 - \theta)}{1 + \rho_0} = a(1 - e);$$

$$\text{der Maximalwerth:} \quad r_1 = \frac{a(1 - \theta)}{1 + \rho_1} = a(1 + e),$$

folglich

$$\rho_0 = +\frac{e - \theta}{1 - e}; \quad \rho_1 = -\frac{e + \theta}{1 + e}.$$

$\rho$ ist nun aber eine periodische Function, in welcher erfahrungsgemäss ein Hauptglied überwiegt, so dass der Hauptsache nach, $\rho$ nahe gleiche positive

[1]) Hierin sind natürlich für $P_0$ und $Q_0$ nicht die für die erste Integration noch nicht zu verwendenden Ausdrücke (4a), sondern die aus (4b) pag. 504 folgenden, eventuell noch weiter reducirten, einzusetzen.

und negative Werthe erreichen kann. Hieraus folgt, dass θ von höherer Ordnung der Kleinheit sein wird, wie ε. Bei veränderlichen Distanzen wird nun allerdings θ nicht constant sein, man kann aber immerhin in dem Ausdrucke

$$\frac{dl}{d\zeta} = \frac{k_0(1+\rho)^2}{a^{\frac{3}{2}}(1-\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

θ so bestimmen, dass die Entwickelung

$$\frac{(1+\rho)^2}{(1-\theta)^{\frac{3}{2}}} = 1 + \text{periodische Glieder} \tag{6a}$$

besteht, d. h. dass der constante Theil dieser Entwickelung gleich 1 wird. Dann wird

$$L = L^{(0)} + \frac{k_0}{a^{\frac{3}{2}}}\zeta + \text{periodische Glieder}$$

oder, wenn man

$$\frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}} = L' \tag{7}$$

setzt,

$$L = L^{(0)} + L'\zeta + \text{periodische Glieder}.$$

$L'$ hat daher die Bedeutung der mittleren siderischen Bewegung in der Zeiteinheit. Ebenso hat man für die Sonne:

$$L_1 = L_1^{(0)} + L_1'\zeta + \text{periodische Glieder},$$

wobei $L_1'$ die mittlere siderische Bewegung der Sonne ist. Wird für das Verhältniss der mittleren siderischen Bewegung:

$$\frac{L_1'}{L'} = \mu \tag{7a}$$

gesetzt [vergl. No. 57 (7)], so wird:

$$L_1 = L_1^{(0)} + \mu L'\zeta + \text{period. Glieder} = L_1^{(0)} + \mu(L - L^{(0)}) + \text{period. Glieder},$$

daher abgesehen von den periodischen Gliedern:

$$L - L_1 = (1-\mu)L - L_1^{(0)} + \mu L^{(0)}.$$

Setzt man jetzt:

$$1 - \mu = \lambda, \quad L_1^{(0)} - \mu L^{(0)} = \Lambda \tag{8}$$

und vernachlässigt für die Sonne die Abweichung der intermediären Länge von der wahren, setzt also $\chi_1 = 0$, so wird:

$$\sin 2(L - L_1 + \chi - \chi_1) = \sin 2(\lambda L + \chi - \Lambda);$$
$$\cos 2(L - L_1 + \chi - \chi_1) = \cos 2(\lambda L + \chi - \Lambda).$$

Weiter hat man, wenn man in den Coëfficienten von (4a) an Stelle von $p$, $p_1$ deren constante Theile einführt:

$$\left(\frac{p}{p_1}\right)^3 \frac{M}{1+m} = \left(\frac{L_1'}{L'}\right)^2 = \mu^2$$

und wenn man nur Glieder der ersten Potenz von $\rho$, $\rho_1$ berücksichtigt.

$$\begin{aligned} Q_0 &= -\tfrac{3}{4}\mu^2(1 + 3\rho_1 - 4\rho)\sin 2(\lambda L + \chi - \Lambda) \\ P_0 &= -\tfrac{1}{4}\mu^2(1 + 3\rho_1 - 3\rho)[1 + 3\cos 2(\lambda L + \chi - \Lambda)], \end{aligned} \tag{4b}$$

und die zu integrirenden Differentialgleichungen werden, wenn noch Kürze halber

$$\tfrac{3}{4}\mu^2 = \mu_1 \tag{8a}$$

gesetzt, und in der Gleichung für ρ die in $P_0$ mit dem Faktor ρ behafteten Glieder mit den übrigen links vereinigt werden:

$$\frac{d^2\chi}{dL^2} = -\mu_1(1+3\rho_1-4\rho)\sin 2(\lambda L+\chi-\Lambda)$$

$$\frac{d^2\rho}{dL^2}+\left[1-\mu_1-3\mu_1\cos 2(\lambda L+\chi-\Lambda)+2\frac{d\chi}{dL}+\left(\frac{d\chi}{dL}\right)^2\right]\rho \qquad (8)$$

$$= -\tfrac{1}{2}\mu_1-\mu_1\rho_1-\mu_1\cos 2(\lambda L+\chi-\Lambda)-3\mu_1\rho_1\cos 2(\lambda L+\chi-\Lambda).$$

Hierin ist noch $\chi$ enthalten; vernachlässigt man dies in der ersten Gleichung rechts, so erhält man eine erste Näherung:

$$\frac{d\chi}{dL} = +\frac{\mu_1}{2\lambda}\cos 2(\lambda L-\Lambda); \qquad \chi = +\frac{\mu_1}{4\lambda^2}\sin 2(\lambda L-\Lambda). \qquad (9)$$

und setzt man dies in die zweite Gleichung (8) ein, und vernachlässigt ebenso wie in (9) die zweite Potenz von $\mu_1$, welches die störende Masse repräsentirt, und die Produkte von $\mu_1$ in die kleine Grösse $\rho_1$ und in das Quadrat von $\rho$[1]), so erhält man:

$$\frac{d^2\rho}{dL^2}+\left[1-\mu_1-3\mu_1\cos 2(\lambda L-\Lambda)+\frac{\mu_1}{\lambda}\cos 2(\lambda L-\Lambda)\right]\rho = -\tfrac{1}{2}\mu_1-\mu_1\cos 2(\lambda L- \quad )$$

Setzt man daher noch:

$$\mu_1\left(3-\frac{1}{\lambda}\right) = \mu_2$$
$$W = -\tfrac{1}{2}\mu_1-\mu_1\cos 2(\lambda L-\Lambda), \qquad (10a)$$

so wird die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\rho}{dL^2}+[1-\mu_1-\mu_2\cos 2(\lambda L-\Lambda)]\rho = W. \qquad (10)$$

**75. Die intermediäre Bahn des Mondes. Integration der Differentialgleichungen.** Um die Gleichung (10) der vorigen Nummer zu integriren, wird

$$\lambda L-\Lambda = \frac{\pi}{2K}x - 90^\circ \qquad (1)$$

gesetzt, wobei $K$ ein vollständiges elliptisches Integral erster Gattung ist[2]), dessen Modul $\varkappa$ erst bestimmt werden soll. Dann erhält man die Differentialgleichung:

---

[1]) Das Produkt $\mu_1\rho$ muss beibehalten werden, da hiervon der Coëfficient von $\rho$ in der zweiten Gleichung (8) abhängt. Es lässt sich auch für die intermediäre Bahn selbstverständlich die Näherung für $\rho$ und auch für $\chi$ weiter führen; doch kann auf diese vollständige Berechnung hier nicht eingegangen werden. Vergl. hierzu GYLDÉN, »Die intermediäre Bahn des Mondes«, Acta mathematica, Bd. 7, pag. 140–145. Es mag hier nur erwähnt werden, dass die genauere Berücksichtigung von $\chi$ auf eine Gleichung führt, welche durch die Substitution

$$\rho = E\sqrt{1+\eta\cos(\lambda L-\Lambda)}$$

auf eine der Gleichung (10) völlig gleich gebaute Differentialgleichung führt, bei welcher nur die Coëfficienten um Grössen zweiter Ordnung in $\mu_1$ geändert werden.

[2]) Die Einführung der elliptischen Functionen in die Theorie der Bewegung der Himmelskörper hat sich als äusserst fruchtbringend erwiesen. Zwar kann man ohne dieselben ebenfalls Entwickelungen erhalten, welche von den Mängeln der früheren Methoden frei sind, wie dies z. B. bei den Entwickelungen von LINDSTEDT (Astron. Nachr. No. 2462, 2482, 2503, 2557), HILL (American Journal of Mathematics, Bd. I), HARZER (Astron. Nachr. No. 2826 und 2850) u. a. der Fall ist, doch hat die Einführung der elliptischen Functionen den Vorzug, dass man, wie z. B. in dem Integrale (10) eine grössere Anzahl von Gliedern vereinigt, diese überhaupt in anderer, und wie es scheint condensirterer Form geordnet erhält, und überhaupt in vielen Fällen zum mindesten eine grössere Convergenz erreicht. Vergl. hierfür das sehr instructive Beispiel, welches GYLDÉN aus der Bewegung der Pallas in den Astron. Nachrichten No. 2886 giebt. Sehr bemerkenswerth sind auch die Entwickelungen von HILL in »Acta mathematica« Bd. 8, pag. 1, welcher ohne Einführung der elliptischen Functionen die Bewegung des Mondperigeums bis auf den 18. Theil richtig erhält.

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} + \left(\frac{\pi}{2K\lambda}\right)^2\left[1 - \mu_1 + \mu_2 \cos 2\frac{\pi}{2K}x\right]\rho = \left(\frac{\pi}{2K\lambda}\right)^2 W. \tag{2}$$

Nun hat man die Entwickelung

$$\left(\frac{\kappa K}{2\pi}\right)^2 \cos 2\,am\,x = -D + \frac{q}{1-q^2}\cos 2\frac{\pi}{2K}x + \frac{2q^2}{1-q^4}\cos 4\frac{\pi}{2K}x + \dots \tag{3}$$

wobei

$$D = 2\left(\frac{q^2}{(1-q^2)^2} + \frac{q^4}{(1-q^4)^2} + \frac{q^6}{(1-q^6)^2} + \dots\right) \tag{3a}$$

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\varphi}}; \qquad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\kappa'^2\sin^2\varphi}} \tag{3b}$$

$$\kappa^2 + \kappa'^2 = 1$$

ist. Hieraus folgt:

$$\cos 2\frac{\pi}{2K}x = \frac{1-q^2}{q}\left\{\left(\frac{\kappa K}{2\pi}\right)^2\cos 2\,am\,x + D - \frac{2q^2}{1-q^4}\cos 4\frac{\pi}{2K}x - \dots\right\}.$$

Substituirt man dies in die Differentialgleichung (2) und berücksichtigt, dass

$$\cos 2\,am\,x = 1 - 2\sin^2 am\,x$$

ist, so folgt:

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} + \frac{\pi^2}{4K^2\lambda^2}\left[1 - \mu_1 + \mu_2\left(\frac{1-q^2}{q}\right)\frac{\kappa^2K^2}{4\pi^2}(1 - 2\sin^2 am\,x) + \frac{1-q^2}{q}D\right]\rho =$$

$$= \frac{\pi^2}{4K^2\lambda^2}W + \dots$$

oder:

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} + \left[\frac{\pi^2}{4K^2\lambda^2}(1-\mu_1) + \mu_2\left(\frac{1-q^2}{q}\right)\frac{\kappa^2}{16\lambda^2} - \right.$$

$$\left. - \mu_2\left(\frac{1-q^2}{q}\right)\frac{\kappa^2}{16\lambda^2}\cdot 2\sin^2 am\,x + \frac{1-q^2}{q}\frac{\pi^2}{4K^2\lambda^2}D\right]\rho = \frac{\pi^2}{4K^2\lambda^2}W + \tag{4}$$

$$+ \frac{\pi^2\mu_2}{4K^2\lambda^2}\rho\left[2q\left(\frac{1-q^2}{1-q^4}\right)\cos 4\frac{\pi}{2K}x + 3q^2\left(\frac{1-q^2}{1-q^6}\right)\cos 6\frac{\pi}{2K}x + \dots\right].$$

Der Modul $\kappa$ soll nun zunächst so bestimmt werden, dass der Coefficient von $2\sin^2 am\,x$ gleich $\kappa^2$ wird, d. h. dass

$$\mu_2\frac{1-q^2}{q}\cdot\frac{\kappa^2}{16\lambda^2} = \kappa^2 \tag{5}$$

wird. Setzt man noch[1]:

$$\frac{\pi^2}{4K^2\lambda^2}(1-\mu_1) + \frac{1-q^2}{q}\frac{\pi^2}{4K^2\lambda^2}D = 1 - \kappa^2\sin^2 am\,i\omega, \tag{6}$$

so geht die Differentialgleichung über in:

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} - [2\kappa^2\sin^2 am\,x - 1 - \kappa^2 + \kappa^2\sin^2 am\,i\omega]\rho =$$

$$= \frac{\pi^2}{4K^2\lambda^2}W + \frac{\pi^2\mu_2}{4K^2\lambda^2}\rho\left[2q\left(\frac{1-q^2}{1-q^4}\right)\cos 4\frac{\pi}{2K}x + \dots\right]. \tag{7}$$

---

[1]) Das Imaginäre muss hier eingeführt werden, weil die linke Seite der Gleichung (6) grösser als 1 ist; würde man aber $1 + \kappa^2\sin^2 am\,\omega$ setzen, so würde die Form der Gleichung (7) geändert. Das Imaginäre fällt schliesslich heraus, da ja $\sin am(i\omega, \kappa) = i\tan am(\omega, \kappa')$ ist.

Das Integral dieser Differentialgleichung ohne letztem Gliede ist nach HERMITE:

$$\rho = C_1 \frac{H(x + i\omega)}{\theta(x)} e^{-\frac{\theta'(i\omega)}{\theta(i\omega)} x} + C_2 \frac{H(x - i\omega)}{\theta(x)} e^{+\frac{\theta'(i\omega)}{\theta(i\omega)} x}, \tag{8}$$

wobei in der JACOBI'schen Bezeichnungsweise

$$H(x) = \vartheta_1 \left(\frac{x}{2K}\right); \qquad \theta(x) = \vartheta_0 \left(\frac{x}{2K}\right)$$

ist. Um für $x$ wieder die Länge $L$ einzuführen, sei

$$\frac{\theta'(i\omega)}{\theta(i\omega)} = i \frac{\pi}{2K} \nu, \tag{9}$$

dann wird

$$\frac{\theta'(i\omega)}{\theta(i\omega)} x = i\nu(\lambda L - \Lambda + 90^\circ). \tag{9a}$$

Setzt man dies ein, so wird:

$$\theta(x)\rho = C_1 H(x + i\omega) e^{-i\nu(\lambda L - \Lambda + 90^\circ)} + C_2 H(x - i\omega) e^{+i\nu(\lambda L - \Lambda + 90^\circ)},$$

oder wenn man an Stelle der Constanten $C_1$, $C_2$ zwei andere $c'$, $C'$ durch

$$C_1 = c' e^{+iC' + i\nu 90^\circ}, \qquad C_2 = c' e^{-iC' - i\nu 90^\circ}$$

einführt, wodurch der in der letzten Formel auftretende Winkel von 90° in die Constante $C'$ eingezogen erscheint:

$$\begin{aligned} \theta(x)\rho &= c'\{H(x + i\omega) e^{-i\nu(\lambda L - \Lambda) + iC'} + H(x - i\omega) e^{+i\nu(\lambda L - \Lambda) - iC'}\} \\ &= c'[H(x + i\omega) + H(x - i\omega)] \cos[\nu(\lambda L - \Lambda) - C'] - \\ &\quad - ic'[H(x + i\omega) - H(x - i\omega)] \sin[\nu(\lambda L - \Lambda) - C']. \end{aligned} \tag{10}$$

In den Ausdrücken $H(x + i\omega) + H(x - i\omega)$ und $i[H(x + i\omega) - H(x - i\omega)]$ ist das Imaginäre verschwunden. Der Modul der hier auftretenden elliptischen Integrale und Funktionen ist bestimmt durch die Gleichung (5); aus dieser folgt:

$$\frac{q}{1 - q^2} = \frac{\mu_2}{16\lambda^2}$$

$$q = \frac{\mu_2}{16\lambda^2}\left(1 - \frac{\mu_2^2}{(16\lambda^2)^2} + \ldots\right). \tag{11}$$

Hiermit erhält man nach den Formeln für die elliptischen Functionen: (S. z. B. JACOBI, »Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum«, Werke, Bd. I, pag. 159):

$$\begin{aligned} \log \varkappa &= \log 4\sqrt{q} - \frac{4q}{1+q} + \frac{4q^2}{2(1+q^2)} - \frac{4q^3}{3(1+q^3)} + \frac{4q^4}{4(1+q^4)} - \ldots \\ \frac{2K}{\pi} &= 1 + \frac{4q}{1+q^2} + \frac{4q^2}{1+q^4} + \frac{4q^3}{1+q^6} + \frac{4q^4}{1+q^8} + \ldots \\ D &= 2\left[\frac{q^2}{(1-q^2)^2} + \frac{q^6}{(1-q^6)^2} + \frac{q^{10}}{(1-q^{10})^2} + \ldots\right] \\ \pm i\varkappa \sin am\, i\omega &= \sigma = \sqrt{\left\{\frac{\pi^2}{4K^2\lambda^2}\left[(1-\mu_1) + \left(\frac{1-q^2}{q}\right) D\right] - 1\right\}} \end{aligned} \tag{12}$$

oder die noch stärker convergente Reihe

$$\log \varkappa' = -8\left\{\frac{q}{1-q^2} + \frac{q^3}{3(1-q^6)} + \frac{q^5}{5(1-q^{10})} + \ldots\right\} \tag{12a}$$

$$\varkappa^2 = 1 - \varkappa'^2.$$

Aus der letzten Formel (12) folgt

$$\sigma = \pm i\varkappa \cdot i \operatorname{tang} am(\omega, \varkappa') = \mp \varkappa \operatorname{tang} am(\omega, \varkappa').$$

Eine nach Potenzen von $\omega$ fortschreitende Reihe, welche gestattet, aus $z$ sofort $\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}$ zu ermitteln, erhält man durch die Weierstrass'schen Functionen; doch sind diese Reihen, da sie nicht nach Potenzen von $q$ fortschreiten, für grössere Werthe von $x$ nur schwach convergent, und es ist daher eine indirekte Lösung vorzuziehen. Es ist

$$q' = e^{-\pi\frac{K}{K'}} \tag{3c}$$

der zu $x' = \sqrt{1-x^2}$ gehörige $q$-Werth, und daher, wenn man Briggs'sche Logarithmen versteht,

$$\log q \cdot \log q' = \pi^2 M^2 = 1{\cdot}8615229 \quad (\log = 0{\cdot}2699684{,}7)$$

$$\frac{2K'}{\pi} = 1 + \frac{4q'}{1+q'^2} + \frac{4q'^2}{1+q'^4} + \frac{4q'^3}{1+q'^6} + \frac{4q'^4}{1+q'^8} + \dots \tag{12b}$$

womit man zur Probe nach der Gleichung (3c) den Werth von $q'$ wiederfinden muss. Dann wird:

$$\tang am(\omega, x') = \frac{\pi}{2xK'}\left\{\tang\frac{\pi\omega}{2K'} - \frac{4q'^2}{1+q'^2}\sin\frac{\pi\omega}{K'} + \frac{4q'^4}{1+q'^4}\sin 2\frac{\pi\omega}{K'} - \frac{4q'^6}{1+q'^6}\sin 3\frac{\pi\omega}{K'} + \dots\right\},$$

demnach

$$\tang\frac{\pi\omega}{2K'} = \frac{2K'}{\pi}x\tang am(\omega, x') + \frac{4q'^2}{1+q'^2}\sin\frac{\pi\omega}{K'} - \frac{4q'^4}{1+q'^4}\sin 2\frac{\pi\omega}{K'} + \dots$$

oder[1])

$$\tang\frac{\pi\omega}{2K'} = \frac{2K'}{\pi}\sigma + \frac{4q'^2}{1+q'^2}\sin\frac{\pi\omega}{K'} - \frac{4q'^4}{1+q'^4}\sin 2\frac{\pi\omega}{K'} + \dots \tag{13}$$

Hier tritt noch rechts $\frac{\pi\omega}{K'}$ auf; da aber hierbei die Coefficienten $q'^2$, $q'^4$ ... vorkommen, so ist dieselbe leicht durch Näherungen zu lösen, um sofort einen provisorischen Werth zu erhalten, welcher in die rechte Seite substituirt, einen genügend genäherten Werth von $\tang\frac{\pi\omega}{2K'}$ giebt, sei

$$\tang\frac{\pi\omega}{2K'} = s, \qquad \frac{2K'}{\pi}\sigma = n, \qquad \frac{4q'^2}{1+q'^2} = \alpha, \tag{13a}$$

dann kann man mit Vernachlässigung von $q'^4$ schreiben

$$s = n + 2\alpha\frac{s}{1+s^2} = n + 2\alpha\frac{n}{1+n^2+4\alpha n^2}$$

und daraus

$$s = \tang\frac{\pi\omega}{2K'} = \frac{n}{1-\frac{2\alpha}{1+(1+4\alpha)n^2}}. \tag{13b}$$

---

[1]) Man braucht hier nur ein Zeichen zu berücksichtigen; nimmt man für $\sigma$ das entgegengesetzte Zeichen, so wird auch $\frac{\pi\omega}{K'}$ das entgegengesetzte Zeichen erhalten (überdies treten noch zwei Werthe von $\frac{\pi\omega}{K'}$ auf, die um 180° grösser sind, welche aber in *sin* und *tang* wieder mit den beiden früheren identisch werden). Es würde dann auch $v$ das entgegengesetzte Zeichen erhalten, und damit gehen die beiden Glieder in (10) in einander über, wenn man nur auch bei der Integrationsconstanten $C'$ das Zeichen ändert.

Ist $\frac{\pi\omega}{2K}$, bestimmt, so kann sofort

$$e^{\frac{\pi\omega}{K}} = \beta \tag{14}$$

berechnet werden. Wenn man dann weiter die Formel

$$\theta_0(w) = \sqrt{\frac{2Kx'}{\pi}} \cdot \frac{(1-2q\cos 2w\pi+q^2)(1-2q^3\cos 2w\pi+q^6)(1-2q^5\cos 2w\pi+q^{10})\ldots}{(1-q)^2(1-q^3)^2(1-q^5)^2\ldots}$$

logarithmisch differenzirt, und $\frac{i\omega}{2K}$ für $w$ setzt, so folgt:

$$\frac{\theta'(i\omega)}{\theta(i\omega)} = \frac{1}{2K}\,\frac{\theta_0'\left(\frac{i\omega}{2K}\right)}{\theta_0\left(\frac{i\omega}{2K}\right)} =$$

$$= \frac{2\pi}{2K}\sin\frac{i\omega\pi}{K}\left\{\frac{2q}{1-2q\cos\frac{i\omega\pi}{K}+q^2}+\frac{2q^3}{1-2q^3\cos\frac{i\omega\pi}{K}+q^6}+\ldots\right\}.$$

Nun ist

$$\sin\frac{i\omega\pi}{K} = -\tfrac{1}{2}i\left(e^{-\frac{\omega\pi}{K}}-e^{+\frac{\omega\pi}{K}}\right) = -\tfrac{1}{2}i\left(\frac{1}{\beta}-\beta\right);\quad \cos\frac{i\omega\pi}{K} = +\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta}+\beta\right),$$

demnach

$$= \frac{\theta'(i\omega)}{\theta(i\omega)} = \frac{i\pi}{2K}\nu =$$

$$= -\tfrac{1}{2}i\frac{\pi}{K}\left(\frac{1}{\beta}-\beta\right)\left\{\frac{2q}{(1-q\beta)\left(1-\frac{q}{\beta}\right)}+\frac{2q^3}{(1-q^3\beta)\left(1-\frac{q^3}{\beta}\right)}+\frac{2q^5}{(1-q^5\beta)\left(1-\frac{q^5}{\beta}\right)}\cdots\right\}$$

$$\nu = 2\left(\beta-\frac{1}{\beta}\right)\left\{\frac{q}{(1-q\beta)\left(1-\frac{q}{\beta}\right)}+\frac{q^3}{(1-q^3\beta)\left(1-\frac{q^3}{\beta}\right)}+\frac{q^5}{(1-q^5\beta)\left(1-\frac{q^5}{\beta}\right)}\cdots\right\}. \tag{15}$$

In den Ausdrücken (10) ist nun $i$, allerdings nur scheinbar enthalten; um es aber thatsächlich zu eliminiren, und für die Berechnung brauchbare Formeln zu erhalten, muss (10) weiter entwickelt werden. Es ist aber:

$$H(x) = \theta_1\left(\frac{x}{2K}\right) = 2\left(q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{\pi}{2K}x - q^{\frac{9}{4}}\sin 3\frac{\pi}{2K}x + q^{\frac{25}{4}}\sin 5\frac{\pi}{2K}x - \ldots\right),$$

daher

$$H(x+i\omega) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}\sin(2n+1)\frac{\pi}{2K}(x+i\omega) =$$

$$= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}\left[e^{+i(2n+1)\frac{\pi}{2K}(x+i\omega)} - e^{-i(2n+1)\frac{\pi}{2K}(x+i\omega)}\right]$$

und ebenso für $H(x-i\omega)$, demnach

$$H(x+i\omega)+H(x-i\omega) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}\left[e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2K}\omega}+e^{+(2n+1)\frac{\pi}{2K}\omega}\right]\sin(2n+1)(90^\circ+\lambda L-A)$$

$$i[H(x+i\omega)-H(x-i\omega)] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}\left[e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2K}\omega}-e^{+(2n+1)\frac{\pi}{2K}\omega}\right]\cos(2n+1)(90^\circ+\lambda L-A).$$

Setzt man dies in (10) ein, und berücksichtigt, dass

$$\sin[(2n+1)90^\circ+A] = (-1)^n\cos A$$

ist, so wird endlich

$$\theta(x)\cdot\rho = c'\sum q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}\Big[e^{(2n+1)\frac{\pi}{2K}i\omega}\cos[(2n+1-\nu)(\lambda L-\Lambda)+C'']+ \\ + e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2K}i\omega}\cos[(2n+1+\nu)(\lambda L-\Lambda)-C'']\Big]. \quad (16)$$

Diese Reihe ist, da sie nach den Potenzen von $q$ geordnet ist, stark convergent; die beiden Hauptglieder entstehen für $n=0$, sie sind:

$$c'\sqrt{q}\left[\sqrt{\frac{1}{\beta}}\cos\{(1-\nu)(1-\mu)L-(1-\nu)\Lambda+C''\}+\sqrt{\beta}\cos\{(1+\nu)(1-\mu)L-(1+\nu)\Lambda-C''\}\right].$$

Je nachdem nun $\beta$ oder $\frac{1}{\beta}$ grösser als 1 ist, wird nach (15) $\nu$ positiv oder negativ: es sei $\nu$ positiv, wozu es genügt $\sigma = -ix\sin am\, i\omega$ zu setzen[1]); dann ist der Coëfficient des zweiten Gliedes grösser. Setzt man

$$c'\sqrt{q}\sqrt{\beta} = c_0; \quad c'\sqrt{q}\sqrt{\frac{1}{\beta}} = c_1$$
$$(1+\nu)(1-\mu) = 1-\varsigma \quad (17\text{a})$$

und führt, statt der Constante $C''$ die Constante $C = (1+\nu)\Lambda + C''$ ein, so werden, da

$$\theta(x) = 1 - 2q\cos\frac{\pi}{K}x + \ldots$$

ist, mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von $q$ die Anfangsglieder der Entwickelung:

$$\rho = c_0\cos[(1-\varsigma)L - C] + c_1\cos[[2(1-\mu)-(1-\varsigma)]L - 2(1-\nu)\Lambda + C]. \quad (17)$$

Das erste Glied ist das Hauptglied der Mittelpunktsgleichung, das zweite die Evection. Sieht man $c_0$, $C$ an Stelle von $c'$, $C''$ als Integrationsconstante an, so haben dieselben die Bedeutung der Excentricität und Länge des Perigeums für eine gegebene Epoche. $\varsigma L$ ist die Bewegung des Perigeums und es folgt aus (17):

$$\varsigma = \mu - \nu(1-\mu). \quad (17\text{b})$$

Die Bestimmung von $\nu$ erhält hierdurch eine besondere Bedeutung. Endlich ist noch zu bemerken, dass $c_0 = c_1\beta$ ist. GYLDÉN nimmt[2]):

$$\log x = 7{\cdot}285002, \quad \log x' = 0{\cdot}112504,$$

damit folgt

$$\log\mu = 8{\cdot}877502.$$

Die wegen Glieder höherer Ordnung corrigirten Coëfficienten der Gleichung (1) werden:

$$\log\mu_1 = 7{\cdot}015848, \quad \log\mu_2 = 9{\cdot}010709.$$

Damit wird:

$$\log q = 7{\cdot}874758, \quad \log q' = 9{\cdot}124001$$
$$\log\kappa = 9{\cdot}526502, \quad \log\frac{2K}{\pi} = 0{\cdot}012928, \quad \log\frac{2K'}{\pi} = 0{\cdot}205307$$
$$\frac{\pi\omega}{2K'} = 28^\circ 54' 4''{\cdot}0 = 0{\cdot}504424, \quad \log\frac{\pi\omega}{2K} = 0{\cdot}805270$$
$$\log\sqrt{\beta} = 0{\cdot}341286, \quad \log\nu = 8{\cdot}855780$$
$$\varsigma = +0{\cdot}000115; \quad c_1 = 0{\cdot}2077\, c_0.$$

---

[1]) Man braucht darauf nicht weiter Rücksicht zu nehmen; indem $\sigma$ sich durch den Werth der Quadratwurzel in (12) bestimmt, und diese Wahl von $\sigma$ bereits in (13) berücksichtigt ist; vergl. die Anmerkung auf pag. 508.

[2]) Die Formeln von GYLDÉN sind etwas anders, führen aber zu demselben Resultate.

Hat man in dieser Weise das Integral der reducirten Gleichung, so erhält man für das Integral der completen Differentialgleichung (1) die Zusatzglieder

$$\Delta\rho = -if F_1(x)\int F_2(x) W dL + if F_2(x)\int F_1(x) W dL, \tag{18}$$

wo $f$ ein constanter, reeller Coëfficient ist, und

$$F_1(x) = \frac{H(x+i\omega)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x}; \qquad F_2(x) = \frac{H(x-i\omega)}{\Theta(x)} e^{+\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} \tag{18a}$$

die beiden particulären Integrale der Gleichung ohne letztes Glied sind. Für die Entwickelung der Hauptglieder kann wieder $\Theta(x) = 1$ gesetzt werden, und es wird:

$$\begin{aligned} 2iF_1(x) &= \sqrt{q}\left(e^{\frac{i\pi}{2K}(\nu+i\omega)} - e^{-\frac{i\pi}{2K}(\nu+i\omega)}\right) e^{-i\nu(\lambda L-\Lambda+90^\circ)} \\ &= \sqrt{q}\left(e^{i(\lambda L-\Lambda+90^\circ)-\frac{\pi\omega}{2K}} - e^{-i(\lambda L-\Lambda+90^\circ)+\frac{\pi\omega}{2K}}\right) e^{-i\nu(\lambda L-\Lambda+90^\circ)} \\ &= \sqrt{q}\left(e^{-i(\nu-1)(\lambda L-\Lambda+90^\circ)-\frac{\pi\omega}{2K}} - e^{-i(\nu+1)(\lambda L-\Lambda+90^\circ)+\frac{\pi\omega}{2K}}\right), \end{aligned}$$

und in derselben Weise $2iF_2(x)$, indem nur $-\omega$ und $-\nu$ an Stelle von $+\omega$, $+\nu$ gesetzt wird. Ist nun ein Glied von $W$:

$$(W)_1 = 2g\cos(\gamma L+\Gamma) = g\left[e^{i(\gamma L+\Gamma)} + e^{-i(\gamma L+\Gamma)}\right], \tag{19}$$

so wird

$$\int F_1(x)(W)_1 dL =$$

$$= g\sqrt{q}\left\{+\frac{e^{-i[(\nu-1)\lambda-\gamma]L+i(\nu-1)(\Lambda-90^\circ)+i\Gamma-\frac{\pi\omega}{2K}}}{2[(\nu-1)\lambda-\gamma]} - \frac{e^{-i[(\nu+1)\lambda-\gamma]L+i(\nu+1)(\Lambda-90^\circ)+i\Gamma+\frac{\pi\omega}{2K}}}{2[(\nu+1)\lambda-\gamma]} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-i[(\nu-1)\lambda+\gamma]L+i(\nu-1)(\Lambda-90^\circ)-i\Gamma-\frac{\pi\omega}{2K}}}{2[(\nu-1)\lambda+\gamma]} - \frac{e^{-i[(\nu+1)\lambda+\gamma]L+i(\nu+1)(\Lambda-90^\circ)-i\Gamma+\frac{\pi\omega}{2K}}}{2[(\nu+1)\lambda+\gamma]}\right\}$$

und ebenso für $\int F_2(x)(W)_1 dL$. Vernachlässigt man im Nenner die kleine Grösse $\nu$ gegenüber der Einheit, was immer gestattet ist, wenn $\gamma$ nicht nahe gleich $\lambda$ ist, so werden die Nenner bezw. $-2(\lambda+\gamma)$ und $+2(\lambda-\gamma)$, und man erhält durch die in (18) angezeigte Multiplikation und eine leichte Reduction

$$\Delta\rho = -\tfrac{1}{2} f g\sqrt{q}\left(e^{\frac{\pi\omega}{K}} - e^{-\frac{\pi\omega}{K}}\right)\left(e^{i(\gamma L+\Gamma)} + e^{-i(\gamma L+\Gamma)}\right)\cdot\frac{2\lambda}{\lambda^2-\gamma^2}$$

oder

$$\Delta\rho = -fg\sqrt{q}\left(e^{\frac{\pi\omega}{K}} - e^{-\frac{\pi\omega}{K}}\right)\frac{\lambda}{\lambda^2-\gamma^2}\cos(\gamma L+\Gamma). \tag{20}$$

Berücksichtigt man nur die beiden Glieder von $W$, die in (10a) der vorigen Nummer angegeben sind, so wird:

für das erste Glied: $\gamma = 0$, $\Gamma = 0$, $g = -\frac{1}{6}\mu_1$
" " zweite Glied: $\gamma = 2\lambda$, $\Gamma = -2\Lambda$; $g = -\frac{1}{2}\mu_1$,

demnach

$$\Delta\rho = +f\sqrt{q}\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)\left\{\frac{\mu_1}{6\lambda} - \frac{\mu_1}{6\lambda}\cos[2(1-\mu)L - 2\Lambda]\right\}. \tag{21}$$

Das variable Glied dieses Ausdruckes ist die Variation. Die intermediäre Länge ist eigentlich $L$; doch kann schon in der ersten Näherung (in der intermediären Bahn) die Correction $\chi$ aus 74 (9) berücksichtigt und $(L+\chi)$ für die Länge des Mondes benutzt werden. Es ist übrigens nicht schwer, schon in dieser Näherung weitere Glieder zu entwickeln, wodurch jedoch schon der Uebergang auf die wahre Bahn stattfindet[1]).

[1]) Vergl. Acta mathematica, Bd. 7, pag. 160.

Zunächst ist noch die Gleichung 74 (8) zu integriren, welche die Beziehung zwischen der intermediären Länge und der reducirten Zeit giebt. Beschränkt man sich hier ebenfalls auf die ersten Potenzen von $\rho$, so wird

$$\frac{d\zeta}{dL} = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{k_0}(1 - 2\rho),$$

oder mit Rücksicht auf 74 (7):

$$L_0 + L'\zeta = L - 2\int\rho\, dL,$$

demnach mit Berücksichtigung der Hauptglieder in (17) und (21):

$$\begin{aligned} L_0 + L'\zeta = L &- \frac{2c_0}{1-\varsigma} \sin[(1-\varsigma)L - C] - \\ - \frac{2c_1}{2(1-\mu)-(1-\varsigma)} &\sin\{[2(1-\mu)-(1-\varsigma)]L - 2(1-\nu)\Lambda + C\} - \qquad (22) \\ &- \frac{f\sqrt{q}\,\mu_1}{12\lambda(1-\mu)}\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)\sin[2(1-\mu)L - 2\Lambda], \end{aligned}$$

wobei das $L$ proportionale Glied $f\sqrt{q}\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)\cdot\frac{\mu_1}{6\lambda}L$ mit dem Gliede $L$ vereinigt, und durch den Coëfficienten

$$1 + \frac{f\mu_1\sqrt{q}}{6\lambda}\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)$$

dividirt wurde. Man hat dann unter dem Coefficienten $L'$ wieder die wirkliche, aus der Beobachtung bestimmte, mit den Störungen behaftete mittlere Bewegung zu denken[1]). Das Verhaltniss der Coëfficienten der Mittelpunktsgleichung und Evection wird

$$\frac{c_0}{c_1}\,\frac{1-2\mu+\varsigma}{1-\varsigma} = 0{\cdot}874\frac{c_0}{c_1} = 4{\cdot}21,$$

während das wirkliche Verhaltniss 4·93 ist.

**76. Entwickelung der störenden Kräfte.** Die störenden Kräfte sind Functionen des Radiusvectors und der wahren Länge, welche als Functionen einer Variabeln darzustellen sind. Zieht man dabei für den Radiusvector die sämmtlichen elementären Glieder zusammen und berücksichtigt die übrigen, nicht elementären Glieder durch die Störung $\xi$, so wird man

$$p = a(1-\eta^2); \quad \rho = \eta\cos[(1-\varsigma)L - \pi] \qquad (1)$$

wählen können. Treten in $\rho$ eine Reihe von elementären Gliedern mit verschiedenen Argumenten auf, so werden dieselben zu einem einzigen vereinigt, sodass dann $\eta$ und $\pi$ veränderlich sind[2]). Die dabei über $p$ gemachte Annahme giebt dann in Gleichung 73 (11) eingesetzt, eine Bestimmung der Function $U$. Es ist zu bemerken, dass $\frac{1}{p}\frac{dp}{dL}$, ebenso wie $Q_1$ von der zweiten oder höheren Ordnung der Massen sind, sodass $U = 1 + U'$ sich nur um Grössen zweiter Ordnung der störenden Massen von der Einheit unterscheidet. Dann wird:

$$d\zeta = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{k_0}\,\frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{[1+\eta\cos\{(1-\varsigma)L-\pi\}]^2}\,dL \qquad (2)$$

eine Gleichung, welche, wenn

$$(1-\varsigma)L - \pi = v \qquad (3)$$

gesetzt wird, in die folgende übergeht:

---

[1]) Vergl. No. 42.

[2]) Vergl. die Formeln (16), (17), (18) in No. 72.

$$L'd\zeta = \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\eta\cos v)^2}dL, \tag{4}$$

welche mit derjenigen in der elliptischen Bewegung, bis auf die Veränderlichkeit von $\eta$ und $\pi$ übereinstimmt. Durch diese Veränderlichkeit wird jedoch die Integration etwas erschwert. GYLDÉN führt einen Hilfswinkel $E$ durch die Beziehungen

$$\cos E = \frac{\cos v + \eta}{1+\eta\cos v} \qquad\qquad \cos v = \frac{\cos E - \eta}{1-\eta\cos E}$$

$$\sin E = \frac{\sqrt{1-\eta^2}\sin v}{1+\eta\cos v} \quad (5) \qquad \sin v = \frac{\sqrt{1-\eta^2}\sin E}{1-\eta\cos E} \quad (6)$$

$$\tang\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}}\tang\tfrac{1}{2}E \tag{7}$$

ein, wonach

$$r = a(1-\eta\cos E) \tag{8}$$

wird. Aus (6) folgt:

$$\cos E - \cos v + \eta\cos v\cos E - \eta = 0$$

und daraus durch Differentiation:

$$-(1+\eta\cos v)\sin E\,dE + (1-\eta\cos E)\sin v\,dv - (1-\cos v\cos E)d\eta = 0.$$

Da aber nach (3):

$$dv = (1-\varsigma)dL - d\pi \tag{9}$$

ist, so wird

$$(1-\eta\cos E)\sin v[(1-\varsigma)dL - d\pi] - (1+\eta\cos v)\sin E\,dE - (1-\cos v\cos E)d\eta = 0,$$

folglich

$$(1-\varsigma)dL = d\pi + \frac{1+\eta\cos v}{1-\eta\cos E}\frac{\sin E}{\sin v}dE + \frac{1-\cos v\cos E}{(1-\eta\cos E)\sin v}d\eta =$$

$$= d\pi + \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{1-\eta\cos E}dE + \frac{\sin E}{\sqrt{1-\eta^2}(1-\eta\cos E)}d\eta,$$

und damit aus (4) nach einiger Reduction

$$L'(1-\varsigma)d\zeta = (1-\eta\cos E)dE + \frac{\sin E(1-\eta\cos E)}{1-\eta^2}d\eta + \frac{(1-\eta\cos E)^2}{\sqrt{1-\eta^2}}d\pi, \tag{10}$$

daher durch Integration:

$$(1-\varsigma)L'\zeta = \pi + E - \eta\sin E + (1-\varsigma)X, \tag{11}$$

wobei

$$(1-\varsigma)X = \int\frac{\sin E(1-\eta\cos E)}{1-\eta^2}d\eta + \int\frac{(1-\eta\cos E)^2}{\sqrt{1-\eta^2}}d\pi + \int\sin E\,d\eta - \int d\pi$$

$$(1-\varsigma)X = \int\frac{\sin E(2-\eta\cos E-\eta^2)}{1-\eta^2}d\eta + \int\left[\frac{(1-\eta\cos E)^2}{\sqrt{1-\eta^2}} - 1\right]d\pi. \tag{12}$$

Setzt man

$$(1-\varsigma)(L'\zeta - X) - \pi = M, \tag{13}$$

so wird

$$M = E - \eta\sin E. \tag{14}$$

Die Beziehungen zwischen (7) oder (8) und (14) zeigen, dass zwischen $v$ und $M$ dieselben Beziehungen bestehen, wie in der elliptischen Bewegung (vergl. No. 14), mit dem Unterschiede, dass an Stelle der constanten Excentricität das veränderliche Diastema $\eta$ getreten ist. Der Werth von $M$ ist jedoch hier von der mittleren Anomalie $(1-\varsigma)L'\zeta - \pi$ um den Betrag $(1-\varsigma)X$ verschieden. Die Berechnung von $M$ aus Gleichung (13) erfordert bereits die Kenntniss von $X$; Gleichung (12) zeigt aber, dass $X$ von der Ordnung $\int d\eta$ und $\int\eta\,d\pi$, d. i. von der Ordnung der Veränderlichkeit des Diastemas ist; hieraus

folgt, dass sich die an $(1 - \varsigma)L'\zeta - \pi$ anzubringende Correction in eine rasch convergente Reihe entwickeln lassen wird.

Hiernach werden auch die weiteren Entwickelungen für die positiven und negativen Potenzen des Radiusvectors der gegenseitigen Entfernung $\Delta$ u. s. w. der Hauptsache nach mit dem bei den früheren Integrationsmethoden angegebenen Vorgange identisch, obwohl sich auch bei diesen Entwickelungen verschiedene Formen angeben lassen, die mehr oder weniger von einander abweichen (vergl. die »Allgem. Einleitung in die Astronomie«, pag. 158). Diese Differenzen sind jedoch nicht durch die Methode der Integration der Differentialgleichungen bedingt; auf diese Abweichungen braucht nach den bereits durchgeführten Beispielen von No. **37, 44, 48, 58, 56, 65** und **66** nicht näher eingegangen zu werden.

**77.** Die Störungen. Hat man eine erste Näherung für $\rho$, $\zeta$ durch die intermediäre Bahn erhalten, so geben die Gleichungen **78** (6), (9), (11), (14) die Störungen. Würde man die in **78** vorgenommene Zerlegung der Kräfte in der in **74** (4b) angezeigten Form als definitiv betrachten, und die gesammten übrigen Theile $P_1$, $Q_1$ nach **74** (5) zur Ermittelung der Störungen verwenden, so würden gerade so wie in den früheren Methoden im Laufe der Entwickelungen seculare oder elementäre Glieder entstehen. Diese Zerfällung darf daher nicht als definitiv angesehen werden. Treten im Laufe der Entwickelungen in den störenden Kräften (also vor den vorzunehmenden Integrationen) Glieder derselben Form wie in **74** (4b) auf, so können diese von $P_1$, $Q_1$ abgetrennt, und, wenngleich von höherer Ordnung der Kleinheit, doch mit $P_0$, $Q_0$ vereinigt werden; es sind dies die in **78** (5), (6) mit $w$, bezw. $pw$ bezeichneten, dort noch willkürlich gelassenen Functionen. Hieraus folgt, dass in der gestörten Bahn der durch $\rho$ bestimmte intermediäre Radiusvector nicht ungeändert bleibt, sondern dass die Störung in zwei Theile zerfällt erscheint, von denen der eine sich unmittelbar mit $\rho$ verbindet, der andere $\xi$ dabei so bestimmt wird, dass er von elementären Gliedern frei ist. Bei dieser Zerfällung wird nun gleichzeitig die bei der Bestimmung von $\rho$ auftretende Grösse $\varsigma$ in jeder Näherung so bestimmt werden können, dass eben elementäre Glieder in $\rho$ nicht auftreten. Es wird daher der bei der Bestimmung der intermediären Bahn gefundene erste Näherungswerth von $\varsigma$ in jeder folgenden Näherung neu bestimmt bezw. corrigirt.

Es sind nun zweierlei elementäre Glieder zu unterscheiden. In Gleichung **78** (10) würden elementäre Glieder durch die doppelte Integration aus Entwickelungsgliedern entstehen, welche die Form haben

$$a \cos [\sigma L - A] \quad \text{und} \quad a \sin [\sigma L - A] \tag{1}$$

wo $\sigma$ von der Ordnung der störenden Kräfte ist. Die Integration der Gleichungen (5), (6) hingegen liefert, wie aus **75** (20) hervorgeht, elementäre Glieder aus jenen Entwickelungsgliedern, in denen $\gamma$ nahe gleich $\lambda$, also von der Form $(1 - \sigma)L$ ist, d. h. wenn in den störenden Kräften Glieder von der Form

$$b \cos [(1 - \sigma)L - B] \quad \text{oder} \quad b \sin [(1 - \sigma) L - B] \tag{2}$$

vorkommen. Gyldén nennt diese Glieder bezw. »Glieder vom Typus ($A$) und vom Typus ($B$)«. Die Gleichung **78** (6) kann nun auch geschrieben werden

$$\frac{d^2\xi}{dL^2} + \left[1 + \frac{d\chi}{dL}\right]^2 \xi = V, \tag{3}$$

wo das zweite Glied, da es $\dfrac{Q_1}{1 + \dfrac{d\chi}{dL}} \dfrac{d\xi}{dL}$ ist, als von höherer Ordnung der

störenden Kräfte nach rechts geschafft werden kann. Die Gleichung hat dann denselben Charakter wie 78 (5), nur dass die störenden Kräfte von höherer Ordnung sind. Damit dann in $\xi$ keine elementaren Glieder auftreten, genügt es, die Zerfällung von $S$ so vorzunehmen, dass $P_1$ keine Glieder vom Typus ($B$) enthält, diese daher in der Summe $w$ zu vereinigen, von $P_1$ wegzunehmen, und dafür $pw$ in (5) zuzulegen, und die entsprechende Correction zu suchen. Da nun bei jeder folgenden Näherung die Glieder von $P_1$ um eine Ordnung höher in den störenden Massen sind, ebenso auch die Glieder in $P_0$, so wird für die Störung in $\xi$ eine convergente Entwickelung erhalten, ebenso wie für die elementären Glieder für sich betrachtet, so dass auch die Bestimmung von $\epsilon$ durch ein convergentes Näherungsverfahren bestimmt erscheint. Die Integration der Gleichungen 78 (5), (6) bietet hiernach weiter keine Schwierigkeiten.

Schwierigkeiten anderer Natur treten aber bei der Integration der Störungsgleichung 78 (10) und der entsprechend transformirten Gleichung für $T$ auf. Die Integration der Gleichung für $\chi$ gab in 74 (9) auf leichte Art einen genäherten Werth für $\chi$; allein die Unbekannte $\chi$ tritt in den Argumenten selbst auf, und allgemein werden die beiden zu betrachtenden Differentialgleichungen die Form haben[1]):

$$\frac{d^2\chi}{dL^2} = \Sigma - a_i \sin(\alpha_i\chi + A_i L + A_i^{(0)}), \tag{4}$$

wo die in den Argumenten auftretenden Functionen $A_i L + A_i^{(0)}$ bekannte Functionen von $L$ sind. $a_i$, $\alpha_i$, $A_i$, $A_i^{(0)}$ sind dabei Constante; $\alpha_i$ kann stets als positiv vorausgesetzt werden, da es im entgegengesetzten Falle genügt, das Zeichen des Argumentes und des Gliedes zu ändern, um $\alpha_i$ positiv zu erhalten; $a_i$ kann ebenfalls als positiv und das Zeichen aller Glieder als negativ vorausgesetzt werden, da im entgegengesetzten Falle durch die Vermehrung des Argumentes um 180° diese Form resultirt.

Die Glieder der Entwickelung können nun vier verschiedene Formen erhalten; es können $\alpha_i$ und $A_i$ entweder von der nullten Ordnung in den störenden Massen oder auch von der Ordnung der störenden Massen sein ($a_i$ ist immer von der Ordnung der störenden Massen). Im ersten Falle mögen sie mit $\alpha$, $\beta$, ... $A$, $B$ ..., im letzteren Falle mit $\rho$, $\sigma$ ... P, Σ bezeichnet werden. (Die Grösse der Constanten $A_i^{(0)}$ ist dabei gleichgültig). Es wird dann $\chi$ in zwei Theile $\chi'$, $\chi''$ zerlegt, so dass

$$\chi = \chi' + \chi'' \tag{5}$$

ist, und die beiden Theile so bestimmt, dass

$$\frac{d^2\chi'}{dL^2} = \Sigma - a \sin(\alpha\chi + AL + A_0) + \Sigma - b \sin(\rho\chi + BL + B_0) - w \tag{5a}$$

$$\frac{d^2\chi''}{dL^2} = \Sigma - f \sin(\alpha\chi + \mathrm{P}L + \mathrm{P}_0) + \Sigma - g \sin(\sigma\chi + \Sigma L + \Sigma_0) + w \tag{5b}$$

ist, wo in der ersten Gleichung alle jene Glieder vereinigt sind, in denen die in den Argumenten enthaltenen bekannten Functionen von der nullten Ordnung, in der zweiten Gleichung, wo ihre Coëfficienten von der ersten Ordnung der störenden Massen sind, und $w$ vorläufig ganz willkürlich, etwa gleich Null gesetzt werden kann.

Da die Coëfficienten $a$, $b$, $f$, $g$ von der Ordnung der störenden Massen sind, so wird $\chi$, sofern es möglich ist, die kleinen Integrationsdivisoren von der

---

[1]) Es ist dieses auch die Differentialgleichung, welche bei den früher erwähnten Integrationsmethoden für die Länge auftreten. Vergl. 19 (15) und ferner das Doppelintegral in 47 (8).

Ordnung der störenden Massen zu vermeiden, ebenfalls klein sein; nimmt man dieses vorerst an, so wird $\alpha\chi$, von der ersten, $\rho\chi$ und $\sigma\chi$ von der zweiten Ordnung der störenden Massen sein, und es liesse sich entwickeln:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha\chi + AL + A_0) &= \sin(AL + A_0) + \alpha(\chi' + \chi'')\cos(AL + A_0) - \\ &\quad - \tfrac{1}{2}\alpha^2(\chi' + \chi'')^2 \sin(AL + A_0) + \ldots \\ \sin(\rho\chi + BL + B_0) &= \sin(BL + B_0) + \rho(\chi' + \chi'')\cos(BL + B_0) - \ldots \end{aligned} \tag{6}$$

Integrirt man nun die Gleichung (5a), so folgt mit Vernachlässigung der in (6) rechts mit $(\chi' + \chi'')$ multiplicirten Glieder:

$$\chi' = \Sigma \frac{a}{A^2} \sin(AL + A_0) + \Sigma \frac{b}{B^2} \sin(BL + B_0). \tag{6a}$$

Substituirt man diesen Werth rechts in (6), so entstehen nebst den noch unbekannten Gliedern, welche von $\chi''$ herrühren, Argumente, in denen $2A_iL$, $2B_iL$, $(A_i \pm B_k)L$, $(A_i \pm A_k)L$, $(B_i \pm B_k)L$ vorkommen. Sofern die $A$ und $B$ untereinander so weit verschieden sind, dass ihre Summe oder Differenz nicht von der Ordnung der störenden Masse ist, werden die Glieder wieder den Typus der rechts in (5a) enthaltenen Glieder haben, und die nächste Näherung wird von der zweiten Ordnung der störenden Massen, u. s. w. Treten aber Glieder auf, in denen eine Summe oder Differenz der $A$ oder $B$ von der Ordnung der störenden Massen wird, so kann dieses Glied von der ersten Gleichung in Abzug gebracht (es wird die Function $w$) und zur zweiten Gleichung hinzugelegt, also aus der ersten Gleichung in die zweite geschafft werden. Treten hingegen irgendwo in $\chi'$ oder $\chi''$ selbst Glieder vom Typus ($B$) auf, so werden diese, in (6) eingesetzt, nur wieder Glieder geben, welche der Form nach denen in (5a) gleichen, und in dieser weiter behandelt werden können. Diese Gleichung bietet daher weiter keine Schwierigkeiten.

Die Glieder der rechten Seite in (5b) können jedoch nicht auf diese Weise behandelt werden. Setzt man voraus, dass $\chi''$ mindestens von der ersten Ordnung der störenden Massen ist, so werden die rechten Seiten in (5b), wenn keine kleinen Integrationsdivisoren auftreten, von der zweiten Ordnung der störenden Massen; lässt man aber jetzt die Produkte von $\chi$, $\sigma\chi$ gegenüber den bekannten Functionen weg, und integrirt auf gewöhnlichem Wege, so treten die Quadrate der kleinen Zahlen P, Σ in den Nenner, es entsteht also hier ein Ausdruck, der nicht, wie vorausgesetzt wurde, mindestens von der ersten Ordnung der störenden Masse ist, sondern es werden im Gegentheil noch die ersten Potenzen der störenden Massen im Nenner bleiben, d. h. in $\chi''$ treten elementäre Glieder vom Typus (A) auf; dann aber dürfte man $\chi$ in den Klammern nicht vernachlässigen: die Integrationsmethode ist fehlerhaft.

Zerlegt man $\chi''$ in mehrere Theile $\chi_1, \chi_2, \chi_3 \ldots \chi_1', \chi_2' \ldots$, so dass

$$\chi'' = \chi_1 + \chi_2 + \ldots + \chi_1' + \chi_2' + \ldots$$

sei, und setzt den Differentialquotienten jedes Theiles einem Gliede rechts in (5b) gleich, so erhält man die Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\chi_1}{dL^2} &= -f\sin(\alpha\chi_1 + \mathrm{P}L + \mathrm{P}_0) - X_1 \\ \frac{d^2\chi_2}{dL^2} &= -f'\sin(\alpha'\chi_2 + \mathrm{P}'L + \mathrm{P}_0') - X_2 \end{aligned} \tag{7a}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\chi_1'}{dL^2} &= -g\sin(\sigma\chi_1' + \Sigma L + \Sigma_0) - X_1' \\ \frac{d^2\chi_2'}{dL^2} &= -g'\sin(\sigma'\chi_2' + \Sigma L + \Sigma_0) - X_2', \end{aligned} \tag{7b}$$

. . . . . . . .

ei in den Argumenten der einzelnen Differentialgleichungen rechts an Stelle $\chi$ nur derjenige Theil von $\chi$ gesetzt ist, dessen zweiter Differentialquotient auftritt, während die innerhalb des Argumentes weggelassenen Theile zur tehung von Zusatzgliedern Veranlassung geben, die in $X_1, X_2 \ldots X_1', X_2' \ldots$ mmengefasst sind[1]). Die Gleichungen (7a), (7b) haben alle dieselbe Form, es genügt eine derselben zu behandeln. Sei z. B. in der ersten chung (7b)

$$\chi_1' = \psi + u, \tag{8}$$

ann diese Zerlegung so vorgenommen werden, dass $u$ gegenüber $\psi$ sehr klein so dass man nach Potenzen von $u$ entwickeln kann; dann wird:

$$\frac{d^2\psi}{dL^2} + \frac{d^2u}{dL^2} = -g\,sin(\sigma\psi + \Sigma L + \Sigma_0) - g\,cos(\sigma\psi + \Sigma L + \Sigma_0)\sigma u + $$
$$+ \tfrac{1}{2}g\,sin(\sigma\psi + \Sigma L + \Sigma_0)\sigma^2u^2 + \ldots\ldots - X_1'$$

diese Gleichung kann in die folgenden beiden zerfällt werden:

$$= -g\,sin(\sigma\psi + \Sigma L + \Sigma_0) \tag{8a}$$

$$= -g\,cos(\sigma\psi + \Sigma L + \Sigma_0)\cdot\sigma u + \tfrac{1}{2}g\,sin(\sigma\psi + \Sigma L + \Sigma_0)\sigma^2u^2 + \ldots\ldots, - X_1'. \tag{8b}$$

Setzt man in der Gleichung (8a):

$$\sigma\psi + \Sigma L + \Sigma_0 = \Psi, \tag{9}$$

geht dieselbe über in

$$\frac{d^2\Psi}{dL^2} = -\sigma g\,sin\,\Psi,$$

welcher man durch Multiplication mit $\frac{d\Psi}{dL}$ und Integration das erste Integral:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{d\Psi}{dL}\right)^2 = C + \sigma g\,cos\,\Psi$$

daraus

$$dL = \sqrt{\frac{2}{C+\sigma g}}\,\frac{d(\tfrac{1}{2}\Psi)}{\sqrt{1 - \frac{2\sigma g}{C+\sigma g}\,sin^2\tfrac{1}{2}\Psi}}$$

ilt. Setzt man nun

$$\frac{2\sigma g}{C+\sigma g} = \varkappa^2, \tag{10}$$

wird

$$\sqrt{\frac{\sigma g}{\varkappa^2}}\,(L - L_0) = \int_0^{\frac{1}{2}\Psi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 sin^2\varphi}},$$

;lich

$$\tfrac{1}{2}\Psi = am\,\frac{\sqrt{\sigma g}}{\varkappa}(L - L_0); \quad \Psi = 2am\,\frac{\sqrt{\sigma g}}{\varkappa}(L - L_0). \tag{11}$$

Zu Gleichung (10) ist zu bemerken, dass, da $\sigma$ und $g$ positiv vorausgesetzt rden konnten, $\varkappa$ reell sein wird, wenn auch für die Integrationsconstante $C$ positiver Werth gewählt wird. Diese, sowie die zweite Integrationsconstante lassen sich in folgender Weise bestimmen, bezw. durch die Constanten der ferentialgleichung ersetzen: für $am\,x$ hat man die Entwickelung:

[1]) Um die Berechtigung dieser Zerlegung, bezw. der Vernachlässigung von $X_1, X_2, X_1', \ldots$ tusehen, sind ausgedehntere Untersuchungen über die Convergenz der Reihen erforderlich; vergl. hierzu GYLDÉN in den »Acta mathematica« Bd. 9, pag. 192 und 211.

$$am\,x = \frac{\pi x}{2K} + \frac{2q}{1+q^2} \sin\frac{\pi}{K}x + \frac{2q^2}{2(1+q^4)} \sin 2\frac{\pi}{K}x + \frac{2q^3}{3(1+q^6)} \sin 3\frac{\pi}{K}x + \ldots,$$

wo $x$, $q$, $K$ die frühere Bedeutung haben. Man erhält daher:

$$\Psi = 2\left[\frac{\pi}{2K}\frac{\sqrt{\sigma g}}{\varkappa}(L - L_0) + \frac{2q}{1+q^2}\sin\frac{\pi}{K}\frac{\sqrt{\sigma g}}{\varkappa}(L - L_0) + \ldots\ldots\right].$$

Vergleicht man diesen Werth mit dem in (9) angenommenen, so folgt:

$$\Sigma L + \Sigma_0 = \frac{\pi}{K}\frac{\sqrt{\sigma g}}{\varkappa}(L - L_0)$$

$$\sigma\psi = 2\frac{2q}{1+q^2}\sin\frac{\pi}{K}\frac{\sqrt{\sigma g}}{\varkappa}(L - L_0) + \ldots,$$

folglich

$$\frac{K\varkappa}{\pi} = \frac{\sqrt{\sigma g}}{\Sigma} = \lambda$$
$$\Psi = 2am\frac{K}{\pi}(\Sigma L + \Sigma_0) \tag{12}$$

$$\psi = \frac{4}{\sigma}\left[\frac{q}{1+q^2}\sin(\Sigma L + \Sigma_0) + \frac{q^2}{2(1+q^4)}\sin 2(\Sigma L + \Sigma_0) + \right.$$
$$\left. + \frac{q^3}{3(1+q^6)}\sin 3(\Sigma L + \Sigma_0) + \ldots\ldots\right]. \tag{13}$$

Die erste Gleichung (12) giebt eine Bestimmung für den Modul $\varkappa$. Substituirt man die Reihe für $K^2\varkappa^2$, so folgt:

$$4\left(\frac{q}{1-q^2} + \frac{3q^3}{1-q^6} + \frac{5q^5}{1-q^{10}} + \ldots\right) = \lambda^2. \tag{14}$$

In den Gleichungen (7a) tritt $\alpha$ an Stelle von $\sigma$; für diese wird daher $\psi$ von der Ordnung $\alpha q$, also da $q$ stets kleiner als $\alpha$ ist[1]), mindestens von der ersten Ordnung der störenden Masse. Für die Gleichungen (7b) ist der Nenner $\sigma$ aber ebenfalls von der Ordnung der störenden Massen. $q$ bestimmt sich aus Gleichung (14), und es wird von dem numerischen Werthe von $\lambda$ abhängen, welchen Werth $q$ annimmt. Jedenfalls lässt sich $q$ zwischen 0 und 1 bestimmen. Ist $\sigma$ sehr klein gegenüber $\Sigma$, so wird $q$ von der Ordnung von $\sigma$, daher $\psi$ von der Ordnung von $\Sigma$, also von der Ordnung der störenden Massen; ist umgekehrt $\Sigma$ sehr klein gegenüber $\sigma$, so wird $q$ nahe 1 und $\psi$ von der Ordnung von $\frac{\Sigma}{\sigma}$ daher wieder von der Ordnung der störenden Massen. Für mässige Werthe von $\lambda$ lässt sich die Reihe (14) umkehren, und es wird:

$$q = \tfrac{1}{4}\left(\lambda^2 - \tfrac{1}{4}\lambda^6 + \tfrac{21}{128}\lambda^{10} - \tfrac{31}{512}\lambda^{14} + \ldots\ldots\right). \tag{14a}$$

Diese Reihe kann noch bis $\lambda = 1$ benutzt werden, und zeigt, dass wenn $\sigma$, $\Sigma$ und $g$ von derselben Ordnung und auch numerisch in jener Beziehung stehen, dass $\lambda$ sehr nahe 1 ist, $q$ nahe 1 bleibt, und $\psi$ von der nullten Potenz der störenden Massen wird. Für diesen ganz speziellen Fall kann es daher thatsächlich eintreten, dass auch in dieser Form der Entwickelung elementäre Glieder nicht zu vermeiden sind.

---

[1]) Zwischen $q$ und $q'$ besteht die Gleichung 75 (12b); es wird $q = q'$ für $q = 0{\cdot}0432$; wenn $q \gtrless 0{\cdot}0432$, so wird $q' \lesseqgtr 0{\cdot}0432$. Wenn $q > 0{\cdot}5421$, so wird $q' < 0{\cdot}0000001$ und wenn $q > 0{\cdot}6510$, so wird $q' < 0{\cdot}000000001$; dann wird $\varkappa' = 0$, $\varkappa = 1$; $K' = \frac{1}{2}\pi$, $K = \infty$; für $q > 0{\cdot}5421$ muss aber $\lambda > 2{\cdot}564$. Wenn daher $\lambda > 1$, so wird $q$ rasch anwachsen, ebenso wie bei Werthen von $\lambda < 1$, $q$ rasch abnehmen wird.

Ist $\psi$ bestimmt, so giebt die zweite Gleichung (8b) die Zusatzglieder $u$. Hier kann $u^2$ vernachlässigt werden, und man erhält die Gleichung

$$\frac{d^2u}{dL^2} = -g \cos\Psi \cdot \sigma u - X_1'.$$

Setzt man in derselben:

$$\frac{\sqrt{\sigma g}}{\varkappa}(L - L_0) = \frac{K}{\pi}(\mathfrak{L} L + \mathfrak{L}_0) = \xi,$$

so geht sie über in

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + \varkappa^2 \cos 2 am\xi \cdot u = -\frac{\varkappa^2}{\lambda^2 \Sigma^2} X_1'. \tag{15}$$

Ihr Integral wird[1])

$$u = c_1 \Delta am\xi + c_2 \Delta am\xi \left\{\frac{\Theta'(\xi)}{\Theta(\xi)} + \frac{E}{K}\xi\right\} - \frac{\varkappa^2}{\lambda^2\Sigma^2}\Delta am\xi \int \frac{d\xi}{\Delta am\xi}\int X_1'\Delta am\xi d\xi, \tag{16}$$

wo $E$ das vollständige elliptische Integral zweiter Gattung ist. Die Discussion dieser Gleichung kann hier nicht vorgenommen werden, und möge nur das Resultat derselben mit den eigenen Worten GYLDÉN's[2]) wiedergegeben werden:

»Mais le resultat auquel on est parvenu de la sorte, doit-on le considérer comme une vraie approximation, c'est à dire comme une approximation par laquelle on n'aura pas de developpement divergent? En général ce n'est pas ainsi. En effet, si l'on revient à l'équation complète, et qu'on y suppose toujours la fonction $X$ consistant en un seul terme, on veira naître des developpements qui procèdent suivant les puissances d'une fraction dont le numérateur est une quantité du quatrième ordre, et le dénominateur le carré du coéfficient $\sigma$. Ce développement peut être convergent, il est vrai; mais dans le cas des termes élémentaires, où $\sigma$ est une très petite quantité de l'ordre des masses troublantes, il peut facilement être divergent.«

78. **Convergenz der Entwickelungen.** Sind durch die im vorhergehenden erwähnten Untersuchungen auch die Hauptschwierigkeiten bei der Integration der canonischen Differentialgleichung beseitigt, so bleiben nichtsdestoweniger noch andere, nicht beseitigte. Nebst den elementären Gliedern, welche von der secularen Veränderlichkeit der Elemente herrühren, und welche sich durch die Bestimmung dieser secularen Aenderungen selbst eliminiren lassen, treten noch Glieder mit kleinen Integrationsdivisoren auf, wenn bei der Entwickelung der störenden Kräfte in den Argumenten kleine Coëfficienten der Variabeln in Folge der nahen Commensurabilität der mittleren Bewegungen entstehen. Diese sind unter den hier betrachteten elementären Gliedern nicht enthalten, geben aber Anlass zur Entstehung von Gliedern mit grossen Coefficienten und langer Periode[3]). Hierdurch haben sie auf die Ausdrücke für die Coordinaten des gestörten Himmelskörpers dieselbe Wirkung, wie die elementären Glieder, und können als secundär-elementäre Glieder bezeichnet werden[4]). In allen Fällen müssen die in den auftretenden Divisoren zu verwendenden Werthe der mittleren Bewegungen (sowohl des gestörten und störenden Himmelskörper, als auch ihrer Elemente) die wahren Werthe sein. Wenn diese nicht bekannt sind, und man

[1]) Vergl. »Traité des orbites absolues«, pag. 568. »Acta Mathematica«, Bd. 9, pag. 237.

[2]) ibid., pag. 570.

[3]) Vergl. hierfür die bereits erwähnte Abhandlung von HARZER: »Ueber einen speciellen Fall des Problems der drei Körper«.

[4]) Von GYLDÉN »charakteristische Glieder« genannt.

irgend ein System genäherter mittlerer Bewegungen (aus der Theorie bestimmter Bewegungen der Elemente oder osculirende mittlere siderische Bewegungen) verwendet, so werden schon hierdurch die Coefficienten ganz bedeutend alterirt. Im Falle, dass man es mit secundär-elementären Gliedern zu thun hat, kann es vorkommen, dass gewisse osculirende Elemente eine vollständige Commensurabilität zwischen den mittleren Bewegungen andeuten[1], welche thatsächlich nicht stattfindet. Verwendet man aber statt des wahren Divisors[2] *(diviseur effectif)* irgend einen bekannten genäherten Werth desselben *(diviseur linéair)*, so wird dies eine Darstellung geben, in welcher die aufeinanderfolgenden Näherungen eigentlich nach Potenzen des Verhältnisses

$$\frac{\text{wahrer Divisor} - \text{genäherter Divisor}}{\text{genäherter Divisor}}$$

entwickelt sind, sodass, wenn dieses Verhältniss nicht genügend klein ist, neuerdings schwach convergente Reihen auftreten. Auch diese Schwierigkeit wird durch die letzterwähnte Methode nicht vollständig beseitigt. GYLDÉN nennt die dadurch auftretenden Glieder kritische (termes critiques), und bemerkt: »Dans le cas des termes critiques on est obligé de refaire plusieurs fois, les approximations dès le debut, mais on pourra aussi mettre à profit des méthodes de tâtonnement conduisant plus promptement au but[3].« Man ist demnach wieder vor die Frage gestellt, ob man es mit thatsächlich convergenten Entwickelungen zu thun hat.

Zunächst ist hervorzuheben, dass eine strenge Definition der Convergenz nirgends festgestellt erscheint, so dass der Ausspruch von POINCARÉ, dass sich die Astronomen bei ihren Entwickelungen vom Instinkt leiten lassen, beinahe gerechtfertigt erscheint. Sodann aber ist, wie POINCARÉ treffend bemerkt, wohl zu unterscheiden zwischen der Convergenz einer Reihe im Sinne der Mathematiker und Convergenz im Sinne des praktischen Rechnens. Die erste, am passendsten und kürzesten als »theoretische Convergenz« bezeichnet, fordert, dass die Glieder einer Reihe von einem gewissen angefangen, beständig abnehmen (wenn sie auch anfänglich bis zu einem gewissen Punkte ab- oder auch zunehmen) und dass die Summe derselben, bis ins unendliche genommen, einen festen bestimmten endlichen Werth hat. Die zweite, im Gegensatz zur ersten als »praktische Convergenz« zu bezeichnen, erfordert, dass die Glieder von dem ersten an, wenigstens bis zu einem gewissen hin, beständig abnehmen, und die Summe dieser Glieder die gegebene Function bis auf einen kleinen, als praktisch zulässig erklärten Fehler, darstellt. In diesem Sinne sind demnach die zuerst von STIRLING betrachteten semiconvergenten Reihen, als »praktisch convergent« zu bezeichnen. In dieser Weise ist z. B. die Reihe

$$\frac{A^n}{n!}, \tag{a}$$

wo $A$ eine sehr grosse Zahl, z. B. 1000 oder auch noch mehr, ist, »theoretisch convergent«, nicht aber »praktisch convergent«; und umgekehrt die Reihe

$$\frac{n!}{A^n} \tag{b}$$

»theoretisch divergent«, hingegen »praktisch convergent«. Während eine theo-

---

[1] Ein Fall, den man als Libration bezeichnet.

[2] Ueber die Berechnung des wahren Werthes des Divisors aus dem genäherten; vergl. GYLDÉN in »Acta Mathematica« Bd. 9, pag. 201 ff.

[3] Traité des orbites absolues, pag. 564.

retisch convergente Reihe thatsächlich gemäss den der Definition entsprungenen Criterien der Convergenz einen endlichen, fest bestimmten Werth hat, wird dieses für den Fall der praktischen Convergenz durchaus nicht der Fall sein müssen; die Summe der Reihe (b) ist thatsächlich unendlich, und wird nur dann als eine praktisch verwendbare zu bezeichnen sein, wenn ausdrücklich bekannt ist, dass die Summe der ersten Glieder als die zu berechnende Function zu betrachten ist.

In Folge dessen bleibt der Begriff der praktischen Convergenz ein wissenschaftlich nicht genügend präcisirter, weshalb es nach dem Vorschlage POINCARÉ's vorzuziehen ist, den Ausdruck Convergenz stets im analytischen Sinne zu verstehen; dann aber ist es nöthig, den allgemein üblichen, aber nicht genügend präcisirten Ausdruck der praktischen Convergenz durch andere, analytisch definirbare zu ersetzen. Als solche werden von POINCARÉ[1]) die »asymptotische Gleichheit« (égalité asymptotique) und die »formelle Befriedigung der Differentialgleichungen« (satisfaire formellement aux équations différentielles) in Vorschlag gebracht.

Betrachtet man in dem Ausdrucke

$$f_0 + f_1 m + f_2 m^2 + \ldots . \tag{1}$$

in welchem die Coëfficienten $f_0$, $f_1$, ... Functionen von einer Veränderlichen $x$ oder auch von $x$ und $m$ sind, die $p + 1$ ersten Glieder

$$\varphi_p(x, m) = f_0 + f_1 m + f_2 m^2 + \ldots . + f_p m^p \tag{2}$$

und sei die Function $\varphi(x, m)$ derart beschaffen, dass

$$\lim \frac{\varphi - \varphi_p}{m^p} = 0, \qquad \text{für } \lim m = 0 \tag{3}$$

ist, so wird für verschwindende $m$ die Function $\varphi(x, m)$ offenbar durch die Reihe (1) dargestellt, welches dadurch angezeigt wird, dass man schreibt:

$$\varphi(x, m) = f_0 + f_1 m + f_2 m^2 + \ldots . \tag{4}$$

Diese Darstellung wird als eine »asymptotische Gleichheit« bezeichnet.

Hat man eine zweite asymptotische Gleichheit:

$$\psi(x, m) = g_0 + g_1 m + g_2 m^2 + \ldots ,$$

so wird gemäss der Definition (3):

$$\lim \frac{\psi - \psi_p}{m^p} = 0,$$

demnach

$$\lim \frac{\varphi - \varphi_p}{m^p} \pm \lim \frac{\psi - \psi_p}{m^p} = 0$$

oder

$$\lim \frac{(\varphi \pm \psi) - (\varphi_p \pm \psi_p)}{m^p} = 0,$$

daher

$$\varphi + \psi = (f_0 + g_0) + (f_1 + g_1)m + (f_2 + g_2)m^2 + \ldots \tag{5}$$

Aus (3) folgt

$$\varphi = \varphi_p + \varepsilon m^p,$$

wenn $\varepsilon$ eine mit $m$ verschwindende Grösse bezeichnet; ebenso wird

$$\psi = \psi_q + \varepsilon' m^q,$$

demnach

$$\varphi\psi = \varphi_p \psi_q + \varepsilon'' m^r,$$

wenn $r$ die kleinere der beiden Zahlen $p$, $q$ ist, folglich ist

---

1) Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, II. Bd., pag. 5 und 8.

$$\lim \frac{\varphi\psi - \varphi_s\psi_s}{m^s} = 0,$$

und ebenso wird

$$\frac{\varphi}{\psi} = \frac{\varphi_s}{\psi_s} + \frac{\varepsilon\psi_s m^s - \varepsilon'\varphi_s m^s}{\psi_s(\psi_s + \varepsilon' m^s)} = \frac{\varphi_s}{\psi_s} + \varepsilon'' m^s,$$

folglich

$$\begin{aligned} \varphi\psi &= (f_0 + f_1 m + f_2 m^2 + \dots)(g_0 + g_1 m + g_2 m^2 + \dots) \\ \frac{\varphi}{\psi} &= \frac{f_0 + f_1 m + f_2 m^2 + \dots\dots\dots}{g_0 + g_1 m + g_2 m^2 + \dots\dots\dots} \end{aligned} \qquad (6)$$

Asymptotische Gleichheiten können daher addirt, subtrahirt, multiplicirt, dividirt werden wie gewöhnliche Gleichungen. In den Störungsausdrücken treten immer derartige Reihen auf, in denen $m$ die Bedeutung einer störenden Masse hat: die analytischen Ausdrücke werden streng richtig, wenn die störenden Massen verschwinden, und die nach Potenzen der Massen entwickelten Ausdrücke können daher als Entwickelungen gewisser unbekannter Functionen betrachtet werden, welchen sie asymptotisch gleichen.

Betrachtet man das System von $n$ linearen Differentialgleichungen

$$\frac{dx_i}{dt} - X_i = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \qquad (7)$$

wo $X_i$ eindeutige Functionen von $t$, $x_1, x_2 \dots x_n$ und einem Parameter $m$ sind[1]), deren Lösungen $x_i = \theta_i(t)$ seien; lassen sich $n$ Reihen

$$S_i = f_{i,0} + f_{i,1}m + f_{i,2}m^2 + \dots \qquad (8)$$

über deren Convergenz oder Divergenz keinerlei beschränkende Annahmen gemacht werden, derart finden, dass die Differenz $\frac{dx_i}{dt} - X_i$ durch $m^p$ theilbar wird, wenn

$$S_i^{(p)} = f_{i,0} + f_{i,1}m + f_{i,2}m^2 + \dots f_{i,p}m^p \qquad (8a)$$

an Stelle der $x_i$ substituirt werden, d. h. also, dass

$$\left(\frac{dx_i}{dt} - X_i\right)_{x_i = S_i^{(p)}} = K m^p$$

ist, so wird das System der $S_i$ als eine »formelle Lösung des Systems der Differentialgleichungen (7)« angesehen, und dann ist[2])

$$\theta_i(t, m) = S_i \qquad (9)$$

d. h. die Reihen $S_i$ sind asymptotische Darstellungen der strengen Lösungen der Differentialgleichungen (7).

In den Störungsrechnungen treten die störenden Massen als kleine Parameter $m$ auf. Gelingt es daher, für die Differentialgleichungen Integrale anzugeben, welche in der $(p+1)$ten Näherung sämmtliche Glieder berücksichtigen, die von der $p$ten Ordnung der störenden Massen sind, wozu also gehört, dass die elementären Glieder, bei denen die störenden Massen im Nenner auftreten, ebenfalls entsprechende Berücksichtigung finden, so werden die erhaltenen Lösungen

[1]) Dieses System von linearen Differentialgleichungen enthält die allgemeine Form, denn die Differentialgleichungen höherer Ordnung lassen sich durch die Substitution

$$\frac{dx_k}{dt} = y_k, \qquad \frac{dy_k}{dt} = z_k, \dots \qquad (a)$$

auf die lineare Form bringen, indem die durch die Substitution entstandenen Gleichungen mit den Gleichungen (7) ein lineares System der gegebenen Form liefern.

[2]) Eine Ausnahme findet nur statt in den singulären Punkten der Functionen $X_i$.

formelle Lösungen der Differentialgleichungen im Sinne POINCARÉ's sein, und sich mit verschwindender Masse asymptotisch den wahren Lösungen nähern. Ueber die Convergenz des Coëfficienten $f_{i,k}$ in den Reihen (8) ist, wie erwähnt, keinerlei Annahme nöthig, womit erwiesen erscheint, dass der in der astronomischen Praxis gebräuchliche Vorgang, Entwickelungen nach Potenzen der störenden Massen, ohne Rücksicht auf die praktische Convergenz der in den aufeinanderfolgenden Näherungen auftretenden numerischen Störungswerthe vorzunehmen, als gerechtfertigt angesehen werden kann. Der Satz erleidet auch für die Berechnung der Störungen der Satelliten keine Ausnahme, da dann $\mu^2$ [(vergl. 57 (7) und 74 (7 a)] als kleiner Parameter $m$ aufzufassen ist. Für die secundär elementären Glieder werden die Reihen der $f_{i,k}$ dadurch divergent, dass die Nenner $i - i'\frac{\mu'}{\mu} = \nu$ sehr klein werden; sei dann $\frac{m}{\nu} = \alpha$ eine endliche Grösse, und tritt in $f_{ik}$ ein Glied $\frac{1}{\nu} f^{(0)}_{i,k}$ auf, so wird das hieraus entstehende Glied geschrieben werden können:

$$\frac{m}{\nu} f^{(0)}_{ik} m^{k-1} = \alpha f_{ik} m^{k-1},$$

und es kann demnach als zu den Störungen der $(p-1)$ten Ordnung der störenden Massen gehörig angesehen werden, woraus folgt, dass der Satz auch für secundär elementäre Glieder gültig bleibt.

## II. Abschnitt. Die Rotationsbewegung.

**79.** Das Potential. Bei der Untersuchung der Rotationsbewegung der Himmelskörper spielt die Figur derselben eine wesentliche Rolle, indem gerade die wichtigsten zu Tage tretenden Erscheinungen eben durch diese bedingt sind. Andererseits aber wird die Figur eines Gestirnes durch seine Rotation mit bestimmt; beide stehen daher in einer Wechselbeziehung, welche es erfordert, das wichtigste über die Figur der Himmelskörper den Auseinandersetzungen über die Rotationsbewegung voranzuschicken.

Bei diesen Untersuchungen spielt die in No. 8 eingeführte Function

$$U = k^2 \Sigma \frac{m m_1}{u} \tag{1}$$

wo $u$ die gegenseitige Entfernung der Massenpunkte bedeutet, eine wichtige Rolle. Handelt es sich um die Wirkung eines aus Massenpunkten $m, m', m'' \ldots$ bestehenden Massencomplexes $M = m + m' + m'' + \ldots$ auf den Massenpunkt $m_1$, so kann an Stelle von (1) gesetzt werden:

$$U = k^2 m_1 \Sigma \frac{m}{u}. \tag{1a}$$

Nach der atomistischen Hypothese bestehen die Massen aus discreten Massentheilchen (Molekülen), die durch relativ sehr grosse Zwischenräume (Poren) getrennt sind, und es ist nicht nur gelungen, unter dieser Annahme die Entfernung der Moleküle, sondern auch die Grösse dieser selbst annähernd zu ermitteln. Für die analytischen Operationen der Mechanik, welche sich nicht auf die Molekularbewegungen oder Molekularveränderungen (Molekularphysik oder Chemie) erstrecken, ersetzt man diese Hypothese mit gleichem Vortheil durch die philosophisch gleich berechtigte einer continuirlichen Erfüllung des Raumes und nimmt die in einem gegebenen Volumen eingeschlossene Masse proportional diesem Volumen und einem constanten oder veränderlichen Faktor $\delta$, welcher

die Dichte genannt wird. Es wird dann die in einem Volumelemente $dv$ eingeschlossene Masse $\delta dv$, und die Summirung über die sämmtlichen discreten Massenpunkte des Complexes $M$ geht über in eine Integration über die sämmtlichen Volumelemente. Ist für ein Massenelement des betrachteten Complexes $u$ die Entfernung von dem angezogenen Punkte, so wird der in $U$ auftretende Faktor von $m_1$:

$$V = k^2 \int \frac{\delta\, dv}{u} \tag{2}$$

ausgedehnt über das ganze Volumen $v$. Diesen Ausdruck nennt man das Potential der Masse $M$ auf den von der Masseneinheit erfüllt gedachten Punkt $m_1$. Zerlegt man den Massencomplex $M$, welcher Kürze halber stets als Körper $M$ bezeichnet wird, durch irgend eine krumme Fläche in die beiden Körper $M_1$ und $M_2$, so dass

$$M = M_1 + M_2; \quad v = v_1 + v_2,$$

ist, so kann das Integral (2) ebenfalls in zwei Theile über die beiden Volumina ausgedehnt werden, so dass

$$V = V_1 + V_2; \qquad V_1 = k^2 \int_{(v_1)} \frac{\delta\, dv}{u}; \qquad V_2 = k^2 \int_{(v_2)} \frac{\delta\, dv}{u}. \tag{3}$$

ist. Legt man ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde, und seien $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die Coordinaten des Punktes $m_1$; $x$, $y$, $z$ die (veränderlichen) Coordinaten des Massenelementes $dv$, so wird

$$u^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$

$$V = \iiint \frac{k^2 \delta\, dx\, dy\, dz}{u}. \tag{2a}$$

Das Potential tritt als Function der Coordinaten $\xi$, $\eta$, $\zeta$ auf, und kann daher geschrieben werden:

$$V = V(\xi, \eta, \zeta).$$

Durch Differentiation desselben nach diesen drei Grössen erhält man die Kräfte in den Richtungen der drei Coordinatenaxen:

$$X = \frac{\partial V}{\partial \xi}; \qquad Y = \frac{\partial V}{\partial \eta}; \qquad Z = \frac{\partial V}{\partial \zeta}. \tag{4}$$

Die Kraft in irgend einer beliebigen Richtung $\nu$, welche durch die Richtungscosinus $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ gegen die drei Axen bestimmt ist, wird

$$X = \alpha \frac{\partial V}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial V}{\partial \eta} + \gamma \frac{\partial V}{\partial \zeta}.$$

Ist aber $\nu$ in die Function $V$ eingeführt, so erhält man die Kraft durch Differentiation nach $\nu$ selbst:

$$X = \frac{\partial V}{\partial \nu}. \tag{4a}$$

In derselben Weise, wie sich [nach (3)] das Potential einer Masse zerlegen lässt, wird auch das Potential verschiedener Massen gleich der Summe der Potentiale der einzelnen Massen. Befinden sich unter diesen einzelne Massenpunkte, so ist das Potential eines jeden derselben gleich der in diesem Massenpunkte gedachten Masse $\overline{m}$, dividirt durch die Entfernung $\overline{u}$ desselben von der Masse $m_1$ und es wird das Gesammtpotential der Massen $M'$, $M''$, $M'''$ ... $\overline{m}'$, $\overline{m}''$, $\overline{m}'''$ ..., auf $m_1$:

$$V = V' + V'' + V''' \ldots + \overline{V}' + \overline{V}'' + \overline{V}''' + \ldots$$

$$V^{(i)} = k^2 \int \frac{\delta^{(i)}\, dv^{(i)}}{r^{(i)}}; \qquad \overline{V}^{(i)} = \frac{k^2\, \overline{m}^{(i)}}{\overline{r}^{(i)}}. \tag{6}$$

Da $\frac{\partial V^{(i)}}{\partial \nu}$, $\frac{\partial \overline{V}^{(i)}}{\partial \nu}$ die von den verschiedenen Massencomplexen und Punkten auf die Masseneinheit in $m_1$ ausgeübten Kräfte in der Richtung $\nu$ sind, diese aber unmittelbar summirbar sind, so folgt, dass $\frac{\partial V}{\partial \nu}$ die von den sämmtlichen wirkenden Massen auf die in $m_1$ befindliche Masseneinheit ausgeübte Gesammtkraft in der Richtung $\nu$ darstellt.

Der Ausdruck

$$V = V(\xi, \eta, \zeta) = C,$$

wo $C$ eine Constante ist, stellt bei veränderlichem $\xi$, $\eta$, $\zeta$ eine Fläche dar, welche die Eigenschaft hat, dass das Potential der sämmtlichen wirkenden Massen auf die einzelnen Punkte $\xi$, $\eta$, $\zeta$ überall denselben Werth hat. Solche Flächen nennt man äquipotentielle Flächen oder aus einem sofort ersichtlichen Grunde Niveauflächen. Zwei Niveauflächen können sich nicht schneiden. Für eine gewisse Niveaufläche hat nämlich die Constante $C$ in ihrer ganzen Ausdehnung denselben Werth; verschiedene Niveauflächen entsprechen verschiedenen Constanten $C$, $C'$. Würde es einen Punkt $\xi_1$, $\eta_1$, $\zeta_1$ geben, in denen sich diese beiden Niveauflächen schneiden, so müsste $V(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = C$, $V(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = C'$, daher $C = C'$ sein, was der Voraussetzung widerspricht.

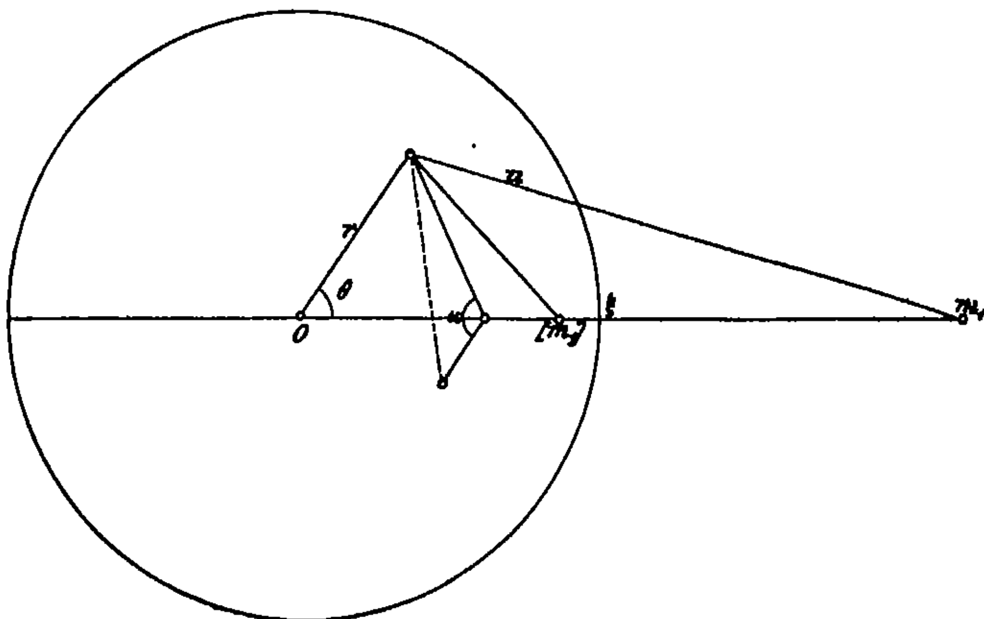
Legt man ein Coordinatensystem in einen Punkt $\xi$, $\eta$, $\zeta$ einer Niveaufläche, so dass die $xy$-Ebene in die Tangentialebene, und die $z$-Axe daher in die Normale der Niveaufläche fallen, so wird man bei dem Uebergange von einem Punkte $\xi$, $\eta$, $\zeta$ zu einem benachbarten $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, $\zeta$ in der Niveaufläche selbst bleiben, da man sich längs zweier aufeinander senkrecht stehender Tangenten der Fläche bewegt; da für diese Punkte der Werth des Potentials derselbe ist, so wird

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial \zeta} = -g, \tag{7}$$

wo $g$ die Kraft in der Richtung der Flächennormale ist, hier also gleich der Gesammtkraft, welche auf den Punkt $m_1$ wirkt. Denkt man sich z. B. eine Flüssigkeitsmasse, auf welche verschiedene Kräfte wirken, so wird ihre Oberfläche unter deren Einwirkung eine gewisse Form annehmen, welche aber derart sein muss, dass die Gesammtkraft senkrecht zur Oberfläche wirkt: die Oberfläche wird demnach eine äquipotentielle Fläche (daher der Name Niveaufläche) und wird dadurch erhalten, dass man das Potential der sämmtlichen wirkenden Kräfte auf einen Punkt der Flüssigkeitsmasse sucht, und dieses Potential gleich $C$ (constant) setzt. Besteht die Flüssigkeitsmasse aus Flüssigkeiten verschiedener Dichte, so wird jede Trennungsfläche ebenfalls eine Niveaufläche sein, und dasselbe gilt von den Schichten einer nicht homogenen Flüssigkeit von continuirlich veränderlicher Dichte. Der Werth der Constanten $C$ wird aber für die verschiedenen Niveauflächen verschieden sein, und kann aus der Gesammtmasse oder dem Gesammtvolumen der innerhalb dieser Niveaufläche befindlichen Flüssigkeit ermittelt werden.

Unter den Massencomplexen von geometrisch bestimmbarer Gestalt sind für die Zwecke der Mechanik des Himmels besonders hervorzuheben die Kugel und das Ellipsoid.

**80. Das Potential einer Kugel.** Sei zunächst für die Kugel die Entfernung des angezogenen Massenpunktes $m_1$ von dem Mittelpunkte der Kugel $O$ (Fig. 274) $\xi$. Wählt man die Linie $Om_1$ als $x$-Axe und bestimmt die Lage irgend eines Punktes in Raume durch die Polarcoordinaten: die Entfernung $r$




(A. 274.)

von $O$, den Winkel $\theta$, welchen $r$ mit der $x$-Axe einschliesst, und den Winkel $\omega$ welchen die Ebene $r\xi$ mit der $xy$-Ebene einschliesst, so wird:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta\cos\omega$$
$$z = r\sin\theta\sin\omega$$
$$dm = \delta r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\omega\, dr$$
$$u^2 = r^2 + \xi^2 - 2r\xi\cos\theta,$$

demnach

$$V = \iiint \frac{\delta r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\omega\, dr}{u}, \tag{1}$$

wo Kürze halber $\delta$ statt $k^2\delta$ gesetzt ist. Integrirt man hier zunächst nach $\omega$ von 0 bis $2\pi$, so wird dabei $\theta$ und $u$ constant bleiben, und es wird

$$V = 2\pi \iint \frac{\delta r^2 \sin\theta\, d\theta\, dr}{u}.$$

Integrirt man nach $\theta$ und lässt dabei $r$ constant, d. h. integrirt man nach einer Kugelschale vom Halbmesser $r$, so ist

$$u\,du = +r\xi\sin\theta\, d\theta; \qquad \sin\theta\, d\theta = \frac{u\,du}{r\xi},$$

folglich

$$V = 2\pi \iint \frac{\delta r\, dr\, du}{\xi}.$$

Nach $u$ ist dabei zu integriren von demjenigen Werthe von $u$, welcher $\theta = 0$ entspricht, bis zu dem $\theta = \pi$ entsprechenden Werthe. Hierbei ist nun zu unterscheiden, ob $m_1$ ausserhalb oder innerhalb der Kugelschale liegt.

1) Für einen äusseren Punkt $m_1$ werden die beiden Grenzen: $u_0 = \xi - r$, $u_1 = \xi + r$, daher

$$V_a = 2\pi\int\frac{\delta r\,dr}{\xi}[(\xi + r) - (\xi - r)] = \frac{4\pi}{\xi}\int\delta r^2\,dr.$$

2) Für einen inneren Punkt $[m_1]$ werden die beiden Grenzen: $[u]_0 = r - \xi$, $(u)_1 = r + \xi$, demnach

$$V_i = 2\pi\int\frac{\delta r\,dr}{\xi}[(r + \xi) - (r - \xi)] = 4\pi\int\delta r\,dr.$$

Dabei wurde aber vorausgesetzt, dass $\delta$ von $u$ und $\theta$ unabhängig ist, d. h. in der ganzen Kugelschale vom Halbmesser $r$ constant, eine Annahme, welche bei den Himmelskörpern als die wahrscheinlichste gelten kann. Für verschiedene Schalen wird aber die Dichte verschieden und als Function von $r$ aufgefasst werden können, so dass

$$\delta = \varphi(r)$$

ist. Bei dem Uebergange auf die Wirkung der ganzen Kugel vom Halbmesser $a$ wird aber wohl der Punkt $m_1$ ein äusserer sein, nicht aber $[m_1]$ für alle Schichten ein innerer. Man hat daher:

1) Für den äusseren Punkt $m_1$:

$$V = \frac{4\pi}{\xi}\int_0^a\varphi(r)r^2\,dr = \frac{M}{\xi}, \quad \text{wenn } M = 4\pi\int_0^a\varphi(r)r^2dr \tag{2}$$

ist. $M$ ist, wie man sieht, die Masse der Kugel; die Anziehung in der Richtung $\xi$ (d. h. die Totalanziehung) wird:

$$\frac{\partial V}{\partial\xi} = -\frac{M}{\xi^2}, \tag{3}$$

wo die Constante $k^2$ (wie im Folgenden stets) in die Masse einbezogen ist. Die Wirkung einer Kugel auf einen äusseren Punkt ist daher dieselbe, als wenn die Gesammtmasse in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre, wodurch sich die bisher festgehaltene Betrachtung der Himmelskörper als Massenpunkte rechtfertigt.

2) Für einen Punkt $[m_1]$ im Innern der Kugel muss man die Gesammtmasse in zwei Theile theilen; für alle Schalen, für welche der Halbmesser kleiner als $\xi$ ist, ist der Punkt ein äusserer, für die übrigen Schalen, vom Halbmesser $\xi$ bis $a$ ist er ein innerer; es wird daher

$$V = \frac{4\pi}{\xi}\int_0^\xi\varphi(r)r^2dr + 4\pi\int_\xi^a\varphi(r)r\,dr.$$

Sei nun

$$\int_0^\xi\varphi(r)r^2dr = f_1(\xi); \qquad \int_0^\xi\varphi(r)r\,dr = f_2(\xi), \tag{4}$$

so wird:

$$V = 4\pi\frac{f_1(\xi)}{\xi} + 4\pi[f_2(a) - f_2(\xi)] = 4\pi\left[\frac{f_1(\xi)}{\xi} - f_2(\xi)\right] + 4\pi f_2(a). \tag{5}$$

Für $\xi = a$ gehen die Ausdrücke (2) und (5) in einander über. Aus (5) folgt für die Grösse der Anziehung:

$$\frac{\partial V}{\partial\xi} = -\frac{4\pi}{\xi^2}f_1(\xi) + \frac{4\pi}{\xi}\xi^2\varphi(\xi) - 4\pi\xi\varphi(\xi) = -\frac{4\pi}{\xi^2}f_1(\xi).$$

Nun ist $4\pi f_1(\xi) = M_\xi$ die Masse der Kugel vom Halbmesser $\xi$, also

$$\frac{\partial V}{\partial\xi} = -\frac{M_\xi}{\xi^2}. \tag{6}$$

Da die Masse, abgesehen von den Dichtenänderungen, proportional $\xi^3$ ist, so folgt daraus die Anziehung proportional der Entfernung vom Mittelpunkte. Setzt man voraus, dass sich die Function $\varphi(\xi)$ in eine nach Potenzen von $\xi$ fortschreitende Reihe entwickeln lässt, dass also[1])

$$\varphi(\xi) = \delta + \delta'\xi + \delta''\xi^2 + \ldots \tag{7}$$

ist, so wird

$$f_1(\xi) = \tfrac{1}{3}\delta\xi^3 + \tfrac{1}{4}\delta'\xi^4 + \tfrac{1}{5}\delta''\xi^5 + \ldots$$

$$f_2(\xi) = \tfrac{1}{2}\delta\xi^2 + \tfrac{1}{3}\delta'\xi^3 + \tfrac{1}{4}\delta''\xi^4 + \ldots$$

$$V = -2\pi\left[\tfrac{1}{3}\delta\xi^2 + \tfrac{1}{6}\delta'\xi^3 + \tfrac{1}{10}\delta''\xi^4 + \ldots\right] + 4\pi\left[\tfrac{1}{2}\delta a^2 + \tfrac{1}{3}\delta' a^3 + \ldots\right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = -4\pi\left(\tfrac{1}{3}\delta\xi + \tfrac{1}{4}\delta'\xi^2 + \tfrac{1}{5}\delta''\xi^3 + \ldots\right). \tag{8}$$

Ist die Kugel homogen, so sind $\delta' = \delta'' = \ldots = 0$ und es wird

$$V = 2\pi\delta a^2 - \tfrac{2}{3}\pi\delta\xi^2; \qquad \frac{\partial V}{\partial \xi} = -\tfrac{4}{3}\pi\delta\xi. \tag{9}$$

81. **Das Potential eines Ellipsoïdes auf einen inneren Punkt.** Legt man den Ursprung des Axensystems in den angezogenen Punkt $[m_1]$, so wird das Volumelement

$$dv = u^2\,do\,du,$$

wenn $do$ der von den Radienvectoren der Begrenzung des Flächenelementes eingeschlossene Winkel (das Flächenelement der Einheitskugel) ist, und $u$ die stets positiv zu nehmende Entfernung des anziehenden Massenpunktes von $[m_1]$ ist. Dann wird:

$$V = \iiint \delta u\,du\,do = \tfrac{1}{2}\iint \delta u^2\,do \tag{1}$$

(A. 275)

Die Integrationsgrenzen für $u$ sind von 0 bis zu demjenigen Werthe von $u$, welcher der Oberfläche des anziehenden Ellipsoïds entspricht. Um diesen Werth zu erhalten, seien $x, y, z$ die Coordinaten eines Punktes, bezogen auf ein Axensystem, dessen Ursprung im Mittelpunkte $O$ (Fig. 275) des Ellipsoïds ist, und

[1]) Bei nach dem Innern zunehmender Dichte wird natürlich $\delta'$ negativ; negative Potenzen von $\xi$ können nicht auftreten, da sonst die Dichte für $\xi = 0$ unendlich würde.

für welches die Richtungen der Axen mit den Richtungen der Ellipsoidaxen zusammenfallen; $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die Coordinaten von $[m_1]$; $\lambda$, $\mu$, $\nu$ die Winkel, welche die Strecke $u$ mit den Coordinatenaxen einschliesst, so wird:

$$\begin{aligned} x &= \xi + u\cos\lambda \\ y &= \eta + u\cos\mu \\ z &= \zeta + u\cos\nu \end{aligned} \tag{2}$$

und für einen Punkt des Ellipsoides muss

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{3}$$

sein, wenn $a$, $b$, $c$ die drei Hauptaxen des Ellipsoides sind. Substituirt man (2) in (3), so erhält man für $u$ die Gleichung:

$$hu^2 + 2ku = l, \tag{4}$$

wenn

$$\begin{aligned} h &= \frac{\cos^2\lambda}{a^2} + \frac{\cos^2\mu}{b^2} + \frac{\cos^2\nu}{c^2} \\ k &= \frac{\xi\cos\lambda}{a^2} + \frac{\eta\cos\mu}{b^2} + \frac{\zeta\cos\nu}{c^2} \\ l &= 1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2} \end{aligned} \tag{5}$$

ist. Für einen Punkt $\xi$, $\eta$, $\zeta$ im Innern des Ellipsoides ist $l$ positiv; und da $k^2$ und $h$ ebenfalls wesentlich positiv sind, so wird in dem Ausdrucke

$$u = -\frac{k}{h} \pm \frac{\sqrt{k^2 + hl}}{h},$$

welcher stets positiv zu nehmen ist, das obere Zeichen beizubehalten sein, daher

$$u = \frac{-k + \sqrt{k^2 + hl}}{h} \tag{6}$$

und das Zeichen der Quadratwurzel positiv. Die Winkel $\lambda$, $\mu$, $\nu$ sind von einander nicht unabhängig, und lassen sich durch zwei andere $\theta$, $\omega$ ersetzen, welche, bezogen auf das Axensystem, dessen Ursprung in $[m_1]$ liegt, dieselbe Bedeutung haben, wie die in Fig. 274 auf das durch $O$ gehende Axensystem bezogenen Winkel; dann ist

$$\cos\lambda = \cos\theta; \qquad \cos\mu = \sin\theta\cos\omega; \qquad \cos\nu = \sin\theta\sin\omega \tag{7}$$

$$do = \sin\theta\, d\theta\, d\omega \tag{8}$$

und die Integrationsgrenzen sind:

für $\theta$ : 0 und $\pi$; für $\omega$: 0 und $2\pi$.

Substituirt man den Werth

$$u^2 = \frac{2k^2 + hl}{h^2} - 2\,\frac{k}{h}\sqrt{k^2 + hl} \tag{6a}$$

in den Ausdruck (1), so erhält man eine Reihe von Integralen, deren Ausführung durch die folgenden Sätze theilweise umgangen werden kann. Es sei in dem Integrale

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F(\theta,\,\omega)\,do. \tag{9}$$

a) $F(\theta,\,\pi + \omega) = -\,F(\theta,\,\omega)$, so wird

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F(\theta,\,\omega)\sin\theta\,d\theta\,d\omega = \int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\Big[\int_0^{\pi} F(\theta,\,\omega)\,d\omega + \int_{\pi}^{2\pi} F(\theta,\,\omega)\,d\omega\Big].$$

Setzt man im zweiten Integrale $\omega = \pi + \omega_1$ und lässt zum Schlusse den Index 1 wieder weg, da die Bezeichnung der Integrationsvariabeln willkürlich ist, so folgt:

$$A = \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \left[\int_0^\pi F(\theta,\ \omega)\, d\omega - \int_0^\pi F(\theta,\ \omega)\, d\omega\right],\ \text{d. h. } A = 0. \tag{9a}$$

b) Es sei $F(\theta,\ \pi \pm \omega) = F(\theta,\ \omega)$. Zerlegt man das Integral nach $\omega$ in zwei andere zwischen den Grenzen 0 und $\pi$ und zwischen $\pi$ und $2\pi$ und substituirt in dem zweiten $\omega = \pi + \omega_1$, so wird:

$$A = 2\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^\pi F(\theta,\ \omega)\, d\omega.$$

Zerlegt man nunmehr das Integral nach $\omega$ neuerdings in zwei andere zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ und zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und $\pi$ und substituirt im zweiten $\omega = \pi - \omega_1$, so erhält man

$$A = 4\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\theta,\ \omega)\, d\omega. \tag{9b}$$

c) Sei $F(\theta,\ \pi + \omega) = F(\theta,\ \omega)$; $F(\theta,\ \pi - \omega) = -F(\theta,\ \omega)$, so erhält man in derselben Weise

$$A = 0. \tag{9c}$$

d) Sei $F(\pi - \theta,\ \omega) = F(\theta,\ \omega)$, so wird man in der Zerlegung

$$A = \int_0^{2\pi} d\omega \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\theta,\ \omega) \sin\theta\, d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} F(\theta,\ \omega) \sin\theta\, d\theta\right]$$

in das zweite Integral $\theta = \pi - \theta_1$ substituiren, und erhält:

$$A = 2\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\theta,\ \omega) \sin\theta\, d\theta. \tag{9d}$$

e) Sei $F(\pi - \theta,\ \omega) = F(\theta,\ \omega)$; $F(\theta,\ \pi \pm \omega) = F(\theta,\ \omega)$, so folgt durch Combination von b) und d):

$$A = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\theta,\ \omega) \sin\theta\, d\theta\, d\omega. \tag{9e}$$

*f*) Sei $F(\pi - \theta,\ \pi + \omega) = -F(\theta,\ \omega)$; zerlegt man das Integral nach $\omega$ in zwei andere zwischen den Grenzen 0 und $\pi$ und zwischen $\pi$ und $2\pi$, und substituirt im zweiten $\theta = \pi - \theta_1$, $\omega = \pi + \omega_1$, so folgt

$$A = 0. \tag{9f}$$

Wendet man nun auf $k^2$, $hl$ die Substitution (f) an, so bleiben ihre Werthe ungeändert; da aber $k$ eine Function ist, welche der Bedingung *f*) genügt, so ist auch $\frac{2k}{h}\sqrt{k^2 + hl}$ eine solche Function, so dass dieser Theil des Integrals $\int u^2\, do$ verschwindet. Es bleibt daher, die Dichte als constant vorausgesetzt:

$$V = \delta \int\int \frac{k^2}{h^2}\, do + \tfrac{1}{2}\delta l \int\int \frac{1}{h}\, do.$$

Hier ist weiter:

$$k^2 = \frac{\xi^2}{a^4}\cos^2\lambda + \frac{\eta^2}{b^4}\cos^2\mu + \frac{\zeta^2}{c^4}\cos^2\nu + \frac{2\xi\eta}{a^2 b^2}\cos\lambda\cos\mu + \frac{2\xi\zeta}{a^2 c^2}\cos\lambda\cos\nu + \frac{2\eta\zeta}{b^2 c^2}\cos\mu\cos\nu.$$

$\cos\lambda\cos\mu$ und $\cos\lambda\cos\nu$ genügen der Substitution a); $\cos\mu\cos\nu$ der Substitution c); $h^2$ bleibt hierbei unverändert, so dass die Integrale der drei letzten Glieder verschwinden, und man erhält:

$$V = \frac{\delta\xi^2}{a^4}L + \frac{\delta\eta^2}{b^4}M + \frac{\delta\zeta^2}{c^4}N + \delta l K, \tag{10}$$

wobei

$$K = \tfrac{1}{2}\int\int\frac{do}{h};\quad L = \int\int\frac{\cos^2\lambda}{h^2}do;\quad M = \int\int\frac{\cos^2\mu}{h^2}do;\quad N = \int\int\frac{\cos^2\nu}{h^2}do \tag{10a}$$

$$\theta = 0\,.\,.\,.\,.\,\pi;\qquad \omega = 0\,.\,.\,.\,.\,2\pi$$

ist. Hier genügen die zu integrirenden Functionen sämmtlich der Bedingung c), so dass:

$$K = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{do}{h};\quad L = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\lambda}{h^2}do;\quad M = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\mu}{h^2}do;\quad N = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\nu}{h^2}do. \tag{11}$$

Nun ist

$$h = \frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\omega}{b^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\omega}{c^2} =$$

$$= \left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)\cos^2\omega + \left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{c^2}\right)\sin^2\omega.$$

Setzt man daher

$$\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2} = B_1;\qquad \frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{c^2} = C_1, \tag{12a}$$

so wird

$$h = B_1\cos^2\omega + C_1\sin^2\omega;\qquad J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\omega}{B_1\cos^2\omega + C_1\sin^2\omega} \tag{13a}$$

$$K = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_1\sin\theta\,d\theta. \tag{14a}$$

Aus (13a) erhält man:

$$\frac{\partial J_1}{\partial b} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\omega\cos^2\omega}{h^2}\frac{\partial B_1}{\partial b} = \frac{2}{b^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\mu}{h^2}d\omega;\qquad \frac{\partial J}{\partial c_1} = \frac{2}{c^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\nu}{h^2}d\omega$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial a} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\omega}{h^2}\left(\cos^2\omega\frac{\partial B_1}{\partial a} + \sin^2\omega\frac{\partial C_1}{\partial a}\right) = \frac{2}{a^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\lambda}{h^2}d\omega,$$

demnach

$$L = 4a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta\frac{\partial J_1}{\partial a};\quad M = 4b^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta\frac{\partial J_1}{\partial b};\quad N = 4c^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta\frac{\partial J_1}{\partial c}. \tag{14b}$$

Nun ist

$$J_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{B_1C_1}};\qquad \frac{\partial J_1}{\partial b} = -\frac{\pi}{4B_1\sqrt{B_1C_1}}\frac{\partial B_1}{\partial b} = \frac{\pi}{2b^3}\frac{\sin^2\theta}{B_1\sqrt{B_1C_1}};$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial c} = \frac{\pi}{2c^3}\frac{\sin^2\theta}{C_1\sqrt{B_1C_1}}$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial a} = -\frac{\pi}{4B_1C_1\sqrt{B_1C_1}}\left(B_1\frac{\partial C_1}{\partial a} + C_1\frac{\partial B_1}{\partial a}\right) = \frac{\pi}{2a^3}\frac{(B_1 + C_1)\cos^2\theta}{B_1C_1\sqrt{B_1C_1}},$$

demnach[1])

---

[1]) Nach (10a) oder (11) ist

$$\frac{L}{a^2} + \frac{M}{b^2} + \frac{N}{c^2} = 2K,\quad\text{daher}\quad a\frac{\partial J_1}{\partial a} + b\frac{\partial J_1}{\partial b} + c\frac{\partial J_1}{\partial c} = 2J_1,$$

welche Gleichung als Probegleichung dienen kann.

$$4b^3\frac{\partial J_1}{\partial b} = 2\pi\frac{\sin^2\theta}{B_1\sqrt{B_1C_1}};\qquad 4c^3\frac{\partial J_1}{\partial c} = 2\pi\frac{\sin^2\theta}{C_1\sqrt{B_1C_1}};$$
$$4a^3\frac{\partial J_1}{\partial a} = 2\pi\frac{\cos^2\theta}{\sqrt{B_1C_1}}\left(\frac{1}{B_1}+\frac{1}{C_1}\right) \tag{15}$$

und

$$K = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{B_1C_1}};\qquad L = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{B_1C_1}}\left(\frac{1}{B_1}+\frac{1}{C_1}\right)$$
$$M = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3\theta\,d\theta}{B_1\sqrt{B_1C_1}};\quad N = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3\theta\,d\theta}{C_1\sqrt{B_1C_1}}. \tag{14c}$$

Nun ist

$$V = \delta\cdot K - \frac{\delta\xi^2}{a^2}\left(K - \frac{1}{a^2}L\right) - \frac{\delta\eta^2}{b^2}\left(K - \frac{1}{b^2}M\right) - \frac{\delta\zeta^2}{c^2}\left(K - \frac{1}{c^2}N\right), \tag{16}$$

daher

$$X = +\frac{\partial V}{\partial\xi} = -\frac{2\delta\xi}{a^2}\left(K - \frac{1}{a^2}L\right)$$
$$Y = +\frac{\partial V}{\partial\eta} = -\frac{2\delta\eta}{b^2}\left(K - \frac{1}{b^2}M\right) \tag{17}$$
$$Z = +\frac{\partial V}{\partial\zeta} = -\frac{2\delta\zeta}{c^2}\left(K - \frac{1}{c^2}N\right).$$

Durch die Substitution

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+t}}$$

erhält man

$$B_1 = \frac{b^2+t}{b^2(a^2+t)};\qquad C_1 = \frac{c^2+t}{c^2(a^2+t)},$$

demnach, wenn

$$T = \sqrt{\left(1+\frac{t}{a^2}\right)\left(1+\frac{t}{b^2}\right)\left(1+\frac{t}{c^2}\right)} \tag{18}$$

gesetzt wird:

$$K = \pi\int_0^\infty\frac{dt}{T};\qquad L = \pi\int_0^\infty\frac{dt}{T}\,a^2\left[\frac{1}{1+\frac{t}{b^2}}+\frac{1}{1+\frac{t}{c^2}}\right]$$
$$M = \pi\int_0^\infty\frac{t\,dt}{\left(1+\frac{t}{b^2}\right)T};\qquad N = \pi\int_0^\infty\frac{t\,dt}{\left(1+\frac{t}{c^2}\right)T}. \tag{19}$$

Setzt man:

$$L' = K - \frac{1}{a^2}L = \pi\int_0^\infty\frac{dt}{T}\left[1 - \frac{1}{1+\frac{t}{b^2}} - \frac{1}{1+\frac{t}{c^2}}\right]$$
$$M' = K - \frac{1}{b^2}M = \pi\int_0^\infty\frac{dt}{T\left(1+\frac{t}{b^2}\right)} \tag{20a}$$
$$N' = K - \frac{1}{c^2}N = \pi\int_0^\infty\frac{dt}{T\left(1+\frac{t}{c^2}\right)},$$

so wird[1])

[1]) Es ist $L' + M' + N' = K$.

$$V = \delta \cdot K - \frac{\delta \xi^2}{a^2} L' - \frac{\delta \eta^2}{b^2} M' - \frac{\delta \zeta^2}{c^2} N'$$
$$X = -\frac{2\delta\xi}{a^2} L'; \quad Y = -\frac{2\delta\eta}{b^2} M'; \quad Z = -\frac{2\delta\zeta}{c^2} N'. \tag{21}$$

In diesen Formeln spielt die $x$-Axe insofern eine besondere Rolle, als der Winkel $\theta$ auf sie bezogen ist. Es ist sofort klar, dass man ähnliche Formeln erhalten würde, wenn man von der $y$- oder $z$-Axe ausgehen würde. Sei dann:

$$\frac{\cos^2\theta}{b^2} + \frac{\sin^2\theta}{a^2} = A_2 \qquad \frac{\cos^2\theta}{c^2} + \frac{\sin^2\theta}{a^2} = A_3$$
$$\frac{\cos^2\theta}{b^2} + \frac{\sin^2\theta}{c^2} = C_2 \qquad \frac{\cos^2\theta}{c^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2} = B_3 \tag{12b}$$

$$J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{C_2 \cos^2\omega + A_2 \sin^2\omega}; \quad J_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{A_3 \cos^2\omega + B_3 \sin^2\omega}, \tag{13b}$$

so wird

$$K = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{A_2 C_2}}; \qquad K = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{A_3 B_3}}.$$

Die Identität dieser Integrale mit dem früheren folgt sofort durch die Substitution:

$$\cos\theta = \frac{b}{\sqrt{b^2+t}}; \quad \cos\theta = \frac{c}{\sqrt{c^2+t}},$$

indem für $K$ sofort die Form (19) resultirt. Die drei anderen Integrale erhält man in den Formen:

$$L' = \pi \int_0^\infty \frac{dt}{T\left(1+\frac{t}{a^2}\right)}; \quad M' = \pi \int_0^\infty \frac{dt}{T}\left[1 - \frac{1}{1+\frac{t}{a^2}} - \frac{1}{1+\frac{t}{c^2}}\right]$$
$$N' = \pi \int_0^\infty \frac{dt}{T\left(1+\frac{t}{c^2}\right)} \tag{20b}$$

$$L' = \pi \int_0^\infty \frac{dt}{T\left(1+\frac{t}{a^2}\right)}; \quad M' = \pi \int_0^\infty \frac{dt}{T\left(1+\frac{t}{b^2}\right)}$$
$$N' = \int_0^\infty \frac{dt}{T}\left[1 - \frac{1}{\left(1+\frac{t}{a^2}\right)} - \frac{1}{\left(1+\frac{t}{b^2}\right)}\right], \tag{20c}$$

sodass man einfach schreiben kann[1])

$$K = \pi \int_0^\infty \frac{dt}{T}; \; L' = \pi \int_0^\infty \frac{dt}{T\left(1+\frac{t}{a^2}\right)}; \; M' = \pi \int_0^\infty \frac{dt}{T\left(1+\frac{t}{b^2}\right)}; \; N' = \pi \int_0^\infty \frac{dt}{T\left(1+\frac{t}{c^2}\right)}. \tag{22}$$

---

[1]) Hieraus folgt dann die für beliebige Werthe von $a$, $b$, $c$ gültige Identität:

$$\int_0^\infty \frac{dt}{T}\left[\frac{1}{1+\frac{t}{a^2}} + \frac{1}{1+\frac{t}{b^2}} + \frac{1}{1+\frac{t}{c^2}}\right] = \int_0^\infty \frac{dt}{T}.$$

Durch die Substitution

$$t = a^2\,\frac{1-\vartheta^2}{\vartheta^2}$$

erhält man, wenn

$$\varkappa^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}, \quad \varkappa'^2 = \frac{a^2-c^2}{a^2}; \quad \Pi = \sqrt{(1-\varkappa^2\vartheta^2)(1-\varkappa'^2\vartheta^2)} \tag{23}$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned} K &= 2bc\pi\int_0^1\frac{d\vartheta}{\Pi}; & \frac{L'}{a^2} &= \frac{2bc\pi}{a^2}\int_0^1\frac{\vartheta^2\,d\vartheta}{\Pi};\\ \frac{M'}{b^2} &= \frac{2bc\pi}{a^2}\int_0^1\frac{\vartheta^2\,d\vartheta}{(1-\varkappa^2\vartheta^2)\Pi}; & \frac{N'}{c^2} &= \frac{2bc\pi}{a^2}\int_0^1\frac{\vartheta^2\,d\vartheta}{(1-\varkappa'^2\vartheta^2)\Pi}. \end{aligned} \tag{24}$$

Setzt man

$$\int_0^1\frac{d\vartheta}{\Pi} = J, \tag{25}$$

so wird

$$\int_0^1\frac{\vartheta^2\,d\vartheta}{(1-\varkappa^2\vartheta^2)\Pi} = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial J}{\partial\varkappa}; \qquad \int_0^1\frac{\vartheta^2\,d\vartheta}{(1-\varkappa'^2\vartheta^2)\Pi} = \frac{1}{\varkappa'}\frac{\partial J}{\partial\varkappa'}, \tag{25a}$$

so dass sich die drei Attractionen auf ein einziges Integral zurückführen lassen[1]. Für $\xi = \eta = \zeta = 0$ geht $V$ in $\delta\cdot K$ über; dieses ist demnach das Potential des Ellipsoïdes auf einen im Mittelpunkte desselben gelegenen Punkt.

Für ein Ellipsoïd, dessen Halbaxen $a'$, $b'$, $c'$ dasselbe Verhältniss haben, so dass

$$a' : b' : c' = a : b : c$$

ist, werden $\varkappa$ und $\varkappa'$ dieselben Werthe erhalten, daher sind nach (21) und (25a) die Attractionen auf einen inneren Punkt dieselben. Denkt man sich nun ein concentrisches Ellipsoïd, dessen Axen $a'$, $b'$, $c'$ kleiner sind als $a$, $b$, $c$, so wird die Attraction des inneren, kleineren Ellipsoïdes dieselbe sein, wie die des äusseren, grossen, folglich die Attraction der zwischen beiden befindlichen Schale gleich Null. Eine von zwei concentrischen ähnlichen Ellipsoïden begrenzte Schale übt demnach auf einen in ihrem Hohlraume befindlichen Punkt keine Anziehung aus[2]. Man kann daher die Attraction eines beliebigen Ellipsoïdes auf einen inneren Punkt durch die Attraction desjenigen concentrischen ähnlichen Ellipsoïdes ersetzen, welches durch den angezogenen Punkt $[m_1]$ geht; für dieses ist dann der angezogene Punkt auch bereits als äusserer an der Oberfläche desselben liegender anzusehen; es ist

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1$$

und die Formeln (20), (24), (25) gelten daher auch für diesen Fall; für das Potential kann auch sofort in (10): $l = 0$ gesetzt werden[3].

---

[1]) Wollte man für alle drei Attractionen symmetrische Formen, so würden überdies die Verhältnisse $\frac{b^2-a^2}{b^2}$ u. s. w. eintreten.

[2]) Nicht dasselbe gilt von dem Potentiale. Dieses wird, wenn

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \alpha$$

ist:

$$V = \delta(K - K') = 2\delta\pi bc(1-\alpha^2)\int_0^1\frac{d\vartheta}{\Pi}.$$

[3]) Doch dürfen die Kräfte nicht aus dieser vereinfachten Form $V$ abgeleitet werden, da die Bedingung $l = 0$ erst nach der Differentiation eingeführt werden darf.

**82.** Potential eines Ellipsoïdes auf einen äusseren Punkt. Für den äusseren Punkt ist $l$ negativ; damit fallen die aus (6) und (6a) in **81** sich ergebenden Vereinfachungen weg. Doch lässt sich die Berechnung der Anziehung auf einen äusseren Punkt mittels des Theorems von Jvory auf den vorigen Fall zurückführen.

Die Componenten der Anziehung des Ellipsoïdes $E$ (Fig. 275) auf den Punkt $m_1$, dessen Coordinaten mit $\xi_1$, $\eta_1$, $\zeta_1$ bezeichnet werden mögen, sind gegeben durch:

$$X = -\int\int\int\frac{\delta\cdot dx\,dy\,dz(x-\xi_1)}{u^3} = \int\int\delta\cdot dy\,dz\int_{u'}^{u''}\frac{\partial\frac{1}{u}}{\partial x}dx \tag{1}$$

und ähnlich für $Y$, $Z$, wobei die Grenzwerthe $u'$, $u''$ diejenigen Werthe von $u$ sind, welche sich auf die Durchgangspunkte der durch das Element $dm$ parallel zur $X$-Axe gezogenen Geraden $A'A''$ mit dem Ellipsoïde[1]) beziehen. Es ist daher:

$$X = \int\int\delta\cdot dy\,dz\left(\frac{1}{u''}-\frac{1}{u'}\right) \tag{2}$$

das Integral ausgedehnt über alle Grenzpunkte $A'$, $A''$, d. h. über die ganze Oberfläche des Ellipsoïdes $E$.

Ordnet man jedem Punkte des Ellipsoïdes $E$ einen anderen $x_1, y_1, z_1$ zu, so dass mit den Constanten $a_1$, $b_1$, $c_1$:

$$x_1 = \frac{a_1}{a}x;\quad y_1 = \frac{b_1}{b}y;\quad z_1 = \frac{c_1}{c}z \tag{3}$$

ist, so wird da

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ ist, auch } \frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{y_1^2}{b_1^2}+\frac{z_1^2}{c_1^2} = 1 \tag{4}$$

sein, d. h. die zugeordneten Punkte bilden ebenfalls ein Ellipsoïd. Wählt man die Axen so, dass

$$\frac{\xi_1^2}{a_1^2}+\frac{\eta_1^2}{b_1^2}+\frac{\zeta_1^2}{c_1^2} = 1 \tag{5}$$

ist, so geht dieses zweite Ellipsoïd $E_1$ durch den Punkt $m_1$. Die den Punkten $A'$, $A''$ entsprechenden Punkte seien $A_1'$, $A_1''$, und umgekehrt möge dem Punkte $m_1$ ein Punkt $m_0$ entsprechen, dessen Coordinaten $\xi$, $\eta$, $\zeta$ bestimmt sind durch die Beziehungen

$$\xi_1 = \frac{a_1}{a}\xi,\quad \eta_1 = \frac{b_1}{b}\eta,\quad \zeta_1 = \frac{c_1}{c}\zeta \text{ oder } \xi = \frac{a}{a_1}\xi_1,\quad \eta = \frac{b}{b_1}\eta_1,\quad \zeta = \frac{c}{c_1}\zeta_1,$$

welcher für das Ellipsoïd $E_1$ ein innerer Punkt ist. Die Anziehung des Ellipsoïdes $E_1$ auf $m_0$ ist daher nach früherem bekannt; sie lässt sich schreiben:

$$X' = \int\int\int\frac{\delta\cdot dx_1\,dy_1\,dz_1\,(x_1-\xi)}{u_1^3} = \int\int\delta\,dy_1\,dz_1\int_{u_1'}^{u_1''}\frac{\partial\frac{1}{u_1}}{\partial x_1}dx_1 =$$

$$= \int\int\delta\,dy_1\,dz_1\left(\frac{1}{u_1''}-\frac{1}{u_1'}\right).$$

Angenommen nun, es lasse sich das Ellipsoïd $E_1$ so bestimmen, dass für zwei beliebige Punktepaare $P'(x'y'z')$, $P''(x''y''z'')$ des Ellipsoïdes $E$ und die entsprechenden $P_1'(x_1'y_1'z_1')$, $P_1''(x_1''y_1''z_1'')$ die wechselseitigen Ent-

[1]) Die Integration für die $X$-Componenten ist ja nach (1) zuerst nach $x$ vorzunehmen.

fernungen $P' P_1'' = P'' P_1'$ sind, so wird auch $A_1' A'' = A' A_1''$ u. s. w., also auch $A' m_1 = A_1' m_0$; $A'' m_1 = A_1'' m_0$, d. h. $u_1'' = u''$; $u_1' = u'$, demnach

$$X' = \int\int \delta \cdot dy_1\, dz_1 \left(\frac{1}{u''} - \frac{1}{u'}\right) = \frac{b_1 c_1}{b c} \int\int \delta\, dy\, dz \left(\frac{1}{u''} - \frac{1}{u'}\right)$$

$$X' = \frac{b_1 c_1}{b c} X,$$

daher

$$X = \frac{b c}{b_1 c_1} X'; \qquad Y = \frac{a c}{a_1 c_1} Y'; \qquad Z = \frac{a b}{a_1 b_1} Z',$$

d. h. die Anziehung des Ellipsoides $E$ auf den Punkt $m_1$ lässt sich aus den Anziehungen des correspondirenden Ellipsoïdes $E_1$ auf den entsprechenden, für dieses Ellipsoïd inneren Punkt $m_0$ direkt ableiten.

Es ist aber

$$\begin{aligned}
\text{I} = P' P_1'' &= (x' - x_1'')^2 + (y' - y_1'')^2 + (z' - z_1'')^2 = \\
&= x'^2 + y'^2 + z'^2 + x_1''^2 + y_1''^2 + z_1''^2 - 2\,(x' x_1'' + y' y_1'' + z' z_1'') \\
\text{II} = P'' P_1' &= (x'' - x_1')^2 + (y'' - y_1')^2 + (z'' - z_1')^2 = \\
&= x''^2 + y''^2 + z''^2 + x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2 - 2\,(x'' x_1' + y'' y_1' + z'' z_1').
\end{aligned}$$

Führt man hier für die Coordinaten der Punkte $P_1'$, $P_1''$ die Beziehungen (8) ein, und setzt

$$a_1^2 = a^2 + \varepsilon_1; \qquad b_1^2 = b^2 + \varepsilon_2; \qquad c_1^2 = c^2 + \varepsilon_3,$$

so folgt

$$\begin{aligned}
\text{I} = x'^2 + y'^2 + z'^2 + x''^2 + y''^2 + z''^2 - 2\left(\frac{a_1}{a} x' x'' + \frac{b_1}{b} y' y'' + \frac{c_1}{c} z' z''\right) + \\
+ \frac{\varepsilon_1}{a^2} x''^2 + \frac{\varepsilon_2}{b^2} y''^2 + \frac{\varepsilon_3}{c^2} z''^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{II} = x'^2 + y'^2 + z'^2 + x''^2 + y''^2 + z''^2 - 2\left(\frac{a_1}{a} x' x'' + \frac{b_1}{b} y' y'' + \frac{c_1}{c} z' z''\right) + \\
+ \frac{\varepsilon_1}{a^2} x'^2 + \frac{\varepsilon_2}{b^2} y'^2 + \frac{\varepsilon_3}{c^2} z'^2.
\end{aligned}$$

Damit also I = II werde, muss

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 \left(\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} + \frac{z''^2}{c^2}\right) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\frac{y''^2}{b^2} + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)\frac{z''^2}{c^2} = \\
= \varepsilon_1 \left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2}\right) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\frac{y'^2}{b^2} + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)\frac{z'^2}{c^2}.
\end{aligned}$$

Da aber die beiden Punkte $(x' y' z')$, $(x'' y'' z'')$ Punkte des Ellipsoïdes $E$ sind, so sind die auf beiden Seiten mit $\varepsilon_1$ multiplicirten Ausdrücke gleich 1, und die letzte Gleichung reducirt sich auf

$$(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\left(\frac{y''^2 - y'^2}{b^2}\right) + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)\left(\frac{z''^2 - z'^2}{c^2}\right) = 0.$$

Diese Gleichung kann für beliebige Punkte nur erfüllt sein, wenn $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$ ist. Dann ist, wenn der Index bei $\varepsilon$ weggelassen wird:

$$a_1^2 = a^2 + \varepsilon; \qquad b_1^2 = b^2 + \varepsilon; \qquad c_1^2 = c^2 + \varepsilon \tag{7}$$

d. h. das Ellipsoïd $E_1$ ist dem Ellipsoïde $E$ homofocal. Durch den Punkt $m_1$ giebt es nur ein zu $E$ homofocales Ellipsoïd, für welches sich der Werth von $\varepsilon$ aus Gleichung (5), d. i. aus

$$\frac{\xi_1^2}{a^2 + \varepsilon} + \frac{\eta_1^2}{b^2 + \varepsilon} + \frac{\zeta_1^2}{c^2 + \varepsilon} = 1 \tag{8}$$

bestimmt[1]). Dann erhält man die Anziehungen $X'$, $Y'$, $Z'$ nach den Formeln 81 (21), (22) oder (25), wobei jedoch überall $a^2+\epsilon$, $b^2+\epsilon$, $c^2+\epsilon$ an Stelle von $a^2$, $b^2$, $c^2$ und $\xi$, $\eta$, $\zeta$ an Stelle von $\xi_1$, $\eta_1$, $\zeta_1$ zu setzen ist. Es wird also

$$X' = -2\delta\xi\pi\int_0^\infty \frac{dt}{(a^2+\epsilon+t)\sqrt{\left(1+\frac{t}{a^2+\epsilon}\right)\left(1+\frac{t}{b^2+\epsilon}\right)\left(1+\frac{t}{c^2+\epsilon}\right)}}$$

$$X = -2\delta\frac{a}{a_1}\xi_1\pi\sqrt{a^2+\epsilon}\cdot bc\int_0^\infty \frac{dt}{(a^2+\epsilon+t)\sqrt{(a^2+\epsilon+t)(b^2+\epsilon+t)(c^2+\epsilon+t)}}.$$

Setzt man hier $\epsilon+t=t_1$, so transformirt sich dieser Ausdruck in

$$X = -2\delta\xi_1\pi abc\int_\epsilon^\infty \frac{dt}{(a^2+t)\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}$$

$$= -\frac{2\delta\xi_1\pi}{a^2}\int_\epsilon^\infty \frac{dt}{\left(1+\frac{t}{a^2}\right)T}.$$

Man erhält daher das Potential und die Anziehungen eines Ellipsoides, dessen Axen $a$, $b$, $c$ sind, auf einen äusseren Punkt $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ ebenfalls nach den Formeln

$$\begin{aligned} V &= \delta\cdot K - \frac{\delta\xi_1^2}{a^2}L' - \frac{\delta\eta_1^2}{b^2}M' - \frac{\delta\zeta_1^2}{c^2}N' \\ X &= -\frac{2\delta\xi_1}{a^2}L'; \quad Y = -\frac{2\delta\eta_1}{b^2}M'; \quad Z = -\frac{2\delta\zeta_1}{c^2}N', \end{aligned} \tag{9}$$

wobei nun

$$K = \pi\int_\epsilon^\infty \frac{dt}{T};$$

$$L' = \pi\int_\epsilon^\infty \frac{dt}{\left(1+\frac{t}{a^2}\right)T}; \quad M' = \pi\int_\epsilon^\infty \frac{dt}{\left(1+\frac{t}{b^2}\right)T}; \quad N' = \pi\int_\epsilon^\infty \frac{dt}{\left(1+\frac{t}{c^2}\right)T} \tag{10}$$

$$T = \sqrt{\left(1+\frac{t}{a^2}\right)\left(1+\frac{t}{b^2}\right)\left(1+\frac{t}{c^2}\right)}$$

und der Werth von $\epsilon$ aus der Gleichung (8) zu ermitteln ist. Rückt der Punkt an die Oberfläche des Ellipsoides heran, so wird $\epsilon=0$, und die Formeln gehen in die früheren über. Setzt man wieder

$$t = a^2\frac{1-\theta^2}{\theta^2},$$

so folgt

$$\varkappa^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}, \quad \varkappa'^2 = \frac{a^2-c^2}{a^2}, \quad \Pi = \sqrt{(1-\varkappa^2\theta^2)(1-\varkappa'^2\theta^2)}$$

$$K = 2bc\pi\int_0^{\frac{a}{\sqrt{a^2+\epsilon}}}\frac{d\theta}{\Pi}; \quad \frac{L'}{a^2} = \frac{2bc\pi}{a^2}\int_0^{\frac{a}{\sqrt{a^2+\epsilon}}}\frac{\theta^2\,d\theta}{\Pi}; \tag{11}$$

$$\frac{M'}{b^2} = \frac{2bc\pi}{a^2}\int_0^{\frac{a}{\sqrt{a^2+\epsilon}}}\frac{\theta^2\,d\theta}{(1-\varkappa^2\theta^2)\Pi}; \quad \frac{N'}{c^2} = \frac{2bc\pi}{a^2}\int_0^{\frac{a}{\sqrt{a^2+\epsilon}}}\frac{\theta^2\,d\theta}{(1-\varkappa'^2\theta^2)\Pi}.$$

---

[1]) Da $m_1$ ein äusserer Punkt ist, daher $a_1$, $b_1$, $c_1$ grösser als $a$, $b$, $c$ sein müssen, so muss $\epsilon$ positiv sein. Für $\epsilon$ ist daher die positive Wurzel der Gleichung (8) zu wählen.

Für das Rotationsellipsoid sei $b = c$, $\varkappa^2 = \varkappa'^2$, $\Pi = 1 - \varkappa^2\,\theta^2$. Für das abgeplattete Rotationsellipsoid wird $a < b$, daher $\varkappa^2$ negativ[1]); sei also

$$\frac{b^2 - a^2}{a^2} = \lambda^2 = -\varkappa^2,$$

so wird

$$\int\frac{d\theta}{\Pi} = \frac{1}{\lambda}\,arctang\,\lambda\theta;\quad \int\frac{\theta^2\,d\theta}{\Pi} = \frac{\theta}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^3}\,arctang\,\lambda\theta;$$

$$\int\frac{\theta^2\,d\theta}{\Pi^2} = -\frac{\theta}{2\lambda^2(1+\lambda^2\theta^2)} + \frac{1}{2\lambda^3}\,arctang\,\lambda\theta.$$

Ersetzt man noch $\theta$ durch $\lambda\theta = l$, so wird für die beiden Grenzen 0 und $\dfrac{\lambda a}{\sqrt{a^2+\varepsilon}}$ zu nehmen sein; daher, weil sämmtliche Integrale für die untere Grenze verschwinden:

$$K = \frac{2b^2\pi}{\lambda}\,arctang\,l;\quad \frac{L'}{a^2} = \frac{2b^2\pi}{a^2\lambda^3}(l - arctang\,l)$$

$$\frac{M'}{b^2} = \frac{N'}{c^2} = \frac{b^2\pi}{a^2\lambda^3}\left(arctang\,l - \frac{l}{1+l^2}\right);\quad l = \frac{\lambda a}{\sqrt{a^2+\varepsilon}} = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{a^2+\varepsilon}} \tag{12}$$

Sind die Coordinaten des angezogenen Punktes in dem Meridianschnitte, welcher durch diesen Punkt geht, $\xi_1$, $\rho_1$, so wird $\varepsilon$ die Lösung der Gleichung

$$\frac{\xi_1^2}{a^2+\varepsilon} + \frac{\rho_1^2}{b^2+\varepsilon} = 1.$$

für einen inneren Punkt und für einen Punkt auf der Oberfläche selbst wird $l = \lambda$.

Wesentlich schwieriger wird die Behandlung des Problems, wenn die Dichte nicht als constant angesehen werden kann. Das Gesetz der Dichte wird dann durch eine Function des Ortes

$$\delta = F(x, y, z)$$

gegeben sein müssen, und die Integrationen werden dann in den meisten Fällen unausführbar. Eine verhaltnissmässig einfache Lösung kann man für den Fall erhalten, dass die Massen in concentrischen homofocalen Schalen gleicher Dichtigkeit angeordnet sind. Sei für eine Schale die innere Begrenzung ein Ellipsoid mit den Hauptaxen $a$, $b$, $c$, die äussere ein solches mit den Hauptaxen $\sqrt{a^2+\alpha}$, $\sqrt{b^2+\alpha}$, $\sqrt{c^2+\alpha}$ so ergeben sich die beiden zugehörigen Werthe von $\varepsilon$ aus den beiden Gleichungen:

$$\frac{\xi_1^2}{a^2+\varepsilon} + \frac{\eta_1^2}{b^2+\varepsilon} + \frac{\zeta_1^2}{c^2+\varepsilon} = 1$$

und

$$\frac{\xi_1^2}{a^2+\alpha+\varepsilon'} + \frac{\eta_1^2}{b^2+\alpha+\varepsilon'} + \frac{\zeta_1^2}{c^2+\alpha+\varepsilon'} = 1,$$

woraus sofort folgt

$$\varepsilon' = \varepsilon - \alpha. \tag{13}$$

Potential und Attraction der Schale erhält man, wenn man von dem für das äussere Ellipsoid geltenden Werthe die auf das innere Ellipsoid bezüglichen abzieht; für das innere gelten die Formeln (11); für das äussere ist überall $\sqrt{a^2+\alpha}$, $\sqrt{b^2+\alpha}$, $\sqrt{c^2+\alpha}$, $\varepsilon - \alpha$ an Stelle von $a$, $b$, $c$, $\varepsilon$ zu setzen. Daher wird, wenn man sich auf das abgeplattete Rotationsellipsoid beschränkt: $l' = l$, daher:

---

[1]) Ist $a > b$, das Ellipsoid ein überhöhtes, so wird $\varkappa$ positiv, und die Integrale drücken sich durch Logarithmen aus.

$$K_a = 2\,\frac{\sqrt{a^2+\alpha}(b^2+\alpha)\pi}{\sqrt{b^2-a^2}}\, arctang\, l;\quad \frac{L_a'}{a^2+\alpha} = \frac{2\sqrt{a^2+\alpha}(b^2+\alpha)\pi}{(b^2-a^2)\sqrt{b^2-a^2}}(l - arctang\, l)$$

$$\frac{M_a'}{b^2+\alpha} = \frac{N_a'}{c^2+\alpha} = \frac{\sqrt{a^2+\alpha}(b^2+\alpha)\pi}{\sqrt{b^2-a^2}}\left(arctang\, l - \frac{l}{1+l^2}\right),$$

daher

$$K_a - K_i = \frac{2\pi D}{\sqrt{b^2-a^2}}\, arctang\, l;\quad \frac{L_a'}{a^2+\alpha} - \frac{L_i'}{a^2} = \frac{2\pi D}{\sqrt{(b^2-a^2)^3}}(l - arctang\, l)$$

$$\frac{M_a'}{b^2+\alpha} - \frac{M_i'}{b^2} = \frac{N_a'}{c^2+\alpha} - \frac{N_i'}{c^2} = \frac{\pi D}{\sqrt{(b^2-a^2)^3}}\left(arctang\, l - \frac{l}{1+l^2}\right)$$

$$D = \sqrt{a^2+\alpha}(b^2+\alpha) - ab^2.$$

Nimmt man die Schichtung continuirlich, so dass die Dicke der Schichten nur unendlich klein ist, so wird $\alpha$ als unendlich kleine Grösse zu betrachten sein, und dann wird

$$D = \left(ab^2 + a\alpha + \tfrac{1}{2}\alpha\frac{b^2}{a}\right) - ab^2 = \left(a + \tfrac{1}{2}\frac{b^2}{a}\right)\alpha$$

oder da $\alpha$ der Zuwachs von $a^2$ beim Uebergange von einer Schichte zur nächstliegenden äusseren ist:

$$D = \frac{a^2 + \frac{1}{2}b^2}{a}\, d(a^2) = (2a^2 + b^2)da.$$

Da $b^2 - a^2 = k^2$ der lineare Abstand der Brennpunkte der Meridianellipse vom Mittelpunkte ist, daher für confocale Ellipsoïde constant, so wird man, $k$ an Stelle von $b$ einführend:

$$D = (3a^2 + k^2)da$$

$$d(\delta K) = \frac{2\pi\delta}{k}\, arctang\, l\cdot(3a^2 + k^2)da$$

erhalten, und es wird:

$$dX = -\frac{4\pi\xi_1}{k^3}\,\delta\cdot(3a^2 + k^2)(l - arctang\, l)da$$

$$dY = -\frac{4\pi\eta_1}{k^3}\,\delta\cdot(3a^2 + k^2)\left(arctang\, l - \frac{l}{1+l^2}\right)da$$

$$dZ = -\frac{4\pi\zeta_1}{k^3}\,\delta\cdot(3a^2 + k^2)\left(arctang\, l - \frac{l}{1+l^2}\right)da.$$

Da $l = \dfrac{k}{\sqrt{a^2+\varepsilon}}$ wegen $a^2 + \varepsilon = a^2 + \alpha + \varepsilon'$ für alle Schichten constant ist, so werden die Coëfficienten

$$\frac{4\pi}{k^3}(l - arctang\, l) = L_1,\quad \frac{4\pi}{k^3}\left(arctang\, l - \frac{l}{1+l^2}\right) = L_2 \qquad (14)$$

ebenfalls constant, und man erhält daher die Totalanziehungen

$$X = -L_1\xi_1\int_{a_0}^{a_1}\delta\cdot(3a^2 + k^2)da$$

$$Y = -L_2\eta_1\int_{a_0}^{a_1}\delta\cdot(3a^2 + k^2)da \qquad (15)$$

$$Z = -L_2\zeta_1\int_{a_0}^{a_1}\delta\cdot(3a^2 + k^2)da,$$

wobei nunmehr vorausgesetzt ist, dass $\delta$ als Function von $a$ gegeben ist.

**89.** Potential eines Massencomplexes auf einen sehr entfernten Punkt. Sind die Dimensionen der anziehenden Masse nur klein gegenüber der Entfernung des angezogenen Punktes, so kann man selbst für unregelmässige

Formen der anziehenden Massen leicht Reihenentwickelungen ableiten, welche um so rascher convergiren, je weiter der angezogene Punkt sich befindet. Legt man den Coordinatenanfang in einen vorläufig beliebig gelassenen Punkt der anziehenden Masse, seien $x$, $y$, $z$ die Coordinaten und $r$ der Radiusvector des Massenelementes; $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die Coordinaten und $\rho$ der Radiusvector des angezogenen Punktes, so ist

$$u^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = r^2 + \rho^2 - 2(x\xi + y\eta + z\zeta).$$

Ist $\rho$ sehr gross gegenüber $r$, so kann man $\frac{1}{u}$ nach Potenzen von $\frac{r}{\rho}$ entwickeln; es wird

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{\rho}\left[1 + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2 - \frac{2(x\xi + y\eta + z\zeta)}{\rho^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{\rho}\left[1 + \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{\rho^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{\rho}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{\rho^2}\right)^2\right],$$

demnach

$$V = \frac{k^2}{\rho}\int dm + \frac{k^2\xi}{\rho^3}\int x\,dm + \frac{k^2\eta}{\rho^3}\int y\,dm + \frac{k^2\zeta}{\rho^3}\int z\,dm$$
$$- \frac{k^2}{2\rho^3}\int r^2 dm + \frac{3}{2}\frac{k^2}{\rho^5}\int (x\xi + y\eta + z\zeta)^2 dm. \qquad (1)$$

$\int dm = M$ ist die Gesammtmasse. Legt man das Coordinatensystem so, dass der Ursprung in den Schwerpunkt der anziehenden Masse fällt, so werden die Integrale

$$\int x\,dm = 0, \quad \int y\,dm = 0, \quad \int z\,dm = 0$$

und es wird

$$V = \frac{k^2 M}{\rho} - \frac{k^2}{2\rho^3}\int r^2 dm +$$
$$+ \frac{3}{2}\frac{k^2}{\rho^5}\left[\xi^2\int x^2 dm + \eta^2\int y^2 dm + \zeta^2\int z^2 dm + 2\xi\eta\int xy\,dm + 2\eta\zeta\int yz\,dm + 2\zeta\xi\int xz\,dm\right]. \qquad (2)$$

Die Glieder erster Ordnung sind verschwunden. Ist die Entfernung $\rho$ so gross, dass man die Glieder zweiter Ordnung vernachlässigen kann, so wird

$$V = \frac{k^2 M}{\rho}$$

d. h. das Potential wird dasselbe, als wenn die Gesammtmasse im Schwerpunkt der anziehenden Masse vereinigt gedacht wird.

Wenn man die Richtungen der Coordinatenaxen mit den drei Hauptträgheitsaxen zusammenfallen lässt, so wird

$$\int xy\,dm = 0, \quad \int xz\,dm = 0, \quad \int yz\,dm = 0 \qquad (3)$$

und die Trägheitsmomente, bezogen auf die drei Hauptträgheitsaxen werden:

$$\begin{aligned} &\text{Um die } X\text{-Axe:} && A = \int (y^2 + z^2)\,dm \\ &\text{um die } Y\text{-Axe:} && B = \int (x^2 + z^2)\,dm \qquad (4) \\ &\text{um die } Z\text{-Axe:} && C = \int (x^2 + y^2)\,dm. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\frac{1}{2}(A + B + C) = \int r^2 dm \qquad \begin{aligned} \int x^2 dm &= \tfrac{1}{2}(B + C - A) \\ \int y^2 dm &= \tfrac{1}{2}(A + C - B) \\ \int z^2 dm &= \tfrac{1}{2}(A + B - C). \end{aligned} \qquad (4a)$$

Führt man die Werthe aus (3) und (4) in (2) ein, so folgt:

$$V = \frac{k^2 M}{\rho} - \frac{k^2}{4\rho^3}(A + B + C) +$$
$$+ \frac{3}{4}\frac{k^2}{\rho^5}[\xi^2(B + C - A) + \eta^2(A + C - B) + \zeta^2(A + B - C)]$$

oder reducirt:

$$V = \frac{k^2 M}{\rho} + \frac{k^2}{2\rho^3}(A + B + C) - \frac{3}{2}\frac{k^2}{\rho^5}(A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2). \qquad (5)$$

Sind die Winkel, welche die Verbindungslinie des Schwerpunktes und des angezogenen Punktes mit den drei Hauptträgheitsaxen bildet $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, so wird $\xi = \rho \cos\alpha$, $\eta = \rho\cos\beta$, $\zeta = \rho\cos\gamma$, demnach

$$V = \frac{k^2 M}{\rho} + \frac{1}{2}\frac{k^2}{\rho^3}\{(A + B + C) - 3(A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma)\} \qquad (5a)$$

oder auch

$$V = \frac{k^2 M}{\rho} + \frac{1}{2}\frac{k^2}{\rho^3}\{(A + B + C) - 3[(A - C)\cos^2\alpha + (B - C)\cos^2\beta + C]\} =$$
$$= \frac{k^2 M}{\rho} + \frac{1}{2}\frac{k^2}{\rho^3}\{(A - C)(1 - 3\cos^2\alpha) + (B - C)(1 - 3\cos^2\beta)\} \qquad (5b)$$

Durch Differentiation von $V$ nach $\xi$, $\eta$, $\zeta$ [Ausdruck (5)] erhält man die Kraftcomponenten:

$$X = -\frac{k^2 M\xi}{\rho^3}\left(G + \frac{3A}{M\rho^2}\right); \quad Y = -\frac{k^2 M\eta}{\rho^3}\left(G + \frac{3B}{M\rho^2}\right); \quad Z = -\frac{k^2 M\zeta}{\rho^3}\left(G + \frac{3C}{M\rho^2}\right)$$
$$G = 1 + \frac{3}{2M\rho^2}(A + B + C) - \frac{15}{2M\rho^4}(A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2). \qquad (6)$$

Für Rotationskörper sind zwei von den drei Hauptträgheitsmomenten einander gleich; sei $C$ das Trägheitsmoment um die Rotationsaxe, so wird $A = B$ sein, und dann erhält man nach einiger Reduction:

$$V = \frac{k^2 M}{\rho}\left[1 + \frac{(C - A)(1 - 3\cos^2\gamma)}{2M\rho^2}\right]. \qquad (7)$$

Für ein homogenes Rotationsellipsoid, dessen Polaraxe $c$, dessen Aequatorealhalbmesser $a$ ist, wird

$$A = \frac{1}{5}M(a^2 + c^2); \qquad C = \frac{2}{5}Ma^2; \qquad \frac{C - A}{2M} = \frac{1}{10}(a^2 - c^2).$$

Ist daher $e$ die Excentricität der Meridianellipse, also $a^2e^2 = (a^2 - c^2)$, so wird:

$$V = \frac{k^2 M}{\rho}\left[1 + \frac{1}{10}e^2(1 - 3\cos^2\gamma)\left(\frac{a}{\rho}\right)^2\right]. \qquad (7a)$$

Bezeichnet man mit $\varepsilon$ die Abplattung $\varepsilon = \frac{a - c}{a}$, so wird

$$e^2 = \frac{(a - c)(a + c)}{a^2} = \frac{\varepsilon(a + c)}{a},$$

demnach für sehr kleine Abplattungen $e^2 = 2\varepsilon$ und

$$V = \frac{k^2 M}{\rho}\left[1 + \frac{1}{5}\varepsilon(1 - 3\cos^2\gamma)\left(\frac{a}{\rho}\right)^2\right]. \qquad (7b)$$

**84.** Die LAPLACE-POISSON'sche Gleichung. Bildet man die zweiten Differentialquotienten des Potentials nach den drei Coordinaten, so hat man, wenn man sich zunächst auf eine Masse beschränkt (für mehrere Massencomplexe

hat man die Summen der für die einzelnen Massen gültigen Ausdrücke zu bilden):

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} = \int\int\int \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\delta \cdot dx\, dy\, dz}{u} = \int\int\int \delta \cdot dx\, dy\, dz \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{1}{u}\right). \quad (1)$$

Es ist aber

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{x-\xi}{u^3}; \qquad \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^3} + \frac{3\,(x-\xi)^2}{u^5}. \quad (2)$$

Führt man nun für eine beliebige Function $F$ die Bezeichnung ein

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2}. \quad (3)$$

so wird

$$\Delta V = \int\int\int \delta\, dx\, dy\, dz\, \Delta\left(\frac{1}{u}\right).$$

Es ist aber

$$\Delta\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{3}{u^3} + \frac{3}{u^5}\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2\right] = 0$$

demnach

$$\Delta V = 0 \quad (4)$$

die LAPLACE'sche Gleichung. Es ist jedoch nicht zu übersehen, dass hierbei vorausgesetzt wurde, dass kein Element des Integrals unendlich wird, d. h. dass nirgend $u = 0$ wird. Die Beziehung (4) gilt daher nur für den Fall, dass der angezogene Punkt ein äusserer ist, d. h. nicht selbst der anziehenden Masse angehört. Für einen inneren Punkt, d. i. für einen solchen, der innerhalb der anziehenden Masse liegt, würde für einzelne Elemente des Integrals $u = 0$, und es ist zu untersuchen, ob die Gleichung (4) auch für diesen Fall noch gültig bleibt, oder was an ihre Stelle tritt.

In der Form 79 (2a) ist aber nicht einmal ersichtlich, dass das Potential und seine Differentialquotienten endliche, bestimmte Werthe haben, da schon in dem Potential ein Element des Integrales unendlich wird; legt man aber wieder ein Polarcoordinatensystem zu Grunde, dessen Ursprung im angezogenen Punkt ist, so wird

$$V = \int\int\int \frac{\delta \cdot u^2 \sin\theta\, d\theta\, d\omega\, du}{u} = \int\int\int \delta \cdot u \sin\theta\, d\theta\, d\omega\, du.$$

Für das Potential selbst wird also die zu integrirende Function auch für innere Punkte nicht unendlich, sondern für $u = 0$, Null; das Potential hat daher einen endlichen, bestimmten Werth. Der erste Differentialquotient des Potentials wird, wenn man unter dem Integralzeichen differenzirt:

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = -\int\int\int \frac{\delta \cdot (x-\xi)\, dv}{u^3}$$

$$= -\int\int\int \delta \cdot \sin\theta \cos\theta\, d\theta\, d\omega\, du \quad (6)$$

demnach die zu integrirende Function wieder für keinen Punkt (auch nicht für den angezogenen Punkt) unendlich; es behalten demnach auch die ersten Differentialquotienten, d. h. die Darstellungen der Kräfte in dieser Form, ihre Gültigkeit. Der zweite Differentialquotient wird nach (1) und (2):

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} = -\int\int\int \frac{\delta \cdot \sin\theta\, d\theta\, d\omega\, du}{u}\,(1 - 3\cos^2\theta).$$

Die zu integrirende Function wird für $u = 0$ unendlich. Nichts desto weniger wird aber das Integral selbst nicht unendlich. Um dies zu zeigen, und gleichzeitig seinen Werth auszumitteln, werde das Potential nach **79** (5) in zwei Theile zerlegt, indem man um den Massenpunkt ein gewisses Volumen $v_2$ so ausschliesst, dass für das übrige Volumen $v_1$ der Punkt $m_1$ ein äusserer wird; es wird daher $\Delta V_1 = 0$, und demnach

$$\Delta V = \Delta V_2.$$

Wählt man für das Volumen $v_2$ ein solches, für welches sich $V_2$ leicht auswerthen lässt, so können die zweiten Differentialquotienten aus dem berechneten Werthe von $V_2$ gebildet werden; für $v_2$ soll nun eine um $m_1$ concentrische Kugel $K$ vom Halbmesser $a$ genommen werden. Setzt man die Dichte derselben constant gleich $\delta$ voraus[1]), so wird das Potential auf einen Punkt im inneren derselben im Abstande $\rho$ vom Mittelpunkte nach **80** (9):

$$V_2 = 2\pi\delta a^2 - \tfrac{2}{3}\pi\delta\cdot\rho^2,$$

und es wird:

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial \xi^2} = -\tfrac{2}{3}\pi\delta\frac{\partial^2(\rho^2)}{\partial\xi^2} \qquad \text{daher} \qquad \Delta V_2 = -\tfrac{2}{3}\pi\delta\cdot\Delta(\rho^2).$$

Nun ist

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

folglich

$$\frac{\partial(\rho^2)}{\partial\xi} = 2\rho\frac{\partial\rho}{\partial\xi} = 2\xi; \qquad \frac{\partial^2(\rho^2)}{\partial\xi^2} = 2, \quad \frac{\partial^2(\rho^2)}{\partial\eta^2} = 2, \quad \frac{\partial^2(\rho^2)}{\partial\zeta^2} = 2$$

demnach $\Delta(\rho^2) = 6$ unabhängig von $\rho$, daher $\Delta V_2 = -4\pi\delta$. Folglich wird

$$\Delta V = -4\pi\delta. \tag{7}$$

Dabei ist $\delta$ die Dichte der (unendlich) kleinen Kugel um $m_1$, d. h. die Dichte in diesem Punkte selbst. Die Gleichung (7), welche von POISSON gefunden wurde, ist eine Erweiterung der Gleichung (4), enthält aber diese als speciellen Fall, denn für Punkte, welche dem Massencomplexe nicht angehören, ist $\delta = 0$.

Führt man die Polarcoordinaten $r$, $\theta$, $\omega$ ein[2]), so geht die Gleichung (7) über in

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} + \cot\theta\,\frac{\partial V}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 V}{\partial\omega^2} + r\,\frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2} = -4\pi\delta, \tag{8}$$

oder wenn $\mu = \cos\theta$ gesetzt wird:

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\,\frac{\partial V}{\partial\mu}\right\} + \frac{1}{1-\mu^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial\omega^2} + r\,\frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2} = -4\pi\delta. \tag{9}$$

---

[1]) Bei nicht constanter Dichte wird man dieselbe nicht als concentrisch geschichtet ansehen können, sondern die Schichten werden die kleine Kugel in nahe parallelen Niveauflächen durchsetzen; die Resultate bleiben jedoch auch in diesem Falle dieselben, wie schon daraus hervorgeht, dass man die Kugel immer so klein wählen kann, dass innerhalb derselben die Dichte als constant betrachtet werden kann. Für strenge Beweise s. ausführliche Lehrbücher der Potentialtheorie z. B. NEUMANN, »Vorlesungen über das Potential«.

[2]) Es ist $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial\omega}\frac{\partial\omega}{\partial x}$ und da $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta$, $\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}$, $\frac{\partial\omega}{\partial x} = 0$ ist, so wird $\frac{\partial V}{\partial x} = \cos\theta\,\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial V}{\partial\theta}$ u. s. w.

ist. Dieses Glied, welches wieder seculare Glieder geben würde, kann zum Verschwinden gebracht werden, wenn $A = 0$ gesetzt wird. Dann wird

$$\lambda = \frac{L}{K^2},$$

und hierdurch ist man im Stande, die secularen Glieder zu vermeiden.

Complicirter wird die Aufgabe, wenn die Functionen $M$, $N$ veränderlich sind. LAGRANGE erhält dann die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dv^2} + K^2y + \alpha\left(My\cos Hv + N\frac{dy}{dv}\sin Hv\right) = T, \tag{9}$$

welche er durch Einführung der Functionen:

$$y\cos Hv = u \qquad y\cos 2Hv = w$$
$$y\sin Hv = U \qquad y\sin 2Hv = W$$

auf ein System von fünf simultanen Differentialgleichungen in $y$, $u$, $w$, $U$, $W$ zurückführt.

LAPLACE leitet zur Elimination der SeculargIieder zwei Methoden ab; die eine besteht im Wesentlichen in Folgendem:

Erscheint das Integral einer Differentialgleichung (1) in der Form

$$y = X + tY + t^2 Z,$$

wobei $X$, $Y$, $Z$ . . . periodische Functionen von $t$ und von gewissen constanten Parametern sind, so werden sich die ausserhalb der trigonometrischen Functionen vorkommenden Coëfficienten $t$, $t^2$ . . . zum Verschwinden bringen lassen, wenn man die in den Functionen $X$, $Y$, $Z$ enthaltenen Parameter nicht mehr constant, sondern veränderlich ansieht; führt man für die betreffenden Parameter, welche nichts anderes sind, als die elliptischen Elemente, die Grössen $\Xi$, $\Pi$ . . . ein, so erhält man für die Bestimmung derselben gerade die Differentialgleichungen 40 (8), (9), welche die Secularveränderung der Elemente bestimmen. Daraus folgt, dass man die Seculargieder im Radiusvector und in der Breite einfach weglassen kann, wenn man nicht feste Elemente zu Grunde legt, sondern die Polarcoordinaten auf die um die Secularvariationen corrigirten Elemente bezieht. In den durch die Differentialgleichungen 47 (5) und (9) gegebenen Ausdrücken sind dann nur die periodischen Störungen beizubehalten. In Gleichung 47 (8) treten in $\delta r$ auch nur die periodischen Glieder ein; für die durch die beiden Integrale auftretenden Secularglieder gilt das in 48 Gesagte.

Nach der zweiten Methode werden die Elemente als constant vorausgesetzt, und die Secularänderungen von Knoten und Pericentrum direkt durch die Integration der Störungsgleichungen für Radiusvector und Breite erhalten. Die Auseinandersetzung dieser Methode s. u. No. 59.

Die Wegschaffung der Glieder gelingt auf diese Weise nicht vollständig. Bei Berücksichtigung der höheren Potenzen der Massen erscheint zunächst wieder die Zeit als Coëfficient der periodischen Glieder $[\alpha t\cos(\alpha t + \lambda)]$, später auch in nur secularen Gliedern $[\alpha t]$. Erfolgreicher waren in dieser Beziehung die Bestrebungen der neueren Zeit, über welche später in den §§ 71 ff. gesprochen wird.

**50. Ideale Coordinaten, HANSEN's Methode der Störungsrechnung.** So einfach wie die vorliegenden Entwickelungen werden nun dieselben bei der Mitnahme der höheren Potenzen der Excentricitäten nicht. Wesentlich complicirter gestaltet sich die Durchführung aber, wenn man auch die höheren Potenzen der Massen berücksichtigt. Zunächst dürfen dann in 47 (4) die von $(\delta r)^2$ abhängigen Glieder nicht vernachlässigt werden, und ebenso würden in 47 (8) rechts Glieder auftreten, welche die zweiten Potenzen der Störungen explicite enthalten. Deshalb

ist, und $X$, $Y$ störende Kräfte sind, und integrirt die Gleichung nach der Methode der unbestimmten Coëfficienten.

Von wesentlicher Bedeutung waren die Arbeiten von LAGRANGE und LAPLACE. LAGRANGE[1]) schreibt die Differentialgleichung in der Form

$$\frac{d^2y}{dv^2} + K^2y + L + \alpha My^2 + \alpha^2 Ny^3 + \ldots = 0, \tag{5}$$

wobei $\alpha M$ eine Function der ersten Ordnung der störenden Massen, $\alpha^2 N$ von der zweiten Ordnung u. s. w. ist. Setzt man zunächst $M = 0$, $N = 0$, $L$ constant, so wird das Integral

$$y = \frac{f}{K} \cos Kv + \frac{g}{K} \sin Kv + \frac{L}{K^2}(\cos Kv - 1) \tag{5a}$$

wo $f$, $g$ die Integrationsconstanten sind. Setzt man der Einfachheit wegen $g = 0$, $\frac{f}{K} + \frac{L}{K^2} = F$ und substituirt, so erhält man:

$$\frac{d^2y}{dv^2} + K^2y + L + \alpha M\left(\frac{F^2}{2} + \frac{L^4}{K^4}\right) - 2\alpha M\frac{LF}{K}\cos Kv + \frac{\alpha MF^2}{2}\cos 2Kv + \ldots \tag{6}$$

Das Integral dieser Gleichung würde aber, auf dem gewöhnlichen Wege integrirt Glieder von der Form $t \sin Kt$ ergeben. In (5) würde nämlich jedes Glied $a \cos(Kt + A')$ ein Glied mit dem Nenner $K^2 - \alpha^2$ geben; um diese Glieder zum Verschwinden zu bringen, verfährt LAGRANGE auf folgende Weise: Multiplicirt man (5) mit $\frac{dy}{dv} = x$ und integrirt, so folgt:

$$x^2 + K^2y^2 + 2Ly + H + 2\frac{\alpha M}{3}y^3 + \frac{2\alpha^2 N}{4}y^4 + \ldots \tag{7}$$

und aus dieser Gleichung erhält man, wenn man nun die von $M$, $N$ abhängigen Glieder vernachlässigt:

$$y = \frac{1}{K^2}\left[-L \pm \sqrt{L^2 - K^2H - K^2x^2}\right].$$

Verwendet man diesen Werth für die Bestimmung der von $y^3$, $y^4$ ... abhängigen Glieder in (7), so folgt hieraus, da dabei kein unendlich anwachsendes Glied entsteht, dass $y$ stets endlich bleibt. Setzt man nun:

$$y = y' + \lambda + \alpha\mu + \alpha^2\nu,$$

wo $\lambda$, $\mu$, $\nu$ unbestimmte Constanten sind, so geht die Gleichung (5) über in:

$$\frac{d^2y'}{dv^2} + R^2y' + A + \alpha(B + My'^2) + \alpha^2(C + 3N\lambda y'^2 + Ny'^3) + \ldots = 0, \tag{8}$$

wo

$$\begin{aligned} R^2 &= K^2 + 2\alpha M\lambda + \alpha^2(2M\mu + 3N\lambda^2) \\ A &= L + K^2\lambda \\ B &= K^2\mu + M\lambda^2 \\ C &= K^2\nu + 2M\mu\lambda + N\lambda^3 \end{aligned} \tag{8a}$$

ist. Integrirt man (8) nach der früheren Methode, so wird in erster Näherung

$$y' = \frac{f'}{R}\cos Rv + \frac{A}{R^2}(\cos Rv - 1).$$

Setzt man dieses Glied in (8) ein, so entsteht ein Glied mit $\cos Rv$, dessen Coëfficient

$$-2\alpha M\frac{A}{R^2}\left(\frac{f'}{R} + \frac{A}{R^2}\right)$$

---

[1]) »Solutions de différents problèmes de calcul intégrale«; Miscell. Taurinensia III 1762/5; Oeuvres I, pag. 469.

ist. Dieses Glied, welches wieder seculare Glieder geben würde, kann zum Verschwinden gebracht werden, wenn $A = 0$ gesetzt wird. Dann wird

$$\lambda = \frac{L}{K^2},$$

und hierdurch ist man im Stande, die secularen Glieder zu vermeiden.

Complicirter wird die Aufgabe, wenn die Functionen $M$, $N$ veränderlich sind. LAGRANGE erhält dann die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dv^2} + K^2 y + \alpha\left(My\cos Hv + N\frac{dy}{dv}\sin Hv\right) = T, \tag{9}$$

welche er durch Einführung der Functionen:

$$y\cos Hv = u \qquad y\cos 2Hv = w$$
$$y\sin Hv = U \qquad y\sin 2Hv = W$$

auf ein System von fünf simultanen Differentialgleichungen in $y$, $u$, $w$, $U$, $W$ zurückführt.

LAPLACE leitet zur Elimination der Secularglieder zwei Methoden ab; die eine besteht im Wesentlichen in Folgendem:

Erscheint das Integral einer Differentialgleichung (1) in der Form

$$y = X + tY + t^2 Z,$$

wobei $X$, $Y$, $Z$ . . , periodische Functionen von $t$ und von gewissen constanten Parametern sind, so werden sich die ausserhalb der trigonometrischen Functionen vorkommenden Coëfficienten $t$, $t^2$ . . . zum Verschwinden bringen lassen, wenn man die in den Functionen $X$, $Y$, $Z$ enthaltenen Parameter nicht mehr constant, sondern veränderlich ansieht; führt man für die betreffenden Parameter, welche nichts anderes sind, als die elliptischen Elemente, die Grössen $\Xi$, $\mathrm{H}$ . . . ein, so erhält man für die Bestimmung derselben gerade die Differentialgleichungen **40** (8), (9), welche die Secularveränderung der Elemente bestimmen. Daraus folgt, dass man die Secularglieder im Radiusvector und in der Breite einfach weglassen kann, wenn man nicht feste Elemente zu Grunde legt, sondern die Polarcoordinaten auf die um die Secularvariationen corrigirten Elemente bezieht. In den durch die Differentialgleichungen **47** (5) und (9) gegebenen Ausdrücken sind dann nur die periodischen Störungen beizubehalten. In Gleichung **47** (8) treten in $\delta r$ auch nur die periodischen Glieder ein; für die durch die beiden Integrale auftretenden Secularglieder gilt das in **42** Gesagte.

Nach der zweiten Methode werden die Elemente als constant vorausgesetzt, und die Seculaländerungen von Knoten und Pericentrum direkt durch die Integration der Störungsgleichungen für Radiusvector und Breite erhalten. Die Auseinandersetzung dieser Methode s. u. No. **59**.

Die Wegschaffung der Glieder gelingt auf diese Weise nicht vollständig. Bei Berücksichtigung der höheren Potenzen der Massen erscheint zunächst wieder die Zeit als Coëfficient der periodischen Glieder $[at\cos(\alpha t + \lambda)]$, später auch in nur secularen Gliedern $[at]$. Erfolgreicher waren in dieser Beziehung die Bestrebungen der neueren Zeit, über welche später in den §§ **71** ff. gesprochen wird.

**50. Ideale Coordinaten, HANSEN's Methode der Störungsrechnung.** So einfach wie die vorliegenden Entwickelungen werden nun dieselben bei der Mitnahme der höheren Potenzen der Excentricitäten nicht. Wesentlich complicirter gestaltet sich die Durchführung aber, wenn man auch die höheren Potenzen der Massen berücksichtigt. Zunächst dürfen dann in **47** (4) die von $(\delta r)^2$ abhängigen Glieder nicht vernachlässigt werden, und ebenso würden in **47** (8) rechts Glieder auftreten, welche die zweiten Potenzen der Störungen explicite enthalten. Deshalb

hatte auch schon LAPLACE für seine Mondtheorie die Differentialgleichungen ($D$) gewählt[1]). Die Berücksichtigung der höheren Potenzen der Excentricitäten und Neigungen wird aber eine Nothwendigkeit bei den kleinen Planeten, deren Excentricitäten und Neigungen wesentlich grösser sind, sehr oft beträchtlicher als diejenigen der Mercursbahn; eine Excentricität über 19° haben[2]): (33) mit $\varphi = 19°40'{\cdot}2$; (164) mit $\varphi = 20°17'{\cdot}9$; (183) mit $\varphi = 20°18'{\cdot}2$ und (324) mit $\varphi = 19°41'{\cdot}5$; die grössten Neigungen finden sich bei (2) mit $i = 34°41'{\cdot}8$; (31) mit $i = 26°28'{\cdot}1$ und (183) mit $i = 26°26'{\cdot}0$.

Schon bei den erstentdeckten Planeten machte sich dies bei der Berechnung der Störungen als Uebelstand fühlbar. Für die Planeten (2) und (3) sind die Excentricitätswinkel $\varphi = 13°41'{\cdot}8$, bezw. $14°48'{\cdot}6$, die Neigungen $i = 34°41'{\cdot}8$, bezw. $13°1'{\cdot}9$. Da überdies die grosse Nähe des Jupiter den Einfluss der störenden Kräfte bedeutend vermehrt, so bietet die Bestimmung der Störungen der kleinen Planeten nicht unbedeutende Schwierigkeiten.

P. A. HANSEN hatte nun, um dieselben zu heben, bei seiner Berechnung der absoluten Störungen eine von der früheren prinzipiell verschiedene Methode angewendet. Die Unterschiede bestehen: 1) in der Einführung der »idealen Coordinaten«, 2) den Entwickelungen nach der excentrischen Anomalie und 3) der numerischen Integration und Multiplikation.

Unter idealen Coordinaten versteht HANSEN[3]) solche, welche die Eigenschaft haben, dass nicht nur sie selbst, sondern auch ihre ersten Differentialquotienten nach der Zeit in der gestörten Bewegung dieselbe Form haben, wie in der ungestörten Bewegung. Sie verhalten sich demnach zu irgend welchen anderen Coordinaten, wie osculirende Elemente zu beliebigen anderen Elementen. Sei in der ungestörten Bewegung irgend eine Coordinate (rechtwinkelige oder polare) $u$, und sei dieselbe als Function der Zeit und der constanten Elemente:

$$u = F(t, a_0, e_0, \omega_0, \Omega_0, i_0, M_0^{(0)}); \quad \frac{du}{dt} = f(t, a_0, e_0, \omega_0, \Omega_0, i_0, M_0^{(0)}),$$

so wird in der gestörten Bewegung ebenfalls:

$$U = F(t, a, e, \omega, \Omega, i, M_0); \quad \frac{dU}{dt} = f(t, a, e, \omega, \Omega, i, M_0)$$

sein, wenn man einzelne oder alle Elemente nunmehr veränderlich annimmt. Hieraus folgt, dass, sofern man es nur mit ersten Differentialquotienten zu thun hat, d. h. mit Entwickelungen von ersten Differentialquotienten, oder mit dem Uebergange von diesen auf ihre Integrale, in den Ausdrücken für die idealen Coordinaten die Elemente als constant angesehen werden können, und die Infinitesimaloperationen nur in Rücksicht auf die explicite vorhandene Zeit vorzunehmen sind. Um diesen Vorgang besonders zu charakterisiren, führt HANSEN für die ausserhalb der Elemente vorhandene Zeit einen andern Buchstaben $\tau$ an Stelle von $t$ ein, und unterscheidet die hierdurch entstehenden Ausdrücke von den mit den veränderlichen Elementen zu berechnenden durch besondere Typen. Es möge die zu $U$ gehörige Coordinate, wenn in

---

1) S. hierüber § 56. Ausführliche Entwickelungen der Störungsfunction finden sich z. B. in PONTÉCOULANT, Théorie analytique du système du monde, Bd. 3, 4; in den Annalen der Pariser Sternwarte von LE VERRIER; in den Astronomical Papers, III Bd. von NEWCOMB u. s. w.

2) Vergl. hierfür den Artikel »Planeten«.

3) HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode die absoluten Störungen der kleinen Planeten zu berechnen Abhandl. der königl. sächs. Gesellsch. der Wissenschaften Bd. 5, 3, 7; A. N. No. 166, 244, 426, 799, 882.

derselben die Elemente als Constante, und nur $t$ als Veränderliche angesehen wird, also $\tau$ an Stelle von $t$ gesetzt wird, mit $U'$ bezeichnet werden. Soll dann nach den vorzunehmenden Differentiationen wieder $t$ an Stelle von $\tau$ restituirt werden, so wird dieses dadurch angedeutet, dass der betreffende Ausdruck überstrichen wird; es bedeutet daher

$$\overline{\frac{dU'}{d\tau}} \quad (a); \qquad \int\overline{\frac{dU'}{d\tau}}\, dt, \quad (b)$$

dass in dem Werthe von $U$ die Elemente als constant anzusehen sind, d. h. $\tau$ an Stelle von $t$ zu setzen ist, dann nach $\tau$ zu differenziren ist, worauf bei *(a)* nach vollzogener Differentiation wieder $\tau$ durch $t$ zu ersetzen ist. Bei *(b)* ist noch nach $t$ zu integriren, und nach der Integration $t$ für $\tau$ zu setzen. Schreibt man $\frac{dU}{dt}$, so wäre das Resultat dasselbe, wie bei *(a)*, aber es wäre nach $t$ total zu differenziren, d. h. es wären auch die Elemente als veränderlich anzusehen. Wenn aber $U$ eine ideale Coordinate ist, so werden nach der Differentiation die von der Veränderlichkeit der Elemente herrührenden Glieder von selbst wegfallen, welche bei der Differentiation nach $\tau$ gar nicht entwickelt zu werden brauchen.

Ist weiter $L$ irgend eine Function von idealen Coordinaten, oder osculirenden Elementen, so wird zufolge der angeführten Eigenschaft derselben auch der erste Differentialquotient von $L$ im Resultate identisch, ob man auf die Veränderlichkeit der Elemente Rücksicht nimmt oder nicht. Man kann daher auch derartige Functionen als ideale Coordinaten im weiteren Sinne bezeichnen[1].

Sind nun $x$, $y$, $z$ ideale Coordinaten, so werden in den Transformationsformeln 2 (1), $x'$ $y'$ $z'$ ebenfalls ideale Coordinaten sein, wenn

$$\begin{aligned} x\frac{d\alpha_1}{dt} + y\frac{d\alpha_2}{dt} + z\frac{d\alpha_3}{dt} &= 0 \\ x\frac{d\beta_1}{dt} + y\frac{d\beta_2}{dt} + z\frac{d\beta_3}{dt} &= 0 \\ x\frac{d\gamma_1}{dt} + y\frac{d\gamma_2}{dt} + z\frac{d\gamma_3}{dt} &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

ist. Substituirt man in diesen Gleichungen die Ausdrücke 2 (1), so erhält man mit Rücksicht auf 2 (13), wenn hier $\lambda$, $\mu$, $\nu$ an Stelle der bereits in anderer Bedeutung verwendeten Zeichen $p$, $q$, $r$ gesetzt werden:

$$\nu y' - \mu z' = 0; \qquad \lambda z' - \nu x' = 0; \qquad \mu x' - \lambda y' = 0. \qquad (2)$$

Da die Gleichungen (1) immer erfüllbar sind, weil vermöge der Gleichungen 2 (14) die Determinante der Coëfficienten

$$\Sigma \pm \frac{d\alpha_1}{dt}\frac{d\beta_2}{dt}\frac{d\gamma_3}{dt}$$

verschwindet, so wird es unendlich viele Systeme idealer Coordinaten geben; setzt man noch fest, dass $z' = 0$ sein soll, d. h., dass die $X'Y'$-Ebene stets durch den gestörten Radiusvector gehen soll, so folgt aus (2): $\nu = 0$, d. h.

$$\beta_1\frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_2\frac{d\alpha_2}{dt} + \beta_3\frac{d\alpha_3}{dt} = 0 \qquad \alpha_1\frac{d\beta_1}{dt} + \alpha_2\frac{d\beta_2}{dt} + \alpha_3\frac{d\beta_3}{dt} = 0. \qquad (3)$$

Die beiden ersten Gleichungen 2 (11) geben

$$\alpha_1\frac{d\alpha_1}{dt} + \alpha_2\frac{d\alpha_2}{dt} + \alpha_3\frac{d\alpha_3}{dt} = 0 \qquad \beta_1\frac{d\beta_1}{dt} + \beta_2\frac{d\beta_2}{dt} + \beta_3\frac{d\beta_3}{dt} = 0, \qquad (3a)$$

[1] l. c., Band VI, pag. 96.

daher nach bekannten Sätzen der Determinantentheorie aus (8) und (8a):

$$\frac{d\alpha_1}{dt} : \frac{d\alpha_2}{dt} : \frac{d\alpha_3}{dt} = (\beta_2\alpha_3 - \beta_3\alpha_2) : (\beta_3\alpha_1 - \beta_1\alpha_3) : (\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1)$$

und ebenso für die Differentialquotienten der $\beta$; somit nach 2 (8), (9) und (10)

$$\frac{d\alpha_1}{dt} : \frac{d\alpha_2}{dt} : \frac{d\alpha_3}{dt} = \frac{d\beta_1}{dt} : \frac{d\beta_2}{dt} : \frac{d\beta_3}{dt} = \gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3,$$

folglich nach 2 (12), (13):

$$\lambda = \frac{1}{\gamma_i}\frac{d\beta_i}{dt}; \quad \mu = -\frac{1}{\gamma_i}\frac{d\alpha_i}{dt}. \tag{4}$$

Aus den Gleichungen 2 (1) folgt durch zweimalige Differentiation für $z' = 0$ wegen der Bedingung, dass $x, y, z$ ideale Coordinaten seien:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha_1\frac{dx'}{dt} + \beta_1\frac{dy'}{dt}; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \alpha_1\frac{d^2x'}{dt^2} + \beta_1\frac{d^2y'}{dt^2} + \frac{d\alpha_1}{dt}\frac{dx'}{dt} + \frac{d\beta_1}{dt}\frac{dy'}{dt}$$

ebenso für $y$, $z$, und daraus:

$$\gamma_1\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma_2\frac{d^2y}{dt^2} + \gamma_3\frac{d^2z}{dt^2} = -\mu\frac{dx'}{dt} + \lambda\frac{dy'}{dt}.$$

Die Differentialgleichungen 12 (1) geben daher

$$-\mu\frac{dx'}{dt} + \lambda\frac{dy'}{dt} = -(M+m)f(r)\frac{z'}{r} = \frac{\partial\Omega}{\partial z'}. \tag{5}$$

Verbindet man hiermit die dritte Gleichung (2):

$$-\mu x' + \lambda y' = 0,$$

so erhält man

$$\left(y'\frac{dx'}{dt} - x'\frac{dy'}{dt}\right)\lambda = -x'\frac{\partial\Omega}{\partial z'}; \quad \left(y'\frac{dx'}{dt} - x'\frac{dy'}{dt}\right)\mu = -y'\frac{\partial\Omega}{\partial z'}. \tag{6}$$

Da nun

$$x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt} = k_0\sqrt{p}$$

ist ($x'$ $y'$ sind ideale Coordinaten, stehen daher mit osculirenden Elementen in derselben Beziehung wie in der ungestörten Bewegung) so wird, wenn für $\lambda$, $\mu$ ihre Werthe aus (4) substituirt werden:

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -\frac{\gamma_i y'}{k_0\sqrt{p}}\frac{\partial\Omega}{\partial z'}; \quad \frac{d\beta_i}{dt} = +\frac{\gamma_i x'}{k_0\sqrt{p}}\frac{\partial\Omega}{\partial z'}. \tag{7}$$

Zwischen den in den Gleichungen 2 (21) auftretenden Winkeln $\omega$, $\Omega$, $i$, welche im allgemeinen von einander unabhängig sind, wird aber hier gemäss den Beziehungen (8) eine Beziehung bestehen. Der Werth von $\omega$ werde in diesem Falle mit $-\sigma$ bezeichnet; setzt man die Werthe 2 (22) in die Gleichung (8) ein, so erhält man

$$0 = (\beta_2\alpha_1 - \beta_1\alpha_2)\frac{d\Omega}{dt} - \frac{d\sigma}{dt}$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \gamma_3\frac{d\Omega}{dt} = \cos i\,\frac{d\Omega}{dt}. \tag{8}$$

Unter der hier gemachten Voraussetzung fällt daher die $X'$-Axe nicht in die Richtung des Perihels. ($\sigma$ bedeutet daher nicht den Abstand des Perihels vom Knoten.)

**51. Differentialgleichungen für Länge und Radiusvector.** In der Ausführung geht Hansen von den in 26 abgeleiteten Differentialgleichungen aus, welche jedoch gegenüber der ihnen von Hansen ursprünglich gegebenen Form für die allgemeinen Störungen etwas modificirt sind. Mit den idealen

Coordinaten r, $v$, welche sich aus den osculirenden Elementen $a$, $e$, . . . nach den Formeln

$$M = M_0 + \mu t = E - e \sin E \qquad l = v + \pi$$
$$r \cos v = a(\cos E - e)$$
$$r \sin v = a \cos\varphi \sin E \qquad \mu = \frac{k_0}{a^{\frac{3}{2}}} \qquad (1)$$

ergeben, stellt HANSEN die Formeln

$$M' = M_0^{(0)} + \Delta M_0 + \mu_0 t = E' - e_0 \sin E' \qquad r = r_0(1 + \nu)$$
$$r_0 \cos V = a_0(\cos E' - e_0) \qquad l = V + \pi_0 \qquad (2)$$
$$r_0 \sin V = a_0 \cos\varphi_0 \sin E' \qquad \mu_0 = \frac{k_0}{a_0^{\frac{3}{2}}}$$

zusammen, in denen $a_0$, $e_0$ . . . constante Elemente sind. Vergleicht man diese Formeln mit 26 (IV), so sieht man, dass die dort in zwei Theile zerfällte Störung in $V$ und $N$ hier zusammengezogen erscheint[1]), da $N$ den constanten Werth $\pi_0$ hat. Man hat daher $dN : dt = 0$ und

$$r^2 \frac{dV}{dt} = k_0\sqrt{p_0} + \int Q\,dt,$$

wobei hier $p_0$ an Stelle von $p$ gesetzt ist, weil die in 26 (5) eingeführte Grösse $p$ eine Integrationsconstante bezeichnet und der Index »0« dort nur wegblieb, weil die Elemente daselbst überhaupt nicht veränderlich waren. Substituirt man hier für $dV : dt$ den auf pag. 346 erhaltenen Werth, so folgt:

$$k_0\sqrt{p_0}\,\frac{r^2}{r_0^2}\left(1 + \frac{d\Delta t}{dt}\right) = k_0\sqrt{p_0} + \int Q\,dt,$$

daher, wenn $\nu$ eingeführt und die corrigirte (gestörte) Zeit $t + \Delta t = T$ gesetzt wird:

$$\frac{dT}{dt} = 1 + \frac{d\Delta t}{dt} = \frac{1}{(1+\nu)^2}\left(1 + \frac{1}{k_0\sqrt{p_0}}\int Q\,dt\right)$$

$$\frac{d\Delta t}{dt} = \frac{\frac{1}{k_0\sqrt{p_0}}\int Q\,dt - 2\nu - \nu^2}{(1+\nu)^2}. \qquad (3)$$

Die Differentialgleichung für $\nu$ wird aus 26 (12) erhalten; es ist

$$\frac{d^2\nu}{dt^2} + \frac{k_0^2}{r^3}\,\nu = R_0(1+\nu) + 2\,\frac{k_0\sqrt{p_0}}{r^4}\int Q\,dt + \frac{1}{r^4}\left[\int Q\,dt\right]^2. \qquad (4)$$

Dann ist $\Delta M_0 = \mu_0 \Delta t$ und die Coordinaten des Himmelskörpers werden aus (2) erhalten.

Um diese Gleichungen in für die Praxis verwendbarer Form zu bringen, werden die Grössen $\nu$ und $T$ durch osculirende Elemente ausgedrückt, in welcher Form sie dann als ideale Coordinaten behandelt werden können. Aus (1) und (2) erhält man zunächst durch Vergleichung $l = v + \pi = V + \pi_0$:

$$v = V - (\pi - \pi_0)$$

$$\frac{a}{r} = \frac{1 + e\cos v}{\cos^2\varphi}; \quad \frac{r_0 a}{r a_0} = \frac{r_0}{a_0 \cos^2\varphi}\left[1 + e\cos V \cos(\pi - \pi_0) + e \sin V \sin(\pi - \pi_0)\right]$$

und da

$$\frac{r_0}{a_0} = \cos^2\varphi_0 - \frac{r_0}{a_0}\,e_0 \cos V$$

ist, so wird

$$\frac{r_0 a}{r a_0} = \frac{1}{1+\nu}\,\frac{a}{a_0} = \frac{\cos^2\varphi_0}{\cos^2\varphi}\left(1 - \frac{r_0 e_0 \cos V}{a_0 \cos^2\varphi_0} + \frac{r_0}{a_0}\,\frac{e\cos V}{\cos^2\varphi_0}\cos(\pi - \pi_0) + \frac{r_0}{a_0}\,\frac{e \sin V}{\cos^2\varphi_0}\sin(\pi - \pi_0)\right). \quad (5)$$

---

[1]) Dieses ist jedoch nur ein rein formaler Unterschied; dem Wesen nach ist die Methode dieselbe: die Berechnung der Störung der mittleren Anomalie.

An Stelle von $a$, $e$, $\pi$ werden nun drei Funktionen $\xi$, $\eta$, $\chi$ derselben eingeführt durch die Beziehungen:

$$\mu = \mu_0(1+\chi) \qquad (6) \qquad \begin{aligned} e\,sin(\pi-\pi_0) &= \eta\,cos^2\varphi_0 \\ e\,cos(\pi-\pi_0) &= \xi\,cos^2\varphi_0 + sin\,\varphi_0. \end{aligned} \qquad (7)$$

Quadrirt und addirt man die beiden Gleichungen (7) und zieht von der Einheit ab, so wird

$$cos^2\varphi = [1 - 2\xi\,sin\,\varphi_0 - (\xi^2+\eta^2)\,cos^2\varphi_0]\,cos^2\varphi_0 \qquad (8)$$

während die Gleichung (5)

$$\frac{r_0 a}{r a_0} = \frac{1}{1+\nu}\,\frac{a}{a_0} = \frac{cos^2\varphi_0}{cos^2\varphi}\left[1 + \frac{r_0}{a_0}\,\xi\,cos\,V + \frac{r_0}{a_0}\,\eta\,sin\,V\right]. \qquad (9)$$

wird. Bestimmt man hieraus $1+\nu$, setzt für $a$, $a_0$ ihre Ausdrücke durch $\mu$, $\mu_0$ ein, so wird mit Rücksicht auf (6) und (8):

$$1+\nu = \frac{1 - 2\xi\,sin\,\varphi_0 - (\xi^2+\eta^2)\,cos^2\varphi_0}{(1+\chi)^{\frac{2}{3}}\left[1 + \xi\,\frac{r_0}{a_0}\,cos\,V + \eta\,\frac{r_0}{a_0}\,sin\,V\right]}. \qquad (10)$$

Weiter ist, wenn $\pi$ ein osculirendes Element, daher $l$ eine ideale Coordinate ist:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dv}{dt} - \frac{dV}{dt};\ \frac{dv}{dt} = \mu\,\frac{dv}{dM} = \mu\,\frac{a^2}{r^2}\,cos\,\varphi$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dM'}\,\frac{dM'}{dt} = \frac{a_0^2}{r_0^2}\,cos\,\varphi_0\,\frac{dM'}{dt} = \mu_0\,\frac{a_0^2}{r_0^2}\,cos\,\varphi_0\,\frac{dT}{dt},$$

somit

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\mu}{\mu_0}\,\frac{a^2}{a_0^2}\,\frac{r_0^2}{r^2}\,\frac{cos\,\varphi}{cos\,\varphi_0}. \qquad (11)$$

Führt man hier für $\frac{r_0 a}{r a_0}$ seinen Werth aus (9) und für $\frac{cos\,\varphi}{cos\,\varphi_0}$ seinen Werth aus (8) ein, so folgt:

$$\frac{dT}{dt} = (1+\chi)\,\frac{\left(1 + \xi\,\frac{r_0}{a_0}\,cos\,V + \eta\,\frac{r_0}{a_0}\,sin\,V\right)^2}{[1 - 2\xi\,sin\varphi_0 - (\xi^2+\eta^2)cos^2\varphi_0]^{\frac{3}{2}}}. \qquad (12)$$

Die Formeln werden etwas einfacher, wenn man an Stelle von $\chi$ das Verhältniss der Parameter

$$\frac{p}{p_0} = \theta^2 \qquad (7a)$$

einführt. Dann wird aus Gleichung (11):

$$\frac{dT}{dt} = \sqrt{\frac{a}{a_0}}\,\frac{cos\,\varphi}{cos\,\varphi_0}\,\frac{r_0^2}{r^2} = \frac{\theta}{(1+\nu)^2};\ \frac{d\Delta t}{dt} = \frac{\theta}{(1+\nu)^2} - 1 \qquad (13)$$

und aus Gleichung (9):

$$\begin{aligned} \frac{\theta^2}{1+\nu} &= A \\ A &= 1 + \xi\,\frac{r_0}{a_0}\,cos\,V + \eta\,\frac{r_0}{a_0}\,sin\,V \end{aligned} \qquad (14)$$

Die Gleichungen (13) und (14) bestimmen gemeinschaftlich die Werthe von $\frac{dT}{dt}$ und $\nu$ durch die Grössen $\xi$, $\eta$, $\theta$. Man kann an Stelle einer dieser Gleichungen auch eine beliebige Combination derselben setzen. Nun ist

$$\frac{dT}{dt} = \frac{2\theta}{1+\nu} - \theta\,\frac{1+2\nu}{(1+\nu)^2} = \frac{2A}{\theta} - \theta\left[1 - \frac{\nu^2}{(1+\nu)^2}\right].$$

Der Ausdruck

$$W = \frac{2A}{\theta} - \theta - 1 = \frac{2}{\theta}\left(1 + \xi\,\frac{r_0}{a_0}\,cos\,V + \eta\,\frac{r_0}{a_0}\,sin\,V\right) - \theta - 1 \qquad (15)$$

erhält, da $\theta$ sehr nahe die Einheit ist, stets kleine Werthe, und man erhält:

$$\frac{dT}{dt} = 1 + W + \theta\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2; \quad \frac{d\Delta t}{dt} = W + \theta\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2. \qquad (16)$$

Da $T$ und $\nu$ den Charakter idealer Coordinaten haben, so erhält man aus (18) und (16):

$$\frac{dT'}{d\tau} = \frac{\theta}{(1+\nu')^2}; \qquad \frac{dT'}{d\tau} = 1 + W' + \theta\left(\frac{\nu'}{1+\nu'}\right)^2,$$

und durch Differentiation nach $\tau$

$$\frac{\frac{d^2T'}{d\tau^2}}{\frac{dT'}{d\tau}} = -2\,\frac{\frac{d\nu'}{d\tau}}{1+\nu'}$$

$$\frac{d^2T'}{d\tau^2} = \frac{\partial W'}{\partial T'}\,\frac{dT'}{d\tau} + \theta\,\frac{2\nu'}{(1+\nu')^3}\,\frac{d\nu'}{d\tau} = \frac{\partial W'}{\partial T'}\,\frac{\theta}{(1+\nu')^2} + \frac{2\nu'\theta}{(1+\nu')^3}\,\frac{d\nu'}{d\tau},$$

folglich

$$-2\,\frac{d\nu'}{d\tau}\cdot\frac{\theta}{(1+\nu')^3} = \frac{\partial W'}{\partial T'}\,\frac{\theta}{(1+\nu')^2} + \frac{2\nu'\theta}{(1+\nu')^3}\,\frac{d\nu'}{d\tau}$$

$$\frac{d\nu'}{d\tau} = -\tfrac{1}{2}\,\frac{\partial W'}{\partial T'}; \qquad \frac{d\nu}{dt} = -\tfrac{1}{2}\,\overline{\frac{\partial W'}{\partial T'}}, \qquad (16\,a)$$

während $\Delta t$ durch die Differentialgleichung (16) bestimmt ist. Durch Integration folgt demnach:

$$\nu = c - \tfrac{1}{2}\int \overline{\frac{\partial W'}{\partial T'}}\,dt; \quad \Delta t = \int\left[\overline{W'} + \theta\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2\right]dt. \qquad (17)$$

Mit Rücksicht auf die ersten Potenzen der störenden Massen ergiebt sich hieraus:

$$\nu = c - \tfrac{1}{2}\int \overline{\frac{\partial W_0'}{\partial \tau}}\,dt; \quad \Delta M = \mu_0\int \overline{W_0'}\,dt, \qquad (17\,a)$$

wo in $W_0'$ Störungen nicht berücksichtigt sind. Um hieraus die Störungen mit Rücksicht auf die zweiten Potenzen der Massen zu erhalten, hat man zu beachten, dass

$$W' = W_0' + \left(\frac{dW_0'}{d\tau}\right)\Delta T' + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2W_0'}{d\tau^2}\right)\Delta T'^2 + \ldots$$

$$\frac{dW'}{dT'} = \left(\frac{dW_0'}{d\tau}\right) + \left(\frac{d^2W_0'}{d\tau^2}\right)\Delta T' + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^3W_0'}{d\tau^3}\right)\Delta T'^2 + \ldots$$

ist, und daher

$$\nu = c - \tfrac{1}{2}\int\left\{\overline{\frac{dW_0'}{d\tau}} + \overline{\left(\frac{d^2W_0'}{d\tau^2}\right)\Delta T'}\right\}dt$$

$$\Delta M_0 = \mu_0\int\left\{\overline{W_0'} + \overline{\frac{dW_0'}{d\tau}\,\Delta T'} + \nu^2\right\}dt. \qquad (17\,b)$$

Hier sind daher die Störungen $\nu$ und $\Delta M$ auf drei Functionen $\xi$, $\eta$, $\theta$ der osculirenden Elemente zurückgeführt. In der Function $W_0'$ sind für diese auch nur die Störungen erster Ordnung zu berücksichtigen, welche selbst von den störenden Kräften abhängig sind. Um diese einzuführen, kann auf zwei Arten vorgegangen werden. Ersetzt man $\xi$, $\eta$ durch ihre Ausdrücke (7), so wird[1], da nach (1) und (2):

$$V' + \pi_0 - \pi = v + V' - V \text{ ist:}$$

---

[1]) HANSEN, Abh. der königl. sächs. Gesellsch. der Wissenschaften, Bd. 5, pag. 100. Bei HANSEN ist $\frac{h_0}{h}$ für $\theta$ gesetzt.

$$W' = \frac{2}{\vartheta} - \vartheta - 1 + \frac{2}{\vartheta}\frac{r_0'}{a_0}\left\{\frac{\cos V'}{\cos^2\varphi_0}[e\cos(\pi-\pi_0) - e_0] + \frac{\sin V'}{\cos^2\varphi_0} e\sin(\pi-\pi_0)\right\}$$

$$W' = \frac{2r_0'}{\vartheta}\left\{\frac{1}{r_0'} + \frac{e\cos(v+V'-V)}{a_0\cos^2\varphi_0} - \frac{e_0\cos V'}{a_0\cos^2\varphi_0}\right\} - \vartheta - 1$$

$$W' = \frac{2r_0'}{\vartheta a_0\cos^2\varphi_0} + \frac{2r_0' e\cos(v+V'-V)}{\vartheta a_0\cos^2\varphi_0} - \vartheta - 1.$$

Um die störenden Kräfte einzuführen, muss nach $t$ differenzirt, und zu diesem Zwecke zunächst $e\cos v$, $e\sin v$ nach 17 durch die Differentialquotienten von $v$ und $r$ ersetzt werden. Es wird:

$$W' = \frac{2r_0'}{\vartheta p_0}[1-\cos(V'-V)] + \frac{2r_0'}{k_0\sqrt{p_0}}\left\{\cos(V'-V)r\frac{dv}{dt} - \sin(V'-V)\frac{dr}{dt}\right\} - \vartheta - 1.$$

Hier sind $V'$, $r_0'$ nur von $\tau$ abhängig, daher als constant anzusehen, und nur $r$, $v$, $V$ nebst $\vartheta$ veränderlich. Da

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\vartheta}\right) = \sqrt{p_0}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) = -Q\frac{r\sqrt{p_0}}{k_0 p}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\vartheta}\right) = -\frac{r}{\vartheta^2}\frac{Q}{k_0\sqrt{p_0}};\quad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{rQ}{k_0\sqrt{p_0}} \qquad (18)$$

ist, so wird:

$$\frac{dW'}{dt} = \frac{2r_0'}{p_0}[1-\cos(V'-V)]\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\vartheta}\right) - \frac{d\vartheta}{dt}$$

$$+\frac{2r_0'}{k_0\sqrt{p_0}}[-\sin(V'-V)]\left\{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right\} + \cos(V'-V)\left(r\frac{d^2v}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{dv}{dt}\right)$$

$$\frac{dW'}{dt} = \frac{2r_0'}{k_0\sqrt{p_0}}\left\{\frac{\cos(V'-V)}{r} - \frac{1-\cos(V'-V)}{p_0\vartheta^2} - \frac{1}{2r_0'}\right\}\frac{\partial\Omega}{\partial v} - \frac{2r_0'}{k_0\sqrt{p_0}}\sin(V'-V)\frac{\partial\Omega}{\partial r}. \quad (19)$$

Würde hier vor der Integration $t = \tau$ gesetzt, so erhielte man sofort $V' = V$, $r_0' = r_0$, und da in $W_0: r_0 = r$ zu setzen ist, so würde[1])

$$\frac{dW_0'}{dt} = \frac{1}{k_0\sqrt{p_0}}\frac{\partial\Omega}{\partial v};\quad W_0 = W_0' = \int\frac{1}{k_0\sqrt{p_0}}\frac{\partial\Omega}{\partial v}dt.$$

Setzt man diese Werthe in (17a), (17b) ein, so verfällt man auf die Ausgangsgleichungen. In manchen Fällen, wo es sich nur um die Entwickelung einzelner Glieder handelt, hat HANSEN dieses Verfahren auch thatsächlich gewählt[2]). Im allgemeinen aber wird $\frac{dW'}{dt}$ erst nach (19) entwickelt, sodann nach $t$ integrirt, und nach der Integration $\tau = t$ gesetzt[3]). Die Ursache ist im wesentlichen die, dass hierdurch die Reihenentwickelungen selbst bei grösseren Excentricitäten convergenter werden[4]).

In der dritten Abhandlung[5]) wird eine zweite Entwickelung von $W_0$ vorgenommen, welche auf die Störungen der Elemente führt. Aus dem Ausdrucke (15) erhält man

$$W = \frac{2}{\vartheta} - \vartheta - 1 - \frac{3e_0}{\vartheta}\xi + \frac{2}{\vartheta}\xi\left(\frac{r_0}{a_0}\cos V + \tfrac{1}{2}e_0\right) + \frac{2}{\vartheta}\eta\frac{r_0}{a_0}\sin V$$

---

1) l. c., pag. 101.
2) z. B. Bd. 6, pag. 45.
3) Vergl. l. c., Bd. 6, pag. 63, 76, 126, 146; Bd. 7, pag. 104 u. s. w.
4) l. c. Bd. 5, pag. 89.
5) Bd. 7, pag. 87.

$$W = X + Y\left(\frac{r_0}{a_0}\cos V + \tfrac{1}{2}e_0\right) + \Psi\frac{r_0}{a_0}\sin V \tag{20}$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{2}{\theta} - \theta - 1 - \frac{8e_0}{\theta}\xi = 2\left(\frac{1}{\theta}-1\right) - (\theta-1) - 8\frac{e_0}{\theta\cos^2\varphi_0}[e\cos(\pi-\pi_0)-e_0] \\ Y &= \frac{2}{\theta}\xi = \frac{2}{\theta\cos^2\varphi_0}[e\cos(\pi-\pi_0)-e_0] \\ \Psi &= \frac{2}{\theta}\eta = \frac{2}{\theta\cos^2\varphi_0}e\sin(\pi-\pi_0). \end{aligned} \tag{20a}$$

Berücksichtigt man zunächst nur Störungen erster Ordnung[1]), so wird $W_0$ an Stelle von $W$ zu setzen sein, dann wird aber, wenn mit $\delta$ die Störungen erster Ordnung bezeichnet werden:

$$\frac{1}{\theta} - 1 = \delta\left(\frac{1}{\theta}\right); \qquad \theta - 1 = \delta(\theta)$$

$$e\cos(\pi-\pi_0) - e_0 = \delta e; \quad e\sin(\pi-\pi_0) = e_0\delta\pi.$$

Es ist aber

$$\frac{dp}{dt} = \cos^2\varphi\frac{da}{dt} - 2ae\frac{de}{dt};$$

$$\frac{d}{dt}\sqrt{\frac{p}{p_0}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{pp_0}}\left(\cos^2\varphi\frac{da}{dt} - 2ae\frac{de}{dt}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{aa_0}}\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_0}\frac{da}{dt} - \frac{1}{\cos\varphi\cos\varphi_0}\sqrt{\frac{a}{a_0}}\,e\frac{de}{dt}$$

und demnach, da für die Störungen erster Ordnung in den Coëfficienten

$$\frac{a}{a_0} = 1, \quad \frac{p}{p_0} = 1, \quad \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_0} = 1, \quad \frac{e}{e_0} = 1$$

zu setzen ist:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\frac{1}{a_0}\frac{da}{dt} - \frac{e_0}{\cos^2\varphi_0}\frac{de}{dt}; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\theta}\right) = -\frac{1}{\theta^2}\frac{d\theta}{dt}$$

daher durch Integration:

$$\delta\theta = \frac{1}{2}\delta\frac{a}{a_0} - \frac{e_0}{\cos^2\varphi_0}\delta e; \qquad \delta\frac{1}{\theta} = -\frac{1}{2}\delta\frac{a}{a_0} + \frac{e}{\cos^2\varphi_0}\delta e$$

$$X_0 = -\frac{3}{2}\delta\frac{a}{a_0}; \quad Y_0 = +2\frac{\delta e}{\cos^2\varphi_0}; \quad \Psi_0 = +\frac{2}{\cos^2\varphi_0}e_0\delta\pi$$

$$W_0' = -\frac{3}{2}\delta\frac{a}{a_0} + 2\frac{\delta e}{\cos^2\varphi_0}\left(\frac{r_0'}{a_0}\cos V' + \tfrac{1}{2}e_0\right) + 2\frac{e_0\delta\pi}{\cos^2\varphi_0}\frac{r_0'}{a_0}\sin V'. \tag{21}$$

**52. Entwickelung der Störungen in Breite.** Die Gleichungen 17 (5)

$$\begin{aligned} \cos\beta\sin(\lambda-\Omega) &= \cos i\sin(l-\sigma) \\ \cos\beta\cos(\lambda-\Omega) &= \cos(l-\sigma) \\ \sin\beta &= \sin i\sin(l-\sigma) \end{aligned} \tag{1}$$

geben die heliocentrischen Coordinaten $\lambda$, $\beta$, mit den gestörten Werthen der Elemente $\omega$, $i$, $\Omega$ und dem gestörten Werthe von $v$, wobei zu beachten ist, dass die Länge in der Bahn $l$ von demselben Anfangspunkte wie $\sigma$ gezählt wird, also von dem durch (50) (8) fixirten Punkte. Es handelt sich jedoch darum, die Störungen der Breite direkt zu finden; dabei können auch zweckmässig gleich die beiden ersten Formeln (1) so umgeformt werden, dass sie aus Hauptgliedern, von den ungestörten Elementen und kleinen, von den Störungen abhängigen Zusatzgliedern bestehen. Schreibt man daher an Stelle von (1):

---

[1]) Berücksichtigt man in X, Y, Ψ auch die zweiten Potenzen der Störungen, so kann man dann sofort die Formeln (17) verwenden (vergl. l. c. Bd. 7, pag. 95—97); doch wird hiervon kein Gebrauch gemacht, in pag. 98 wird auf die Formeln (17b) für die zweiten Potenzen der Störungen zurückgegangen.

$$\begin{aligned} \cos\beta\sin(\lambda - \Omega_0 - \Gamma) &= \cos i_0 \sin(l - \Omega_0) - sA\cos\omega \\ \cos\beta\cos(\lambda - \Omega_0 - \Gamma) &= \cos(l - \Omega_0) + sA\sin\omega \\ \sin\beta &= \sin i_0 \sin(l - \Omega_0) + s \end{aligned} \tag{2}$$

so sind die Grössen $\Omega_0$, $\Gamma$, $i_0$, $A$, $\omega$, $s$ so zu bestimmen, dass die von $s$ abhängigen Zusatzglieder kleine Grössen sind. Da zur Bestimmung von 6 Unbekannten drei Gleichungen bestehen, so können noch drei Bedingungen erfüllt werden. Bezeichnet wieder e die Basis der natürlichen Logarithmen, i die imaginäre Einheit, so wird, wenn Kürze halber $\lambda - \Omega_0 - \Gamma = \eta$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \cos\beta(e^{+i\eta} - e^{-i\eta}) &= \cos i_0 (e^{+i(l-\Omega_0)} - e^{-i(l-\Omega_0)}) - isA(e^{+i\omega} + e^{-i\omega}) \\ \cos\beta(e^{+i\eta} + e^{-i\eta}) &= (e^{+i(l-\Omega_0)} + e^{-i(l-\Omega_0)}) - isA(e^{+i\omega} - e^{-i\omega}). \end{aligned}$$

Diese Gleichungen geben, addirt

$$\cos\beta\, e^{+i\eta} = \cos^2 \tfrac{1}{2} i_0\, e^{i(l-\Omega_0)} + \sin^2 \tfrac{1}{2} i_0\, e^{-i(l-\Omega_0)} - isA\, e^{i\omega}. \tag{3a}$$

Die Gleichung, die durch Subtraction entsteht, braucht nicht angeschrieben zu werden, da sie durch die Vertauschung von $+i$ mit $-i$ entsteht. Aus Gleichung (1) folgt in derselben Weise:

$$\begin{aligned} \cos\beta(e^{+i(\lambda-\Omega)} - e^{-i(\lambda-\Omega)}) &= \cos i\,(e^{+i(l-\sigma)} - e^{-i(l-\sigma)}) \\ \cos\beta(e^{+i(\lambda-\Omega)} + e^{-i(\lambda-\Omega)}) &= e^{+i(l-\sigma)} + e^{-i(l-\sigma)} \\ \cos\beta\, e^{+i(\lambda-\Omega)} &= \cos^2 \tfrac{1}{2} i\, e^{i(l-\sigma)} + \sin^2 \tfrac{1}{2} i\, e^{-i(l-\sigma)}, \end{aligned}$$

daher

$$\cos\beta\, e^{i\eta} e^{i(\Omega_0-\Omega+\Gamma)} = e^{-i(\sigma-\Omega_0)} \cos^2 \tfrac{1}{2} i\, e^{i(l-\Omega_0)} + e^{+i(\sigma-\Omega_0)} \sin^2 \tfrac{1}{2} i\, e^{-i(l-\Omega_0)}. \tag{3b}$$

Die Vergleichung der dritten Gleichung (1) mit der dritten Gleichung (2) liefert:

$$\begin{aligned} s &= \sin i \sin(l - \sigma) - \sin i_0 \sin(l - \Omega_0) \\ 2is &= \sin i (e^{+i(l-\sigma)} - e^{-i(l-\sigma)}) - \sin i_0 (e^{+i(l-\Omega_0)} - e^{-i(l-\Omega_0)}) \end{aligned}$$

$$= \sin i (e^{+i(\Omega_0-\sigma)} e^{+i(l-\Omega_0)} - e^{-i(\Omega_0-\sigma)} e^{-i(l-\Omega_0)}) - \sin i_0 (e^{+i(l-\Omega_0)} - e^{-i(l-\Omega_0)}).$$

Führt man den Werth von $is$ in (3a) ein, setzt

$$e^{-i\omega} = y; \quad e^{-i(\Omega_0-\sigma)} = a; \quad e^{-i\omega} e^{-i(\Omega_0-\Omega+\Gamma)} = x, \tag{4}$$

so wird

$$\begin{aligned} y\cos\beta\, e^{i\eta} = {} & y\cos^2 \tfrac{1}{2} i_0\, e^{+i(l-\Omega_0)} + y\sin^2 \tfrac{1}{2} i_0\, e^{-i(l-\Omega_0)} \\ & - \tfrac{1}{2} A \left[\sin i \left(\frac{1}{a} e^{+i(l-\Omega_0)} - a e^{-i(l-\Omega_0)}\right) - \sin i_0 (e^{+i(l-\Omega_0)} - e^{-i(l-\Omega_0)})\right] \end{aligned}$$

$$y\cos\beta\, e^{i\eta} = \frac{x}{a} \cos^2 \tfrac{1}{2} i\, e^{+i(l-\Omega_0)} + ax\sin^2 \tfrac{1}{2} i\, e^{-i(l-\Omega_0)}. \tag{5}$$

An Stelle von $\Gamma$, $\Omega_0$, $\omega$ treten hier $y$, $a$, $x$; $s$ ist eliminiert; die Unbekannte $\eta$ tritt an Stelle der heliocentrischen Länge $\lambda$.

Als nächste Bedingung kann nun die Forderung gestellt werden, dass die Ausdrücke für $x$ und $y$ von $l$ unabhängig seien; dann werden in der Differenz der beiden Gleichungen (5) die Coëfficienten von $e^{+i(l-\Omega_0)}$ und $e^{-i(l-\Omega_0)}$ für sich gleich Null zu setzen sein, wodurch man erhalt:

$$\begin{aligned} y\cos^2 \tfrac{1}{2} i_0 - \tfrac{1}{2} \frac{A}{a} \sin i + \tfrac{1}{2} A \sin i_0 - \frac{x}{a} \cos^2 \tfrac{1}{2} i &= 0 \\ y\sin^2 \tfrac{1}{2} i_0 + \tfrac{1}{2} Aa \sin i - \tfrac{1}{2} A \sin i_0 - xa \sin^2 \tfrac{1}{2} i &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Hiermit erhalt man für die Verhaltnisse $\frac{A}{x}$ und $\frac{A}{y}$ ($a$ und $i_0$ bleiben dabei beliebig):

$$\begin{aligned} y(a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} i \cos^2 \tfrac{1}{2} i_0 - \cos^2 \tfrac{1}{2} i \sin^2 \tfrac{1}{2} i_0) - \tfrac{1}{2} A [a \sin i - \sin i_0 (a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} i + \cos^2 \tfrac{1}{2} i)] &= 0 \\ x(a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} i \cos^2 \tfrac{1}{2} i_0 - \cos^2 \tfrac{1}{2} i \sin^2 \tfrac{1}{2} i_0) + \tfrac{1}{2} A [a \sin i_0 - \sin i (a^2 \cos^2 \tfrac{1}{2} i_0 + \sin^2 \tfrac{1}{2} i_0)] &= 0. \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen sind durch $a \sin \frac{1}{2} i \cos \frac{1}{2} i_0 - \cos \frac{1}{2} i \sin \frac{1}{2} i_0$ theilbar; dividirt man durch diesen gemeinschaftlichen Faktor, so folgt:

$$\frac{A}{y} = \frac{a \cos\frac{1}{2} i_0 \sin\frac{1}{2} i + \sin\frac{1}{2} i_0 \cos\frac{1}{2} i}{\cos\frac{1}{2} i_0 \cos\frac{1}{2} i - a \sin\frac{1}{2} i_0 \sin\frac{1}{2} i}; \quad \frac{A}{x} = \frac{a \cos\frac{1}{2} i_0 \sin\frac{1}{2} i + \sin\frac{1}{2} i_0 \cos\frac{1}{2} i}{a \cos\frac{1}{2} i_0 \cos\frac{1}{2} i - \sin\frac{1}{2} i_0 \sin\frac{1}{2} i}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{a \cos\frac{1}{2} i_0 \cos\frac{1}{2} i - \sin\frac{1}{2} i_0 \sin\frac{1}{2} i}{\cos\frac{1}{2} i_0 \cos\frac{1}{2} i - a \sin\frac{1}{2} i_0 \sin\frac{1}{2} i}. \tag{7a}$$

Durch Vertauschung von $+i$ mit $-i$ entstehen zwei den Gleichungen (6) analoge, in denen an Stelle von $x, y, a$ ihre reciproken Werthe stehen. Man erhält daher aus diesen:

$$Ay = \frac{\cos\frac{1}{2} i_0 \sin\frac{1}{2} i + a \sin\frac{1}{2} i_0 \cos\frac{1}{2} i}{a \cos\frac{1}{2} i_0 \cos\frac{1}{2} i - \sin\frac{1}{2} i_0 \sin\frac{1}{2} i}; \quad Ax = \frac{\cos\frac{1}{2} i_0 \sin\frac{1}{2} i + a \sin\frac{1}{2} i_0 \cos\frac{1}{2} i}{\cos\frac{1}{2} i_0 \cos\frac{1}{2} i - a \sin\frac{1}{2} i_0 \sin\frac{1}{2} i}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\cos\frac{1}{2} i_0 \cos\frac{1}{2} i - a \sin\frac{1}{2} i_0 \sin\frac{1}{2} i}{a \cos\frac{1}{2} i_0 \cos\frac{1}{2} i - \sin\frac{1}{2} i_0 \sin\frac{1}{2} i} \tag{7b}$$

und da $y + \frac{1}{y} = 2 \cos \omega$, $y - \frac{1}{y} = -2i \sin \omega$ ist, und ähnlich für $x$, so wird:

$$A \sin \omega = \frac{\sin i \sin(\sigma - \Omega_0)}{\varkappa}$$

$$A \cos \omega = \frac{\sin i_0 \cos i + \cos i_0 \sin i \cos(\sigma - \Omega_0)}{\varkappa}$$

$$\sin(\Omega - \Omega_0 - \Gamma) = \frac{(\cos i + \cos i_0) \sin(\sigma - \Omega_0)}{\varkappa} \tag{8}$$

$$\cos(\Omega - \Omega_0 - \Gamma) = \frac{(1 + \cos i \cos i_0) \cos(\sigma - \Omega_0) - \sin i \sin i_0}{\varkappa}$$

$$\varkappa = 1 + \cos i \cos i_0 - \sin i \sin i_0 \cos(\sigma - \Omega_0).$$

$i_0$, $\Omega_0$ sind dabei keinen weiteren Bedingungen unterworfen. Wählt man für $\Omega_0$ eine Constante, die sich von $\Omega$ nur wenig entfernt, so werden $A$, $\omega$ und $s$ kleine Grössen; für $s$ erhält man

$$s = \sin i \sin(l - \Omega_0) \cos(\Omega_0 - \sigma) + \sin i \cos(l - \Omega_0) \sin(\Omega_0 - \sigma) - \sin i_0 \sin(l - \Omega_0).$$

Setzt man daher

$$\sin i \sin(\sigma - \Omega_0) = p$$

$$\sin i \cos(\sigma - \Omega_0) - \sin i_0 = q, \tag{9a}$$

so wird

$$s = q \sin(l - \Omega_0) - p \cos(l - \Omega_0) \tag{9b}$$

und die Gleichungen (2) werden dann:

$$\cos\beta \sin(\lambda - \Omega_0 - \Gamma) = \cos i_0 \sin(l - \Omega_0) - s\left(\tang i_0 + \frac{q}{\varkappa \cos i_0}\right)$$

$$\cos\beta \cos(\lambda - \Omega_0 - \Gamma) = \cos(l - \Omega_0) + \frac{sp}{\varkappa} \tag{10}$$

$$\sin\beta = \sin i_0 \sin(l - \Omega_0) + s.$$

Die Zusatzglieder $\frac{sp}{\varkappa}$, $\frac{sq}{\varkappa \cos i_0}$ werden, wenn $s, p, q$ als kleine Grössen erster Ordnung angesehen werden, von der zweiten Ordnung. Da aus Gleichung (8):

$$\sin(\sigma - \Omega_0) - \sin(\Omega - \Omega_0 - \Gamma) = \frac{[(1 - \cos i)(1 - \cos i_0) - \sin i \sin i_0 \cos(\sigma - \Omega_0)] \sin(\sigma - \Omega_0)}{\varkappa}$$

folgt, so wird auch $\Gamma$ von derselben Ordnung wie $q$, $s$; $p$ wird numerisch noch kleiner. Führt man an Stelle von $s$ eine neue Variable $u$ durch die Beziehung

$$u = \frac{r_0}{a_0} s$$

ein, so wird

$$u = \frac{r_0}{a_0} q \sin(V + \pi_0 - \Omega_0) - \frac{r_0}{a_0} p \cos(V + \pi_0 - \Omega_0). \tag{11}$$

Es wird daher, wenn man $\tau$ an Stelle von $t$ einführt, und den dadurch entstehenden Werth mit $u'$ bezeichnet:

$$\begin{aligned} u' &= \frac{r_0'}{a_0} q \sin(V' + \pi_0 - \Omega_0) - \frac{r_0'}{a_0} p \cos(V' + \pi_0 - \Omega_0) \\ \frac{du'}{dt} &= \frac{r_0'}{a_0} \sin(V' + \pi_0 - \Omega_0)\frac{dq}{dt} - \frac{r_0'}{a_0} \cos(V' + \pi_0 - \Omega_0)\frac{dp}{dt}. \end{aligned} \tag{11a}$$

Es ist aber:

$$p = -\alpha_3 \cos\Omega_0 - \beta_3 \sin\Omega_0; \qquad q = +\beta_3 \cos\Omega_0 - \alpha_3 \sin\Omega_0 - \sin i_0,$$

demnach mit Rücksicht auf 50 (7):

$$\frac{dp}{dt} = \left(\frac{\gamma_3 y'}{k_0\sqrt{p}}\cos\Omega_0 - \frac{\gamma_3 x'}{k_0\sqrt{p}}\sin\Omega_0\right)\frac{\partial\Omega}{\partial z'}; \qquad \frac{dq}{dt} = \left(\frac{\gamma_3 x'}{k_0\sqrt{p}}\cos\Omega_0 + \frac{\gamma_3 y'}{k_0\sqrt{p}}\sin\Omega_0\right)\frac{\partial\Omega}{\partial z'}$$

und da $y' = r\sin l$; $x' = r\cos l$ ist (gezählt von der nach 50 (8) definirten $X'$-Axe), so wird:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{r\sin(l - \Omega_0)}{k_0\sqrt{p}}\cos i\frac{\partial\Omega}{\partial z'}; \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{r\cos(l - \Omega_0)}{k_0\sqrt{p}}\cos i\frac{\partial\Omega}{\partial z'}$$

$$\frac{du'}{dt} = \frac{r r_0' \cos i}{a_0 k_0\sqrt{p}}\sin(V' - V)\frac{\partial\Omega}{\partial z'}. \tag{12}$$

**53. Entwickelung der Störungsfunction für grosse Excentricitäten und Neigungen.** Die Entwickelungen haben im Wesen den Zweck, die entstehenden Reihen convergenter zu machen. Nebst der Wahl der Coordinaten für die Differentialgleichungen und die Integrationsmethode selbst ist hierzu in erster Linie maassgebend die Entwickelung der Störungsfunction, für welche HANSEN die Entwickelung nach der excentrischen Anomalie[1]) und wie bereits erwähnt, ein mechanisches Integrations- und Multiplikationsverfahren zur Erleichterung der Rechnung[2]) vorschlägt.

Für die Entwickelung von $\frac{1}{r_{01}}$ ist zunächst:

$$\begin{aligned} \left(\frac{r_{01}}{a}\right)^2 &= \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \left(\frac{r'}{a'}\right)^2 \alpha^2 - \\ &- 2\frac{r}{a}\frac{r'}{a'}\alpha\left[\cos(v + \pi_0)\cos(v' + \pi_0') + \sin(v + \pi_0)\sin(v' + \pi_0')\cos J\right] \\ \alpha &= \frac{a'}{a}. \end{aligned} \tag{1}$$

Setzt man

$$\begin{aligned} \cos J \sin\pi_0' &= k\sin K & \sin\pi_0' &= k_1\sin K_1 \\ \cos\pi_0' &= k\cos K & \cos J\cos\pi_0' &= k_1\cos K_1 \end{aligned} \tag{2}$$

und substituirt für r, r' ihre Ausdrücke durch die excentrische Anomalie, so wird

$$\left(\frac{r_{01}}{a}\right)^2 = \gamma_0 - \gamma_1\cos E' - \beta_1\sin E' + \beta_2\cos E'^2, \tag{3}$$

wobei[3])

---

[1]) Dieses ist an sich klar, da der Coëfficient von $\sin E$, $\cos E$ als Function von $e$ nur die Hälfte des Coëfficienten von $\sin v$, $\cos v$ ist.

[2]) Vergl. auch HANSEN: Untersuchungen über die gegenseitigen Störungen des Jupiter und Saturn, Berlin 1831.

[3]) Ueber die für die Praxis vortheilhafteste Form zur Berechnung der Coëfficienten $\gamma_0$, $\gamma_1$, $\beta_1$ s. Abh. der königl. sächs. Gesellsch. der Wissenschaften, Bd. 5, pag. 139.

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= 1 + a^2 - 2e\cos E + e^2\cos^2 E - 2a\,e\,e'k\cos(\pi_0 - K) \\
&\quad + 2a\,e'k\cos(\pi_0 - K)\cos E - 2a\,e'\cos\varphi\cdot k\sin(\pi_0 - K)\sin E \\
\gamma_1 &= 2a^2e' - 2a\,e\,k\cos(\pi_0 - K) + 2a\,k\cos(\pi_0 - K)\cos E - 2a\cos\varphi\, k\sin(\pi_0 - K)\sin E \\
\beta_1 &= -2a\,e\cos\varphi' k_1\sin(\pi_0 - K_1) + 2a\cos\varphi\cos\varphi' k_1\cos(\pi_0 - K_1)\sin E \\
&\quad + 2a\cos\varphi' k_1\sin(\pi_0 - K_1)\cos E \\
\beta_2 &= a^2e'^2.
\end{aligned} \tag{3a}$$

Hierin ist $\gamma_0$ nahe 1; $\gamma_1$, $\beta_1$ sind von der ersten, $\beta_2$ von der zweiten Ordnung der Excentricitäten. Der Ausdruck (3) kann stets in zwei lineare Faktoren mit reellen Coëfficienten zerlegt werden, so dass

$$\left(\frac{r_{01}}{a}\right)^2 = [C - q\cos(E' - Q)][1 - q_1\cos(E' + Q)]. \tag{4}$$

Multiplicirt man, und vergleicht mit (3), so folgen die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= C - q\,q_1\sin^2 Q & \beta_2 &= q\,q_1 \\
\gamma_1 &= (q + q_1 C)\cos Q & \beta_1 &= (q - q_1 C)\sin Q,
\end{aligned} \tag{5}$$

aus denen die Unbekannten $q$, $q_1$, $Q$, $C$ zu bestimmen sind. $q$, $q_1$ sind von der ersten Ordnung der Excentricitäten, $C$ von der nullten Ordnung. Setzt man

$$\begin{aligned}
q\sin Q &= \beta_1 + \xi \\
q\cos Q &= \gamma_1 - \eta \\
C &= \gamma_0 + \zeta
\end{aligned} \tag{6}$$

so wird

$$\begin{aligned}
q_1 C\sin Q &= \xi \\
q_1 C\cos Q &= \eta \\
q\,q_1\sin^2 Q &= \zeta
\end{aligned} \tag{7}$$

und man hat die Unbekannten $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $q_1$ zu bestimmen. $\xi$, $\eta$ sind von der ersten Ordnung, $\zeta$ von der zweiten Ordnung. Es wird

$$\begin{aligned}
(\beta_1 + \xi)\xi &= \zeta(\gamma_0 + \zeta) \\
(\gamma_1 - \eta)\eta &= (\beta_2 - \zeta)(\gamma_0 + \zeta)
\end{aligned} \qquad \frac{\beta_1 + \xi}{\xi} = \frac{\gamma_1 - \eta}{\eta}. \tag{8}$$

Setzt man $\dfrac{\beta_1 + \xi}{\xi} = \vartheta$, so wird auch $\dfrac{\gamma_1 - \eta}{\eta} = \vartheta$, und daraus:

$$\xi = \frac{\beta_1}{\vartheta - 1}; \quad \eta = \frac{\gamma_1}{\vartheta + 1}; \quad \beta_1 + \xi = \beta_1\frac{\vartheta}{\vartheta - 1}; \quad \gamma_1 - \eta = \gamma_1\frac{\vartheta}{\vartheta + 1}. \tag{9}$$

Demnach werden die Gleichungen (8):

$$\beta_1^2\frac{\vartheta}{(\vartheta - 1)^2} = \zeta(\gamma_0 + \zeta); \qquad \gamma_1^2\frac{\vartheta}{(\vartheta + 1)^2} = (\beta_2 - \zeta)(\gamma_0 + \zeta). \tag{10}$$

Um aus diesen Gleichungen $\vartheta$ und $\zeta$ zu bestimmen, erhält man successive:

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma_1^2}{\beta_1^2}\left(\frac{\vartheta - 1}{\vartheta + 1}\right)^2 = \frac{\beta_2 - \zeta}{\zeta}; \qquad \frac{\vartheta - 1}{\vartheta + 1} = \frac{\beta_1}{\gamma_1}\sqrt{\frac{\beta_2 - \zeta}{\zeta}} \\
&\vartheta = \frac{\gamma_1\sqrt{\zeta} + \beta_1\sqrt{\beta_2 - \zeta}}{\gamma_1\sqrt{\zeta} - \beta_1\sqrt{\beta_2 - \zeta}}
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\vartheta - 1 = \frac{2\beta_1\sqrt{\beta_2 - \zeta}}{\gamma_1\sqrt{\zeta} - \beta_1\sqrt{\beta_2 - \zeta}}; \qquad \vartheta + 1 = \frac{2\gamma_1\sqrt{\zeta}}{\gamma_1\sqrt{\zeta} - \beta_1\sqrt{\beta_2 - \zeta}}$$

$$\frac{\vartheta}{(\vartheta - 1)^2} = \frac{\gamma_1^2\zeta - \beta_1^2(\beta_2 - \zeta)}{4\beta_1^2(\beta_2 - \zeta)}; \qquad \frac{\vartheta}{(\vartheta + 1)^2} = \frac{\gamma_1^2\zeta - \beta_1^2(\beta_2 - \zeta)}{4\gamma_1^2\zeta}$$

$$\gamma_1^2\zeta - \beta_1^2(\beta_2 - \zeta) = 4(\beta_2 - \zeta)\zeta(\gamma_0 + \zeta)$$

$$\zeta^3 + (\gamma_0 - \beta_2)\zeta^2 + \tfrac{1}{4}(\beta_1^2 + \gamma_1^2 - 4\gamma_0\beta_2)\zeta - \tfrac{1}{4}\beta_1^2\beta_2 = 0 \tag{12}$$

Diese Gleichung hat, da sie ungraden Grades, und das letzte Glied negativ ist, nothwendig eine reelle Wurzel[1]; da $\zeta$ eine sehr kleine Grösse ist, so kann sie durch Näherungen bestimmt werden; ein erster Näherungswerth wäre (mit Vernachlässigung von $\zeta^2$, $\zeta^3$):

---

[1]) Die beiden andern Wurzeln sind ebenfalls reell; es entsprechen ihnen aber imaginäre Werthe von $\xi$, $\eta$; l. c. Bd. 5, pag. 143.

$$\zeta = \frac{\beta_1^2}{\beta_1^2 + \gamma_1^2 - 4\gamma_0\beta_2}\beta_2,$$

da aber, wie erwähnt, $\zeta$ von der zweiten Ordnung der Excentricitäten ist, so sind in (12) nur $\zeta^3$ und $\beta_2\zeta^2$ von der sechsten Ordnung, die übrigen Glieder (vierter Ordnung) geben die Gleichung

$$\gamma_0\zeta^2 + \tfrac{1}{4}(\beta_1^2 + \gamma_1^2 - 4\gamma_0\beta_2)\zeta - \tfrac{1}{4}\beta_1^2\beta_2 = 0 \qquad (12a)$$

deren Lösungen

$$\zeta = -\tfrac{1}{8}\frac{\beta_1^2 + \gamma_1^2 - 4\gamma_0\beta_2}{\gamma_0} \pm \sqrt{\frac{1}{64}\frac{(\beta_1^2 + \gamma_1^2 - 4\gamma_0\beta_2)^2}{\gamma_0^2} + \tfrac{1}{4}\frac{\beta_1^2\beta_2}{\gamma_0}}$$

sind; für das untere Zeichen wird $\zeta$ negativ, daher $\theta$, folglich auch $\xi$, $\eta$, imaginär; es ist daher

$$\zeta = \frac{1}{8\gamma_0}[\sqrt{(\beta_1^2 + \gamma_1^2 - 4\gamma_0\beta_2)^2 + 16\beta_1^2\beta_2\gamma_0} - (\beta_1^2 + \gamma_1^2 - 4\gamma_0\beta_2)]. \qquad (13)$$

Dann erhält man $\theta$ nach (11); $\xi$, $\eta$ nach (9); $q$, $Q$, $C$ nach (6) und $q_1$ nach einer der Formeln (7). Ist die Excentricität des gestörten Planeten wesentlich grösser[1]), so wird man an Stelle von (13)

$$\zeta = \frac{\beta_1^2}{\beta_1^2 + \gamma_1^2}\beta_2 \qquad (13a)$$

setzen können. Aus (7) folgt dann:

$$\left(\frac{a}{r_{01}}\right)^n = [C - q\cos(E' - Q)]^{-\frac{n}{2}}[1 - q_1\cos(E' + Q)]^{-\frac{n}{2}}.$$

Jeder dieser Faktoren kann ohne Schwierigkeiten nach der in 15 angegebenen Methode in einer nach *cos* der Vielfachen von $(E' \mp Q)$ fortlaufenden Reihe entwickelt werden, wobei für die Bestimmung der Coëfficienten ein dem in 85 angegebenen ähnlicher Algorithmus auftritt. Sei

$$\begin{aligned} A^{(n)} &= [C - q\cos(E'-Q)]^{-\frac{n}{2}} = \alpha_0^{(n)} + 2\alpha_1^{(n)}\cos(E'-Q) + 2\alpha_2^{(n)}\cos 2(E'-Q) + \ldots \\ B^{(n)} &= [1 - q_1\cos(E'+Q)]^{-\frac{n}{2}} = \beta_0^{(n)} + 2\beta_1^{(n)}\cos(E'+Q) + 2\beta_2^{(n)}\cos 2(E'+Q) + \ldots \end{aligned} \qquad (14)$$

so ist noch zu beachten, dass die Coëfficienten $C$, $q$, $q_1$ demnach auch $\alpha_0^{(n)}$, $\alpha_1^{(n)}$ ... $\beta_0^{(n)}$, $\beta_1^{(n)}$ ... und $Q$ Functionen von $E$ sind. Sei $E_x$ ein bestimmter Werth von $E$, für welchen sich nach (8a) die zugehörigen Werthe von $\gamma_0$, $\gamma_1$, $\beta_1$, $\beta_2$, daher auch ganz bestimmte Werthe $C_x$, $q_x$, $Q_x$, $q_{1x}$ ergeben, denen die Werthe $\alpha_{0x}^{(n)}$, $\alpha_{1x}^{(n)}$ .... $\beta_{0x}^{(n)}$, $\beta_{1x}^{(n)}$ ... entsprechen, so muss

$$\begin{aligned} A_x^{(n)} &= \alpha_{0x}^{(n)} + 2\Sigma\alpha_{ix}^{(n)}\cos i(E' - Q_x) = \alpha_{0x}^{(n)} + 2\Sigma\alpha_{ix}^{(n)}\cos[i(E' - E_x) - i(Q_x - E_x)] \\ &= \alpha_{0x}^{(n)} + 2\Sigma\alpha_{ix}^{(n)}\cos i(Q_x - E_x)\cos i(E' - E_x) + 2\Sigma\alpha_{ix}^{(n)}\sin i(Q_x - E_x)\sin i(E' - E_x). \end{aligned}$$

Setzt man die einem gegebenen Werthe von $E$, zugehörigen, leicht zu berechnenden Werthe

$$\alpha_{0x}^{(n)} = S_{0x}^{(n)}, \qquad \begin{aligned} \alpha_{ix}^{(n)}\cos i(Q_x - E_x) &= S_{ix}^{(n,c)} \\ \alpha_{ix}^{(n)}\sin i(Q_x - E_x) &= S_{ix}^{(n,s)}, \end{aligned} \qquad (15)$$

so wird

$$\begin{aligned} A_x^{(n)} = S_{0x}^{(n)} &+ 2S_{1x}^{(n,c)}\cos(E' - E_x) + 2S_{2x}^{(n,c)}\cos 2(E' - E_x) + \ldots \\ &+ 2S_{1x}^{(n,s)}\sin(E' - E_x) + 2S_{2x}^{(n,s)}\sin 2(E' - E_x) + \ldots \end{aligned} \qquad (16)$$

---

[1]) HANSEN berücksichtigt nur den Fall grosser Excentricitäten, wo $\beta_1$, $\gamma_1$ numerisch gegen $\sqrt{\beta_2}$ überwiegen und erhält dann die Formel (13a).

Aus den Coëfficienten (15) kann man aber die Coëfficienten der allgemeinen Entwickelungen

$$\begin{aligned} A^{(n)} = S_0^{(n)} + 2S_1^{(n,c)} \cos(E'-E) + 2S_2^{(n,c)} \cos 2(E'-E) + \dots \\ + 2S_1^{(n,s)} \sin(E'-E) + 2S_2^{(n,s)} \sin 2(E'-E) + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

nach bekannten Methoden leicht finden, wenn man die Werthe der $S_{ik}$ auf eine Reihe über den ganzen Kreis äquidistant vertheilter Werthe von $E_H$ bestimmt[1].

Hat man auf diese Weise die Reihen für $A^{(n)}$, $B^{(n)}$ in der Form (17) mit numerischen Coëfficienten dargestellt, so werden dieselben weiter numerisch multiplicirt, wodurch man

$$\left(\frac{a}{r_{01}}\right)^n = \Sigma\Sigma(i\,i'c) \cos(iE - i'E') + \Sigma\Sigma(i\,i's) \sin(iE - i'E')$$

erhält. In diesen Reihen wird an Stelle der excentrischen Anomalie $E'$ des störenden Planeten dessen mittlere Anomalie $M'$ eingeführt[2], was in der mehrfach erörterten Weise geschieht, wodurch die Reihen die Form annehmen:

$$\left(\frac{a}{r_{01}}\right)^n = \Sigma\Sigma([i\,i'c]) \cos(iE - i'M') + \Sigma\Sigma([i\,i's]) \sin(iE - i'M').$$

Der zweite Theil der Störungsfunction kann auf dieselbe Form gebracht werden. Wird endlich in der Summe

$$M' = M_0' + \mu' t = M_0' + \frac{\mu'}{\mu}(M - M_0) = M_0' - \frac{\mu'}{\mu} M_0 + \frac{\mu'}{\mu}(E - e \sin E)$$

substituirt, so erhält man die Störungfunction in der Form:

$$\begin{aligned} \Omega = \Sigma\Sigma[i\,i'c] \cos\left\{\left(i - i'\frac{\mu'}{\mu}\right) E - i'\left(M_0' - \frac{\mu'}{\mu} M_0\right)\right\} \\ + \Sigma\Sigma[i\,i's] \sin\left\{\left(i - i'\frac{\mu'}{\mu}\right) E - i'\left(M_0' - \frac{\mu'}{\mu} M_0\right)\right\} \end{aligned}$$

wo $E$ die einzige Variable ist.

Durch die Einführung der Grössen $k$, $k_1$, $K$, $K_1$ (Formeln 2) und die numerische Bestimmung der Grössen $\gamma_0, \gamma_1, \beta_1, \beta_2$ nebst den davon abhängigen $q, q_1, Q, C$ sind die für grosse Excentricitäten und Neigungen schwach convergenten Entwickelungen umgangen. Analytische Entwickelungen für diesen Fall hat zuerst Le Verrier (Annalen der Pariser Sternwarte I. Bd.) vorgeschlagen, die später mehrfach von anderen weiter ausgeführt wurden.

**54. Osculirende Elemente; mittlere Elemente.** Die vollständige Ausführung der hier angedeuteten Principien würde an dieser Stelle viel zu weit führen, und muss auf die hier gegebenen Erörterungen beschränkt bleiben. Allein bezüglich der Integration sind noch einige sehr wichtige Bemerkungen nöthig.

Die Elemente, wie sie für die Störungen der Hauptplaneten in Anwendung kommen, wurden durch Vergleichung der Beobachtungen mehrerer Jahrhunderte erhalten, und repräsentiren mittlere Werthe derselben. Bei den kleinen Planeten werden aus den Beobachtungen einer einzigen Opposition (einer Erscheinung) bereits Elemente abgeleitet, welche dann eine Bahn darstellen, die sich den gegebenen Beobachtungen am Besten anschmiegt, d. h. eine osculirende Bahn. Da die verschiedenen osculirenden Bahnen nur um die Störungen von einander

[1]) Vgl. den Artikel »Mechanische Quadratur, II«; Hansen, l. c., pag. 159.

[2]) Für den störenden Planeten wird hierdurch die Convergenz nicht wesentlich verändert, da die Excentricitäten der störenden Körper klein sind. Beim Uebergange von $M'$ auf $E$ wird die Convergenz nicht schwächer, sondern eher etwas erhöht.

verschieden sein können, so wird man bei der Berechnung der Störungen mit verschiedenen Elementensystemen Fehler begehen, die von der zweiten Ordnung der störenden Massen sind, welche sich aber bei genügend weit getriebener Annäherung ausgleichen müssen, da ja die Störungen, welche Elemente immer für die Bewegung derselben zu Grunde gelegt werden, durch die gegenseitige Lage der Himmelskörper eindeutig bestimmt sind. Ein Unterschied kann nur in den Werthen der Integrationsconstanten liegen.

Diese sind stets sechs an Zahl. Sie sind entweder selbst Incremente (Verbesserungen) der zu Grunde gelegten Elemente, oder sie sind Functionen dieser Incremente. Bestimmt man die Integrationsconstanten so, dass die Störungen für eine gewisse Epoche verschwinden, so werden die aus denselben sich ergehenden Elemente für diese Epoche osculiren. Natürlich werden die osculirenden Elemente successiv erhalten, denn jede weitere Näherung bringt Correctionen der Elemente, welche bezw. von der ersten, zweiten, dritten . . . Potenz der störenden Massen sind.

An Stelle der osculirenden Elemente, welche sich der Definition nach nur für eine gewisse Epoche der Bewegung möglichst nahe anschliessen, wird es besser mittlere Elemente einzuführen, welche dahin definirt werden, dass sie zwischen den überhaupt möglichen Grenzen der osculirenden Elemente in der Mitte liegen. Für diese werden daher die Störungen zu beiden Seiten gleichmässig, daher, absolut genommen, kleiner, als unter Zugrundelegung irgend welcher osculirender Elemente: Daraus folgt, dass in den Ausdrücken für die Störungen jene Glieder, welche die grössten periodischen Störungen erzeugen, für mittlere Elemente verschwinden müssen. Nun bilden die Störungen Reihen, in denen die von $\cos E$, $\sin E$, $\cos 2E$, $\sin 2E$ . . . abhängigen Glieder immer kleinere Coëfficienten erhalten; die grössten Coëfficienten erhalten in den Ausdrücken für $v$ und $u$ diejenigen Glieder, die von $\sin E$ und $\cos E$ abhängen; setzt man deren Coëfficienten gleich Null, so werden die absoluten Beträge der Störungen nunmehr den Maximalwerth der Coëfficienten der nächsten Glieder erreichen, daher die gestellte Bedingung für die mittleren Elemente erfüllt[1]). Damit sind dann die mittleren Werthe für $\Omega$, $i$, $e$, $\omega$, festgelegt, wobei aber noch zu erwähnen ist, dass der analytische Ausdruck dieser mittleren Elemente noch seculare Glieder enthält, also $\Omega = \Omega_0 + \Omega' t$ u. s. w. und daher irgend ein System numerischer Werthe derselben sich auf eine gewisse Epoche bezieht.

Der mittlere Werth der mittleren Bewegung $\mu$ ist selbstverständlich derjenige, bei welchem in den Störungen der Länge keine von der Zeit abhängigen Glieder auftreten. Er ist also $\mu + \lambda = (\mu)$ (Vergl. No. 49) und stimmt mit dem aus den Beobachtungen sehr langer Zeiträume erhaltenen wahren Werthe der mittleren Bewegung überein. Hierzu tritt dann noch in der mittleren Länge ein dem Quadrate der Zeit proportionales Glied, die Secularänderung der mittleren Länge[2]).

---

[1]) Bd. 6, pag. 90. Eigentlich ist die Aufgabe ein Problem des Maximums und Minimums; denn es kann ganz wohl vorkommen, dass die Störungen noch geringer werden, wenn die Coëfficienten von $\sin E$, $\cos E$ in den beiden Ausdrücken für $v$ und $u$ sehr kleine, aber endliche, nicht verschwindende Werthe erreichen. Die Bestimmung dieses Minimums wäre eine etwas complicirtere, dabei aber im Grunde unnöthige Aufgabe; die HANSEN'sche Methode läuft auf die Definition hinaus: Mittlere Elemente sind jene, in welchen die auftretenden Störungen von der zweiten Ordnung der kleinen Parameter werden.

[2]) HANSEN, Bd. 6, pag. 122: Ueber die Verwandlung der von osculirenden Elementen abhängigen Störungen in solche, die von mittleren Elementen abhängen, vergl. HANSEN, Bd. 7, pag. 308.

**55. Proportionalcoordinaten.** OPPOLZER'sche Methode. Beachtet man den in 26 abgeleiteten Ausdruck:

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{\mathfrak{r}^3} - \frac{3}{2}\frac{s^2}{\mathfrak{r}^5}f,$$

so lassen sich die Formeln 22 (6)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k_0^2\frac{x}{\mathfrak{r}^3} = X;\quad \frac{d^2y}{dt^2} + k_0^2\frac{y}{\mathfrak{r}^3} = Y;\quad \frac{d^2z}{dt^2} + k_0^2\frac{z}{\mathfrak{r}^3} = Z \tag{1}$$

schreiben, wobei

$$X = X_1 + \Delta\cdot x,\quad Y = Y_1 + \Delta\cdot y,\quad Z = Z_1 + \Delta\cdot z$$
$$\Delta = \frac{3}{2}k_0^2\frac{s^2}{\mathfrak{r}^5}f \tag{2}$$

ist. Es mögen nun die Coordinaten $x$, $y$ in andere $\bar{x}$, $\bar{y}$ und eine Störung $\Gamma$, welche als ein Proportionalitätsfaktor desselben auftritt, derart zerlegt werden, dass vorerst über $\bar{x}$, $\bar{y}$ und über $\Gamma$ nur die eine Annahme gemacht wird, dass

$$\bar{x} = x\Gamma;\quad \bar{y} = y\cdot\Gamma,\quad \text{daher}\quad \bar{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}\cdot\Gamma \tag{3}$$

sei. Weiter wird an Stelle der Zeit $t$ eine andere Variable $\zeta$ eingeführt, welche durch die Beziehung definirt ist,

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\Gamma^2}{U}\quad \text{oder}\quad \frac{dt}{d\zeta} = \frac{U}{\Gamma^2}, \tag{4}$$

wobei $U$ ebenfalls eine vorläufig noch willkürlich gelassene Function ist. Aus (3) folgt:

$$\frac{d\bar{x}}{d\zeta} = x\frac{d\Gamma}{d\zeta} + \frac{U}{\Gamma}\frac{dx}{dt} \tag{5}$$

und durch nochmalige Differentiation und entsprechende Reduction

$$\begin{aligned}\Gamma\frac{d^2\bar{x}}{d\zeta^2} - \bar{x}\frac{d^2\Gamma}{d\zeta^2} - \frac{\Gamma}{U}\frac{dU}{d\zeta}\left(\frac{d\bar{x}}{d\zeta} - \frac{\bar{x}}{\Gamma}\frac{d\Gamma}{d\zeta}\right) &= U\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dt}{d\zeta}\\ \Gamma\frac{d^2\bar{y}}{d\zeta^2} - \bar{y}\frac{d^2\Gamma}{d\zeta^2} - \frac{\Gamma}{U}\frac{dU}{d\zeta}\left(\frac{d\bar{y}}{d\zeta} - \frac{\bar{y}}{\Gamma}\frac{d\Gamma}{d\zeta}\right) &= U\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{d\zeta}.\end{aligned} \tag{6}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man durch Multiplication mit $-\bar{y}$ und $\bar{x}$, bezw. mit $+\bar{x}$ und $+\bar{y}$ und Addition

$$\begin{aligned}&\bar{x}\frac{d^2\bar{y}}{d\zeta^2} - \bar{y}\frac{d^2\bar{x}}{d\zeta^2} - \frac{1}{U}\frac{dU}{d\zeta}\left(\bar{x}\frac{d\bar{y}}{d\zeta} - \bar{y}\frac{d\bar{x}}{d\zeta}\right) = U\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{dt}{d\zeta}\\ &\bar{x}\frac{d^2\bar{x}}{d\zeta^2} + \bar{y}\frac{d^2\bar{y}}{d\zeta^2} - \frac{1}{U}\frac{dU}{d\zeta}\left(\bar{x}\frac{d\bar{x}}{d\zeta} + \bar{y}\frac{d\bar{y}}{d\zeta}\right) - \frac{\bar{\mathfrak{r}}^2}{\Gamma}\left(\frac{d^2\Gamma}{d\zeta^2} - \frac{1}{U}\frac{dU}{d\zeta}\frac{d\Gamma}{d\zeta}\right)\\ &\qquad = \frac{U^2}{\Gamma^2}\left(x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2}\right).\end{aligned} \tag{7}$$

Es ist aber nach (1):

$$\begin{aligned}x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} &= x\left(Y - k_0^2\frac{y}{\mathfrak{r}^3}\right) - y\left(X - k_0^2\frac{x}{\mathfrak{r}^3}\right) = xY - yX = \mathfrak{r}Q_1 = Q\\ x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} &= x\left(X - k_0^2\frac{x}{\mathfrak{r}^3}\right) + y\left(Y - k_0^2\frac{y}{\mathfrak{r}^3}\right) = xX + yY - k_0^2\frac{x^2+y^2}{\mathfrak{r}^3} =\\ &= P - \frac{k_0^2}{\mathfrak{r}},\end{aligned} \tag{8}$$

wobei die Bedeutung der störenden Kräfte $Q$, $P$ aus 26 leicht ersichtlich ist.

Bisher war zwischen den Grössen $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\zeta$ nur eine einzige Beziehung festgesetzt, nämlich: $\bar{x}:\bar{y} = x:y$; denn in der Differentialgleichung für $\zeta$ liegt keine

Beschränkung, da dieselbe durch die Wahl der noch unbestimmten Function $U$ unter allen Umständen erfüllt werden kann. Es soll nunmehr angenommen werden [1]), dass $\bar{x} = x_0$, $\bar{y} = y_0$ die ungestörten Coordinaten für die ungestörte Zeit $\zeta$ seien, so dass

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_0}{d\zeta^2} + \frac{k_0^2 x_0}{r_0^3} &= 0 \\ \frac{d^2 y_0}{d\zeta^2} + \frac{k_0^2 y_0}{r_0^3} &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

ist. Hiermit erscheinen die noch erforderlichen zwei Bedingungen festgelegt, daher werden $\Gamma$ und $U$ bestimmt sein. Man hat zunächst:

$$x_0 \frac{dy_0}{d\zeta} - y_0 \frac{dx_0}{d\zeta} = k_0 \sqrt{p_0}$$

$$x_0 \frac{d^2 y_0}{d\zeta^2} - y_0 \frac{d^2 x_0}{d\zeta^2} = 0,$$

folglich entsteht aus (7) mit Rücksicht auf (8):

$$-k_0 \sqrt{p_0} \frac{1}{U} \frac{dU}{d\zeta} = UQ \frac{dt}{d\zeta}$$

oder

$$-\frac{1}{U^2} \frac{dU}{dt} = \frac{Q}{k_0 \sqrt{p_0}}$$

und integrirt:

$$\frac{1}{U} = C + \frac{1}{k_0 \sqrt{p_0}} \int Q\, dt.$$

Da ohne Rücksicht auf Störungen $dt = d\zeta$ sein müsste, so wird $C = 1$. Setzt man daher das Integral

$$\frac{1}{k_0 \sqrt{p_0}} \int Q\, dt = \mathrm{I}, \tag{I}$$

so wird

$$\frac{1}{U} = 1 + \mathrm{I}; \quad \frac{d\zeta}{dt} = \Gamma^2 (1 + \mathrm{I}). \tag{10}$$

Wird nunmehr $\Gamma = 1 + \gamma$ gesetzt, so wird

$$\frac{d\zeta}{dt} = (1 + \gamma)^2 (1 + \mathrm{I}). \tag{10a}$$

Dann folgt aus den Gleichungen (6), wenn man für den Augenblick

$$x_0 \frac{d\gamma}{d\zeta} - \gamma \frac{dx_0}{d\zeta} = q$$

setzt:

$$\frac{dq}{d\zeta} - \frac{1}{U} \frac{dU}{d\zeta} q = UR \tag{11}$$

wobei

$$R = -\left(U - \frac{1}{U}\right) \frac{d^2 x_0}{d\zeta^2} - \frac{1}{U^2} \frac{dU}{d\zeta} \frac{dx_0}{d\zeta} - \frac{U}{(1+\gamma)^2} X. \tag{11a}$$

Das Integral der linearen Differentialgleichung (11) wird nach bekannten Methoden [2]):

---

[1]) Eine andere Annahme s. No. 72.

[2]) In der ersten Abhandlung: »Ermittelung der Störungswerthe in den Coordinaten durch Variation entsprechend gewählter Constanten«, Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, Bd. 46, pag. 49, wird die Integration ohne Uebergang auf diese lineare Differentialgleichung vorgenommen. Dadurch werden in den Formeln (48), l. c. pag. 53 die Differentialquotienten der Ausdrücke II, III von $\sigma$, also von den Integralen II, III selbst ab-

$$q = U\left(C + \int \frac{1}{U} U R\, d\zeta\right)$$

und da für $R = 0$ auch $q = 0$ werden muss, demnach $C = 0$ ist:

$$x_0 \frac{d\gamma}{d\zeta} - \gamma \frac{dx_0}{d\zeta} = \frac{1}{1+\mathrm{I}} \int R\, d\zeta.$$

Es ist aber entsprechend transformirt:

$$R = -X \frac{dt}{d\zeta} - \frac{1}{(1+\mathrm{I})^2} \frac{dx_0}{d\zeta} \frac{d\mathrm{I}}{d\zeta} + \frac{d}{d\zeta}\left(\frac{2\mathrm{I}+\mathrm{I}^2}{1+\mathrm{I}} \frac{dx_0}{d\zeta}\right).$$

Setzt man daher

$$\begin{aligned} \mathrm{II} &= \frac{1}{k_0\sqrt{p_0}} \int \left(Y + \frac{1}{(1+\mathrm{I})^2} \frac{dy_0}{d\zeta} \frac{d\mathrm{I}}{dt}\right) dt \\ \mathrm{III} &= \frac{1}{k_0\sqrt{p_0}} \int \left(X + \frac{1}{(1+\mathrm{I})^2} \frac{dx_0}{d\zeta} \frac{d\mathrm{I}}{dt}\right) dt, \end{aligned} \tag{II}$$

so wird

$$\begin{aligned} x_0 \frac{d\gamma}{d\zeta} - \gamma \frac{dx_0}{d\zeta} &= -\frac{\mathrm{III}}{1+\mathrm{I}} k_0\sqrt{p_0} + \frac{2\mathrm{I}+\mathrm{I}^2}{(1+\mathrm{I})^2} \frac{dx_0}{d\zeta} \\ y_0 \frac{d\gamma}{d\zeta} - \gamma \frac{dy_0}{d\zeta} &= -\frac{\mathrm{II}}{1+\mathrm{I}} k_0\sqrt{p_0} + \frac{2\mathrm{I}+\mathrm{I}^2}{(1+\mathrm{I})^2} \frac{dy_0}{d\zeta}. \end{aligned} \tag{12}$$

Würde aus diesen Gleichungen $\frac{d\gamma}{d\zeta}$ bestimmt werden, so erhielte man durch eine nochmalige Integration $\gamma$; der erhaltene Werth muss aber die beiden Gleichungen (12) identisch erfüllen, und daher mit dem aus denselben durch Elimination von $\frac{d\gamma}{d\zeta}$ erhaltenen Werthe identisch sein. Multiplicirt man daher diese Gleichungen mit $y_0$ bezw. $-x_0$ und addirt, so erhält man sofort:

$$\gamma = -\frac{2\mathrm{I}+\mathrm{I}^2}{(1+\mathrm{I})^2} + \frac{\mathrm{II}x_0 - \mathrm{III}y_0}{1+\mathrm{I}} \tag{13}$$

oder wenn

$$\mathrm{II}x_0 - \mathrm{III}y_0 = \mathfrak{S} \tag{III}$$

gesetzt wird:

$$1 + \gamma = \frac{1}{(1+\mathrm{I})^2} + \frac{\mathfrak{S}}{1+\mathrm{I}}. \tag{14}$$

Setzt man die Werthe aus (12) in (5) ein und berücksichtigt (8) und (10), so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= k_0\sqrt{p_0}\,\mathrm{III} + \frac{1}{1+\mathrm{I}} \frac{dx_0}{d\zeta} \\ \frac{dy}{dt} &= k_0\sqrt{p_0}\,\mathrm{II} + \frac{1}{1+\mathrm{I}} \frac{dy_0}{d\zeta}. \end{aligned} \tag{IV}$$

Aus der Gleichung (10) kann man nun die zu einer gewissen Zeit gehörige Störung der mittleren Anomalie erhalten; es wird

hängig. Diese Formeln werden daher eigentlich simultane Differentialgleichungen erster Ordnung, und da die Coëfficienten von derselben Ordnung sind, wie die von II und III unabhängigen Glieder ($w$ und $s$ sind nahe 1), so werden die Quadraturen im allgemeinen die angestrebte Genauigkeitsgrenze nicht zu erreichen gestatten. Die Ableitung in der zweiten Abhandlung »Entwurf einer Mondtheorie«, Denkschriften, Bd. 51, ist hiervon befreit, da die Gleichung (17) pag. 88 als Integral der linearen Differentialgleichung (15) pag. 87 auf diesen Umstand entsprechend Rücksicht nimmt. Die schliesslich auftretenden linearen Differentialgleichungen (16), (17) sind mit Rücksicht auf die in denselben auftretenden Coëfficienten anderer Natur, indem für specielle Störungen die rechts auftretenden, von den Integralen selbst abhängigen Glieder aus den früheren Näherungen entnommen werden können.

$$\frac{d\Delta M_0}{dt} = \mu\left(\frac{d(\zeta - t)}{dt}\right) = \mu[(1+\mathrm{I})(1+\gamma)^2 - 1],$$

daher mit Berücksichtigung von (14):

$$\frac{dM_0}{dt} = \mu\left[\frac{1}{(1+\mathrm{I})^3} + \frac{2\Xi}{(1+\mathrm{I})^2} + \frac{\Xi^2}{(1+\mathrm{I})}\right]. \tag{V}$$

Die Gleichungen I, II, III, IV, V bestimmen die gestörte Bewegung in Länge. Die in diesen Formeln auftretenden Grössen $\frac{dx_0}{d\zeta}$, $\frac{dy_0}{d\zeta}$ werden aus den Formeln in No. 17 für die ungestörte Bewegung ermittelt. Für die Bestimmung der Störung in $z$ erhält man aus (1):

$$\begin{aligned} y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} &= \int (yZ - zY)dt \\ x\frac{dz}{dt} - z\frac{dx}{dt} &= \int (xZ - zX)dt. \end{aligned} \tag{15}$$

Setzt man daher

$$z_0 = z(1+\gamma), \tag{8a}$$

wobei zu beachten ist, dass $z_0$ **kein** der ungestörten Bewegung angehöriger Werth ist[1]), und

$$\mathrm{IV} = \frac{1}{k_0\sqrt{p_0}}\int \frac{y_0 Z - z_0 Y}{1+\gamma}dt; \quad \mathrm{V} = \frac{1}{k_0\sqrt{p_0}}\int \frac{x_0 Z - z_0 X}{1+\gamma}dt, \tag{VI}$$

so wird

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = k_0\sqrt{p_0}\cdot \mathrm{IV}; \quad x\frac{dz}{dt} - z\frac{dx}{dt} = k_0\sqrt{p_0}\cdot \mathrm{V}$$

und daraus durch Multiplication mit $-x$, bezw. $+y$ und Addition, da mit Rücksicht auf (8) und (I):

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = (1+\mathrm{I})k_0\sqrt{p_0}$$

ist:

$$(1+\mathrm{I})z = \mathrm{V}\cdot y - \mathrm{IV}\cdot x,$$

folglich

$$z_0 = \frac{\mathrm{V}\cdot y_0 - \mathrm{IV}\cdot x_0}{1+\mathrm{I}}; \quad z = \frac{z_0}{1+\gamma}. \tag{VII}$$

In den störenden Kräften $X$, $Y$ treten die gestörten Coordinaten $x$, $y$ auf. Setzt man für diese die aus (8) folgenden Werthe, so sieht man, dass in den drei Integralen I, II, III [Formeln (I) und (II)] die Ausdrücke $1+\mathrm{I}$ und $1+\gamma$ in verschiedenen positiven und negativen Potenzen auftreten. Sieht man I und $\gamma$ als Grössen erster Ordnung von den störenden Massen an, so werden sich die rechten Seiten in (I) und (II) nach steigenden Potenzen von I und $\gamma$, und da letztere Grösse von den Integralen I, II, III selbst abhängt, nach steigenden Potenzen dieser drei Grössen entwickeln lassen. Man erhält, wenn man sich auf die ersten Potenzen beschränkt:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathrm{I}}{dt} &= a_{01} + a_{11}\mathrm{I} + a_{21}\mathrm{II} + a_{31}\mathrm{III} \\ \frac{d\mathrm{II}}{dt} &= a_{02} + a_{12}\mathrm{I} + a_{22}\mathrm{II} + a_{32}\mathrm{III} \\ \frac{d\mathrm{III}}{dt} &= a_{03} + a_{13}\mathrm{I} + a_{23}\mathrm{II} + a_{33}\mathrm{III}. \end{aligned} \tag{16}$$

---

[1]) $z_0$ wird erst nach den Formeln (VII) bestimmt, sobald für die Integrale IV, V, erste Näherungen bekannt sind, in denen z. B. zuerst $z_0 = 0$ angenommen werden kann.

Ebenso folgt dann, wenn I, II, III bereits ermittelt sind:

$$\begin{aligned} \frac{d\,\mathrm{IV}}{dt} &= a_{04} + a_{44}\,\mathrm{IV} + a_{54}\,\mathrm{V} \\ \frac{d\,\mathrm{V}}{dt} &= a_{05} + a_{45}\,\mathrm{IV} + a_{55}\,\mathrm{V}. \end{aligned} \tag{17}$$

Zur Integration dieser Gleichungen durch successive Näherungen schlägt v. OPPOLZER den folgenden Weg ein. Da

$$uv = -\frac{du}{dt}\int v\,dt + \frac{d}{dt}\left(u\int v\,dt\right)$$

ist, so können die Gleichungen (16) und (17) in folgender Weise geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathrm{I}}{dt} = a_{01} - \frac{d\mathrm{I}}{dt}\int a_{11}\,dt - \frac{d\mathrm{II}}{dt}\int a_{21}\,dt - \frac{d\mathrm{III}}{dt}\int a_{31}\,dt \\ + \frac{d}{dt}\left\{\mathrm{I}\int a_{11}\,dt + \mathrm{II}\int a_{21}\,dt + \mathrm{III}\int a_{31}\,dt\right\} \end{aligned} \tag{17a}$$

$$\frac{d\mathrm{IV}}{dt} = a_{04} - \frac{d\mathrm{IV}}{dt}\int a_{44}\,dt - \frac{d\mathrm{V}}{dt}\int a_{54}\,dt + \frac{d}{dt}\left\{\mathrm{IV}\int a_{44}\,dt + \mathrm{V}\int a_{54}\,dt\right\}$$

und ebenso für die vier übrigen. Setzt man nun:

$$\begin{aligned} n_1 &= c_1 + \int\left\{a_{01} - \frac{d\mathrm{I}}{dt}\int a_{11}\,dt - \frac{d\mathrm{II}}{dt}\int a_{21}\,dt - \frac{d\mathrm{III}}{dt}\int a_{31}\,dt\right\}dt \\ n_2 &= c_2 + \int\left\{a_{02} - \frac{d\mathrm{I}}{dt}\int a_{12}\,dt - \frac{d\mathrm{II}}{dt}\int a_{22}\,dt - \frac{d\mathrm{III}}{dt}\int a_{32}\,dt\right\}dt \\ n_3 &= c_3 + \int\left\{a_{03} - \frac{d\mathrm{I}}{dt}\int a_{13}\,dt - \frac{d\mathrm{II}}{dt}\int a_{23}\,dt - \frac{d\mathrm{III}}{dt}\int a_{33}\,dt\right\}dt \\ n_4 &= c_4 + \int\left\{a_{04} - \frac{d\mathrm{IV}}{dt}\int a_{44}\,dt - \frac{d\mathrm{V}}{dt}\int a_{54}\,dt\right\}dt \\ n_5 &= c_5 + \int\left\{a_{05} - \frac{d\mathrm{IV}}{dt}\int a_{45}\,dt - \frac{d\mathrm{V}}{dt}\int a_{55}\,dt\right\}dt, \end{aligned} \tag{18}$$

so erhält man durch Integration von (17a):

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= n_1 + \mathrm{I}\int a_{11}\,dt + \mathrm{II}\int a_{21}\,dt + \mathrm{III}\int a_{31}\,dt \\ \mathrm{II} &= n_2 + \mathrm{I}\int a_{12}\,dt + \mathrm{II}\int a_{22}\,dt + \mathrm{III}\int a_{32}\,dt \\ \mathrm{III} &= n_3 + \mathrm{I}\int a_{13}\,dt + \mathrm{II}\int a_{23}\,dt + \mathrm{III}\int a_{33}\,dt \end{aligned} \tag{19a}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{IV} &= n_4 + \mathrm{IV}\int a_{44}\,dt + \mathrm{V}\int a_{54}\,dt \\ \mathrm{V} &= n_5 + \mathrm{IV}\int a_{45}\,dt + \mathrm{V}\int a_{55}\,dt. \end{aligned} \tag{19b}$$

Beschränkt man sich in den Gleichungen (18) zunächst auf die ersten Glieder, so werden die $n_i$ bekannte Grössen; damit kann man dann die Gleichungen (19a), (19b) auflösen, und erhält die Integrale I, II . . . . als Grössen von der Ordnung der $a_{ik}$. Substituirt man die resultirenden Werthe in (18), so würden daraus Zusatzglieder entstehen, die aber von der zweiten Ordnung der $a_{ik}$ sind, so dass hierdurch eine Lösung durch successive Näherungen gegeben ist. Würde man in (16), (17) die Produkte von I, II . . in die $a_{ik}$ sofort vernachlässigt haben, so erhielte man die Lösungen I $= n_1$, II $= n_2$ . . . . . In der Form (18), (19) erscheint bereits bei der ersten Integration eine grössere Annäherung erreicht.

Die in den Entwickelungen der Coëfficienten $a_{ik}$ auftretenden Constanten geben Anlass zum Entstehen von der Zeit proportionalen Gliedern, u. z. gemäss der Form der Coëfficienten in den Ausdrücken für $n_2$ und $n_3$. Da jedoch bei

der Entwickelung auch $\frac{d\Omega}{dt}$, $\frac{d\omega}{dt}$ erscheinen, so kann man diese so bestimmen, dass auch in den Integralen II und V die der Zeit proportionalen Glieder verschwinden, wodurch sich aus der Entwickelung selbst die Bewegungen des Knotens und des Perigäums bestimmen lassen.

**56. Theorie der Bewegung der Satelliten. Entwickelung der Störungsfunction.** Es war schon in No. 37 bemerkt worden, dass die Entwickelungen für die Satelliten sich dadurch von denjenigen für die Planeten unterscheiden, dass das Verhältniss der mittleren Entfernungen $\alpha$ bei denselben eine sehr kleine Grösse ist. Es genügt dann zumeist, die erste Potenz dieses Verhältnisses beizubehalten, die von diesem abhängigen Glieder jedoch abzutrennen, und speziell zu berechnen. Wegen des von dem Verhältniss der Parallaxen bei diesen auftretenden Faktors werden diese Glieder mit dem Namen der parallaktischen Glieder belegt. Sie erlangen auch insofern eine besondere Bedeutung, als sie zur Bestimmung des Verhältnisses $\alpha$ dienen können, wenn der Coëfficient der aus denselben resultirenden Störung durch Beobachtungen mit genügender Genauigkeit bestimmt werden kann, wie dieses z. B. für den Erdmond der Fall ist (vergl. No. 68).

Es ist nicht schwer, diese Trennung der Glieder in den Ausdrücken für $B_i^{(k)}$ selbst durchzuführen, doch wird es einfacher, die Störungsfunction für diesen Fall direkt zu entwickeln. Die Ableitungen gelten ebenso gut für die übrigen Satelliten wie für den Mond, müssen aber für diesen weitaus genauer sein, sowohl wegen seiner grossen Nähe zur Erde, in Folge deren die Beobachtungen viel mehr Unregelmässigkeiten zu constatiren gestatten, als auch andererseits, weil bei den anderen Satelliten die wechselseitigen Störungen zumeist überwiegen; es sollen daher die Darlegungen mit Beziehung auf den Erdmond erfolgen.

Bezeichnet man Kürze halber die Entfernung $r_{01} = \Delta$ (indem zunächst nur auf die Störung durch die Sonne Rücksicht genommen wird), so wird:

$$\Omega = k^2 M\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{rH}{r'^2}\right), \tag{1}$$

wobei $M$ die Sonnenmasse bezogen auf die Erdmasse als Einheit, und

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'H; \qquad H = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'}. \tag{2}$$

ist. Hieraus folgt bis einschliesslich der dritten Potenz des Verhältnisses der Entfernungen:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r'}\left(1 - \frac{2r}{r'}H + \frac{r^2}{r'^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r'}\left(1 + \frac{r}{r'}H - \frac{1}{2}\frac{r^2}{r'^2} + \frac{3}{2}\frac{r^2}{r'^2}H^2 - \frac{3}{2}\frac{r^3}{r'^3}H + \frac{5}{2}\frac{r^3}{r'^3}H^3\right),$$

daher

$$\Omega = k^2 M\left[\frac{1}{r'} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{r'^3}(1 - 3H^2) - \frac{1}{2}\frac{r^3}{r'^4}(3H - 5H^3)\right].$$

Bei den Differentiationen von $\Omega$ nach den Coordinaten des Mondes ($r$, $x$, $z$, $l$ u. s. w.) wird das erste Glied verschwinden, so dass es sofort weggelassen werden kann. (Die Störungen des Mondes, welche in $\frac{1}{r'}$ vorkommen, geben nach der Bemerkung in 10 keinen Betrag.) Es wird daher:

$$\Omega = \frac{1}{2}k^2 M\frac{r^2}{r'^3}\left[(3H^2 - 1) + \frac{r}{r'}(5H^3 - 3H)\right]. \tag{3}$$

Es sollen beispielsweise kurz die Hauptglieder durch Integration der Differentialgleichung in No. 47 ermittelt werden[1]). Hierzu ist jedoch zu bemerken, dass in diesem Falle die für $\frac{\partial\Omega}{\partial s}$ in 48 angeführte Vereinfachung nicht gestattet ist, wenn, wie dies für die Satelliten gewöhnlich geschieht, nicht die Bahn des gestörten Himmelskörpers (des Satelliten) sondern die Bahn des Hauptplaneten (die Ekliptik) als Fundamentalebene gewählt wird[2]).

---

[1]) Auf Vollständigkeit kann selbst bei den Hauptgliedern nicht gesehen werden. Sollten auch nur diese völlig richtig entwickelt werden, so müssten auch zweite und dritte Potenzen der Excentricitäten und die höheren Potenzen der Massen berücksichtigt werden. Hier soll jedoch nur der Weg angedeutet werden, auf welchem die Integration vorgenommen wird, um qualitativ die Resultate übersehen zu können.

[2]) Um die Entwickelung der Störungsfunction noch an einem zweiten Beispiele zu zeigen, mögen die Entwickelungen von LAPLACE kurz erwähnt werden. LAPLACE geht von den Differentialgleichungen 10 $D$ aus. Daher muss $\Omega$ durch $u$, $s$, $L$ ausgedrückt werden. Es ist aber (Vergl. No. 10):

$$r = \frac{\sqrt{1+s^2}}{u}; \quad x = \frac{\cos L}{u}; \quad y = \frac{\sin L}{u}; \quad z = \frac{s}{u},$$

wo $L$ die Länge des Mondes, gezählt in der Ekliptik, ist. Für die Sonne wird ebenso:

$$r' = \frac{\sqrt{1+s_1^2}}{u_1}; \quad x' = \frac{\cos L_1}{u_1}; \quad y' = \frac{\sin L_1}{u_1}; \quad z' = \frac{s_1}{u_1},$$

daher

$$H = \frac{\cos(L-L_1)+ss_1}{uu_1}\cdot\frac{uu_1}{\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+s_1^2}}$$

oder da $s_1 = 0$ gesetzt werden kann:

$$H = \frac{\cos(L-L_1)}{\sqrt{1+s^2}}; \quad 3H^2-1 = \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos 2(L-L_1)-s^2}{1+s^2};$$

$$5H^3-3H = \frac{\frac{3}{4}\cos(L-L_1)+\frac{5}{4}\cos 3(L-L_1)-3s^2\cos(L-L_1)}{(1+s^2)\sqrt{1+s^2}}$$

$$\Omega = \tfrac{1}{4}k^2M\frac{u_1^3}{u^3}[1+3\cos 2(L-L_1)-2s^2]+$$

$$+\tfrac{1}{8}k^2M\frac{u_1^4}{u^4}[5\cos 3(L-L_1)+3\cos(L-L_1)-12s^2\cos(L-L_1)]$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial u} = -\tfrac{3}{4}k^2M\frac{u_1^3}{u^4}[1+3\cos 2(L-L_1)-2s^2]-$$

$$-\tfrac{1}{2}k^2M\frac{u_1^4}{u^5}[5\cos 3(L-L_1)+3\cos(L-L_1)-12s^2\cos(L-L_1)]$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial L} = -\tfrac{3}{2}k^2M\frac{u_1^3}{u^3}\sin 2(L-L_1)-\tfrac{3}{8}k^2M\frac{u_1^4}{u^4}[5\sin 3(L-L_1)+\sin(L-L_1)-4s^2\sin(L-L_1)]$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial s} = -\tfrac{1}{2}k^2M\frac{u_1^3}{u^3}2s-\tfrac{3}{8}k^2M\frac{u_1^4}{u^4}\cdot 8s\cos(L-L_1)$$

$$\frac{S}{u^2} = -\tfrac{3}{4}k^2M\frac{u_1^3}{u^4}[s+s\cos 2(L-L_1)]-$$

$$-\tfrac{3}{8}k^2M\frac{u_1^4}{u^5}[5s\cos 3(L-L_1)+11s\cos(L-L_1)-4s^3\cos(L-L_1)]-\frac{ds}{dL}\frac{\partial\Omega}{\partial L}$$

$$\frac{U}{u^2} = -\tfrac{3}{4}k^2M\frac{u_1^3}{u^3}[1+3\cos 2(L-L_1)]-$$

$$-\tfrac{3}{8}k^2M\frac{u_1^4}{u^4}[5\cos 3(L-L_1)+3\cos(L-L_1)-4s^2\cos(L-L_1)]-\frac{du}{dL}\frac{\partial\Omega}{\partial L}.$$

Diese Ausdrücke sind noch innerhalb der ersten beiden Potenzen von $\frac{r}{r'}$ strenge. Für das weitere braucht man $\frac{ds}{dL}$ und $\frac{du}{dL}$. Für die Berechnung der Störungen von der ersten Potenz der Masse werden für $s$ und $u$ die elliptischen Werthe substituirt; für diese ist

Legt man der Einfachheit halber die $X$-Axe in die Richtung der Knotenlinie der Mondbahn und ist $\omega_1$ der Abstand des Sonnenperigeums von diesem Knoten, so werden die Sonnencoordinaten

$$x' = r' \cos(\omega_1 + v'); \quad y' = r' \sin(\omega_1 + v'); \quad z' = 0$$

und die Coordinaten des Mondes:

$$x = r \cos(\omega + v); \quad y = r \sin(\omega + v) \cos i; \quad z = r \sin(\omega + v) \sin i,$$

demnach

$$\begin{aligned} H &= \cos(v + \omega) \cos(v' + \omega_1) + \sin(v + \omega) \sin(v' + \omega_1) \cos i \\ &= \cos(v + \omega - v' - \omega_1) - 2 \sin(v + \omega) \sin(v' + \omega_1) \sin^2 \tfrac{1}{2} i. \end{aligned}$$

Behält man vorläufig die zweiten Potenzen der kleinen Parameter (Excentricität und Neigungen) bei, so wird, wenn die mittleren Anomalien der Sonne und des Mondes mit $\odot$, $☾$ bezeichnet werden, und man Kürze halber $\sin \frac{1}{2} i = \gamma$ setzt:

$$\begin{aligned} r^2 &= a^2(1 + \tfrac{3}{2} e^2 - 2e \cos ☾ - \tfrac{1}{2} e^2 \cos 2 ☾) \\ r^3 &= a^3(1 - 3e \cos ☾) \\ \frac{1}{r'^3} &= \frac{1}{a_1^3}(1 + \tfrac{3}{2} e_1^2 + 3 e_1 \cos \odot + \tfrac{3}{2} e_1^2 \cos 2\odot) \\ \frac{1}{r'^4} &= \frac{1}{a_1^4}(1 + 4 e_1 \cos \odot) \\ \frac{r^2}{r'^3} &= \frac{a^2}{a_1^3}[1 + \tfrac{3}{2} e^2 + \tfrac{3}{2} e_1^2 - 2e \cos ☾ + 3 e_1 \cos \odot - \tfrac{1}{2} e^2 \cos 2 ☾ + \tfrac{9}{2} e_1^2 \cos 2\odot \\ &\qquad - 3 e e_1 \cos(\odot + ☾) - 3 e e_1 \cos(\odot - ☾)] \\ \frac{r^3}{r'^4} &= \frac{a^3}{a_1^4}(1 - 3e \cos ☾ + 4 e_1 \cos \odot) \end{aligned}$$

---

$$u = \frac{\sqrt{1 + s^2}}{r} = \frac{\sqrt{1 + s^2}}{a(1 - e^2)}(1 + e \cos ☾); \quad s = \operatorname{tang} i \sin(L - \Omega)$$

$$\sin(☾ + \omega) = \frac{\sin(L - \Omega)}{\cos i \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 i \sin^2 (L - \Omega)}}$$

$$\cos(☾ + \omega) = \frac{\cos(L - \Omega)}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 i \sin^2 (L - \Omega)}},$$

demnach

$$\cos ☾ = \frac{\cos \omega \cos(L - \Omega) \cos i + \sin \omega \sin(L - \Omega)}{\cos i \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 i \sin^2 (L - \Omega)}} = \frac{\cos(L - \pi) - 2 \sin^2 \frac{1}{2} i \cos \omega \cos(L - \Omega)}{\cos i \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 i \sin^2 (L - \Omega)}}.$$

Die weitere Entwickelung ist nunmehr ohne weiteres klar. LAPLACE führt nun aber die Ableitung in der Art, dass sofort in der ersten Näherung jene Rechnungen vorgenommen werden, welche die folgenden Näherungen mit zu erledigen gestatten. Zu diesem Zwecke werden nicht die elliptischen Werthe, sondern die wahren Werthe $u_0 + \delta u$, $s_0 + \delta s$ substituirt, wo $u_0$, $s_0$ die elliptischen Werthe, $\delta u$, $\delta s$ die noch unbekannten Störungswerthe in der Form von trigonometrischen Reihen mit unbestimmten Coëfficienten $A$, $B$ in die Störungsfunction substituirt werden. Diese treten dann in den störenden Kräften, also multiplicirt mit dem kleinen Faktor $\mu^2 = \frac{1}{178}$ auf, und gehen in die analytischen Ausdrücke für die Coëfficienten selbst über, welche die Form erhalten:

$$\begin{aligned} A_\rho &= A_\rho^{(0)} + a\mu^2 A_i + a'\mu^2 A_k + \ldots + b\mu^2 B_\sigma + b'\mu^2 B_\tau + \ldots \\ B_\rho &= B_\rho^{(0)} + c\mu^2 A_i' + c'\mu^2 A_k' + \ldots + d\mu^2 B_\sigma' + d'\mu^2 B_\tau' + \ldots \end{aligned}$$

Die erste Näherung ist $A_\rho = A_\rho(0)$; $B_\rho = B_\rho(0)$; werden diese Werthe in die folgenden Ausdrücke substituirt, so erhält man bessere Werthe u. s. w. Da $\mu^2$ sehr klein ist, so wird die Rechnung im allgemeinen convergent.

$$v = \text{☾} + 2e\sin\text{☾} + \tfrac{5}{4}e^2\sin 2\text{☾}$$
$$\sin v = \sin\text{☾}\,(1 - 2e^2\sin^2\text{☾}) + \cos\text{☾}\,(2e\sin\text{☾} + \tfrac{5}{4}e^2\sin 2\text{☾})$$
$$\sin v = +(1-e^2)\sin\text{☾} + e\sin 2\text{☾} + \tfrac{1}{8}e^2\sin\text{☾} + \tfrac{9}{8}e^2\sin 3\text{☾}$$
$$\cos v = -e + (1-e^2)\cos\text{☾} + e\cos 2\text{☾} - \tfrac{1}{8}e^2\cos\text{☾} + \tfrac{9}{8}e^2\cos 3\text{☾}$$
$$\sin(v+\omega) = (1-e^2)\sin(\text{☾}+\omega) - e\sin\omega + e\sin(2\text{☾}+\omega) + \tfrac{1}{8}e^2\sin(\text{☾}-\omega) + \tfrac{9}{8}e^2\sin(3\text{☾}+\omega)$$
$$\cos(v+\omega) = (1-e^2)\cos(\text{☾}+\omega) - e\cos\omega + e\cos(2\text{☾}+\omega) - \tfrac{1}{8}e^2\cos(\text{☾}-\omega) + \tfrac{9}{8}e^2\cos(3\text{☾}+\omega)$$
$$\cos(v+\omega-v'-\omega_1) = \cos(\text{☾}+\omega-\odot-\omega_1) - e_1\cos(\text{☾}+\omega-\omega_1) + e_1\cos(\text{☾}+\omega-2\odot-\omega_1) - e\cos(\omega-\odot-\omega_1) + e\cos(2\text{☾}+\omega-\odot-\omega_1) + P'$$
$$H = \cos(\text{☾}+\omega-\odot-\omega_1) - e_1\cos(\text{☾}+\omega-\omega_1) + e_1\cos(\text{☾}+\omega-2\odot-\omega_1) - e\cos(\omega-\odot-\omega_1) + e\cos(2\text{☾}+\omega-\odot-\omega_1) + P$$
$$\begin{aligned}P = {} & P' - 2\sin(v+\omega)\sin(v'+\omega_1)\sin^2\tfrac{1}{2}i\\ = {} & -(e^2+e_1^2)\cos(\text{☾}+\omega-\odot-\omega_1)\\ & -\tfrac{1}{8}e_1^2\cos(\text{☾}+\omega+\odot-\omega_1) + \tfrac{9}{8}e_1^2\cos(\text{☾}+\omega-3\odot-\omega_1)\\ & -\tfrac{1}{8}e^2\cos(\text{☾}-\omega+\odot+\omega_1) + \tfrac{9}{8}e^2\cos(3\text{☾}+\omega-\odot-\omega_1)\\ & + ee_1\cos(\omega-\omega_1) - ee_1\cos(2\odot+\omega_1-\omega) - ee_1\cos(2\text{☾}+\omega-\omega_1)\\ & + ee_1\cos(2\text{☾}+\omega-2\odot-\omega_1)\\ & -\sin^2\tfrac{1}{2}i\,[\cos(\text{☾}+\omega-\odot-\omega_1) - \cos(\text{☾}+\omega+\odot+\omega_1)].\end{aligned}$$

Die Anzahl der Glieder, die von der zweiten Potenz der Excentricität abhängen, wächst nun ziemlich rasch an, und sollen deshalb weiterhin nur die ersten Potenzen berücksichtigt werden, wobei allerdings die Neigung herausfällt. Dann wird:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(3H^2-1) = {} & \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}\cos 2(\text{☾}+\omega-\odot-\omega_1) - \tfrac{3}{4}e_1\cos(2\text{☾}+2\omega-\odot-2\omega_1) +\\ & + \tfrac{3}{4}e_1\cos(2\text{☾}+2\omega-3\odot-2\omega_1) -\\ & - \tfrac{3}{4}e\cos(\text{☾}+2\omega-2\odot-2\omega_1) + \tfrac{3}{4}e\cos(3\text{☾}+2\omega-2\odot-2\omega_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\frac{r^2}{r'^3}(3H^2-1) = \frac{a^2}{a_1^3}\big[ & \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}\cos 2(\text{☾}+\omega-\odot-\omega_1) - \tfrac{1}{2}e\cos\text{☾} + \tfrac{3}{4}e_1\cos\odot -\\ & - \tfrac{3}{4}e\cos(\text{☾}+2\omega-2\odot-2\omega_1) + \tfrac{3}{4}e\cos(3\text{☾}+2\omega-2\odot-2\omega_1) -\\ & - \tfrac{3}{4}e\cos(\text{☾}+2\omega-2\odot-2\omega_1) - \tfrac{3}{4}e\cos(3\text{☾}+2\omega-2\odot-2\omega_1)\big] +\\ & - \tfrac{3}{4}e_1\cos(2\text{☾}+2\omega-\odot-2\omega_1) + \tfrac{3}{4}e_1\cos(2\text{☾}+2\omega-3\odot-2\omega_1) +\\ & + \tfrac{9}{8}e_1\cos(2\text{☾}+2\omega-\odot-2\omega_1) + \tfrac{9}{8}e_1\cos(2\text{☾}+2\omega-3\odot-2\omega_1)\end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{r^3}{r'^4}(5H^3-3H) = \frac{a^3}{a_1^4}\left[\tfrac{3}{8}\cos(\text{☾}+\omega-\odot-\omega_1) + \tfrac{5}{8}\cos 3(\text{☾}+\omega-\odot-\omega_1)\right]$$

demnach

$$\begin{aligned}\Omega = k^2M\frac{a^2}{a_1^3}\Big\{ & \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}e\cos\text{☾}^{*} + \tfrac{3}{4}e_1\cos\odot^{\dagger} + \tfrac{3}{4}\cos 2(\text{☾}+\omega-\odot-\omega_1)^{*\dagger} -\\ & - \tfrac{9}{4}e\cos(\text{☾}+2\omega-2\odot-2\omega_1)^{*} + \tfrac{3}{4}e\cos(3\text{☾}+2\omega-2\odot-2\omega_1 +\\ & + \tfrac{21}{8}e_1\cos(2\text{☾}+2\omega-3\odot-2\omega_1) - \tfrac{3}{8}e_1\cos(2\text{☾}+2\omega-\odot-2\omega_1 + \quad (4)\\ & + \frac{a}{a_1}\left[\tfrac{3}{8}\cos(\text{☾}+\omega-\odot-\omega_1)^{*} + \tfrac{5}{8}\cos 3(\text{☾}+\omega-\odot-\omega_1)\right]\Big\}.\end{aligned}$$

Das Verhältniss $\frac{a}{a_1}$ ist für den Erdmond nahe $\frac{1}{400}$; für den äussersten Jupitersmond, ebenso wie für den äussersten Saturnsmond etwa ebenso gross, für die übrigen Satelliten dieser Planeten, sowie auch für die Satelliten der anderen Planeten noch wesentlich kleiner. Eine Berücksichtigung derselben wird daher nur für den Erdmond nöthig. Es mag jedoch gleich bemerkt werden, dass das constante Glied in $\Omega$

$$C = \tfrac{1}{4}(1 + \tfrac{3}{2}e^2 + \tfrac{3}{2}e_1^2 - 6\gamma^2 + \text{Glieder 4. Ordnung}) \quad (5)$$

wird.

**57. Integration der Differentialgleichung für die Länge und den Radiusvector.** Bei der Integration der Gleichung 47 (5) treten nun gemäss 49 (4) Nenner $p - \varkappa^2$ auf, wenn $p$ den constanten Coëfficienten von $(r\delta r)$ bezeichnet. Dieser ist nahe gleich $\frac{k_1^2}{a^3} = L'^2$, wenn $L'$ die mittlere siderische Bewegung des Mondes ist. Glieder mit kleinen Nennern treten daher auf, wenn $\varkappa$ sehr nahe $\pm L'$ ist. Wäre $\varkappa = L'$, so würden hieraus seculare Glieder entstehen; indem aber auch $\Omega$ und $\omega$ veränderlich gewählt wird, kann dieser Nachtheil behoben werden. Kleine Nenner treten nur auf bei den mit * bezeichneten Gliedern; das erste würde sich mit der Mittelpunktsgleichung verbinden, das zweite giebt die Evection das dritte die parallactische Ungleichheit. Ungleichheiten dieser Art treten im Radiusvector auf, und gehen nach 47 (8) in die Länge über. In dieser tritt ausserdem noch ein Integral auf, welches kleine Nenner erhält, wenn $\varkappa$ selbst eine kleine Grösse ist; dies ist der Fall bei dem mit † bezeichneten Gliede, welches die jährliche Gleichung giebt. Daraus ersieht man, dass die jährliche Gleichung nur in dem Ausdrucke für die Lange, nicht aber in demjenigen für den Radiusvector bedeutend erscheint[1]). Eine ganz exceptionelle Stellung nimmt das mit *† bezeichnete Glied ein, da es keinen kleinen Integrationsdivisor erhält, der Coëfficient ist aber von der nullten Ordnung; aus ihm entsteht die Variation.

Beschränkt man sich auf die angeführten Glieder, nebst den Constanten, und führt statt der mittleren Anomalien die mittleren Längen $L$, $L_1$ ein, da der bisher festgehaltene Anfangspunkt (der Knoten) nicht fest ist, so wird:

$$\Omega = k^2 M \frac{a^2}{a_1^3}\Big[C + \tfrac{3}{4}\cos 2(L - L_1) - \tfrac{1}{2}e\cos(L-\pi) - \tfrac{9}{4}e\cos(L - 2L_1 + \pi) + \\ + \tfrac{3}{2}e_1\cos(L_1 - \pi_1) + \left(\frac{a}{a_1}\right)\tfrac{3}{8}\cos(L - L_1)\Big]. \tag{1}$$

Hieraus folgt, wenn man für die Gleichung 47 (5) das Glied $\frac{3}{2}e_1\cos(L_1 - \pi_1)$ noch weglässt, und die Differentialquotienten von $L, L_1, \pi, \pi_1$ mit $L', L_1', \pi', \pi_1'$ bezeichnet:

$$2\int d'\,\Omega = k^2 M \frac{a^2}{a_1^3}\Big[C_1 + \tfrac{3}{2}\frac{L'}{L' - L_1'}\cos 2(L - L_1) - e\frac{L'}{L' - \pi'}\cos(L - \pi) \\ - \tfrac{9}{2}e\frac{L'}{L' - 2L_1' + \pi'}\cos(L - 2L_1 + \pi) + \left(\frac{a}{a_1}\right)\tfrac{3}{4}\frac{L'}{L' - L_1'}\cos(L - L_1)\Big]. \tag{2}$$

Wird der Coëfficient von $\frac{a^2}{a_1^3}$ in $\Omega$ mit $A_1$, der Coëfficient von $\frac{a^3}{a_1^4}$ mit $A_2$ bezeichnet, so ist

$$\Omega = k^2 M \frac{a^2}{a_1^3}A_1 + k^2 M \frac{a^3}{a_1^4}A_2,$$

und es wird

$$r\frac{\partial\Omega}{\partial r} = a\frac{\partial\Omega}{\partial a} = k^2 M\frac{a^2}{a_1^3}\cdot 2A_1 + k^2 M\frac{a^3}{a_1^4}\cdot 3A_2. \tag{3}$$

Hiermit erhält man

$$r\frac{\partial\Omega}{\partial r} + 2\int d'\Omega_1 = k^2 M\frac{a^2}{a_1^3}\Sigma\, k\cos(\varkappa t + K), \tag{4}$$

wobei

---

[1]) Das Doppelintegral kann diese kleinen Glieder nicht erhalten, da jene Glieder, in denen $L$ nicht im Argumente enthalten ist, in $d'\Omega$ verschwinden. Bei der LAPLACE'schen Methode ist dieses nicht so unmittelbar ersichtlich.

$$\Sigma k \cos(\varkappa t + K) = C_1 + 2C + \tfrac{3}{4}\left(1 + \frac{L'}{L' - L_1'}\right) \cos 2(L - L_1) -$$
$$- e\left(1 + \frac{L'}{L' - \pi'}\right) \cos(L - \pi) - \tfrac{15}{4} e\left(1 + \frac{L'}{L' - 2L_1' + \pi'}\right) \cos(L - 2L_1 + \pi) \quad (5)$$
$$+ \left(\frac{a}{a_1}\right) \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{3}{2} + \frac{L'}{L' - L_1'}\right) \cos(L - L_1)$$

und die Differentialgleichung wird

$$\frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + \frac{k_0^2}{r_0^3}(r\delta r) = k^2 M \frac{a^2}{a_1^3} \Sigma k \cos(\varkappa t + K). \quad (6)$$

Es ist aber, da die Sonnenmasse in Einheiten der Erdmasse ausgedrückt ist

$$M\frac{a^3}{a_1^3} = \left(\frac{L_1'}{L'}\right)^2 = \mu^2, \quad (7)$$

wenn $\mu$ das Verhältniss der mittleren siderischen Bewegung der Sonne zu derjenigen des Mondes ist. Für die Coëfficienten von $(r\delta r)$ kann man in erster Näherung $k_0^2 a^{-3} = L'^2$ setzen, indem das Produkt der in $r_0$ von der Excentricität abhängigen Glieder mit den Störungen in der ersten Näherung vernachlässigt, in zweiter Näherung rechts berücksichtigt werden kann. Dann wird die Gleichung

$$\frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + L'^2(r\delta r) = \frac{k^2}{a} \mu^2 \Sigma k \cos(\varkappa t + K). \quad (8)$$

Die Integration liefert daher, wenn man durch $a^2$ dividirt, und mit dem rechts auftretenden Faktor $k^2 a^{-3} = L'^2$ Glied für Glied multiplicirt, wodurch nur Verhältnisse von mittleren Bewegungen auftreten[1]):

$$\left(\frac{r}{a}\right) \delta \left(\frac{r}{a}\right) = h_1 \sin L't + h_2 \cos L't +$$
$$+ \mu^2 \left[C_1 + 2C - \tfrac{3}{4} \frac{(2L' - L_1')L'^2}{(L' - L_1')(5L' - 4L_1')(3L' - 4L_1')} \cos 2(L - L_1) -\right.$$
$$- \frac{eL'^2}{\pi'(L' - \pi')} \cos(L - \pi) - \tfrac{15}{4} \frac{eL'^2}{(2L_1' - \pi')(L' - 2L_1' + \pi')} \cos(L - 2L_1 + \pi) + \quad (9)$$
$$\left. + \left(\frac{a}{a_1}\right) \tfrac{3}{8} \frac{L'^2(5L' - 3L_1')}{(L' - L_1')L_1'(2L' - L_1')} \cos(L - L_1)\right].$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit

$$\frac{a}{r} = 1 + e \cos ☾ = 1 + e \cos(L - \pi),$$

so erhält man die von der ersten Potenz der störenden Massen abhängige Störung $\delta r$ bis einschliesslich Grössen von der ersten Ordnung der Excentricitäten.

Die bisher willkürlich gelassene Integrationsconstante $C_1$, welche durch die Integration von $d'\Omega$ eintrat, kann so bestimmt werden, dass zu $\delta r$ kein constantes

---

1) Es ist z. B. der Coëfficient der Evection:

$$-\tfrac{15}{4} e \frac{L'^2\left(1 + \frac{L'}{L' - 2L_1' + \pi'}\right)}{L'^2[L'^2 - (L' - 2L_1' + \pi')^2]} = -\tfrac{15}{4} e \frac{L'^2(2L' - 2L_1' + \pi')}{(L' - 2L_1' + \pi')(L' + L' - 2L_1' + \pi')(L' - L' + 2L_1' - \pi')}.$$

Eigentlich wäre rechts $\frac{k^2 M ♁}{a^3} = \frac{k^2(M ♁ + M ☾)}{a^3} \frac{M ♁}{M ♁ + M ☾} = \frac{L'^2}{1 + \nu''}$ zu setzen, wenn $\nu'' = \frac{M ☾}{M ♁}$ ist; doch kann in der hier beibehaltenen Näherung $\nu''$ vernachlässigt werden.

Glied hinzutritt; hiermit würde $C_1 = -2C$ folgen. Doch wird eine andere Bestimmung zweckmässiger, weshalb die Constante vorläufig noch beibehalten werden soll.

Die Integrationsconstanten $k_1$, $k_2$, welche aus den Beobachtungen zu bestimmen wären, können gleich Null gesetzt werden. Ist nämlich

$$k_1 = k \sin(L_0 - H); \quad k_2 = k_0 \cos(L_0 - H),$$

so würde

$$k_1 \sin L' t + k_2 \cos L' t = k \cos(L_0 + L't - H) = k \cos(L - H),$$

d. h. $k$, $H$ sind mit $-e$, $\pi$ zu identificiren.

Entwickelt man nun die einzelnen Glieder in 47 (8) und schreibt für den Coëfficienten

$$\frac{1}{k_0\sqrt{a}\sqrt{1-e^2}} = \frac{a\sqrt{a}}{k_0\sqrt{1-e^2}}\frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2 L'\sqrt{1-e^2}},$$

so erhält man mit Vernachlässigung von $e^2$:

$$\frac{2}{a^2 L'}\frac{d}{dt}(r\delta r) = 2\mu^2\Big[+8\frac{(2L'-L_1')L'}{(5L'-4L_1')(3L'-4L_1')}\sin 2(L-L_1) +$$
$$+\tfrac{9}{4}\frac{eL'}{2L_1'-\pi'}\sin(L-2L_1+\pi) + \frac{eL'}{\pi'}\sin(L-\pi) - \qquad (10a)$$
$$-\left(\frac{a}{a_1}\right)\tfrac{3}{4}\frac{L'(5L'-8L_1')}{L_1'(2L'-L_1')}\sin(L-L_1)\Big].$$

Da $\frac{dr}{dt}$ von der ersten Ordnung der Excentricitäten ist, so wird innerhalb der hier gesteckten Grenzen das erste Glied keinen Beitrag liefern; aus dem dritten Gliede entsteht, wenn wieder die mit $e$ oder $\left(\frac{a}{a'}\right)$ multiplicirten Glieder ohne kleine Integrationsdivisoren vernachlässigt werden:

$$-\frac{3}{a^2 L'}\int dt\int d'\Omega = -\tfrac{3}{2}\mu^2\Big[C_0 + \int C_1 L'dt + \tfrac{3}{4}\frac{L'^2}{(L'-L_1')^2}\sin 2(L-L_1)\Big]. \quad (10b)$$

Endlich entsteht aus dem letzten Gliede

$$-\frac{2}{a^2 L'}\int r\frac{\partial\Omega}{\partial r}dt = -2\mu^2\Big[C_2 + 2\int C L'dt + \tfrac{3}{4}\frac{L'}{L'-L_1'}\sin 2(L-L_1)$$
$$+\tfrac{3}{2}\frac{e_1 L'}{L_1'-\pi_1'}\sin(L_1-\pi_1)\Big]. \qquad (10c)$$

Vereinigt man die Ausdrücke von (10a), (10b), (10c), so erhält man für die Störung in Länge:

$$\delta L = \mu^2\Big\{-(\tfrac{3}{2}C_0 + 2C_2) - \int(\tfrac{3}{2}C_1 + 4C)L'dt +$$
$$+\Big[8\frac{(2L'-L_1')L'}{(5L'-4L_1')(3L'-4L_1')} - \tfrac{9}{8}\frac{L'^2}{(L'-L_1')^2} - \tfrac{3}{2}\frac{L'}{(L'-L_1')}\Big]\sin 2(L-L_1) + \qquad (11)$$
$$+2e\frac{L'}{\pi'}\sin(L-\pi) + 9\frac{eL'}{2L_1'-\pi'}\sin(L-2L_1+\pi) - 3\frac{e_1 L'}{L_1'-\pi_1'}\sin(L_1-\pi_1) -$$
$$-\left(\frac{a}{a_1}\right)\tfrac{3}{4}\frac{L'(5L'-8L_1')}{L_1'(2L'-L_1')}\sin(L-L_1)\Big\}.$$

Damit wird nun die wahre Mondlänge

$$\lambda = L_0 + L't + \text{Mittelpunktsgleichung} + \delta L$$
$$= [L_0 - (\tfrac{3}{2}C_0 + 2C_2)\mu^2] + L'[1 - (\tfrac{3}{2}C_1 + 4C)]t + 2e\sin(L-\pi) + \text{period. Glied.}$$

wo das Hauptglied der Mittelpunktsgleichung besonders angeschrieben ist. Bestimmt man nun die mittlere Länge $L_0$ und die mittlere tägliche siderische

Bewegung $L'$ aus Beobachtungen, so werden diese die wahren, bereits um die Störungen corrigirten Werthe sein, daher wird man

$$\tfrac{3}{2} C_0 + 2C_2 = 0, \quad \tfrac{3}{2} C_1 + 4C = 0$$

zu setzen haben[1]) oder $C_1 = -\frac{8}{3}C$, damit wird die Constante im Radiusvector

$$C_1 + 2C = -\tfrac{1}{6}.$$

Ein weiteres, aus den Beobachtungen zu bestimmendes Element ist die Excentricität. Diese kann aus dem grössten Gliede der Mittelpunktsgleichung $2e \sin(L - \pi)$ ermittelt werden. Dabei ist aber vorausgesetzt, dass der Coefficient dieses Gliedes eben $2e$ ist; dann aber darf in $\delta L$ kein Glied mit diesem Argumente auftreten. Dieses ist nun nicht der Fall, im Gegentheil ist hier ein Glied mit sehr kleinem Integrationsdivisor $\pi'$ enthalten, welches aus dem Glied $-\frac{1}{2} e \cos(L - \pi)$ in $\Omega$ entstanden ist. Dass dieses Glied aber zum Verschwinden gebracht werden kann, wird in No. 59 gezeigt. Dann wird:

$$\begin{aligned}\delta L = \mu^2 \Bigg\{ & \left[ 6 \frac{(2L' - L_1')L'}{(5L' - 4L_1')(3L' - 4L_1')} - \frac{3}{4} \frac{L'^2}{(L' - L_1')^2} - \frac{3}{4} \frac{L'}{(L' - L_1')} \right] \sin 2(L - L_1) + \\ & + 9 \frac{e L'}{2L_1' - \pi'} \sin(L - 2L_1 + \pi) - \frac{3 e_1 L'}{L_1' - \pi_1'} \sin(L_1 - \pi) - \\ & - \left(\frac{a}{a_1}\right) \cdot \frac{1}{4} \frac{L'(5L' - 3L_1')}{L_1'(2L' - L_1')} \sin(L - L_1) \Bigg\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Man pflegt für den Mond nicht die Entfernung, sondern seine Aequatoreal-Horizontalparallaxe anzugeben. Ist dieselbe $p$, so wird, wenn $\rho$ der Aequatorealhalbmesser der Erde ist

$$\sin p = \frac{\rho}{r_0 + \delta r},$$

wenn man unter $r_0$ den elliptischen Theil des Radiusvectors versteht und die Störungen $\delta r$ abtrennt. Dann wird:

$$\sin p = \frac{\rho}{r_0 + \delta r} = \frac{\rho}{r_0}\left(1 - \frac{\delta r}{r_0}\right).$$

Berücksichtigt man nur die ersten Potenzen der Excentricitäten und Massen, so wird

$$\sin p = \frac{\rho}{a}\left[1 + e \cos(L - \pi) - \frac{\delta r}{r_0}\right].$$

Nun ist $\frac{\delta r}{r_0} = \frac{1}{r_0^2}(r_0 \delta r)$; es wird daher der Ausdruck (9) mit $1 + 2e \cos(L - \pi)$ zu multipliciren sein, wobei aber die mit $e$ multiplicirten Glieder ohne kleine Integrationsdivisoren in der hier beibehaltenen Näherung wegzulassen sind. Weiter wird man die Integrationsconstanten $h_1$, $h_2$ und ebenso wie in $\delta L$ auch das zweite periodische Glied, welches von dem Ausdrucke $-\frac{1}{2} e \cos(L - \pi)$ der Störungsfunction herrührt, weglassen, und dann gemäss der Bestimmung der Integrationsconstanten $C_1$: $C_1 + 2C = -\frac{1}{6}$ setzen. Zieht man dann die sämmtlichen constanten (nicht periodischen) Theile der Entwickelung zusammen, so wird das Produkt derselben in $\frac{\rho}{a}$ ebenfalls eine Constante, der Sinus der mittleren Aequatoreal-Horizontalparallaxe $p_0$ des Mondes; für diese ist also:

$$\frac{\rho}{a}\left(1 + \tfrac{1}{6}\mu^2 + \ldots\right) = \sin p_0 \tag{13}$$

und dann wird[2])

---

[1]) Würde die Constante so bestimmt worden sein, dass zu $\delta r$ kein constantes Glied hinzutritt, so würde eine Störung in der mittleren Bewegung übrig bleiben.

[2]) Selbstverständlich sind die Coëfficienten der periodischen Theile durch den gemeinschaftlichen Faktor zu dividiren. Für die vorliegende Näherung kann dies unterbleiben.

$$\sin p = \sin p_0 \Big\{1 + e\cos(L-\pi) + \mu^2 \Big[\text{[illegible]}\,\frac{(2L'-L_1')L'^2}{(L'-L_1')(5L'-4L_1')(3L'-4L_1')}\cos 2(L-L_1)$$
$$+ \text{[illegible]}\,\frac{eL'^2}{(2L_1'-\pi')(L'-2L_1'+\pi')}\cos(L-2L_1+\pi) - \qquad (14)$$
$$-\left(\frac{a}{a_1}\right)\text{[illegible]}\,\frac{L'^2(5L'-3L_1')}{(L'-L_1')(2L'-L_1')L_1'}\cos(L-L_1)\Big]\Big\}.$$

Der Werth von $p_0$[1]) ist aus Beobachtungen zu bestimmen, und er ist nach HANSEN:

$$\frac{\sin p_0}{\operatorname{arc} 1''} = 3422''\cdot 7.$$

58. **Integration der Differentialgleichung für die Breite.** Für die Störungen in Breite hat man die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k_0^2 z}{r^3} = \frac{\partial\Omega}{\partial z}. \qquad (1)$$

Es wird jedoch geocentrisch nicht $z$, sondern die Mondbreite beobachtet. Ist wieder die Tangente derselben gleich $s$, so wird

$$z = \frac{rs}{\sqrt{1+s^2}}.$$

Es sollen nunmehr, da nur Glieder erster Ordnung der kleinen Parameter berücksichtigt werden, Kürze halber sofort die Glieder zweiter Ordnung weggelassen werden, da der Gang für die Berücksichtigung derselben aus dem früheren ausreichend klar sein wird. Setzt man also

$$z = rs,$$

so wird:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{dt}\frac{ds}{dt} + \frac{s}{r}\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{k_0^2 s}{r^3} = \frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial z}. \qquad (2a)$$

Nennt man $s_0$ den ungestörten Werth von $s$, also

$$s_0 = \sin i \sin(v+\omega), \quad \frac{ds_0}{dt} = \sin i \cos(v+\omega)\left(\frac{dv}{dt} + \omega'\right),$$

so sind $s_0$ und $ds_0$ von der Ordnung der Neigung, also als Grössen erster Ordnung anzusehen. Für $s_0$ ist aber

$$\frac{d^2 s_0}{dt^2} + \frac{2}{r_0}\frac{dr_0}{dt}\frac{ds_0}{dt} + \frac{s_0}{r_0}\frac{d^2 r_0}{dt^2} + \frac{k_0^2 s_0}{r_0^3} = 0. \qquad (2b)$$

Subtrahirt man die beiden Gleichungen (2a) und (2b), so folgt

$$\frac{d^2\delta s}{dt^2} + \left(\frac{2}{r}\frac{dr}{dt} - \frac{2}{r_0}\frac{dr_0}{dt}\right)\frac{ds}{dt} + \frac{2}{r_0}\frac{dr_0}{dt}\left(\frac{ds}{dt} - \frac{ds_0}{dt}\right) + \left(\frac{s}{r} - \frac{s_0}{r_0}\right)\frac{d^2 r}{dt^2} +$$
$$+ \frac{s_0}{r_0}\left(\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{d^2 r_0}{dt^2}\right) + k_0^2\left(\frac{s}{r^3} - \frac{s_0}{r_0^3}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial z}. \qquad (3)$$

Setzt man hier $s = s_0 + \delta s$, $r = r_0 + \delta r$ ein, so erhält man in der angegebenen Näherung[2])

---

[1]) Es muss hervorgehoben werden, dass in den Lehrbüchern der sphärischen Astronomie die mittlere Aequatoreal-Horizontalparallaxe des Mondes durch $\sin p_0 = \frac{\rho}{a}$ definirt wird. Selbstverständlich ist diese vereinfachende Voraussetzung, welche für die weiteren Entwickelungen immerhin gemacht werden kann, nur richtig, wenn die Mondbahn als kreisförmig vorausgesetzt wird, d. h. sowohl auf Excentricität als Störungen nicht Rücksicht genommen wird.

[2]) Wobei jedoch noch aus den rechts mit $\delta s$ multiplicirten Gliedern die constanten Theile zu dem Coëfficienten $L'^2$ gezogen werden müssen; vergl. No. 60.

aus dem zweiten Gliede $+\frac{2}{r}\frac{ds_0}{dt}\frac{d\delta r}{dt}$;

das dritte und vierte Glied sind zu vernachlässigen,

der fünfte Ausdruck ist $\frac{s_0}{r_0}\frac{d^2\delta r}{dt^2}$,

der sechste Ausdruck $\frac{k_0^2\delta s}{r_0^3} - \frac{3k_0^2 s_0}{r_0^4}\delta r_0$;

auf der rechten Seite kann man $r_0$ für $r$ schreiben, und erhält daher

$$\frac{d^2\delta s}{dt^2} + L'^2\delta s = \frac{1}{r_0}\frac{\partial\Omega}{\partial z} - \frac{s_0}{r_0}\left(\frac{d^2\delta r}{dt^2} - \frac{3k_0^2}{r_0^3}\delta r_0\right) - \frac{2}{r_0}\frac{ds_0}{dt}\frac{d\delta r}{dt}. \qquad (4)$$

Es ist nun zunächst:[1])

$$\frac{1}{r_0}\frac{\partial\Omega}{\partial z} = -\frac{k^2 M}{\Delta^3}\frac{z}{r_0} = -\frac{k^2 M}{r'^3}\left(1 + 3\frac{r}{r'}H\right)\sin i\sin(v+\omega)$$
$$= -\frac{k^2}{a^3}\mu^2\sin i\sin(☾+\omega)$$
$$= -L'^2\mu^2\sin i\sin(L-\Omega).$$

Weiter ist zu beachten, dass bei der Integration wieder die Nenner $L'^2 - \varkappa^2$ hervortreten, welche nur merklich werden, wenn das Argument des betrachteten Gliedes der rechten Seite $L$ mit dem Coëfficienten 1 enthält.

Berücksichtigt man, dass die Hauptglieder in $\delta r$ und seinen Differentialquotienten $L$ enthalten, diese aber mit $s_0 = \sin i\sin(L-\Omega)$ multiplicirt kein derartiges Argument geben, so können diese Glieder ebenfalls wegbleiben; nur die Variation liefert einen Beitrag, indem das Produkt der trigonometrischen Functionen, deren Argument $(L-\Omega)$ ist, nebst deren Ableitungen, mit dem $\sin 2(L-L_1)$ in dem resultirenden Argumente $L$ mit dem Coëfficienten 1 erhält. Bezeichnet man für den Augenblick Kürze halber den Coëfficienten der Variation

$$\frac{-\frac{3}{4}\mu^2 L'^2\left(1+\frac{L'}{L'-L_1'}\right)}{(3L'-4L_1')(5L'-4L_1')} = \mathfrak{v},$$

so wird

$$\delta r = a\mathfrak{v}\cos 2(L-L_1)$$
$$\frac{1}{a}\frac{d\delta r}{dt} = -2(L'-L_1')\mathfrak{v}\sin 2(L-L_1);\quad \frac{1}{a}\frac{d^2\delta r}{dt^2} = -4(L'-L_1')^2\mathfrak{v}\cos 2(L-L_1)$$

die drei letzten Ausdrücke geben daher den Beitrag

$$-\sin i\sin(L-\Omega)[-4(L'-L_1')^2\mathfrak{v}\cos 2(L-L_1) - 3L'^2\mathfrak{v}\cos 2(L-L_1)]$$
$$+4\sin i\cos(L-\Omega)(L'-\Omega')(L'-L_1')\mathfrak{v}\sin 2(L-L_1).$$

---

[1]) Es muss natürlich dasselbe Resultat aus 56 (3) hervorgehen; nur ist zu beachten, dass $H$ ebenfalls von $z$ abhängig ist. Es wird

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z} = +k^2 M\frac{r}{r'^3}\frac{\partial r}{\partial z}\left[(3H^2-1)+\frac{1}{2}\frac{r}{r'}(5H^3-3H)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}k^2 M\frac{r^2}{r'^3}\left[6H+\frac{r}{r'}(15H^2-3)\right]\left[\frac{\partial H}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}+\left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)\right]$$

und da für $z'=0$ der nach dem explicite vorkommenden $z$ genommene Differentialquotient: $\left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)$ null ist, und

$$\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{H}{r},\ \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

ist, so wird

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z} = +k^2 M\frac{z}{r'^3}\left[(3H^2-1)+\frac{1}{2}\frac{r}{r'}(5H^3-3H) - 3H^2 - \frac{1}{2}\frac{r}{r'}(15H^3-3H)\right].$$

Löst man hier die Produkte auf, und berücksichtigt nur diejenigen Glieder, welche im Argumente $L$ mit dem Faktor 1 enthalten, so erhält man:

$$[-2(L'-L_1')^2-\tfrac{1}{2}L'^2+2(L'-\Omega')(L'-L_1')]\mathfrak{v}\sin i\sin(L-2L_1+\Omega)$$

daher, wenn man in dem Ausdrucke

$$\frac{L'^2}{L'-L_1'}=L'+L_1'$$

setzt,

$$+\frac{\tfrac{3}{4}\mu^2L'^2(2L'-L_1')(3L'-L_1'+4\Omega')}{(3L'-4L_1')(5L'-4L_1')}\sin i\sin(L-2L_1+\Omega).$$

Die Differentialgleichung wird daher:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\delta s}{dt^2}+L'^2\delta s=&-L'^2\mu^2\sin i\sin(L-\Omega)+\\+\tfrac{3}{4}L'^2\mu^2\sin i&\frac{(2L'-L_1')(3L'-L_1'+4\Omega')}{(5L'-4L_1')(3L'-4L_1')}\sin(L-2L_1+\Omega)\end{aligned}\qquad(3\text{a})$$

und daraus

$$\begin{aligned}\delta s=&-\frac{L'^2\mu^2}{(2L'-\Omega')\Omega'}\sin i\sin(L-\Omega)+\\+\tfrac{3}{4}&\frac{L'^2\mu^2(2L'-L_1')(3L'-L_1'+4\Omega')}{(2L'-2L_1'+\Omega')(2L_1'-\Omega')(5L'-4L_1')(3L'-4L_1')}\sin i\sin(L-2L_1+\Omega).\end{aligned}\qquad(4)$$

59. **Elementäre Glieder; Secularbewegungen von Knoten und Perigeum.** In den Gleichungen 57 (9), (11) und 58 (4) treten zweierlei stark vergrösserte Glieder auf; in den einen wird die Vergrösserung durch den Faktor $\frac{L'}{L_1'}=\frac{1}{\mu}$ bewirkt, so dass die resultirenden Coëfficienten nur mehr von der Ordnung $\mu$, d. h. der Quadratwurzel aus der störenden Masse, sind; ausserdem aber eine zweite Gruppe von Gliedern, welche im Nenner $\Omega'$ und $\pi'$ haben. Die Verhältnisse $\frac{L'}{\Omega'}$, $\frac{L'}{\pi'}$ sind aber von der Ordnung $\frac{1}{\mu^2}$, so dass in diesen Gliedern der Faktor $\mu^2$ ganz verschwindet, die Coëfficienten von der nullten Ordnung der störenden Massen sind. Sie verlieren den Charakter der Störungen, und werden mit Gliedern der ungestörten Bewegung vergleichbar. Diese Glieder erhielten von GYLDÉN den Namen elementäre Glieder. Es können aber im weiteren Verlaufe auch Glieder auftreten, in denen nicht nur der Faktor $\mu^2$ im Zähler verschwindet, sondern wo noch überdiess die störenden Massen in den Nenner treten: es entstehen hyperelementäre Glieder. Es ist sofort klar, dass eine derartige Entwickelung unbrauchbar ist, indem man es nicht mehr mit Näherungen zu thun hat, sondern die Reihen divergent werden.

Diese Glieder haben aber die Eigenschaft, dass sie aus denjenigen Gliedern der störenden Kräfte entstehen, die ausser $L$ noch $\Omega$ oder $\pi$, aber kein anderes Argument enthalten; denn nur dann kann $(L'^2-\varkappa^2)=(L'-\varkappa)(L'+\varkappa)$ den Faktor $\Omega'$ oder $\pi'$ erhalten. Wenn man daher in den störenden Kräften diese Glieder zum Verschwinden bringen könnte, so würden eben auch die Glieder nicht auftreten. Hierzu giebt es aber ein Mittel, welches nicht nur zu diesem Zwecke tauglich, sondern für eine streng richtige Lösung unbedingt erforderlich ist.

Die Auflösung der canonischen Differentialgleichung ohne letztem Gliede war, da hier $\sqrt{p}=L'$ ist:

$$h\sin(L't+H)=h\sin(L+H),$$

wo $h$ und $H$ die Integrationsconstanten sind. Für $r$ wird $h = -e$, $H = 90^\circ - \pi$; der aus der Beobachtung zu bestimmende Theil $- e\cos(L - \pi)$; für $s$ ist $h = \sin i$, $H = -\Omega$, das betreffende Glied $\sin i \sin(L - \Omega)$.

Diese Lösung setzt voraus, dass $\Omega$ und $\pi$ constant sind; es wäre dann nicht gestattet, bei der Integration der canonischen Differentialgleichung mit letztem Gliede diese Grössen als veränderlich anzusehen. Die Folge davon wäre aber, dass nunmehr jene Glieder, welche dieselben Argumente enthalten, und welche zur Entstehung der elementären Glieder Veranlassung geben, die Nenner $\infty$ erhalten würden. Die Lösung der canonischen Differentialgleichung in der bisher benutzten Form setzt also geradezu voraus, dass in dem letzten Gliede kein Ausdruck mit dem Argumente $(L't + K)$ vorkommt. Wenn solche Glieder auftreten, so muss die Integrationsmethode geändert werden; dies geschieht eben durch die Annahme eines veränderlichen $H$.

Es wird in der canonischen Differentialgleichung sofort jenes Glied mit dem kritischen Argumente berücksichtigt. Dann wird dieselbe, wenn sofort $L'$ für $\sqrt{p}$ geschrieben wird:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + L'^2 y = f \sin(L't + H) \tag{1}$$

und das Integral in der Form

$$y = h \sin(L't + H), \tag{2}$$

wobei jetzt $H$, und der grösseren Allgemeinheit wegen, sogleich auch $h$ als veränderlich angenommen werden. Lässt sich die Gleichung (1) durch den Ausdruck (2) unter dieser Annahme befriedigen, so wird, wie man sofort sieht, die Integration der Gleichung mit letztem Gliede zu denselben Resultaten führen, wie früher, wobei aber die in den Argumenten $K$ auftretenden Grössen $H$ ebenfalls als veränderlich angesehen werden, d. h. wo in den Werthen der $(\varkappa t + K)$ in $\varkappa t$ die sämmtlichen veränderlichen Theile eingezogen sind, wie dieses in No. 49 geschah. Nur in diesem Falle werden daher die in 49 erhaltenen Resultate theoretisch richtig.

Aus (2) folgt:

$$\frac{dy}{dt} = hL'\cos(L't + H) + \frac{dh}{dt}\sin(L't + H) + h\cos(L't + H)\frac{dH}{dt}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2} = &- hL'^2\sin(L't+H) + 2\frac{dh}{dt}L'\cos(L't+H) - 2hL'\sin(L't+H)\frac{dH}{dt} + \\ &+ \frac{d^2h}{dt^2}\sin(L't + H) + 2\frac{dh}{dt}\cos(L't + H)\frac{dH}{dt} - \\ &- h\sin(L't + H)\left(\frac{dH}{dt}\right)^2 + h\cos(L't + H)\frac{d^2H}{dt^2}.\end{aligned} \tag{3}$$

Setzt man dies in (1) ein, so folgt:

$$\begin{aligned}&\left[-hL'^2 - 2hL'\frac{dH}{dt} + \frac{d^2h}{dt^2} - h\left(\frac{dH}{dt}\right)^2 + hL'^2\right]\sin(L't + H) + \\ &+ \left[2\frac{dh}{dt}L' + \frac{2dh}{dt}\frac{dH}{dt} + h\frac{d^2H}{dt^2}\right]\cos(L't + H) = f\sin(L't + H),\end{aligned}$$

woraus sofort zu ersehen ist, dass in der Lösung (2) für $H$ derjenige Werth genommen werden muss, der in dem kritischen Glied von (1) enthalten ist, und weiters, dass

$$\begin{aligned}&h\left(\frac{dH}{dt}\right)^2 + 2hL'\frac{dH}{dt} - \frac{d^2h}{dt^2} = -f \\ &h\frac{d^2H}{dt^2} + 2\frac{dh}{dt}\frac{dH}{dt} + 2\frac{dh}{dt}L' = 0\end{aligned} \tag{4}$$

gesetzt werden muss. Wird nun zunächst angenommen, dass $h$ constant ist, so werden daraus die Gleichungen folgen:

$$h\left(\frac{dH}{dt}\right)^2 + 2hL'\frac{dH}{dt} = -f$$

$$h\frac{d^2H}{dt^2} = 0. \tag{5}$$

Die zweite Gleichung giebt:

$$H = H_0 + H_1 t,$$

wo $H_0$ und $H_1$ constant sind, und dieses in die erste substituirt:

$$H_1^2 + 2L'H_1 = -\frac{f}{h}$$

$$H_1 = -L' \pm \sqrt{L'^2 - \frac{f}{h}}, \tag{6}$$

wo das obere Zeichen zu nehmen ist, wenn die Veränderlichkeit von $H$ als klein vorausgesetzt wird. Es würde daher

$$H_1 = L'\left(\sqrt{1 - \frac{f}{hL'^2}} - 1\right) \tag{7}$$

oder wenn $f$ gegenüber $hL'^2$ nur klein ist:

$$H_1 = \left(\frac{dH}{dt}\right) = -\frac{1}{2}\frac{f}{hL'}. \tag{7a}$$

In dem vorliegenden Falle ist:

1) Für die Gleichung 57 (8) mit der Beziehung (7a), da

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos(L - \pi), \quad \left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 - 2e\cos(L - \pi), \quad \left(\frac{r}{a}\right)\delta\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{1}{2}\delta\left(\frac{r}{a}\right)^2$$

ist:

$$h = -2e, \quad H = 90^\circ - \pi; \quad f = -2L'^2\mu^2 e\left(1 + \frac{L'}{L' - \pi'}\right)$$

$$H_1 = -\frac{d\pi}{dt} = -\frac{1}{2}\mu^2 L'\left(1 + \frac{L'}{L' - \pi'}\right).$$

Hier tritt allerdings rechts noch $\frac{d\pi}{dt} = \pi'$ auf; vernachlässigt man es gegenüber $L'$, so wird

$$\frac{d\pi}{dt} = +\mu^2 L'. \tag{8a}$$

2) Für die Gleichung 58 (5a) ist:

$$h = \sin i, \; H = -\Omega, \; f = -L'^2\mu^2\sin i$$

$$H_1 = -\frac{d\Omega}{dt} = +\frac{1}{2}L'\mu^2$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{1}{2}L'\mu^2. \tag{8b}$$

Die Bedingung des Verschwindens der elementären Glieder giebt also sofort eine Bestimmung für die Bewegung der Knoten und Apsiden.

Die in No. 57 und 58 erhaltenen Ausdrücke geben die Störungen, die von der ersten Potenz der Masse herrühren. Setzt man diese in die rechte Seite der Störungsfunction, so werden neue Ausdrücke entstehen, die aber, da $\Omega$ den Faktor $\mu^2$ hat, mit $\mu^4$ multiplicirt auftreten. Bei der Berücksichtigung der dritten Potenz der störenden Massen tritt noch $\mu^6$ hinzu, so dass also eine nach Potenzen von $\mu^2$ (d. i. der störenden Masse) geordnete Reihe erhalten wird; da $\mu^2$ nahe $\frac{1}{179}$ ist, so werden die aufeinanderfolgenden Näherungen als convergent angesehen werden können, insolange nicht durch das Auftreten von kleinen Integrations-

divisoren diese Convergenz gestört wird, eine Erscheinung, die nun aber nicht zu vermeiden ist. Die Entwickelungen können vollständig numerisch, oder analytisch geordnet nach Potenzen der kleinen Parameter oder geordnet nach Potenzen von $\mu^2$ durchgeführt werden. Dem Wesen nach ist dieses die Methode von LAPLACE, welche auch mit mehr oder weniger bedeutenden Modifikationen von PLANA und DAMOISEAUX verwendet wurde. Völlig consequent hat z. B. PONTÉCOULANT die Entwickelungen nach Potenzen von $\mu^2$ vorgenommen, dabei aber auch die Nenner, welche $L' - iL_1' = L'(1 - i\mu)$ enthalten, nach steigenden Potenzen von $\mu$ aufgelöst (wodurch auch ungerade Potenzen auftreten), ein Vorgang, der jedoch vom Standpunkte der Convergenz der Reihen als nicht zulässig erklärt werden muss.

**60. Secularacceleration.** In Gleichung 57 (11) für die mittlere Länge trat das Integral auf:

$$-\mu^2\int(\tfrac{3}{4}C_1 + 4C)L'dt,$$

in welchem die Integrationsconstante $C_1$ so bestimmt wurde, dass $L'$ die aus den Beobachtungen folgende mittlere Bewegung repräsentire, d. h. dass dieses Integral verschwinde. Die Grösse $C$ ist aber nicht völlig constant; sie ist nach 56 (5), abgesehen von Gliedern 4. Ordnung:

$$C = \tfrac{1}{4}(1 + \tfrac{3}{2}e^2 + \tfrac{3}{2}e_1^2 - 6\gamma^2) \tag{1}$$

und da die Excentricität der Erdbahn nicht constant ist, sondern einer secularen Veränderung unterliegt, so wird $C$ als variabel angesehen werden müssen. Setzt man, da die Excentricität der Erdbahn abnimmt:

$$e_1 = e_1^{(0)} - e_1't; \quad e_1^2 = e_1^{(0)2} - 2e_1^{(0)}e_1't, \tag{2}$$

so kann $C_1$ als Integrationsconstante nur so bestimmt werden, dass der constante Theil der unter dem Integral befindlichen Summe verschwindet; der von $t$ abhängige jedoch muss stehen bleiben, so dass dieses Integral in

$$+\mu^2\int 8e_1^{(0)}e_1'tL'dt = +4e_1^{(0)}e_1'L'\mu^2t^2 \tag{3}$$

übergeht. Dieses Glied ist zum Ausdruck 57 (12) hinzuzulegen, es giebt die Secularacceleration des Mondes.

Der Coëfficient $f$ in Gleichung 59 (1) ist aber ebenfalls von $e_1^2$ abhängig. Schreibt man:

$$f = f_1 + f_2e_1^2, \tag{4}$$

so werden jetzt die Gleichungen 59 (4):

$$\begin{aligned} &h\left(\frac{dH}{dt}\right)^2 + 2hL'\left(\frac{dH}{dt}\right) - \frac{d^2h}{dt^2} = -f_1 - f_2e_1^2 \\ &h\frac{d^2H}{dt^2} + 2\frac{dh}{dt}\frac{dH}{dt} + 2\frac{dh}{dt}L' = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

und man sieht, dass die Gleichungen 59 (5) wegen der Veränderlichkeit von $f$ nicht erfüllt werden können. Daraus folgt, dass auch $h$ veränderlich angenommen werden muss.

Die zweite Gleichung (5) lässt sich schreiben:

$$\frac{\frac{d^2H}{dt^2}}{L' + \frac{dH}{dt}} + \frac{2\frac{dh}{dt}}{h} = 0;$$

deren Intergration liefert

$$\log\left(L' + \frac{dH}{dt}\right) + 2\log h = \log c^2L' \tag{6}$$

oder

$$k^2 = \frac{c^2 L'}{L' + \frac{dH}{dt}}, \tag{7}$$

wo $c$ die Integrationsconstante ist. Hieraus ersieht man, dass die Veränderlichkeit von $k$ jedenfalls eine sehr geringe ist, da $\frac{dH}{dt}$ gegenüber $L'$ sehr klein ist; man kann demnach auch

$$k = c\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{1}{L'}\frac{dH}{dt}\right) = c - \tfrac{1}{2}\frac{c}{L'}\frac{dH}{dt} \tag{8}$$

setzen. Sieht man daher in der ersten Gleichung (5) von dem zweiten Differentialquotienten von $k$ ab, so folgt:

$$\frac{\left(\frac{dH}{dt}\right)^2 + 2L'\frac{dH}{dt}}{\sqrt{L' + \frac{dH}{dt}}} = -\frac{1}{c\sqrt{L'}}(f_1 + f_2 e_1^2)$$

oder, wenn der Nenner entwickelt wird:

$$\frac{dH}{dt} + \frac{1}{8L'^3}\left(\frac{dH}{dt}\right)^3 = -\frac{1}{2cL'}(f_1 + f_2 e_1^2).$$

Eine Näherung wird, wie unmittelbar ersichtlich, und auch aus 59 (4) folgt:

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{1}{2cL'}(f_1 + f_2 e_1^2);$$

als genaueren Werth erhält man:

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{1}{2cL'}(f_1 + f_2 e_1^2) + \frac{1}{64c^3L'^6}(f_1 + f_2 e_1^2)^3 \tag{9}$$

oder, wenn man die dritten Potenzen von $f$ vernachlässigt, und $e_1^2 = e_1^{(0)2} - 2e_1^{(0)}e_1' t$ einsetzt:

$$\begin{aligned}
\frac{dH}{dt} &= -\left(\frac{1}{2cL'}f_1 + \frac{1}{2cL'}f_2 e_1^2\right) \\
&= -\frac{1}{2cL'}\left(f_1 + f_2 e_1^{(0)2}\right) + \frac{e_1^{(0)}e_1'}{cL'}f_2 t
\end{aligned}$$

$$H = H_0 - \frac{1}{2cL'}\left(f_1 + f_2 e_1^{(0)2}\right)t + \tfrac{1}{2}\frac{e_1^{(0)}e_1'}{cL'}f_2 t^2. \tag{10}$$

Es werden daher auch der Knoten und das Perigeum der Mondbahn einer Secularvariation unterliegen, überdies aber auch $k$ veränderlich sein. Der Werth von $k$ wird nämlich:

$$\begin{aligned}
k &= c - \tfrac{1}{2}\frac{c}{L'}\left[-\frac{1}{2cL'}(f_1 + f_2 e_1^2)\right] \\
&= c + \frac{1}{4L'^2}(f_1 + f_2 e_1^{(0)2}) - \tfrac{1}{2}\frac{e_1^{(0)}e_1'}{L'^2}f_2 t.
\end{aligned}$$

Schreibt man daher

$$H = H_0 + H't + H''t^2; \quad k = k_0 + k't, \tag{11a}$$

so wird

$$\begin{aligned}
H' &= -\frac{1}{2cL'}\left(f_1 + f_2 e_1^{(0)2}\right); \quad H'' = +\tfrac{1}{2}\frac{e_1^{(0)}e_1'}{cL'}f_2 \\
k_0 &= c + \frac{1}{4L'^2}(f_1 + f_2 e_1^{(0)2}); \quad k' = -\tfrac{1}{2}\frac{e_1^{(0)}e_1'}{L'^2}f_2.
\end{aligned} \tag{11b}$$

Damit wird noch

$$cL' = k_0 L' - \frac{1}{4L'}(f_1 + f_2 e_1^{(0)2}),$$

welcher Werth in (11a), (11b) einzusetzen wäre; doch wird für die vorliegende Näherung ausreichend

$$\epsilon = h_0; \quad H' = -\frac{f_1}{2h_0 L'},$$

wodurch die Resultate für die Bewegung von ☊ und $\pi$ mit den in 59 (8a), (8b) erlangten identisch werden. Um die Secularvariationen zu erhalten sei:

1) Der Coëfficient von $\cos(L - \pi)$ in 57 (5):

$$-e\left(1 + \frac{L'}{L' - \pi}\right)(p_1 + q_1 e_1^2),$$

so wird in erster Näherung $p_1 = 1$ und weiter (vergl. pag. 448 den Werth von $f$):

$$f_1 = -2L'^2\mu^2 q_1 e\left(1 + \frac{L'}{L' - \pi}\right), \quad h_0 = -2e,$$

demnach der Coëfficient von $t^2$ in dem Ausdrucke für $\pi$:

$$-H'' = +\frac{1}{2}\frac{d^2\pi}{dt^2} = \frac{e_1^{(0)} e_1'}{-4eL'} q_1 e\left(1 + \frac{L'}{L' - \pi}\right) \cdot 2L'^2\mu^2$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\pi}{dt^2} = -e_1^{(0)} e_1' L' \mu^2 q_1. \tag{11c}$$

2) Sei der Coefficient von $\sin(L - ☊)$ in 58 (3a): $-L'^2\mu^2 \sin i(p_2 + q_2 e_1^2)$, so wird in erster Näherung ebenfalls $p_2 = 1$ sein, und

$$f_2 = -L'^2\mu^2 \sin i\, q_2, \quad h_0 = \sin i$$

demnach der Coëfficient von $t^2$ in ☊

$$-H'' = \frac{1}{2}\frac{d^2 ☊}{dt^2} = +\frac{1}{2}e_1^{(0)} e_1' L' \mu^2 q_2. \tag{11d}$$

Vergleicht man die Coëfficienten von $t^2$ in den Ausdrücken (6), (11c), (11d), so findet sich

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\delta L}{dt^2} : \frac{1}{2}\frac{d^2\pi}{dt^2} : \frac{1}{2}\frac{d^2 ☊}{dt^2} = +3 : -2q_1 : +q_2.$$

**61. Andere Formen der Entwickelung.** Delaunay, Airy, Hansen. Obgleich die Entwickelung der periodischen Störungen nach diesen Principien an und für sich keine analytischen Schwierigkeiten darbietet, so erfordert dieselbe praktisch eine sehr grosse Aufmerksamkeit, damit nicht ein oder das andere merkliche Glied übergangen werde. Thatsächlich sind die bei den Untersuchungen verschiedener Forscher auftretenden Unterschiede in den Coëfficienten einzelner Glieder dem Umstande zuzuschreiben, dass bei der Berechnung derselben einzelne Combinationen von Gliedern, deren Produkte zu einem gegebenen Argumente gehören und merkliche Resultate geben, übersehen, oder als unmerklich übergangen wurden. Um diesem Uebelstande vorzubeugen, hatte Delaunay die Entwickelungen nach der folgenden Methode durchgeführt: Bei der Integration der Differentialgleichungen wird von der Störungsfunction zunächst nur ein einziges Glied berücksichtigt; dann lässt sich die Differentialgleichung in einfacher Weise integriren, und man erhält, ohne eine specielle Annahme über die Form des Integrals zu machen, dieselbe durch die Entwickelung der Störungsfunction direct bestimmt. Reducirt man in erster Näherung die Störungsfunction auf die Anziehung des Centralkörpers, so erhält man die ungestörte Bewegung mit den sechs Elementen als Integrationsconstanten. Man kann nun, nach der Methode der Variation der Constanten, diese als variabel betrachtend, die ganze Störungsfunction oder einen Theil derselben berücksichtigen; im letzteren Falle, wenn an Stelle der Störungsfunction $\Omega$ ein Hauptglied $\Omega'$ berücksichtigt wird, erhält man die Elemente in

der Form $E_0 + E'$, wo $E'$ von dem Gliede $\Omega'$ in der Störungsfunction herrührt. Substituirt man an Stelle der Elemente ihre Werthe $E_0 + E'$ in die Störungsfunction, so wird diese geändert, denn das berücksichtigte Glied wird, der Bestimmung von $E'$ gemäss verschwinden, während die übrigen, noch nicht berücksichtigten Glieder in Folge der Correction $E'$ geänderte Werthe erhalten. Sei die neue Entwickelung $\Omega_1$, so wird man die Integrationsconstanten der letzten Integration, welche wieder mit $E_0$ bezeichnet werden können, neuerdings als variabel ansehen, und so bestimmen, dass ein weiteres Glied $\Omega''$ von $\Omega_1$, etwa das Hauptglied dieser Entwickelung, berücksichtigt wird. Dadurch werden Störungen $E''$ auftreten, so dass die Elemente $E_0 + E' + E''$ sein werden. Substituirt man diese Werthe in $\Omega_1$, so wird der Bestimmung von $E''$ gemäss das berücksichtigte Hauptglied verschwinden, und $\Omega_1$ durch die geänderte Entwickelung $\Omega_2$ ersetzt, mit welcher in derselben Weise zu verfahren ist. Auf diese Weise werden nach und nach alle Glieder der Störungsfunction berücksichtigt, und wenn man dafür sorgt, dass immer die Hauptglieder mitgenommen werden, so werden die aufeinanderfolgenden Correctionen $E'$, $E''$, $E'''$ . . . und daher auch die in $\Omega_1$, $\Omega_2$, $\Omega_3$ auftretenden Zusatzglieder im allgemeinen immer kleiner.

Auf die weitere Ausführung der Methode kann hier nicht eingegangen werden[1]); die Methode ist, wenn auch nicht schwierig, so doch mit bedeutenden Weitläufigkeiten verbunden, die übrigens nach Maassgabe der zu berücksichtigenden Glieder, gerade so, wie bei anderen Methoden, unverhältnissmässig anwachsen. Es ist allerdings möglich gewisse Gruppen von Argumenten zusammenzufassen, ohne dass dadurch die Integration erschwert wird, und dadurch das Verfahren wesentlich abzukürzen; nichtsdestoweniger musste Delaunay bei den späteren Operationen, wo die kleineren Glieder in sehr grosser Zahl auftraten, gewisse Vereinfachungen vornehmen, und trotz des ganz ausserordentlichen Aufwandes von Arbeit kann man schliesslich praktisch nicht constatiren, ob die vernachlässigten Glieder nicht thatsächlich merkliche Werthe erreichen. Um hierüber Gewissheit zu erlangen, müsste entweder die Delaunay'sche Methode auf die von ihm vernachlässigten Glieder erweitert werden, d. h. die Grenzen für die zulässigen Vernachlässigungen müssten wesentlich weiter gesteckt werden, oder aber die erhaltenen Coëfficienten müssten in anderer Weise derart corrigirt werden, dass sie den Differentialgleichungen der Bewegung genügen. Der erstere Weg würde unzweifelhaft neuerdings eine grosse Zahl merklicher Glieder mit Argumenten ergeben, welche Delaunay selbstverständlich nicht mehr erhielt; die letztere Methode könnte nur die Correctionen der Coëfficienten derjenigen Glieder liefern, welche von Delaunay gefunden wurden. Bei der Durchführung dieser Arbeit entschloss sich Airy (»Numerical Lunar Theory«) für den zweiten Weg, welcher, obzwar selbst noch sehr umfangreich und mühsam, dennoch der kürzere schien. Airy ging von den Differentialgleichungen 10 (C) (in einer unwesentlich geänderten Form), aus. Zu den aus der Delaunay'schen Theorie folgenden gestörten Werthen der polaren Coordinaten werden die Coëfficienten je mit einer unbekannten, zu suchenden Correction versehen, so dass an Stelle des Gliedes $a \sin Arg$ oder $a' \cdot \cos Arg$ ein Glied $(a + \Delta a) \sin Arg$ bezw. $(a' + \Delta a') \cos Arg$ angenommen wird. Diese Werthe werden in die störenden

---

1) Für $\frac{d^2\pi}{dt^2}$, $\frac{d^2\Omega}{dt^2}$ erhält er dieselben, nach $\mu$ geordneten Reihen, wie sie in No. 60 angegeben sind.

Kräfte eingeführt, und die Reihen numerisch multiplicirt. Weiter werden die in den Differentialgleichungen auftretenden Combinationen der Differentialquotienten aus den für die polaren Coordinaten gegebenen Reihen abgeleitet, und durch Gleichsetzung der bezüglichen Werthe lineare Gleichungen zur Bestimmung der unbekannten Correctionen abgeleitet.

Ohne in grössere Details einzutreten, muss doch in Kürze eines sehr verdienstvollen Versuches von WEILER Erwähnung geschehen, die Störungen durch die Integration der geschlossenen Ausdrücke für die störenden Kräfte (ohne Reihenentwickelungen) zu erhalten. An Stelle derselben tritt dabei eine Reihe von partiellen Integrationen, welche so angeordnet werden, dass der zu integrirende Theil der partiellen Integration gegenüber den bereits integrirten von höherer Ordnung der Kleinheit wird, indem die kleinen Parameter als Faktoren auftreten[1]).

Auch muss hier einer sehr interessanten Arbeit von BOHLIN (Astron. Nachr. No. 2882) Erwähnung geschehen, der die Schwierigkeit der auftretenden kleinen Integrationsdivisoren durch Zurückführung der Differentialgleichungen auf partielle zu umgehen sucht. An Stelle der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\Sigma\alpha_{i\gamma}\sin(i\zeta - \gamma n't) \tag{1}$$

tritt die partielle Differentialgleichung

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial\zeta}\right)^2 - \frac{\partial V}{\partial\omega} = g + \Sigma\beta_{i\gamma}\cos(i\zeta - \gamma\omega), \tag{2}$$

wo Kürze halber $\omega = n't$ gesetzt ist. Ist das Integral dieser Gleichung

$$V = -\tfrac{1}{2}G_0\zeta + \tfrac{1}{2}G_0'\omega + \Sigma G_{i\gamma}\sin(i\zeta - \gamma\omega), \tag{3}$$

so erhält man zwei Integrale von (1):

$$\begin{gathered}\frac{d\zeta}{d\omega} = -\tfrac{1}{2}G_0 - \Sigma iG_{i\gamma}\cos(i\zeta - \gamma\omega)\\ -\tfrac{1}{2}\frac{\partial G_0}{\partial g}\zeta + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial G_0'}{\partial\omega} + 1\right)\omega + \Sigma\frac{\partial G_{i\gamma}}{\partial g}\sin(i\zeta - \gamma\omega) = 0.\end{gathered} \tag{4}$$

Das Integral von (2) kann aber durch das Eintreten von willkürlichen Functionen so bestimmt werden, dass kleine Integrationsdivisoren nicht auftreten. Hingegen tritt an deren Stelle eine Reihe von partiellen Differentiationen nach $\zeta$, bei welchen stets ganzzahlige Coëfficienten als Faktoren auftreten, so dass es aus diesem Grunde jedenfalls »verfrüht wäre zu behaupten, dass die erhaltenen Reihen convergent sind«[2]).

Ueber die HANSEN'sche Methode genügt es hier auf das in No. 51 und 52 gesagte hinzuweisen. In der Methode völlig identisch, tritt ein Unterschied nur dadurch auf, dass auf die Bewegung des Perigeums des Mondes schon in den Differentialgleichungen Rücksicht genommen wird. Es wäre in 51 (2): $l = V + \pi_0 + \pi'$ zu setzen, wodurch in den Differentialquotienten von $\pi'$ abhängige Zusatzglieder auftreten. Die Störungsfunction wird für den Mond nach den Cosinus der mittleren Anomalien vorgenommen, da hier mit Rücksicht auf die kleinen Excentricitäten

[1]) Vergl. u. a. a. »Astr. Nachr. 2515/6, 2762 und 3307«. In der Praxis werden jedoch die Resultate so verwickelt (vergl. Astr. Nachr. No. 2611), dass sich ihre Anwendung kaum als fruchtbringend erweist; ob die Ursache davon lediglich die von WEILER angegebene, in der Wahl der beiden wahren Anomalien als Argumente gelegene ist, bleibt nach den späteren Untersuchungen WEILER's immerhin fraglich. Ueberdies ist sowohl theoretisch wie praktisch keineswegs der Beweis erbracht, dass die Entwickelungen convergent sind.

[2]) l. c. pag. 24.

sich einfachere Entwickelungen ergeben; endlich ist zu erwähnen, dass HANSEN die Auflösung der Integrationsdivisoren in Reihen, die nach steigenden Potenzen von $\mu$ fortschreiten, als eine der Hauptursachen der mangelhaften Convergenz der Resultate, unterlässt.

62. **Die Secularacceleration des Mondes.** Für den numerischen Werth der Secularacceleration des Mondes hatte LAPLACE 10″ angegeben[1]). Dieser Werth wurde auch von PLANA und DAMOISEAUX bestätigt gefunden. AIRY fand anfangs denselben Werth; bei seinen späteren Untersuchungen den beträchtlich grösseren von 12″. Die von HANSEN gefundenen Werthe weichen von einander um ca. 1″ ab und bewegen sich zwischen 11″·5 und 12″·5.

Der Coefficient des Integrales $\int e_1^{(0)} e_1' tL' dt$ ist nach Formel 60 (3) $3\mu^2$. Dieses ist natürlich nur ein erster Näherungswerth, das Anfangsglied einer Reihe, welche nach Potenzen von $\mu$ fortschreitet. Nach den Entwickelungen von PLANA und DAMOISEAUX ergab sich der Coëfficient

$$A = 3\mu^2 - \tfrac{2187}{64}\mu^4,$$

ein Werth, welcher auch von HANSEN nach seiner Methode bestätigt wurde. Derselbe ergab sich jedoch in Folge eines Fehlers in der analytischen Entwickelung, den zuerst (1853) ADAMS[2]) corrigirte. Die von PLANA, DAMOISEAUX und HANSEN gemachten Vernachlässigungen lassen sich nach ADAMS dahin präcisiren, dass der Einfluss der Veränderlichkeit der Excentricität der Erdbahn auf die Tangentialbewegung, also auf die Flächengeschwindigkeit, nicht berücksichtigt erscheint, und nur die in Folge der veränderlichen Excentricität der Erdbahn auftretende Variation der störenden Kraft in der Richtung des Radiusvector in Rechnung gezogen wurde. Unter Berücksichtigung sämmtlicher Einflüsse erhielt ADAMS

$$A = 3\mu^2 - \tfrac{3771}{64}\mu^4.$$

Der Unterschied beträgt in dem Coëfficienten von $t^2$ mit den numerischen Werthen von $e_1^{(0)}$, $e_1'$, $L'$ und $\mu$: $-1''\cdot66$[3]).

PLANA und DAMOISEAUX erklärten jedoch die Methode von ADAMS für incorrekt, und als DELAUNAY im Jahre 1859 in der Pariser Academie der Wissenschaften die von ihm auf einem ganz anderen Wege erhaltenen mit den ADAMSschen übereinstimmenden Resultate mittheilte, war es in erster Linie PONTÉCOULANT,

---

[1]) Die numerischen Werthe der Störungscoëfficienten sowie der Secularacceleration des Mondes, seines Knotens und Perigeums können aus den Formeln in No. 59 und 60 keineswegs erhalten werden. Die daselbst vorgenommenen Vernachlässigungen sind viel zu erheblich, als dass die Resultate der numerischen Rechnung auch nur einigermaassen auf Richtigkeit Anspruch erheben könnten. Schon die Mitnahme der zweiten Potenzen der Excentricitäten, um so mehr aber die Berücksichtigung der zweiten Potenzen der Massen würde die Coëfficienten wesentlich verändern. Es muss besonders hervorgehoben werden, dass hierbei die analytischen Operationen nur zur Andeutung des Weges dienen, denn ohne diese Darlegung würde das Auftreten von elementären Gliedern, das Wegschaffen derselben, die Bestimmung der Veränderungen in den Apsiden und Knoten aus den Differentialgleichungen für die polaren Coordinaten wohl kaum verständlich gewesen sein. Andererseits aber fällt die vollständige Theorie der Mondbewegung nicht in den Rahmen dieses Werkes. Wenn an anderen Stellen auch numerische Beispiele gegeben sind, so ist dieses immer nur dort, wo die zulässigen Vernachlässigungen u. s. w. nicht überschritten sind. Da dieses beim Monde für die Ableitung der numerischen Werthe nicht als zutreffend gelten kann, so wurde auch von den numerischen Substitutionen hier Abstand genommen.

[2]) Philosophical Transactions, Band 143, pag. 397.

[3]) L. c. pag. 405.

welcher für die Richtigkeit der älteren Werthe eintrat. ADAMS hatte inzwischen seine Untersuchungen fortgesetzt und für $A$ den Werth erhalten[1]).

$$A = 3\mu^2 - \frac{3771}{64}\mu^4 - \frac{34047}{32}\mu^5 - \frac{305865}{48}\mu^6 - \frac{17086741}{576}\mu^7 + \frac{27}{8}\mu^2 e^2 - \frac{27}{8}\mu^2\gamma^2,$$

wo $e$ die Excentricität und $\gamma$ die Tangente der Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik bedeuten. Numerisch entwickelt gab dieser Werth für den Coefficienten der Secularacceleration 5″·78, also fast die Hälfte des älteren Werthes.

Die ausgedehntesten Untersuchungen hatte aber DELAUNAY nach seiner Methode vorgenommen, welche ihm den folgenden Werth ergaben[2]).

$$\begin{aligned} A = \Big(3 &- \tfrac{27}{8}\gamma^2 + \tfrac{27}{8}e^2 + \tfrac{15}{2}e_1^2 + \tfrac{99}{32}\gamma^4 - \tfrac{9}{2}\gamma^2 e^2 - \tfrac{135}{16}\gamma^2 e_1^2 + \tfrac{9}{32}e^4 + \tfrac{135}{16}e^2 e_1^2 + \\ &+ \tfrac{105}{8}e_1^4 - \tfrac{789}{256}\gamma^6 + \tfrac{675}{512}\gamma^4 e^2 + \tfrac{4071}{512}\gamma^2 e^4 + \tfrac{9}{64}e^6\Big)\mu^2 \\ &+ \Big(\tfrac{99}{16}\gamma^2 + \tfrac{2475}{16}e^2 - \tfrac{1089}{128}\gamma^4 - \tfrac{6930}{32}\gamma^2 e^2 + 27\gamma^2 e_1^2 - \tfrac{7425}{128}e^4 + 675 e^2 e_1^2\Big)\mu^3 \\ &- \Big(\tfrac{3771}{64} - \tfrac{50733}{512}\gamma^2 - \tfrac{1110708}{512}e^2 + \tfrac{26109}{32}e_1^2 + \tfrac{99729}{1024}\gamma^4 + \tfrac{6446619}{2048}\gamma^2 e^2 + \tfrac{1971465}{1024}e^4\Big)\mu^4 \\ &- \Big(\tfrac{34047}{32} - \tfrac{266677}{256}\gamma^2 - \tfrac{6947287}{256}e^2 + \tfrac{782559}{64}e_1^2\Big)\mu^5 \\ &- \Big(\tfrac{305865}{48} - \tfrac{99315715}{16384}\gamma^2 - \tfrac{30773820399}{16384}e^2\Big)\mu^6 - \tfrac{6701947}{128}\mu^7 - \tfrac{3321976396417}{331184}\mu^8 \\ &+ \Big[\Big(\tfrac{15}{8} - \tfrac{2025}{128}\gamma^2 + \tfrac{2025}{128}e^2\Big)\mu^2 + \tfrac{2175}{32}\mu^3 - \tfrac{3689413}{4096}\mu^4\Big]\frac{a^2}{a_1^2}. \end{aligned}$$

Für die Coëfficienten des obigen Integrales in den Ausdrücken für die Secularbewegung des Perigäums ($B$) und des Knotens ($C$) erhielt DELAUNAY[3])

$$\begin{aligned} B = &- \Big(\tfrac{3}{4} - \tfrac{9}{8}\gamma^2 - \tfrac{9}{8}e^2 + \tfrac{45}{8}e_1^2 + \tfrac{81}{64}\gamma^4 + \tfrac{225}{32}\gamma^2 e^2 - \tfrac{9}{32}e^4\Big)\mu^2 - \\ &- \Big(\tfrac{225}{16} - \tfrac{099}{16}\gamma^2 - \tfrac{2175}{32}e^2 + 225 e_1^2\Big)\mu^3 \\ &- \Big(\tfrac{4146?}{128} - \tfrac{13343}{64}\gamma^2 - \tfrac{476743}{512}e^2\Big)\mu^4 - \tfrac{2196919}{512}\mu^5 - \tfrac{519961300}{245176}\mu^6 - \tfrac{975}{64}\mu^2\frac{a^2}{a_1^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C = &\Big(\tfrac{3}{4} - \tfrac{9}{8}\gamma^2 + \tfrac{3}{2}e^2 + \tfrac{45}{8}e_1^2 + \tfrac{87}{32}\gamma^4 + \tfrac{81}{32}\gamma^2 e^2 - \tfrac{63}{64}e^4\Big)\mu^2 - \Big(\tfrac{63}{16} - \tfrac{39}{32}\gamma^2 - \tfrac{333}{16}e^2 + 9 e_1^2\Big)\mu^3 \\ &- \Big(\tfrac{3579}{128} - \tfrac{7083}{512}\gamma^2 - \tfrac{53919}{64}e^2\Big)\mu^4 - \tfrac{74977}{512}\mu^5 - \tfrac{18540991}{245176}\mu^6 + \tfrac{675}{64}\mu^2\frac{a^2}{a_1^2}. \end{aligned}$$

Die Ausdrücke, welche PLANA und DAMOISEAUX hierfür erhielten, waren von diesen nicht sehr verschieden; PLANA erhielt die Glieder mit $\mu^2$, $\mu^2 e^2$, $\mu^2 e_1^2$, $\mu^2\gamma^2$, $\mu^3$, $\mu^3 e^2$, $\mu^3 e_1^2$, $\mu^3\gamma^2$ u. s. mit denselben numerischen Coëfficienten, ausser diesen noch die Glieder

$$\text{in } B:\; -\tfrac{61785}{128}\mu^4 - \tfrac{1811049}{512}\mu^5$$
$$\text{in } C:\; -\tfrac{3005}{128}\mu^4 - \tfrac{74801}{512}\mu^5.$$

Der Einfluss der Veränderlichkeit der Flächengeschwindigkeit auf die Secularbewegung des Knotens und des Perigeums ist also wesentlich geringer als auf die Secularbewegung in Länge.

Schon im Jahre 1853 hatte aber AIRY[4]) und 1860 HANSEN[5]) gezeigt, dass die historischen Finsternisse (die Finsterniss des THALES im Jahre — 584, des XERXES — 480, des ENNIUS — 399, des AGATHOKLES — 309, endlich die Finsterniss von STIKLASTAD 1030) mit einer Verkleinerung der Secularacceleration nicht dargestellt werden, und eher eine Vergrösserung derselben

[1]) Compt. rend. Bd. 48, pag. 247 und 887.
[2]) Compt. rend. Bd. 48, pag. 817.
[3]) Compt. rend. Bd. 49, pag. 309.
[4]) Philosophical Transactions Bd. 143, pag. 179.
[5]) Compt. rend. Bd. 50, pag. 455.

erfordern. Dieses bestimmte auch LEVERRIER zu der Meinung, dass die Rechnungen von ADAMS und DELAUNAY fehlerhaft sein müssten; der Streit wurde in der französischen Academie — oft sehr persönlich — geführt. HANSEN blieb lange bei seinen theoretisch gefundenen Resultaten stehen, gab aber später die Richtigkeit der ADAMS'schen und DELAUNAY'schen Resultate zu, wobei er aber praktisch den grösseren, empirischen Werth beibehalten zu müssen glaubte, durch welchen die historischen Finsternisse dargestellt werden, und DELAUNAY vertrat schon damals die Ansicht, dass die Abweichung der auf theoretischem Wege erhaltenen von dem aus den Beobachtungen gefolgerten Werthe irgend einer bis dahin noch nicht erörterten Ursache zuzuschreiben wäre.

Im Jahre 1865 glaubte er diese Ursache, oder wenigstens eine dieser Ursachen in der Wirkung der Ebbe und Fluth gefunden zu haben[1]). Die Wirkung lässt sich kurz folgendermaassen erörtern: Der Mond wird an der ihm zugewendeten und abgewendeten Seite in der Richtung des Radiusvectors des Mondes eine Anschwellung der Erde erzeugen; diese wird sich aber im Sinne der täglichen Drehung weiterbewegen. Wenn sie stabil bliebe, so würde sie an der dem Monde zugewendeten Seite vom Monde stärker angezogen als der Erdmittelpunkt, an der abgewendeten Seite schwächer, so dass ein Drehpaar entstehen müsste, welches immer eine Drehung der Erde gegen den Mond zu, also entgegengesetzt der täglichen Bewegung erzeugen würde; dadurch müsste die Drehung der Erde verlangsamt, der Tag etwas länger werden; in diesem nach und nach immer länger werdenden Tage würde der Mond immer grössere Strecken beschreiben, so dass also, reducirt auf die als Einheit angenommene Tageslänge, der Mond sich immer schneller zu bewegen scheinen muss. Diese Anschwellung ist nun allerdings nicht stabil, sondern wird vom Monde in der Richtung des Radiusvectors stets neu erzeugt; aber da sie in Folge der stetigen Zusammenwirkung der Mondanziehung und Erdrotation immer etwas in der Richtung der Erdrotation vorgeschoben ist, so wird an der Art der Wirkung nichts geändert, nur wird die Grösse derselben wesentlich vermindert. Bald darauf hatte BERTRAND[2]) bemerkt, dass diese Anschwellung auch eine Reaction auf den Mond, eine Anziehung auf denselben und darauf erfolgende Verringerung seiner Bewegung erzeugt, wodurch aber nur der numerische Werth etwas reducirt wird.

Eine andere Ursache, welche eine Acceleration in der Bewegung erzeugen kann, wurde 1884 von v. OPPOLZER in dem Niederschlagen von kosmischem Staub auf die Erde angegeben[3]). Die Wirkung derselben ist eine dreifache: 1) Durch Vergrösserung der Massen der Erde und des Mondes wird die Bewegung beschleunigt. Ist:

$$M = M_0 + M' t; \qquad m = m_0 + m' t,$$

so wird zur anziehenden Kraft $-\frac{k^2 (M + m)}{r^2}$ die störende Kraft in der Richtung des Radiusvectors $R_0 = -\frac{k^2 (M' + m')}{r^2} t$ hinzutreten, welche in der mittleren Länge eine Störung erzeugt, die durch die Differentialgleichung

$$\frac{d \Delta L_1}{dt} = \frac{2 k (M' + m')}{a^{\frac{1}{2}}} t$$

bestimmt ist, so dass

---

[1]) Compt. rend. Bd. 61, pag. 1023.

[2]) Compt. rend. Bd. 62, pag. 162.

[3]) Astron. Nachr. Bd. 108, pag. 67.

$$\Delta L_1 = \frac{k(M' + m')}{a^{\frac{1}{2}}} t^2$$

wird[1]). 2) Durch den Massenzuwachs der Erde wird die Rotationsgeschwindigkeit derselben vermindert. Nach dem Princip der Flächen muss nämlich das Produkt der Masse in die Rotationsgeschwindigkeit constant sein, wobei aber für die Masse, da man es mit einem rotirenden Körper zu thun hat, die diesen in der Entfernung 1 von der Rotationsaxe ersetzende Masse, also das Massenmoment $K$ gesetzt werden muss; es ist also:

$$K\omega = const;$$

demnach

$$d\omega = -\frac{\omega}{K} dK.$$

Für die Kugel ist das Massenmoment $K = \frac{8}{15}\pi\rho^5\delta$, daher $dK = \frac{8}{3}\pi\rho^4\delta_1 d\rho$, wenn $\delta$ die Dichte der Erde, $\delta_1$ die Dichte der abgesetzten kosmischen Massen und $\rho$ der Erdradius ist. Lagert sich im Jahrhundert eine Schicht von der Höhe $h$ ab, und nimmt man die Dichte des kosmischen Staubes gleich derjenigen der Erde, so wird in $t$ Jahrhunderten eine Schicht von der Hohe $ht$ angesetzt, demnach ist $d\rho = h\,t\,dt$

$$d\omega = -5\frac{h}{\rho} t\,\omega_0\,dt, \qquad \Delta\omega = -\tfrac{5}{2}\frac{h}{\rho}\omega_0 t^2.$$

Dieser Verminderung der Rotationsgeschwindigkeit entspricht eine Verlängerung des Tages um $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ und in dieser Zeit legt der Mond in seiner Bahn das Stück $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} L'$ zurück, so dass die hieraus folgende scheinbare Beschleunigung seiner Bewegung

$$\Delta L_2 = +\tfrac{5}{2}\frac{h}{\rho} L' t^2$$

ist. Endlich wird 3) durch den Widerstand, welchen der Mond in einem widerstehenden Mittel findet, ebenfalls ein Secularglied von der Form $\Delta L_3 = \alpha t^2$ entstehen; die Gesammtbeschleunigung wird daher

$$\Delta L = \left[(M' + m') L' + \tfrac{5}{2}\frac{h}{\rho} L' + \alpha\right] t^2.$$

Durch die Substitution der numerischen Werthe erhielt v. OPPOLZER

$$\Delta L = + 1''{\cdot}81\,h\,t^2,$$

wobei $h$ in Millimetern, $t$ in Einheiten des Jahrhunderts auszudrücken ist. Es genügt daher, um den Unterschied zwischen dem beobachteten und theoretisch bestimmten Werthe zu erklären

$$h = 2{\cdot}8\ mm \text{ im Jahrhundert}$$

anzunehmen.

Der hiergegen gemachte Einwurf, dass das hierfür erforderliche Quantum kosmischen Staubes viel grösser wäre, als das wirklich beobachtete, ist ungerechtfertigt; denn die beobachtete Niederschlagsmenge ist durchaus nicht zu verwechseln mit der thatsächlich erfolgten; zu den beobachteten gesellt sich noch jener Massenzuwachs, welcher durch die in der Luft stattfindenden Verbrennungen von Meteoren u. s. w. in nicht controllirbaren Mengen erfolgt, und die weitaus grösser als die beobachteten sind.

1) Eine genauere Untersuchung dieses Theiles der Störung gab GYLDÉN in den »Astron. Nachr.« Bd. 109, pag. 1.

Auch bei der Bestimmung der numerischen Werthe der von DELAUNAY angegebenen Wirkung muss man gewisse Voraussetzungen über das Gesetz der Dichte in der Erde machen; überdies ist hier nicht zu übersehen, dass durch die Querlagerung der Continente die Wirkung der Anschwellung wesentlich geändert wird, und sich der strengen Rechnung beinahe ganz entzieht. Ueberhaupt ist man bei derartigen numerischen Rechnungen immer auf gewisse Hypothesen oder vereinfachende Suppositionen, welche an Stelle der strengen Gesetze treten, angewiesen, und es ist ganz wohl denkbar, dass nicht eine dieser Ursachen allein, sondern mehrere zusammengenommen wirken, um einen gewissen Effekt zu erzielen.

Secularänderungen in den Elementen müssen auch entstehen, wenn die Schwerkraft sich nicht momentan fortpflanzt. Diesen Umstand hat schon LAPLACE in Rechnung gezogen unter der Voraussetzung, dass die Schwerkraft sich durch ein Fluidum *(Fluide gravifique)* fortpflanzt; neuerlich wurde diese Frage von einem anderen Standpunkte aus von LEHMANN-FILHÉS[1]) erörtert. LEHMANN-FILHÉS kommt zum Resultate, dass die Störungen um so bedeutender sind, je grösser die mittlere tägliche Bewegung und die Excentricität sind; unter den Planeten wird daher die Wirkung am bedeutendsten beim Mercur hervortreten; allein die bei diesem beobachtete anomale Bewegung des Perihels lässt sich nach LEHMANN-FILHÉS nicht durch diese Ursache erklären.

**63. Bestimmung der Ungleichheiten aus Beobachtungen; parallactische Ungleichheit; die Wirkung der Abplattung des Centralkörpers.** Von den periodischen Gliedern hat, wie bereits erwähnt, das Hauptglied der mit dem Coëfficienten $\frac{a}{a_1}$ behafteten Reihe eine wichtige theoretische Bedeutung. Dieselbe ist [vergl. 57 (12)];

$$-\frac{a}{a_1} F \sin (L - L_1).$$

Aus einer grossen Reihe von Beobachtungen lässt sich aber der Coëfficient $N$ der Längenstörung $N \sin (L - L_1)$ ermitteln. Es wird hier nicht unnöthig über die Bestimmung der Coëfficienten aus den Beobachtungen einiges zu erwähnen. Angenommen, man habe auf irgend eine Weise gefunden, dass sich eine zu beobachtende Grösse in der Form

$$X = a' \sin (\alpha' t + A') + a'' \sin (\alpha'' t + A'') + a''' \sin (\alpha''' t + A''') + \ldots = \\ = X' + X'' + X''' + \ldots$$

darstellen lasse. Inductiv gelangt man zu dieser Erkenntniss dadurch, dass man zunächst die Periodicität der Erscheinung $X$ erkennt, damit die Dauer ihrer Periode und die Bewegung $\alpha'$ des Argumentes in der Zeiteinheit, aus der Amplitude derselben den Coëfficienten $a'$ und aus dem Werthe zu einer gewissen Epoche den Werth von $A'$ ermittelt. Ueberwiegt das eine Glied, so wird man unschwer den analytischen Ausdruck $X'$ oder eine dasselbe repräsentirende Formel (Epicykel) finden. Bildet man $X - X'$, so ergiebt sich ein regelmässiger Verlauf des Restes, aus dem man neuerlich einen periodischen Theil $X''$ ausscheiden kann u. s. w. Dieser Weg bei der empirischen Bestimmung der Ungleichheiten wurde ursprünglich verfolgt (vergl. hierüber die »allgemeine Einleitung in die Astronomie«, pag. 10, 26, 36, 59, 68, 89, 119). Ist jedoch die Form der Entwickelung (die Argumente) durch theoretische Untersuchungen bekannt, und es handelt

---

[1]) Astron. Nachr. Bd. 110, No. 2630.

sich nur um die empirische Bestimmung der Constanten $a'$, $A'$, $a''$, $A''$ .... so können diese aus einer grossen Zahl von Beobachtungen durch lineare Gleichungen ermittelt werden. Schreibt man

$$X = a' \cos A' \sin \alpha' t + a' \sin A' \cos \alpha' t + a'' \cos A'' \sin \alpha'' t + a'' \sin A'' \cos \alpha'' t + \ldots$$

so giebt jede Beobachtung eine lineare Gleichung in den Unbekannten $a' \cos A'$, $a' \sin A'$, $a'' \cos A''$, $a'' \sin A''$, .... Sind mehr Beobachtungen als Unbekannte so werden die letzteren so bestimmt, dass sich die Reihe den Beobachtungen möglichst anschliesst (nach der Methode der kleinsten Quadrate). In Folge der unvermeidlichen Beobachtungsfehler werden in der Differenz

$$X - (X' + X'' + X''' + \ldots)$$

bei Berücksichtigung aller mitgenommenen Glieder noch gewisse Fehler übrig bleiben. Zeigen dieselben einen unregelmässigen Gang, so werden sie thatsächlich den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern entsprungen sein; zeigt sich hingegen ein gesetzmässiges Verhalten (einseitiges Ansteigen oder periodisches Ansteigen und Fallen), so wird man daraus schliessen können, dass die angenommene Reihe unvollständig war und durch Hinzufügung eines weiteren Gliedes $X^{(m)} = a^{(m)} \cos (\alpha^{(m)} t + A^{(m)})$ eine bessere Uebereinstimmung erzielt werden kann. Auf diese Weise hat BÜRG in der Längenbewegung des Mondes ein Glied mit einer Periode von nahe 180 Jahren gefunden, dessen Coëfficienten er zu 18''·8 angiebt. BURCKHARD fand dieselbe Ungleichheit und den Coëfficienten derselben 12''·5 (LAPLACE hat für das Argument ($\pi + \Omega - 3\pi_1$) angegeben; die theoretischen Untersuchungen zeigten aber, dass der Coëfficient dieses Gliedes völlig unmerklich sei) u. s. w.

Bestimmt man nun auf diese Weise den Coëfficienten des Gliedes $N \sin (L - L_1)$ aus Beobachtungen, so erhält man 126'' (die älteren Bestimmungen gaben 122''; nach HANSEN ist jedoch der Coëfficient grösser). Hieraus kann man dann, da $F$ aus der Theorie bekannt ist

$$\frac{a}{a_1} = \frac{N}{F}$$

finden. Nimmt man die Mondparallaxe als bekannt an, so ergiebt sich hieraus dann die Sonnenparallaxe.

Da der in dieser Weise entstehende Fehler in $\pi_\odot$ nur etwa den 140. Theil des Fehlers von $N$ beträgt, so wird ein Fehler von 1'' in der Bestimmung von $N$ nur etwa 0''·007 von $\pi_\odot$ erzeugen, vorausgesetzt, dass $F$ hinreichend genau bestimmt ist. HANSEN findet $\frac{a}{a_1} = \frac{1}{384}$, $\pi_\odot = 8''·916$.

Bei der Untersuchung der Bewegung des Erdmondes sind die Störungen durch die Planeten keineswegs zu vernachlässigen. Diese Wirkung äussert sich dabei in doppelter Weise. Einmal direkt durch die verschiedene Attraction auf die Erde und den sie begleitenden Mond. Nachdem zu wiederholten Malen der Ausdruck für die Störungsfunction angesetzt wurde, erscheint es überflüssig, nochmals hierauf zurückzukommen; ist die Störungsfunction entwickelt, so wird jedes Glied derselben genau so behandelt, wie die Glieder, die von der Attraction der Sonne herrühren. Nebst dieser direkten Einwirkung wird aber noch eine indirekte zu berücksichtigen sein, welche an Einfluss der ersteren nicht nachsteht, nämlich die störende Wirkung der Planeten auf die Bewegung der Erde um die Sonne. Diese verändert, insofern sie den Radiusvector und die wahre Länge der Erde beeinflusst, die Lage des grössten der störenden Körper, der Sonne gegen den Mond; man trägt diesem Umstande dadurch Rechnung,

dass man in die störenden Kräfte die gestörten Coordinaten der Erde bezw. Sonne einführt, oder indem man die aus den planetarischen Störungen der Erdbewegung herrührenden Zusatzglieder in der Störungsfunction sucht.

Endlich ist noch hervorzuheben, dass die Secularveränderung der Ekliptik auf die Lage der Mondbahn nicht ohne Einfluss bleibt. LAPLACE fand, dass die Ekliptik in ihrer Secularbewegung die Mondbahn nach sich zieht, d. h. dass die mittlere Schiefe der Mondbahn gegen die mittlere Ekliptik constant bleibt, ein Satz, den HANSEN dahin rectificirte, dass die Mondbahn gegen diejenige Ekliptik, welche drei Jahre vorher stattfand, eine constante Lage behält.

Eine letzte Gruppe von Störungen entsteht aus der Abweichung der Erde von der Kugelgestalt. Bisher wurden nämlich die Himmelskörper als Massenpunkte angesehen; die Resultate bleiben unverändert, wenn die Körper die Kugelform besitzen, oder der angezogene Körper sich beständig in der Aequatorebene des abgeplatteten Centralkörpers bewegen würde. Es folgt dieses unmittelbar aus dem Ausdrucke des Potentials eines abgeplatteten Rotationssphäroides auf einen äusseren Punkt. Derselbe ist [vergl. No. 87 (16)]:

$$V = \frac{k^2 M}{r} + \Omega; \quad \Omega = \frac{k^2 M \rho^2}{r^3}(\mathfrak{a} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{b})(\tfrac{1}{3} - \sin\delta^2),$$

wo $r$ der Radiusvector des Mondes, $\rho$ der Erdhalbmesser, $\mathfrak{a}$ die Abplattung der Erde, $\mathfrak{b}$ das Verhältniss der Centrifugalkraft zur Schwerkraft am Aequator, $\delta$ die Deklination des Mondes ($90° - \theta$ nach der Bezeichnung von No. 87) ist[1]. Der erste Ausdruck giebt die Wirkung der Erde, diese als Kugel vorausgesetzt; als Störungsfunction ist hier nur $\Omega$ zu berücksichtigen.

Bezeichnet man mit $\lambda$ die wahre Länge des Mondes, mit $\beta$ seine Breite, so ist, wenn $\varepsilon$ die Schiefe der Ekliptik ist:

$$\sin\delta = \sin\lambda \sin\varepsilon \cos\beta + \cos\varepsilon \sin\beta,$$

oder wenn $\tang\beta = s$ gesetzt wird:

$$\sin\delta = \frac{\sin\varepsilon \sin\lambda + s\cos\varepsilon}{\sqrt{1+s^2}}$$

wofür ausreichend genau

$$\sin\delta = \sqrt{1-s^2}\,\sin\varepsilon\sin\lambda + s\cos\varepsilon$$

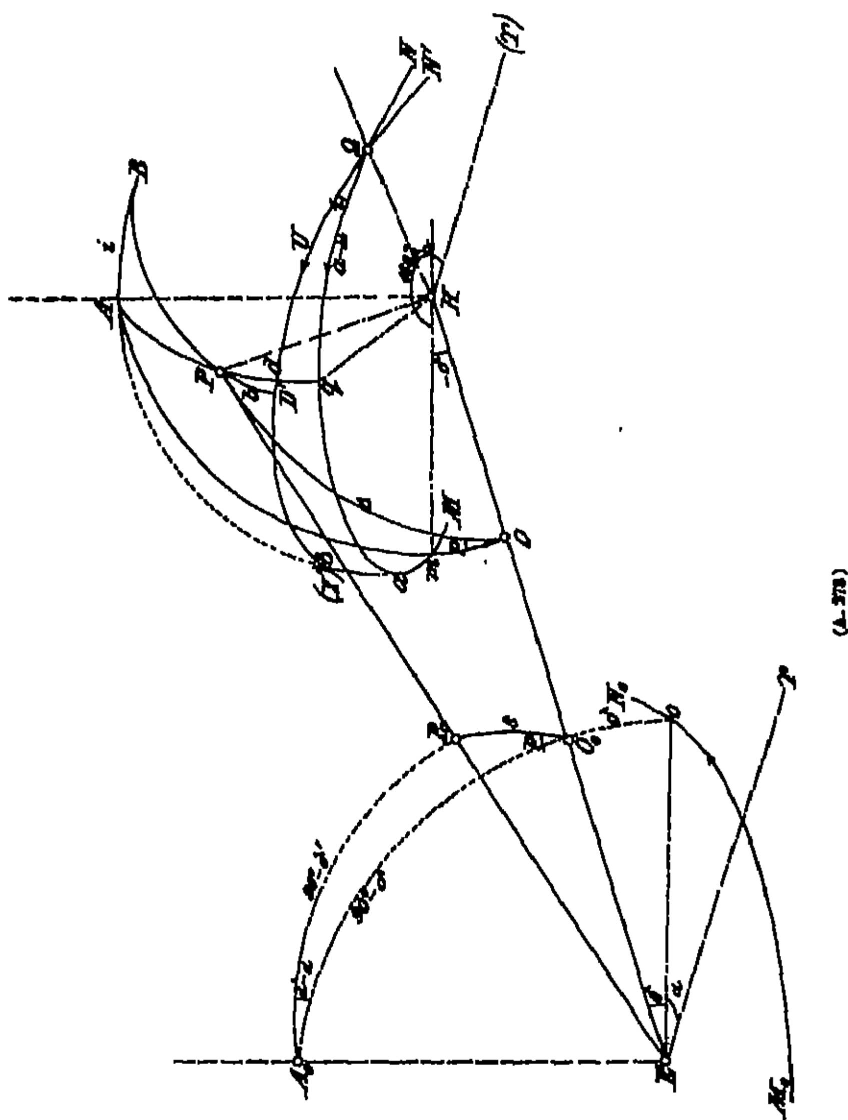
gesetzt werden kann. Wird dieser Ausdruck in $\Omega$ substituirt, und dann für $r$, $\lambda$, $s$ ihre Werthe durch die mittlere Anomalie gesetzt, so erhält man $\Omega$ in der für die Berechnung nöthigen Reihenform und kann nach irgend einer Methode die Integration vornehmen.

**64. Die Coordinaten der Satelliten in Bezug auf die Hauptplaneten.** Bevor einige, die Störungen der Satelliten betreffende Untersuchungen erwähnt werden, ist in Kürze die Art und Weise darzulegen, in welcher die Beobachtungen der Satelliten auf das Centrum der Hauptplaneten bezogen werden.

Sei $E$ Fig. 278 die Erde, $H$ ein Himmelskörper, und $P$ ein Punkt in der Nähe desselben; $EH$ die Visur von der Erde nach dem Centrum des Körpers $H$, $EP$ die Visur nach dem Punkte $P$; geocentrisch werden die Oerter von zwei einander nahe liegenden Objecten festgelegt durch ihre Distanz und ihren Positionswinkel; denkt man sich um den Erdmittelpunkt eine Kugel gelegt, und sei $M_0 N_0$ der Schnitt derselben mit der Aequatorebene (oder einer anderen

[1] Auf die Glieder, welche von einer eventuellen Verschiedenheit der beiden Erdhälften herrühren, kann hier nicht eingegangen werden; es darf übrigens nicht unerwähnt bleiben, dass aus der Abweichung des Mondes von der Kugelgestalt, welche durch die Erscheinungen der Libration ausser Zweifel gesetzt ist, Zusatzglieder derselben Art entstehen.

Fundamentalebene, z. B. der Ekliptik) also der grösste Kreis an der Himmelskugel, welcher den Aequator repräsentirt, $A_0$ der Pol dieser Fundamentalebene, endlich $O_0$, $P_0$ die Punkte, in denen die beiden Visuren $EH$, $EP$ die Himmelskugel treffen. $A_0 O_0$ ist dann der Deklinationskreis von $O_0$ welcher den Aequator in $o$ trifft, $A_0 P_0$ der Deklinatinskreis von $P_0$, so dass $O_0 P_0 = \sphericalangle HEP = s$



die Distanz der beiden Punkte, $A_0 O_0 P_0$ der Positionswinkel des Punktes $P_0$ bezogen auf den Punkt $O_0$ ist. Dieser wird von dem nördlichen Theile des Deklinationskreises nach links (also für im Süden gelegene Punkte über Ost) gezählt; sind $\alpha$, $\delta$ Rectascension und Deklination (oder Länge und Breite) des Punktes $H$, also wenn $E\Upsilon$ die Richtung nach dem Frühlingspunkte ist: $\Upsilon Eo = \alpha$; $oEO_0 = \delta$; $\alpha'$, $\delta'$ die Coordinaten des Punktes $P$, so hat man aus dem Dreieck $AO_0P_0$:

$$\begin{aligned} \cos s &= \sin \delta \sin \delta' + \cos \delta \cos \delta' \cos (\alpha' - \alpha) \\ \sin s \sin p &= \cos \delta' \sin (\alpha' - \alpha) \\ \sin s \cos p &= \cos \delta \sin \delta' - \sin \delta \cos \delta' \cos (\alpha' - \alpha). \end{aligned} \tag{1}$$

Um Punkte und Ebenen in Bezug auf den Mittelpunkt $H$ eines Himmelskörpers, also siderocentrisch (heliocentrisch, selenocentrisch, jovicentrisch, kronocentrisch, areocentrisch u. s. w.) festzulegen, denkt man sich durch $H$ eine zur Grundebene $M_0 N_0$ parallele Ebene $MN$ gelegt, welche eine um $H$ beschriebene Kugel in dem grössten Kreise $MN$ schneidet. Die durch $H$ zu $E\gamma$ parallele Gerade $H(\gamma)$ ist dann die siderocentrische Richtung nach dem Frühlingspunkte, $HA$ die Richtung nach dem Pole der Fundamentalebene, $Aq$ der siderocentrische Deklinationskreis (oder Breitenkreis) des Punktes $P$, $(\gamma) Hq = a$ und $qHP = d$ die siderocentrische Rectascension und Deklination (oder Länge und Breite).

Eine durch $H$ gelegte Ebene (Bahnebene eines Satelliten, Mond- oder Sonnenäquator u. s. w.) schneide die Himmelskugel in dem grössten Kreise $(X')N'$, welcher die Fundamentalebene in ☊ treffe, so ist ☊ der aufsteigende Knoten[1]) dieser Ebene, $(\gamma) H ☊ = ☊$ die Länge des aufsteigenden Knotens, (demnach $☊ Hq = a - ☊$), $(X')☊ q = i$ die Neigung der Ebene. Ist $B$ der Pol der Ebene $(X')N'$, so wird auch $AB = i$ sein und der grösste Kreis $BAba$ trifft die beiden Ebenen $(X')N'$ und $MN$ in zwei Punkten $b$, $a$, welche von ☊ um 90° abstehen, so dass

$$☊ b = ☊ a = 90^\circ$$

ist. Ist z. B. $(X')N'$ der Sonnenäquator, so ist ☊ die Länge des aufsteigenden Knotens des Sonnenäquators auf der Fundamentalebene, und ist $P$ ein Punkt auf der Sonnenoberfläche, so ist $PD' = b$ die heliographische Breite, $D☊ = U$ die heliographische Länge des Punktes, gezählt vom aufsteigenden Knoten des Sonnenäquators auf der Fundamentalebene. Ist $(X')N'$ der Mondäquator, so sind $U$, $b$ selenographische Länge und Breite, erstere ebenfalls vom Knoten des Mondäquators auf dem Erdäquator gezählt; ist $(X')N'$ die Bahnebene eines Satelliten, so ist, wenn $D'$ der Ort des Satelliten in seiner Bahn ist, $U$ das Argument der Breite, bezogen auf die gewählte Fundamentalebene. Da man in letzterem Falle nur $b = 0$ zu setzen hat, so soll sofort der allgemeine Fall behandelt werden, aus den gegebenen Werthen von $U$, $b$, die geocentrische Distanz und den Positionswinkel $s$, $p$ zu bestimmen.

In dem Dreiecke $ABP$ sind die Seiten

$$AB = i; \qquad AP = 90^\circ - d; \qquad BP = 90^\circ - b$$

und die Winkel

$$ABP = arc\, bD' = 90^\circ - U;$$

$$BAP = 180^\circ - aAq = 180^\circ - aq = 180^\circ - [90^\circ - (a - ☊)] = 90^\circ + (a - ☊).$$

Man hat daher

$$\begin{aligned} \sin d &= \sin b \cos i + \cos b \sin i \sin U \\ \cos d \cos (a - ☊) &= \cos b \cos U \\ \cos d \sin (a - ☊) &= - \sin b \sin i + \cos b \cos i \sin U. \end{aligned} \tag{2}$$

Bezieht man nun alle Punkte auf ein rechtwinkliges Axensystem, dessen $X$-Axe $E\gamma$, dessen $Y$-Axe senkrecht dazu in der Fundamentalebene in der Richtung der Bewegung liegt, und dessen $Z$-Axe $EA_0$ ist, und ist $EH = \rho$, $EP = \rho_1'$ $HP = r$, so werden

---

1) Die Bewegungsrichtung ist in der Figur durch Pfeile ausgedrückt.

die rechtwinkligen Coordinaten von $H$: $\rho \cos\delta \cos\alpha$; $\rho \cos\delta \sin\alpha$; $\rho \sin\delta$

" " " " $P$: $\rho' \cos\delta' \cos\alpha'$; $\rho' \cos\delta' \sin\alpha'$; $\rho' \sin\delta'$

Die rechtwinkligen Coordinaten von $P$, bezogen auf das durch $H$ parallel gelegte Axensystem, sind:

$$r \cos d \cos a; \quad r \cos d \sin a; \quad r \sin d;$$

demnach wird:

$$\begin{aligned} \rho' \cos\delta' \cos\alpha' &= \rho \cos\delta \cos\alpha + r \cos d \cos a \\ \rho' \cos\delta' \sin\alpha' &= \rho \cos\delta \sin\alpha + r \cos d \sin a \\ \rho' \sin\delta' &= \rho \sin\delta + r \sin d. \end{aligned} \tag{3}$$

Multiplicirt man hier die erste Gleichung mit $\cos\alpha$, die zweite mit $\sin\alpha$ und addirt, dann die erste mit $-\sin\alpha$, die zweite mit $\cos\alpha$ und addirt wieder, so erhält man:

$$\begin{aligned} \rho' \cos\delta' \cos(\alpha' - \alpha) &= \rho \cos\delta + r \cos d \cos(a - \alpha) \\ \rho' \cos\delta' \sin(\alpha' - \alpha) &= r \cos d \sin(a - \alpha). \end{aligned} \tag{3a}$$

Multiplicirt man jetzt die Gleichungen (1) mit $\rho'$ und substituirt die Ausdrücke (3) und (3a), so erhält man:

$$\begin{aligned} \rho' \cos s &= \rho + r \sin d \sin\delta + r \cos d \cos\delta \cos(a - \alpha) \\ \rho' \sin s \sin p &= r \cos d \sin(a - \alpha) \\ \rho' \sin s \cos p &= r \sin d \cos\delta - r \cos d \sin\delta \cos(a - \alpha). \end{aligned} \tag{4}$$

Für den speciellen Fall, dass man es mit der Bewegung eines Satelliten zu thun hat, ist $b = 0$; dann wird:

$$\begin{aligned} \sin d &= \sin i \sin U \\ \cos d \cos(a - \Omega) &= \cos U \\ \cos d \sin(a - \Omega) &= \cos i \sin U \end{aligned}$$

und daraus durch Multiplikation mit $\cos(\alpha - \Omega)$ und $\sin(\alpha - \Omega)$:

$$\begin{aligned} \cos d \cos(a - \alpha) &= + \cos U \cos(\alpha - \Omega) + \sin U \sin(\alpha - \Omega) \cos i \\ \cos d \sin(a - \alpha) &= - \cos U \sin(\alpha - \Omega) + \sin U \cos(\alpha - \Omega) \cos i, \end{aligned}$$

demnach

$$\begin{aligned} \rho' \cos s &= \rho + r \sin\delta \sin i \sin U + \\ &\quad + r \cos\delta [\cos U \cos(\alpha - \Omega) + \sin U \sin(\alpha - \Omega) \cos i] \\ \rho' \sin s \sin p &= - r [\cos U \sin(\alpha - \Omega) - \sin U \cos(\alpha - \Omega) \cos i] \\ \rho' \sin s \cos p &= + r \cos\delta \sin i \sin U - \\ &\quad - r \sin\delta [\cos U \cos(\alpha - \Omega) + \sin U \sin(\alpha - \Omega) \cos i], \end{aligned} \tag{5}$$

womit die Aufgabe gelöst ist, $s$ und $p$ durch die Elemente $\Omega$, $i$ und die von den übrigen Elementen abhängige Grössen $r$, $U$ nebst den aus den Ephemeriden bekannten, oder aus den Elementen der Hauptplaneten leicht zu berechnenden geocentrischen Coordinaten $\alpha$, $\delta$ auszudrücken. Man hat

$$U = v + \omega = v + \pi - \Omega,$$

wobei $v$ die wahre Anomalie, und $\omega$ der Abstand des Pericentrums vom Knoten, $\pi$ die Länge des Pericentrums ist.

Sind die Elemente noch verbesserungsbedürftig, so erhält man durch Differentiation von (5) drei Gleichungen von der Form:

$$f\Delta\rho' + g\,\Delta s + h\,\Delta p = A\,\Delta\Omega + B\,\Delta i + C\Delta\pi + D\,\Delta a + E\,\Delta e + F\Delta T.$$

Aus diesen Gleichungen kann man $\Delta\rho'$, $\Delta s$, $\Delta p$ bestimmen, von denen man da man $\Delta\rho'$ weder kennt, noch braucht, nur die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta s &= A'\Delta\Omega + B'\Delta i + C'\Delta\pi + D'\Delta a + E'\Delta e + F'\Delta T \\ \Delta p &= A''\Delta\Omega + B''\Delta i + C''\Delta\pi + D''\Delta a + E''\Delta e + F''\Delta T \end{aligned}$$

beibehält; jede beobachtete Distanz und jeder beobachtete Positionswinkel giebt einen Werth von $\Delta s$ und $\Delta p$, daher eine Gleichung zwischen den sechs Elementencorrektionen $\Delta\Omega$, $\Delta i$, $\Delta\pi$, $\Delta a$, $\Delta e$, $\Delta T$, welche hiernach aus den beobachteten Distanzen und Positionswinkeln zu bestimmen sind. Die Bestimmung der Coefficienten $A'$, $B'$, ... $A''$ ... ist eine einfache Aufgabe der Differentiation und Elimination und kann hier übergangen werden.

**65. Anomale Bewegung des Pericentrums: die Bewegung des siebenten Saturnsatelliten.** Für die Entwickelung der Secularstörungen müssen von der Störungsfunction jene Glieder beibehalten werden, welche von den mittleren Anomalien des störenden und gestörten Körpers unabhängig sind; werden hierbei die absolut constanten Glieder von denjenigen getrennt, welche die Elemente enthalten, deren Secularstörungen eben bestimmt werden sollen, so erhält man für diese simultane Differentialgleichungen, deren Integration zur Kenntniss der gesuchten Störungen führt. Hieraus folgt unmittelbar, dass, wenn in der Störungsfunction selbst durch irgend einen Umstand einzelne Glieder, welche sonst zu den periodischen gehören, denselben Charakter erhalten, diese Glieder bei der Bestimmung der Secularstörungen mit zu berücksichtigen sein werden. Ein solcher Umstand tritt aber ein, wenn in der Entwickelung der Störungsfunction einmal in einem Gliede $\alpha M + \beta M' + \gamma\Omega + \delta\Omega' + \varepsilon\omega + \zeta\omega'$ die mittleren Bewegungen derart sind, dass $\alpha M + \beta M'$ oder $\alpha M + \beta M'$ + einem oder mehreren anderen Summanden nahe Null, also das Argument nahe constant wird. Sobald diese Glieder von höherer Ordnung der Excentricität werden, wie dieses bei der Bewegung der Hauptplaneten der Fall ist, werden dieselben allerdings für die Berechnung der Secularstörungen gegenüber den Hauptgliedern der Entwickelung, in 40 unmerklich und nur durch das Auftreten kleiner Integrationsdivisoren in den bereits betrachteten Gliedern langer Periode zu berücksichtigen. Anders aber ist es, wenn die Glieder von der ersten Ordnung der Excentricität, also prädominirend werden. Ein auffallendes Beispiel dieser Art bietet sich unter den Satelliten des Saturn. Die acht Saturnsatelliten bilden drei durch weite Zwischenräume getrennte Ringe; zum innern gehören fünf Satelliten, deren äusserster 9·5 Saturnshalbmesser entfernt ist; nach einem beträchtlichen Zwischenraum folgen dann die beiden: Titan und Hyperion in den Entfernungen von 22 und 26·8 Saturnshalbmessern und abermals durch einen weiten Zwischenraum getrennt der achte: Japetus in 64 Saturnshalbmessern Entfernung. Besonders merklich werden daher die Störungen, die der siebente Satellit durch den sechsten, Titan erfährt, um so mehr, als dieser der hellste und daher wahrscheinlich grösste ist. Die mittleren Bewegungen sind:[1])

$$\text{für Titan:} \quad \mu_1 = 22^\circ{\cdot}57700$$
$$\text{für Hyperion:} \quad \mu = 16^\circ{\cdot}91988,$$

so dass $4\mu - 3\mu_1 = -0^\circ{\cdot}0515$ täglich, oder $-18^\circ{\cdot}8$ jährlich beträgt. Berücksicht man nur die ersten Potenzen der kleinen Parameter, was hier völlig ausreicht, so hat man in der Störungsfunction $\Omega$ den von der Neigung abhängigen Theil gleich Null zu setzen, und aus 37 (20) nur die mit $\varepsilon$, $\varepsilon_1$, multiplicirten Glieder beizubehalten, welche das Argument $4M - 3M_1$ enthalten. Nebst den in 39 (2) eingeführten Gliedern entstehen noch, wenn wieder der Kürze halber

$$Q = M - M_1 + \pi - \pi_1$$

gesetzt wird:

---

[1]) Die folgenden Ableitungen sind den Untersuchungen von NEWCOMB, »On the motion of Hyperion. A new case in Celestial Mechanics« entnommen.

aus dem zweiten Gliede: $a e \Sigma \frac{\partial \overline{B}_{\frac{1}{2}}^{(\varkappa)}}{\partial a} \cos \varkappa Q$:

$$- a e \cos M \frac{\partial B_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{\partial a} \cos 3\, Q = - \tfrac{1}{2} a e \frac{\partial B_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{\partial a} \cos (4 M - 3 M_1 + 3\pi - 3\pi_1)$$

aus dem dritten Gliede: $a_1 e_1 \Sigma \frac{\partial \overline{B}_{\frac{1}{2}}^{(\varkappa)}}{\partial a_1} \cos \varkappa Q$:

$$- a_1 e_1 \cos M_1 \frac{\partial B_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{\partial a_1} \cos 4 Q = - \tfrac{1}{2} a_1 e_1 \frac{\partial B_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{\partial a_1} \cos (4 M - 3 M_1 + 4\pi - 4\pi_1)$$

aus dem vierten Gliede: $-(\nu - \nu_1) \Sigma \varkappa \overline{B}_{\frac{1}{2}}^{(\varkappa)} \sin \varkappa Q$:

$$\begin{cases} - 2 e \sin M \cdot 3 B_{\frac{1}{2}}^{(3)} \sin 3\, Q = + 3 e B_{\frac{1}{2}}^{(3)} \cos (4 M - 3 M_1 + 3\pi - 3\pi_1) \\ + 2 e_1 \sin M_1 \cdot 4 B_{\frac{1}{2}}^{(4)} \sin 4\, Q = - 4 e_1 B_{\frac{1}{2}}^{(4)} \cos (4 M - 3 M_1 + 4\pi - 4\pi_1). \end{cases}$$

Diese Glieder sind zu verdoppeln, da dieselben Werthe für positive und negative $\varkappa$ entstehen. Berücksichtigt man, dass $M + \pi = L$,

$$\begin{aligned} V &= 4 M - 3 M_1 + 3\pi - 3\pi_1 = 4 L - 3 L_1 - \pi \\ V_1 &= 4 M - 3 M_1 + 4\pi - 4\pi_1 = 4 L - 3 L_1 - \pi_1 \end{aligned} \tag{1}$$

ist, so folgt:

$$\Omega = \frac{k^2 m_1}{a} \Big[ C' + C_0 e^2 + 2 C_1 e e_1 \cos(\pi - \pi_1) + 2 e C_2 \cos V + 2 e_1 C_3 \cos V_1 \Big] \tag{2}$$

wobei die Constante $C$ von No. 85 in einen von $e$ unabhängigen und einen mit $e^2$ multiplicirten Theil zerlegt und der Coëfficient $C_1$ ebenfalls durch $C_1 : a$ ersetzt ist. Dabei ist, gemäss 89 (9b) mit Vernachlässigung des von $e_1^2$ abhängigen Gliedes:

$$C' = P_{\frac{1}{2}}^{(0)} + \tfrac{1}{2} e_1^2 b_0; \quad C_0 = \tfrac{1}{2} b_0; \quad C_1 = \tfrac{1}{2} P_{\frac{1}{2}}^{(1)} - \tfrac{1}{2} b_1$$

und nach 86 (9):

$$C_2 = + \tfrac{7}{2} P_{\frac{1}{2}}^{(3)} - \tfrac{1}{2} a \frac{d P_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d a}; \quad C_3 = - 4 P_{\frac{1}{2}}^{(4)} - \tfrac{1}{2} a \frac{d P_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d a}.$$

Es wird daher weil $a = 0{\cdot}825$ ist

$C_0 = + 2{\cdot}266$; $C' = + 1{\cdot}804$; $C_1 = - 2{\cdot}078$; $C_2 = + 1{\cdot}686$; $C_3 = - 1{\cdot}415$.

Da dieser Theil der Störungsfunction von $i$ und $\Omega$ unabhängig ist, so wird $\frac{\partial \Omega}{\partial i}$, $\frac{\partial \Omega}{\partial \Omega}$ verschwinden, demnach

$$\frac{d\Omega}{dt} = 0, \quad \frac{di}{dt} = 0,$$

oder $\Omega = \Omega_0$, $i = i_0$ constant. Für die übrigen Elemente folgt, wenn man im Resultate die Glieder zweiter Ordnung weglässt:

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{dt} &= - \frac{3}{a^2} \frac{\partial \Omega}{\partial L_0} = + 3 \frac{k^2 m_1}{a^3} (8 e C_2 \sin V + 8 e_1 C_3 \sin V_1) \\ \frac{de}{dt} &= - \frac{\cos \varphi}{a^2 \mu \sin \varphi} \frac{\partial \Omega}{\partial \pi} = + \frac{2 k^2 m_1}{a^3 \mu} (C_1 e_1 \sin(\pi - \pi_1) - C_2 \sin V) \\ \frac{d\pi}{dt} &= + \frac{\cos \varphi}{a^2 \mu \sin \varphi} \frac{\partial \Omega}{\partial e} = + \frac{2 k^2 m_1}{a^3 \mu e} (C_0 e + C_1 e_1 \cos(\pi - \pi_1) + C_2 \cos V) \end{aligned}$$

$$\frac{d \Delta L_0}{dt} = - \frac{2}{a\mu} \frac{\partial \Omega}{\partial a} = - \frac{2 k^2 m_1}{a \mu} \left( \frac{\partial \frac{C'}{a}}{\partial a} + 2 e \frac{\partial \frac{C_2}{a}}{\partial a} \cos V + 2 e_1 \frac{\partial \frac{C_3}{a}}{\partial a} \cos V_1 \right)$$

oder da $\frac{k^2}{a^3} = \mu^2$ ist:

$$\frac{d\mu}{dt} = + m_1 \mu^2 (24 e C_2 \sin V + 24 e_1 C_3 \sin V_1)$$
$$\frac{de}{dt} = - m_1 \mu (2 C_2 \sin V)$$
$$\frac{d\pi}{dt} = + m_1 \mu \left(2 C_0 + 2 C_1 \frac{e_1}{e} \cos(\pi - \pi_1) + \frac{2 C_2}{e} \cos V\right)$$
$$\frac{d\Delta L_0}{dt} = - m_1 \mu \left[2\left(a\frac{\partial C'}{\partial a} - C'\right) + 4e\left(a\frac{\partial C_2}{\partial a} - C_2\right)\cos V + 4e_1\left(a\frac{\partial C_3}{\partial a} - C_3\right)\cos V_1\right]$$

und man findet leicht

$$a\frac{\partial C'}{\partial a} = - \alpha \frac{dP_1^{(0)}}{d\alpha};\quad a\frac{\partial C_2}{\partial \alpha} = - \alpha[\tfrac{1}{2} P_1^{(2)} + P_1^{(4)} - 3\alpha P_1^{(3)}];$$
$$a\frac{\partial C_3}{\partial a} = + \alpha [3 P_1^{(3)} + P_1^{(2)} - \tfrac{1}{2}\alpha P_1^{(4)}]$$

und numerisch

$$a\frac{\partial C'}{\partial a} = + 1{\cdot}194;\quad a\frac{\partial C_2}{\partial a} = - 8{\cdot}918;\quad a\frac{\partial C_3}{\partial \alpha} = + 9{\cdot}099.$$

Mit den Excentricitäten $e = 0{\cdot}1000$ (für Hyperion); $e_1 = 0{\cdot}0287$ (für Titan) wird

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{dt} &= m_1 \mu^2 (+ 8{\cdot}927 \sin V - 0{\cdot}975 \sin V_1) \\ \frac{de}{dt} &= m_1 \mu (- 8{\cdot}278 \sin V) \\ \frac{d\pi}{dt} &= m_1 \mu (4{\cdot}581 - 1{\cdot}198 \cos(\pi - \pi_1) + 82{\cdot}728 \cos V) \\ \frac{d\Delta L_0}{dt} &= m_1 \mu (+ 0{\cdot}219 + 4{\cdot}220 \cos V - 1{\cdot}207 \cos V_1) \end{aligned} \qquad (3)$$

Die jährlichen Bewegungen der Argumente $V$, $V_1$, sind nun

$$V' = 4\mu - 3\mu_1 - \pi' = - (18^\circ{\cdot}8 + \pi')$$
$$V_1' = 4\mu - 3\mu_1 - \pi_1' = - (18^\circ{\cdot}8 + \pi_1').$$

In Folge der Kleinheit von $4\mu - 3\mu_1$ ist dessen Werth mit den Bewegungen der Perisaturnien vergleichbar. Da $\pi_1' = + 0^\circ{\cdot}5$ jährlich ist, so wird in der Bewegung des Perisaturniums des Titan ein langperiodisches Glied der Periode von $(4\mu - 3\mu_1)$ auftreten. Bei der Bewegung des Hyperion ergiebt sich nun aber die anomale Erscheinung einer retrograden Bewegung des Perisaturniums in dem Betrage von $\pi' = - 20^\circ{\cdot}3$ jährlich, so dass

$$4\mu - 3\mu_1 - \pi' = + 1^\circ{\cdot}5$$

jährlich wird, wodurch ein Glied mit der Periode von 240 Jahren entstehen würde, so dass wegen des grossen Coëfficienten von $\cos V$ sich umgekehrt wieder die retrograde Bewegung als zeitweilig ergeben würde. Wenn jedoch $\pi'$ nur um wenige zehntel Grade geändert wird, so wird die Periode ebenso wie der Coefficient noch bedeutend vergrössert, und wenn $\pi' = - 18^\circ{\cdot}8$ wäre, so wird $4M - 3M' - \pi$ constant, und es wird von dem Werthe, den dieser Ausdruck zu irgend einer Zeit (also stets) annimmt, abhängen, wie gross der negative Coëfficient in $\frac{d\pi}{dt}$ ist. Andererseits ist zu untersuchen, ob die Constanz von $V$ dem wirklichen Zustande entspricht.

Durch zweimalige Differentiation erhält man:

$$\frac{dV}{dt} = 4\frac{dL}{dt} - 3\frac{dL'}{dt} - \frac{d\pi}{dt} = 4\mu - 3\mu_1 - 4\frac{d\Delta L}{dt} - \frac{d\pi}{dt} - 3\frac{d\Delta L'}{dt} \qquad (4)$$
$$\frac{d^2V}{dt^2} = 4\frac{d\mu}{dt} - 3\frac{d\mu'}{dt} - 4\frac{d^2\Delta L}{dt^2} - \frac{d^2\pi}{dt^2} - 3\frac{d^2\Delta L'}{dt^2}. \qquad (5)$$

Hier wären nun in aller Strenge die Störungen des Titan auch zu berücksichtigen; da aber Titan, wie schon erwähnt, der grösste der Trabanten ist, so werden die von Hyperion in seiner Bewegung bewirkten Störungen viel schwächer; vernachlässigt man dieselben und berücksichtigt nur die von den Argumenten $V$ und $V_1$ abhängigen Glieder, so wird:

$$4\frac{d\mu}{dt} = m_1\mu^2(+15{\cdot}71\sin V - 8{\cdot}90\sin V_1)$$

$$-4\frac{d^2\Delta L_0}{dt^2} = m_1\mu\left(+16{\cdot}88\sin V\frac{dV}{dt} - 4{\cdot}88\sin V_1\frac{dV_1}{dt}\right)$$

$$-\frac{d^2\pi}{dt^2} = m_1\mu\left(+32{\cdot}73\sin V\frac{dV}{dt}\right),$$

sodass

$$\frac{d^2V}{dt^2} = m_1\mu^2\left(15{\cdot}71\sin V - 8{\cdot}90\sin V_1 - 4{\cdot}88\sin V_1\frac{dV_1}{\mu dt} + 49{\cdot}61\sin V\frac{dV}{\mu dt}\right) \quad (6)$$

ist. Jedenfalls ist $\frac{dV}{dt}$ wegen der zwischen $\mu$, $\mu_1$ und $\pi'$ stattfindenden Beziehung eine sehr kleine Grösse, und kann weggelassen werden. Leitet man in derselben Weise eine Differentialgleichung für $V_1$ ab, so folgt, wieder mit Vernachlässigung von $dV$:

$$\frac{d^2V_1}{dt^2} = m\mu_1^2\left(15{\cdot}71\sin V - 8{\cdot}90\sin V_1 + 6{\cdot}0\sin V_1\frac{dV_1}{\mu dt}\right). \quad (6\text{a})$$

Nun ist zwar $dV_1$ nicht Null, da $4\mu - 3\mu_1 - \pi_1'$ von Null verschieden ist; doch wird sein Werth so klein, dass die damit multiplicirten Glieder vernachlässigt werden können; durch Vergleichung der Gleichungen (6) und (6a) erhält Newcomb dann die Beziehung[1])

$$15{\cdot}71\sin V - 8{\cdot}90\sin V_1 = 0; \qquad \sin V_1 = 0{\cdot}249\sin V$$

$$V = 180° - 14°{\cdot}2\sin V_1 \quad (7)$$

$$\cos V = -0{\cdot}985 - 0{\cdot}015\cos 2V_1,$$

oder wenn $V_1 - V = \pi - \pi_1$ berücksichtigt wird:

$$\cos V = -0{\cdot}985 - 0{\cdot}015\cos 2[(\pi - \pi_1) + V].$$

Hier kann man wegen der Kleinheit des Coëfficienten den Näherungswerth $V = 180°$ setzen, und erhält mit diesen Werthen

$$\frac{d\pi}{dt} = m_1\mu[-27{\cdot}71 - 1{\cdot}19\cos(\pi - \pi_1) - 0{\cdot}49\cos 2(\pi - \pi_1)].$$

Der seculare Theil der Bewegung des Perisaturniums wäre daher

$$\pi = \pi_0 - 27{\cdot}71\,m_1\mu. \quad (8)$$

Da nach (7) $V$ nur einer Libration unterliegt, so müssten $4\mu - 3\mu_1$ und $\pi'$ einander gleich sein; nimmt man für beide Werthe das Mittel 19°·3, so wird für die Masse des Titan hieraus folgen

---

[1]) Die Coëfficienten sind bei Newcomb etwas anders. Es ist jedoch zu bemerken, dass die Libration $-14°{\cdot}2\sin V$ nicht durch Integration entstanden ist und daher weder mit der physischen noch mit der sogenannten willkürlichen Libration vergleichbar ist; die letztere wäre $h\sin(\sqrt{15{\cdot}64\,m_1}\,\mu t + H)$ und hätte daher die Periode $\frac{360°}{\sqrt{15{\cdot}71\,m_1}\,\mu}$ also mit der Masse $m_1 = \frac{1}{[illegible]}$ gleich 1·4 Jahre, während die Periode des von Newcomb berücksichtigten Gliedes 18·6 Jahre ist. Für die seculare Bewegung des Perisaturniums ist dies übrigens belanglos, da dieselbe von der Libration unabhängig ist. Vergl. übrigens auch die ähnlichen Entwickelungen für die beiden Systeme: Mimas—Tethis und Enceladus—Dione von H. Struve in den Astron. Nachr. No. 2983/4.

$$m_1 \cdot 27{\cdot}71\,\mu = 19^{\circ}{\cdot}8,$$

wenn $\mu$ die mittlere Bewegung des Hyperion in einem Jahre ist, und es wird

$$m_1 = \frac{19{\cdot}8}{27{\cdot}71 \times 365{\cdot}25 \cdot \times 16{\cdot}91988} = \frac{1}{8800}.$$

**66.** Die Bewegung der Jupitersatelliten. Die zwischen den mittleren Bewegungen der drei mittleren[1]) Jupitersatelliten bestehende Beziehung erfordert es, dass für diese auch die Störungen von den zweiten Potenzen der Massen berücksichtigt werden, indem erst bei diesen Argumente mit den mittleren Bewegungen dreier Körper auftreten (vergl. No. 46).

Störungen mit dem Argumente

$$\varphi = M_2 - 3M_3 - 2M_4$$

werden erscheinen, wenn man in die Störungsfunction die Störungen erster Ordnung substituirt, wobei man je nach dem Grade der zu erreichenden Genauigkeit die Auswahl unter den zu berücksichtigenden Gliedern treffen wird. In erster Linie werden natürlich jene Störungsglieder erster Ordnung zu berücksichtigen sein, welche in Folge kleiner Integrationsdivisoren selbst bedeutend geworden sind; diese sind jene, welche die Nenner $\mu_2 - 2\mu_3$ oder $\mu_3 - 2\mu_4$ erlangen. Berücksichtigt man von der Störungsfunction 37 (20) nur die von den Excentricitäten unabhängigen Glieder, so wird

$$\Omega' = \Sigma k^2 m_1 [B_0^{(0)} + \Sigma B_0^{(\varkappa)} \cos\varkappa(M - M_1 + \chi)]$$

$$2\int d'\Omega' + r\frac{\partial\Omega'}{\partial r} = C +$$

$$+ \Sigma k^2 m_1 \left[a\frac{\partial B_0^{(0)}}{\partial a} + \Sigma\left(a\frac{\partial B_0^{(\varkappa)}}{\partial a} + \frac{2\mu}{(\mu - \mu' + \chi')} B_0^{(\varkappa)}\right)\cos\varkappa(M - M_1 + \chi)\right] \quad (1)$$

und es sind nun zunächst die Hauptglieder in den Störungen erster Ordnung zu suchen, welche durch kleine Integrationsdivisoren beträchtlich werden. Integrirt man zunächst die Gleichung 47 (5) als canonische Differentialgleichung, so wird in dem Integral nach 49 (4) aus jedem Gliede der Entwickelung (1) ein Glied mit demselben Argumente entstehen. Der Coëfficient von $(r\delta r)$ muss dabei constant angenommen werden; er wird $\frac{k^2}{a^3}$, oder wenn aus der Entwickelung der rechten Seite eine Summe von Gliedern $2\mu\nu(r\delta r)$ entstehen sollte[2]), die Form annehmen:

$$\left(\frac{k^2}{a^3} + 2\mu\nu\right)(r\delta r) = \mu^2\left(1 + \frac{2\nu}{\mu}\right)(r\delta r) = \mathrm{M}^2(r\delta r).$$

Es wird daher, wenn man von den Integrationsconstanten absieht, welche die elliptische Bewegung darstellen, die aus (1) entstehenden Zusatzglieder für einen der störenden Körper:

$$-k^2 m' \frac{a\frac{\partial B_0^{(\varkappa)}}{\partial a} + \frac{2\mu}{\mu - \mu' + \chi} B_0^{(\varkappa)}}{(\varkappa\mu - \varkappa\mu')^2 - \mathrm{M}^2}\cos(\varkappa M - \varkappa M' + \varkappa\chi). \quad (2)$$

---

[1]) Der fünfte, zuletzt entdeckte ist der innerste, und müsste in der Reihenfolge derselben als der erste bezeichnet werden. Es mögen daher die drei übrigen als der zweite, dritte und vierte und der äusserste als der fünfte bezeichnet werden. Der erste und fünfte Satellit sind, nach ihren Umlaufszeiten von dem Systeme der drei mittleren auszuschliessen.

[2]) Der Coëfficient dieser Glieder $C$ wird sehr klein sein, und ist in die Form $2\mu\nu$ gesetzt, sodass also $\nu$ der Quotient dieses Coëfficienten $C$ durch $2\mu$ ist.

Der Nenner $(\varkappa\mu - \varkappa\mu' - M)(\varkappa\mu - \varkappa\mu' + M)$ wird sehr klein, wenn einer der Faktoren sehr klein wird. Es ist aber

$$M = \mu\left(1 + \frac{2\nu}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} = \mu\left(1 + \frac{\nu}{\mu}\right) = \mu + \nu,$$

demnach der Nenner

$$-[\nu - (\varkappa - 1)\mu + \varkappa\mu'][\nu + (\varkappa + 1)\mu - \varkappa\mu'],$$

woraus man die kleinen Divisoren für die verschiedenen Satelliten erhalten wird. Es ist nun auch ersichtlich, warum der Ausdruck $\nu$ berücksichtigt wird[1]), durch seine Vernachlässigung kann nämlich der kleine Integrationsdivisor wesentlich alterirt werden. Bei denjenigen Divisoren, welche selbst nicht klein werden, kann derselbe natürlich weggelassen werden. Man erhält kleine Divisoren:

a) für den zweiten Satelliten bei der Störung durch den dritten $m_3$, wenn $\varkappa = 2$ ist; der erste Faktor wird $\mu_2 - 2\mu_3 - \nu_2$, der zweite $3\mu_2 - 2\mu_3 + \nu_2$ oder wenn $\nu_2$ und $\mu_2 - 2\mu_3$ gleich Null gesetzt werden, einfach $2\mu_2$. Die Störung wird daher, wenn man die Bewegung der Perijovien vernachlässigt:

$$\frac{(r\delta r)_2}{a_2^2} = + \frac{\mu_2 m_3 A_2}{2(\mu_2 - 2\mu_3 - \nu_2)} \cos(2M_2 - 2M_3 + 2\pi_2 - 2\pi_3)$$
$$A_2 = - a_2^2 \frac{\partial B_{23}^{(2)}}{\partial a_2} - \frac{2\mu_2}{\mu_2 - \mu_3} a_2 B_{23}^{(2)}, \qquad (3a)$$

wobei der Index 0 bei $B$ weggelassen wird, da nur $B_0^{(\varkappa)}$ vorkommt, und statt dessen der Doppelindex 23 gesetzt ist, welcher auf die Störung des zweiten

[1]) Um den Werth von $\nu$ zu erhalten, hat man in $\Omega'$ jene Glieder, welche $(r\delta r)$ enthalten, mit dem zweiten Gliede der linken Seite der Differentialgleichung 47 ($h$) zu vereinigen. Die Berücksichtigung dieser Glieder ist nicht schwer. Es war $r = a(1 + \sigma)$ gesetzt worden (84, 6). Versteht man nun unter $a\sigma$ nicht die von der Excentricität abhängigen Glieder, sondern die Störung, so wird in 87 (90) $\delta r$ an Stelle von $a\sigma$ zu setzen sein; der hieraus entstehende Ausdruck in $2\int d'\Omega' + r\frac{\partial\Omega'}{\partial r}$ wird dann

$$-\delta r\left(\frac{3}{2}\frac{\partial B_1^{(0)}}{\partial a} + \frac{1}{2}a\frac{\partial^2 B_1^{(0)}}{\partial a^2}\right)$$

und weiter:

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{a^3\left(1 + \frac{\delta r}{a}\right)^3} = \frac{1}{a^3}\left(1 - 3\frac{\delta r}{a}\right).$$

Bezeichnet man den constanten Theil von $\delta r$ mit $\Delta$, so wird damit das zweite Glied der Differentialgleichung:

$$\mu^2\frac{r\delta r}{a^3}\left[1 - \frac{3\Delta}{a} + \Sigma\frac{m'}{2}a^2\left(3\frac{\partial B_1^{(0)}}{\partial a} + a\frac{\partial^2 B_1^{(0)}}{\partial a^2}\right)\right].$$

Hierzu sind noch zwei Glieder zu setzen: das eine, von der Einwirkung der Sonne herrührend, entsteht aus der Störungsfunction $\Omega$ in 56 (3), wenn man hier ebenfalls $r + \delta r$ an Stelle von $r$ setzt; der zweite von der Elliptieität des Jupiter abhängige Theil wird aus dem Ausdrucke für $\Omega$ in 68 erhalten. $\Delta$ ist dabei vorerst unbekannt, und wird nach der Bestimmung von $r\delta r$ (Durchführung der ersten Näherung) als der constante Theil der Störung angesetzt. Es wird dann, alles zusammengefasst:

$$1 + \frac{2\nu}{\mu} = 1 - \frac{3\Delta}{a} - \frac{\mathfrak{a} - \frac{1}{2}\mathfrak{b}}{a^2} - 2\frac{\odot^2}{\mu^2} + \Sigma m'a^2\left(\frac{3}{2}\frac{\partial B_1^{(0)}}{\partial a} + \frac{1}{2}a\frac{\partial^2 B_1^{(0)}}{\partial a^2}\right)$$

und daraus

$$\nu = \mu\left[-\frac{3}{2}\frac{\Delta}{a} - \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{a} - \frac{1}{2}\mathfrak{b}}{a^2} - \frac{\odot^2}{\mu^2} + \frac{1}{2}\Sigma m'a^2\left(\frac{3}{2}\frac{\partial B_1^{(0)}}{\partial a} + \frac{1}{2}a\frac{\partial^2 B_1^{(0)}}{\partial a^2}\right)\right],$$

wobei sich das Summenzeichen auf die Wirkung aller andern Satelliten auf den betrachteten bezieht. Vergl. LAPLACE, Méc. céleste, IV. Bd., pag. 15.

Satelliten durch den dritten hindeutet. Die hieraus resultirende Störung in Länge erhält man aus 47 (8); in den beiden letzten Gliedern, welche nur Quadraturen enthalten, können die kleinen Integrationsdivisoren nicht auftreten; mit Vernachlässigung der Excentricität wird weiter $\delta r = 0$, und

$$\frac{1}{k_0\sqrt{a_2}\sqrt{1-e_2^2}} = \frac{a_2^{\frac{1}{2}}}{k_0 a_2^2} = \frac{1}{\mu_2 a_2^2},$$

demnach

$$(\delta L)_2 = \frac{2}{\mu_2 a_2^2}\frac{d(r\delta r)_2}{dt} = -\frac{2\mu_2 m_1(2\mu_2-2\mu_1)A_2}{2\mu_2(\mu_2-2\mu_1-\nu_2)}\sin(2M_2-2M_1+2\pi_2-2\pi_1).$$

Setzt man hier noch in den nicht kleinen Coëfficienten $\mu_2 = 2\mu_1$, so wird

$$(\delta L)_2 = -\frac{\mu_2 m_1 A_2}{\mu_2-2\mu_1-\nu_2}\sin(2M_2-2M_1+2\pi_2-2\pi_1). \qquad (3\,b)$$

Bei den Störungen des zweiten Satelliten durch den vierten treten keine kleinen Divisoren auf.

b) Beim dritten Satelliten wird für die Störung durch die Einwirkung des zweiten der Nenner klein für $\varkappa = 1$; der Nenner wird:

$$(\mu_3+\nu_3)(\mu_2-2\mu_3-\nu_3),$$

folglich wenn $2\mu_3$ an Stelle von $\mu_3+\nu_3$ gesetzt wird

$$\frac{(r\delta r)_3{}'}{a_3^2} = +\frac{\mu_3 m_2 A_3}{2(\mu_2-2\mu_3-\nu_3)}\cos(M_2-M_3+\pi_2-\pi_3) \qquad (4\,a)$$

$$A_3 = -a_3^2\frac{\partial B_{23}^{(1)}}{\partial a_3}+\frac{2\mu_3}{\mu_2-\mu_3}a_3 B_{23}^{(1)}$$

$$(\delta L)_3{}' = -\frac{\mu_3 m_2 A_3}{\mu_2-2\mu_3-\nu_3}\sin(M_2-M_3+\pi_2-\pi_3). \qquad (4\,b)$$

Für die Einwirkung des vierten Satelliten tritt ein kleiner Nenner auf für $\varkappa = 2$; er wird $(\mu_3-2\mu_4-\nu_3)(3\mu_3-2\mu_4)$. Demnach die Störungen:

$$\frac{(r\delta r)_3{}''}{a_3^2} = +\frac{\mu_3 m_4 A_3{}'}{2(\mu_3-2\mu_4-\nu_3)}\cos(2M_3-2M_4+2\pi_3-2\pi_4) \qquad (5\,a)$$

$$A_3{}' = -a_3^2\frac{\partial B_{34}^{(2)}}{\partial a_3}-\frac{2\mu_3}{\mu_3-\mu_4}a_3 B_{34}^{(2)}$$

$$(\delta L)_3{}'' = -\frac{\mu_3 m_4 A_3{}'}{\mu_3-2\mu_4-\nu_3}\sin(2M_3-2M_4+2\pi_3-2\pi_4). \qquad (5\,b)$$

In Folge der Beziehung

$$L_1-3L_2+2L_4 = 180^\circ$$

ist nun aber

$$2M_3-2M_4+2\pi_3-2\pi_4 = 180^\circ+(M_2-M_3+\pi_2-\pi_3),$$

und da auch $\mu_3-2\mu_4 = \mu_2-2\mu_3$ ist, so lassen sich die Wirkungen des zweiten und vierten vereinigen, und es folgt:

$$\frac{(r\delta r)_3}{a_3^2} = +\frac{\mu_3(m_2A_3-m_4A_3{}')}{2(\mu_2-2\mu_3-\nu_3)}\cos(M_2-M_3+\pi_2-\pi_3) \qquad (6\,a)$$

$$(\delta L)_3 = -\frac{\mu_3(m_2A_3-m_4A_3{}')}{\mu_2-2\mu_3-\nu_3}\sin(M_2-M_3+\pi_2-\pi_3). \qquad (6\,b)$$

c) Für den vierten Satelliten ist nur die Wirkung des dritten zu berücksichtigen, da der zweite kein Glied mit kleinem Integrationsdivisor liefert. Ein kleiner Divisor entsteht aus der Wirkung des dritten für $\varkappa = 1$; er wird

$$-(\mu_4+\nu_4)(2\mu_4-\mu_3+\nu_4)$$

und die Störung:

$$\frac{(r\partial r)_4}{a_4^2} = + \frac{\mu_4 m_3 A_4}{2(\mu_3 - 2\mu_4 - \nu_4)} \cos(M_3 - M_4 + \pi_3 - \pi_4) \qquad (7a)$$

$$A_4 = - a_4^2 \frac{\partial B_{43}^{(1)}}{\partial a_4} + \frac{2\mu_4}{\mu_3 - \mu_4} a_4 B_{43}^{(1)}$$

$$(\partial L)_4 = - \frac{\mu_4 m_3 A_4}{\mu_3 - 2\mu_4 - \nu_4} \sin(M_3 - M_4 + \pi_3 - \pi_4). \qquad (7b)$$

Bei der Bestimmung der Störungen, welche von der zweiten Potenz der Masse abhängig sind, wird es ausreichen, von allen Störungsgliedern der ersten Potenz, deren Bestimmung im wesentlichen keine Schwierigkeiten hat, die in den Formeln (3), (6), (7) gefundenen zu berücksichtigen. Auch von diesen werden aber einige auszuschliessen sein; zunächst jene, bei denen der kleine Nenner $\mu_2 - 2\mu_3$ oder $\mu_3 - 2\mu_4$ nicht neuerdings auftritt; aber selbst jene Glieder, bei denen dieser Nenner heraustritt, werden klein gegenüber denjenigen, bei denen die zweite Potenz von $(\mu_2 - 3\mu_3 - 2\mu_4)$ erscheinen würde. Es sind also zunächst diese zu untersuchen[1]).

Die zweite Potenz des erwähnten Nenners tritt in dem Doppelintegral

$$-\frac{3}{\mu a^2} \int dt \int d'\Omega$$

in Formel 47 (3) auf, wenn Argumente

$$V = M_2 - 3M_3 + 2M_4 + \pi_2 - 3\pi_3 + 2\pi_4 = L_2 - 3L_3 + 2L_4$$

vorkommen. Substituirt man $r + \partial r$ an Stelle von $r$ in $\Omega$, so tritt $a\sigma + \partial r$ an Stelle von $a\sigma$ und wenn man, was für diese Zwecke ausreicht, die Glieder, die von der Excentricität abhängen, weglässt, um nur die grössten Störungsglieder zu erhalten, so tritt einfach $\partial r$ an Stelle von $a\sigma$, ebenso $\partial r'$ an Stelle von $a_1\sigma'$, $\partial L$ an Stelle von $\nu$, $\partial L'$ an Stelle von $\nu'$. Da dies ebensowohl in $\frac{1}{\rho}$ in 37 (2), als auch in dem zweiten Theile von $\Omega'$ in 37 (4) geschieht, so sind wieder an Stelle von $B_0^{(\nu)}$ die $\overline{B}_0^{(\nu)}$ zu setzen, und es werden die hieraus entstehenden Zusatzglieder aus 37 (20):

$$k^2 m' \left[ \partial r \Sigma \frac{\partial \overline{B}_0^{(\varkappa)}}{\partial a} \cos \varkappa Q_1 + \partial r' \Sigma \frac{\partial \overline{B}_0^{(\varkappa)}}{\partial a'} \cos \varkappa Q_1 - (\partial L - \partial L') \Sigma \varkappa \overline{B}_0^{(\varkappa)} \sin \varkappa Q_1 \right].$$

Die Störungen des zweiten Satelliten brauchen nicht berücksichtigt zu werden; in die Störungsfunction für die gegenseitigen Störungen des zweiten und dritten Satelliten substituirt, entsteht

$$\frac{\cos}{\sin} \varkappa (M_2 - M_3) \frac{\cos}{\sin} 2(M_2 - M_3),$$

---

1) Bei der Entwickelung aller Störungsglieder erhält man dieselben nebst vielen anderen; aber die Theorie der Satelliten wird durch den Umstand in etwas vereinfacht, dass man sich in allen Fällen auf die Berechnung der Hauptglieder beschränken kann, weil die Unregelmässigkeiten der joviocentrischen Bewegungen von der Erde aus betrachtet, so stark verringert werden, dass die kleinen Unregelmässigkeiten sich der Beobachtung überhaupt entziehen. Dadurch entfallen auch für die Jupitersatelliten viele Schwierigkeiten, welche in der Theorie des Erdmondes auftreten; umgekehrt treten bei diesem die Complicationen nicht auf, welche aus der Wechselwirkung mehrerer Satelliten nothwendig entstehen. Evection, Variation, jährliche Gleichung (mit der Periode der Umlaufszeit des Jupiter) und parallactische Gleichung treten bei den Jupitersatelliten wohl auch auf, ihr Einfluss verschwindet aber gegenüber demjenigen der wechselseitigen Störungen.

sodass $M_4$ gar nicht eintritt, und für die gegenseitigen Störungen des zweiten und vierten bezw. dritten und vierten, bleibt überall $2M_2$ bezw. $2M_3$ stehen, sodass ein Argument $V$ nicht entstehen kann. Aus denselben Gründen sind, wie man auf dieselbe Weise findet, die Störungen des vierten Satelliten nicht weiter zu berücksichtigen. Es ist demnach für die Störungsglieder zweiter Ordnung, die von $V$ abhängen

$$(\delta r)_3 = 0, \quad (\delta r)_4 = 0, \quad (\delta L)_3 = 0, \quad (\delta L)_4 = 0$$

zu setzen, und nur die Störungen $(\delta r)_2$, $(\delta L)_2$ zu betrachten. In diesen aber müssen die beiden Theile getrennt behandelt werden[1]), der erste Theil mit dem Argumente $(L_2 - L_3)$ giebt nur durch Combination mit dem Argumente $2(L_3 - L_4)$ das Argument $V$; der zweite mit dem Argumente $(2L_3 - 2L_4)$ nur durch Combination mit dem Argumente $(L_2 - L_3)$; der erste Theil ist daher nur in der Störungsfunction des dritten und vierten, bei ihren gegenseitigen Störungen, der zweite Theil nur in der Störungsfunction des zweiten und dritten zu berücksichtigen.

a) Für den zweiten Satelliten wird das zu berücksichtigende Glied der Störungsfunction:

$$k^2 m_3 \left[ (\delta r_2)'' \frac{\partial B_{23}^{(1)}}{\partial a_2} \cos(L_2 - L_3) + (\delta L_2)'' B_{23}^{(1)} \sin(L_2 - L_3) \right].$$

Hier ist nun aber die am Schlusse von 10 gemachte Bemerkung zu berücksichtigen, dass man bei den vorzunehmenden Differentiationen die Störungen als constant anzusehen hat. Man erhält daher, bei der Differentiation nach $t$, insofern es von den Coordinaten des zweiten Satelliten abhängt, d. h. nach $\mu_2 t$, und nachherigem Einsetzen der Störungen:

$$-\frac{k^2 m_3 \mu_2 m_4 \cdot \mu_2}{\mu_3 - 2\mu_4 - \nu_3} \left[ \tfrac{1}{2} a_2 A_3' \frac{\partial B_{23}^{(1)}}{\partial a_2} \cos(2L_3 - 2L_4) \sin(L_2 - L_3) + \right.$$
$$\left. + A_3' B_{23}^{(1)} \sin(2L_3 - 2L_4) \cos(L_2 - L_3) \right];$$

entwickelt man hier, und behält nur das Argument $V$, so folgt

$$\frac{k^2 m_3 m_4 \mu_2 \mu_2 A_3'}{\mu_3 - 2\mu_4 - \nu_3} \left[ \tfrac{1}{4} a_2 \frac{\partial B_{23}^{(1)}}{\partial a_2} - \tfrac{1}{2} B_{23}^{(1)} \right] \sin V$$

oder

$$\frac{d^2 \delta L_2}{dt^2} = + \frac{3}{\mu_2 a_2^2} \cdot \frac{k^2 m_3 m_4 \mu_2 \mu_2 A_3'}{\mu_3 - 2\mu_4 - \nu_3} \cdot \left[ \tfrac{1}{4} a_2 \frac{\partial B_{23}^{(1)}}{\partial a_2} - \tfrac{1}{2} B_{23}^{(1)} \right] \sin V.$$

Berücksichtigt man, dass

$$\frac{k^2}{a_2^2 \mu_2} = \mu_2 a_2$$

und sehr nahe $\mu_3 = \frac{1}{2}\mu_2$, $\mu_3 - 2\mu_4 = \mu_2 - 2\mu_3$ ist, so wird

$$\frac{d^2 \delta L_2}{dt^2} = -\frac{3}{8} \frac{\mu_2^3 m_3 m_4}{\mu_2 - 2\mu_3 + \nu_3} A_3' G_2 \sin V \tag{8}$$

$$G_2 = -a_2 a_2 \frac{\partial B_{23}^{(1)}}{\partial a_2} + 2 a_2 B_{23}^{(1)}. \tag{8a}$$

---

[1]) Die Zusammenziehung der Argumente ist nur numerisch gestattet, nicht aber für analytische Untersuchungen; hingegen können jene Argumente für die numerische Summation auch vor der Integration zusammengefasst werden, da nicht nur die Beziehung für die Argumente selbst, sondern auch die analoge für die Aenderungen derselben bestehen.

b) Für den dritten Satelliten hat man als Theil der Störungsfunction:

$$k^2 m_2\left[(\delta r_3)''\frac{\partial \overline{B}_{32}^{(1)}}{\partial a_3}\cos(L_3-L_2)-(\delta L_3)''\overline{B}_{32}^{(1)}\sin(L_3-L_2)\right]$$
$$+k^2 m_4\left[(\delta r_3)'\frac{\partial B_{34}^{(2)}}{\partial a_4}\cos 2(L_3-L_4)-(\delta L_3)'\cdot 2B_{34}^{(2)}\sin 2(L_3-L_4)\right],$$

daher durch Differentiation nach $\mu_3 t$ und Einsetzen der Störungswerthe:

$$k^2 m_2\frac{\mu_3 m_4 A_2'\mu_3}{\mu_2-2\mu_4-\nu_2}\left[-\tfrac{1}{2}a_3\frac{\partial \overline{B}_{32}^{(1)}}{\partial a_p}\sin(L_3-L_2)\cos(2L_3-2L_4)+\right.$$
$$\left.+\overline{B}_{32}^{(1)}\cos(L_3-L_2)\sin(2L_3-2L_4)\right]$$
$$+k^2 m_4\frac{\mu_4 m_2 A_3\cdot 2\mu_3}{\mu_2-2\mu_3-\nu_4}\left[-\tfrac{1}{4}a_3\frac{\partial B_{34}^{(2)}}{\partial a_3}\sin 2(L_3-L_4)\cos(L_2-L_3)+\right.$$
$$\left.+2B_{34}^{(2)}\cos 2(L_3-L_4)\sin(L_2-L_3)\right],$$

demnach

$$\frac{d^2\delta L_3}{dt^2}=+\tfrac{1}{4}\frac{\mu_3^2 m_2 m_4 A_2'G_3}{\mu_2-2\mu_4-\nu_2}\sin V+\tfrac{1}{4}\frac{\mu_3^2 m_2 m_4 A_3 G_3'}{\mu_2-2\mu_3-\nu_3}\sin V \tag{9}$$

$$G_3=-a_3^2\frac{\partial \overline{B}_{32}^{(1)}}{\partial a_3}+2a_3\overline{B}_{32}^{(1)};\quad G_3'=-a_3^2\frac{\partial B_{34}^{(2)}}{\partial a_3}-4a_3\partial B_{34}^{(2)}. \tag{9a}$$

c) Für den vierten Satelliten hat man als Theil der Störungsfunction:

$$k^2 m_3\left[(\delta r_3)'\frac{\partial B_{43}^{(2)}}{\partial a_3}\cos 2(L_4-L_3)+(\delta L_3)'\cdot 2B_{43}^{(2)}\sin 2(L_4-L_3)\right],$$

also durch Differentiation nach $\mu_4 t$ und nachheriger Substitution der Störungen

$$k^2 m_3\frac{\mu_3 m_2 A_3\cdot 2\mu_4}{\mu_2-2\mu_3-\nu_3}\left[-\tfrac{1}{4}a_3\frac{\partial B_{43}^{(2)}}{\partial a_3}\cos(L_2-L_3)\sin 2(L_4-L_3)-\right.$$
$$\left.-2B_{43}^{(2)}\sin(L_2-L_3)\cos 2(L_4-L_3)\right]$$

$$\frac{d^2\delta L_4}{dt^2}=-8\frac{\mu_4^2 m_2 m_3 A_3 G_4}{\mu_2-2\mu_3-\nu_3}\sin V \tag{10}$$

$$G_4=-a_3 a_4\frac{\partial B_{43}^{(2)}}{\partial a_3}-4a_4 B_{43}^{(2)}. \tag{10a}$$

Die Coëfficienten in diesen Gleichungen lassen sich noch wesentlich vereinfachen. Es sind nämlich $B_{12}^{(1)}$ und $B_{21}^{(1)}$ Entwickelungscoëfficienten von $r_{12}^{-1}$ und $r_{21}^{-1}$, also identisch; weiter ist

$$\overline{B}_{12}^{(1)}=B_{12}^{(1)}-\frac{a_1}{a_2^2};\quad \overline{B}_{21}^{(1)}=B_{21}^{(1)}-\frac{a_2}{a_1^2}$$
$$\overline{B}_{21}^{(1)}=\overline{B}_{12}^{(1)}-\frac{a_2}{a_1^2}+\frac{a_1}{a_2^2}.$$

Führt man hier die angezeigten Differentiationen aus, so folgt

$$G_2=\frac{a_2}{a_1}\left(-a_1^2\frac{\partial \overline{B}_{12}^{(1)}}{\partial a_2}+2a_1 B_{12}^{(1)}-4\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_1^2}{a_2^2}\right).$$

Es ist aber

$$-4\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_1^2}{a_2^2}=-\frac{a_2}{a_1}\left(4-\frac{a_1^3}{a_2^3}\right)=-\frac{a_2}{a_1}\left(4-\frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}\right)=0$$

mit Rücksicht auf die Beziehung zwischen $\mu_2$ und $\mu_1$. Berücksichtigt man diese Beziehungen auch bei den Coëfficienten $A$, so erhält man

$$A_3 = -a_3^2 \frac{\partial B_{23}^{(1)}}{\partial a_3} + 2a_3 B_{23}^{(1)} \qquad G_2 = \frac{a_2}{a_3} A_3$$
$$\qquad G_3 = A_3$$
$$A_3' = -a_3^2 \frac{\partial B_{34}^{(2)}}{\partial a_3} - 4a_3 B_{34}^{(2)} \qquad G_3' = A_3' \qquad (11)$$
$$\qquad G_4 = \frac{a_4}{a_3} A_3'.$$

Führt man überdiess, um die Ausdrücke vergleichen zu können, überall $\mu_3$ und im Nenner die Differenz $\mu_2 - 2\mu_3$ ein, so erhält man:

$$\frac{d^2 \delta L_2}{dt^2} = -3 \frac{\mu_3^2 m_3 m_4 A_3' A_3}{\mu_2 - 2\mu_3 - \nu_3} \frac{a_2}{a_3} \sin V$$
$$\frac{d^2 \delta L_3}{dt^2} = +\tfrac{9}{4} \frac{\mu_3^2 m_2 m_4 A_3 A_3'}{\mu_2 - 2\mu_3 - \nu_3} \sin V \qquad (12)$$
$$\frac{d^2 \delta L_4}{dt^2} = -\tfrac{3}{8} \frac{\mu_3^2 m_2 m_3 A_3 A_3'}{\mu_2 - 2\mu_3 - \nu_3} \frac{a_4}{a_3} \sin V.$$

Nun ist $V' = \frac{dV}{dt} = \mu_2 - 3\mu_3 + 2\mu_4$ äusserst klein; die doppelte Integration der Ausdrücke (12) würde daher, wie schon bemerkt, durch das Auftreten des Quadrates dieses Nenners nebst dem bereits vorhandenen kleinen Nenner $(\mu_2 - 2\mu_3 - \nu_3)$ ausserordentlich vergrössert, und diese Störungswerthe werden gegenüber den andern weitaus überwiegen. Setzt man nun

$$L_i = L_i^{(0)} + \delta L_i \qquad i = 2, 3, 4,$$

wo $L_i^{(0)}$ der der Zeit proportionale Werth der mittleren Länge, und $\delta L_i$ die aus (12) folgenden Störungswerthe sind, so wird

$$\frac{d^2 L_i}{dt^2} = \frac{d^2 \delta L_i}{dt^2}$$

und damit aus (12):

$$\frac{d^2 L_2}{dt^2} - 3\frac{d^2 L_3}{dt^2} + 2\frac{d^2 L_4}{dt^2} = -\tfrac{3}{4} \frac{m_2 m_3 m_4}{a_3} \frac{\mu_3^2 A_3 A_3'}{\mu_2 - 2\mu_3 - \nu_3} \left(\frac{4a_2}{m_2} + \frac{9a_3}{m_3} + \frac{a_4}{m_4}\right) \sin V.$$

Setzt man die Constante

$$+\tfrac{3}{4} \frac{m_2 m_3 m_4}{a_3} \frac{\mu_3^2 A_3 A_3'}{\mu_2 - 2\mu_3 - \nu_3} \left(\frac{4a_2}{m_2} + \frac{9a_3}{m_3} + \frac{a_4}{m_4}\right) = k,$$

so wird

$$\frac{d^2 V}{dt^2} = -k \sin V. \qquad (13)$$

Multiplicirt man mit $\frac{dV}{dt}$ und integrirt, so folgt

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 = c' + 2k \cos V = c - 4k \sin^2 \tfrac{1}{2} V,$$

wenn mit $c'$ oder $c' + 2k = c$ die Integrationsconstante bezeichnet wird. Es folgt daher

$$dt = \frac{dV}{\pm\sqrt{c - 4k \sin^2 \frac{1}{2} V}}. \qquad (14)$$

1) Ist $c > 4k$ (oder $c' > 2k$), so wird der Nenner stets reell bleiben, $V$ wird mit wachsendem $t$ ebenfalls beständig wachsen (oder abnehmen, je nachdem das Radical mit positivem oder negativem Zeichen genommen wird); der Ausdruck $L_2 - 3L_3 + 2L_4$ wird im Laufe der Zeiten den ganzen Umkreis durchlaufen; dieses entspricht nicht den Beobachtungen.

2) Wenn $c < 4k$ (oder $c' < 2k$) ist, so wird der Nenner innerhalb gewisser Grenzen imaginär werden; ist $k$ positiv, so muss $c$ ebenfalls positiv sein, da sonst das Radical beständig imaginär wäre; setzt man dann

$$\frac{c}{4k} = \sin^2 \varepsilon,$$

so wird

$$dt = \frac{dV}{\pm\sqrt{c}\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \frac{1}{2} V}{\sin^2 \varepsilon}}} \tag{14a}$$

und es muss

$$-\varepsilon < \tfrac{1}{2} V < +\varepsilon$$

bleiben, d. h. $V$ schwankt um den Nullwerth zwischen den Grenzen $\pm 2\varepsilon$.

3) Wenn $k$ negativ $= -k_1$ ist, so wird

$$dt = \frac{dV}{\pm\sqrt{c + 4k_1 \sin^2 \frac{1}{2} V}}.$$

Wäre $c$ positiv, so würde das Radical stets reell, und wie im ersten Falle $V$ durch den ganzen Umkreis im positiven oder negativen Sinne wachsend; dieser Fall ist wieder auszuschliessen; es muss daher auch $c$ negativ sein $= -c_1$, das Integral wird:

$$dt = \frac{dV}{\pm\sqrt{4k_1 \sin^2 \frac{1}{2} V - c_1}},$$

und es muss numerisch $c_1 < 4k_1$ sein (welche Bedingung identisch ist mit $c > 4k$), da sonst das Integral stets imaginär wäre; daher kann man

$$\frac{c_1}{4k_1} = \sin^2 \varepsilon_1$$

setzen, und es wird

$$dt = \frac{dV}{\pm\sqrt{c_1}\sqrt{\frac{\sin^2 \frac{1}{2} V}{\sin^2 \varepsilon_1} - 1}}. \tag{14b}$$

Hier muss nun $\sin \frac{1}{2} V_1 > \sin \varepsilon_1$ bleiben, d. h.

$$\varepsilon_1 < \tfrac{1}{2} V < 180^\circ - \varepsilon_1,$$

d. h. $V$ schwankt um 180° herum zwischen den Grenzen $+ 2\varepsilon_1$ und $360^\circ - 2\varepsilon_1$.

Da nach den Beobachtungen $V$ sehr nahe 180° ist, so wird für die Jupitersatelliten der letzte Fall stattfinden; es ist eine Schwankung, eine L i b r a t i o n um 180° herum. Die Grösse derselben hängt von $c_1$ und $k_1$ ab. $k_1$ ist eine gegebene Grösse; die Integrationsconstante $c_1$ wird daher bestimmt werden können, sobald die Amplitude der Libration bekannt ist. Bisher ist eine solche noch nicht constatirt worden, woraus folgt, dass die Constante $c_1$ gegenüber $4k_1$ jedenfalls eine kleine Grösse ist. Da übrigens $k = -k_1$ negativ sein muss, so folgt daraus, dass der Coëfficient

$$\left(\frac{A_2 A_1'}{\mu_2 - 2\mu_3 - \nu}\right)$$

nothwendig negativ sein muss.

Die nächste Folge ist, dass $\frac{dV}{dt}$ jedenfalls nur eine periodische Function o h n e c o n s t a n t e m A n f a n g s g l i e d ist, demnach $V$ für die Integration der Gleichungen (12) als constant anzusehen ist, sodass durch die Integration keine Vergrösserung der Coëfficienten eintritt. Wäre aber $V$ von 180° nur um einen

sehr geringen Betrag verschieden, so würde hierdurch eine Secularbewegung der mittleren Längen der drei Satelliten auftreten, und zwar beim zweiten und vierten eine Secularbeschleunigung, beim dritten eine Secularverzögerung, jedoch so, dass auch diese in derjenigen Beziehung stehen, dass $V$ constant bleibt, und nur dann wenn $V = 0$ oder $180^\circ$ ist, wird eine solche nicht stattfinden.

Das Verhältniss dieser Secularbeschleunigungen wäre:

$$-8a_2 : +\tfrac{3}{4}a_3 : -\tfrac{1}{8}a_4 = -8a_2 : +6a_3 : -a_4$$

oder mit den numerischen Werthen sehr nahe

$$-45{\cdot}588 : +54{\cdot}899 : -14{\cdot}462 = -3{\cdot}152 : +3{\cdot}761 : -1.$$

Seculargleichungen dieser Art treten nicht auf; hingegen ist es nicht ausgeschlossen, dass $V$ einer periodischen Ungleichheit unterliegt; diese ist gemäss den Beobachtungen jedenfalls sehr klein; setzt man aber demgemäss $V$ sehr nahe $180^\circ$ voraus, so kann die Gleichung auch geschrieben werden:

$$\frac{d^2 V}{dt^2} = -k(180^\circ + V),$$

deren Integral

$$V = 180^\circ + \alpha \sin(\sqrt{k}\,t + A) \tag{15}$$

ist, wobei $\alpha$ und $A$ die Integrationsconstanten sind. Der wahre Werth von $V$ wird daher einer Schwankung mit der Amplitude $2\alpha$ um $180^\circ$ herum unterliegen, d. h. $\alpha$ entspricht dem in (14) auftretenden Werthe $\varepsilon_1$. Setzt man den Werth (15) in (12) ein, so folgt, da $\alpha$ sehr klein ist:

$$\frac{d^2\,\delta L_2}{dt^2} = +\frac{4k_0}{m_2}\,a_2\,\alpha \sin(\sqrt{k}\,t + A)$$

$$\frac{d^2\,\delta L_3}{dt^2} = -\frac{8k_0}{m_3}\,a_3\,\alpha \sin(\sqrt{k}\,t + A)$$

$$\frac{d^2\,\delta L_4}{dt^2} = +\frac{1}{2}\frac{k_0}{m_4}a_4\,\alpha \sin(\sqrt{k}\,t + A)$$

deren Integrale, da

$$\frac{k_0}{k} = \frac{1}{4\dfrac{a_2}{m_2} + 9\dfrac{a_3}{m_3} + \dfrac{a_4}{m_4}}$$

ist:

$$\begin{aligned}
\delta L_2 &= -\frac{4\dfrac{a_2}{m_2}}{4\dfrac{a_2}{m_2} + 9\dfrac{a_3}{m_3} + \dfrac{a_4}{m_4}}\,\alpha \sin(\sqrt{k}\,t + A)\\
\delta L_3 &= +\frac{8\dfrac{a_3}{m_3}}{4\dfrac{a_2}{m_2} + 9\dfrac{a_3}{m_3} + \dfrac{a_4}{m_4}}\,\alpha \sin(\sqrt{k}\,t + A)\\
\delta L_4 &= -\frac{\tfrac{1}{2}\dfrac{a_4}{m_4}}{4\dfrac{a_2}{m_2} + 9\dfrac{a_3}{m_3} + \dfrac{a_4}{m_4}}\,\alpha \sin(\sqrt{k}\,t + A)
\end{aligned} \tag{16}$$

sind. Die Periode dieser Libration ist nahe 2270 Tage oder etwas mehr als 6 Jahre.

**67. Die Störungen in der Bewegung der Kometen.** Für die Berechnung der Störungen der nicht periodischen Kometen erscheint es, wie schon

in 88 erwähnt wurde, am geeignetsten, sich auf die Berechnung der speciellen Störungen zu beschränken, und dabei die Methode der Berechnung derselben in rechtwinkligen oder in polaren Coordinaten zu verwenden. Für die Störungen von periodischen Kometen wird es sich jedoch empfehlen, nicht die Zeit, sondern die excentrische Anomalie als Unbekannte zu wählen, da dann einerseits eine gleichmässigere Eintheilung der Bahn stattfindet, und andererseits eine Reihe von Coëfficienten für jeden Umlauf des Kometen wieder verwendet werden können. Dieser Vorgang soll hier für die Berechnung der Störungen in den Elementen durchgeführt werden[1]). Es ist, wenn $F$ irgend eine Function bedeutet:

$$\frac{dF}{dE} = \frac{dF}{dt}\frac{dt}{dE} \quad \text{und} \quad \frac{dt}{dE} = \frac{r\sqrt{a}}{k_0}.$$

Leitet man in dieser Weise die Differentialquotienten der Elemente nach der excentrischen Anomalie $E$ ab, und setzt

$$\frac{P}{k_0^2 m_1} = (P); \qquad \frac{Q}{k_0^2 m_1} = (Q); \qquad \frac{Z^{(0)}}{k_0^2 m_1} = (Z), \tag{1}$$

so wird aus den Formeln 19 (11):

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dE} &= [2a^2 e r \sin v (P) + 2a^2 p (Q)] f \\
\frac{de}{dE} &= [p r \sin v (P) + p r (\cos E + \cos v)(Q)] f \\
\frac{d\pi}{dE} &= \left[-\frac{rp}{e}\cos v (P) + \frac{r(r+p)}{e}\sin v (Q) + r^2 \sin(v+\omega)\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2} i (Z)\right] f \\
\frac{d\Omega}{dE} &= \frac{r^2 \sin(v+\omega)}{\sin i}(Z) f \\
\frac{di}{dE} &= \frac{r^2 \cos(v+\omega)}{\sin i}(Z) f \\
\left(\frac{dM_0}{dE}\right)_1 &= [r(p \cot\varphi \cos v - 2r\cos\varphi)(P) - r\cot\varphi \sin v (p+r)(Q)] f \\
\left(\frac{dM_0}{dE}\right)_2 &= \frac{r\sqrt{a}}{k_0}\int \frac{dM}{dE}\, dE
\end{aligned} \tag{2}$$

$$f = m_1 \sec\varphi \tag{2a}$$

Um nach diesen Formeln[2]) die speziellen Störungen eines Kometen zu be-

[1]) Nach v. OPPOLZER: Sitzungsberichte der k. Acad. der Wissenschaften in Wien 1870, Bd. 52, pag. 661.

[2]) An Stelle der Störung in $a$ kann auch gesetzt werden:

$$\frac{dp}{dE} = 2 p r^2 (Q) f; \quad \text{oder} \quad \frac{d\mu}{dE} = \left[-\frac{3k_0}{\sqrt{a}} e r \sin v (P) - \frac{3k_0}{\sqrt{a}} p (Q)\right] f.$$

Da die Hauptstörung in die Nähe des Perihels fällt, so wird man auch manchmal mit Vortheil die Eintheilung nach der wahren Anomalie wählen können. Dadurch wird von selbst eine Eintheilung in relativ engen Intervallen während der Zeit des Perihels und in immer grösseren Intervallen bei der Entfernung vom Perihel eintreten. Da

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial E}\cdot\frac{dE}{dv} \quad \text{und} \quad \frac{dE}{dv} = \frac{r\sqrt{1-e^2}}{p}$$

ist, so bleiben die Formeln genau dieselben, nur ist an Stelle von $m_1 \sec\varphi$ der Faktor

$$f_1 = \frac{m_1 r}{p} \tag{2b}$$

zu setzen, wo aber für die Berechnung der Faktor $r$ von dem constanten Theile $\frac{m_1}{p}$ abzutrennen und mit den Coëfficienten in (2) zu vereinigen ist.

rechnen, theilt man den Umkreis in $n$ Theile; dann werden für jedes Intervall $\varphi$, $\vartheta$, $E$ dieselben Werthe haben, es werden daher die Coëfficienten der störenden Kräfte für alle Umläufe dieselben bleiben; an Stelle von $dE$ tritt $\Delta E = \frac{360^\circ}{n}$ und drückt man $\Delta E$ in Bogensecunden aus, so erhält man die Elementenstörungen ebenfalls in Bogensecunden. Von den störenden Kräften ist die störende Masse abgetrennt, indem dieselbe in den Coëfficienten $m'_1 \sec\varphi\Delta E$ gezogen wird, welcher in allen Formeln auftritt. Es wird daher:

$$\begin{aligned}(P) &= x'\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) - \frac{r}{\rho^3}\\ (Q) &= y'\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right)\\ (Z) &= z'\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right).\end{aligned} \tag{8}$$

$\delta a$ und $\delta e$ sind, da sie nicht in Bogensecunden gegeben werden, mit $arc\,1''$ zu multipliciren. Will man die Aenderung des Excentricitätswinkels $\varphi$ an Stelle derjenigen von $e$, so wird

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{de}{dt}; \qquad \delta\varphi = \frac{1}{\cos\varphi}\delta e.$$

Zu berücksichtigen ist dabei noch, dass man die Coordinaten $x'$, $y'$, $z'$ des störenden Himmelskörpers für jene Zeitmomente nimmt, welche den einzelnen Intervallen von $E$ entsprechen.

Für die Entwickelung von allgemeinen Störungen wird hiezu in die Ausdrücke für die heliocentrischen Coordinaten des störenden Himmelskörpers die mittlere Anomalie $\mu' t$ oder die Zeit durch die excentrische Anomalie des Kometen zu ersetzen sein, wozu am bequemsten der von HANSEN eingeschlagene Weg (vergl. No. 58) gewählt werden kann.

Die Störungen der Kometen, welche sich in parabolischen Bahnen bewegen, oder innerhalb elliptischer Bahnen mit sehr grossen Halbaxen, werden nur innerhalb des Bereiches des Sonnensystems von Bedeutung; in sehr grossen Entfernungen wird die Bahn als eine Ellipse angesehen werden können, deren Brennpunkt der gemeinsame Schwerpunkt der sämmtlichen anziehenden Massen ist. Berechnet man die Störungen eines Kometen für sehr grosse Entfernungen von der Sonne und vom störenden Himmelskörper, so hat man in der Entwickelung der störenden Kräfte (vergl. No. 28):

$$X_1 = k^2 m_1\left(\frac{x_1 - x}{r_{01}^3} - \frac{x_1}{r_1^3}\right); \; Y_1 = k^2 m_1\left(\frac{y_1 - y}{r_{01}^3} - \frac{y_1}{r_1^3}\right); \; Z_1 = k^2 m_1\left(\frac{z_1 - z}{r_{01}^3} - \frac{z_1}{r_1^3}\right)$$

$$r_{01} = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2} = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2(xx_1 + yy_1 + zz_1)}$$

$r$ gegenüber $r_1$ sehr gross zu nehmen. Da nun

$$\frac{1}{r_{01}^3} = \frac{1}{r^3}\left(1 - 2\frac{(xx_1 + yy_1 + zz_1)}{r^2} + \frac{r_1^2}{r^2}\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{r^3} + 3\frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r^5}$$

ist, so werden die Differentialgleichungen der Bewegung unter Vernachlässigung der Kometenmasse, wenn man mit $x$, $y$, $z$ die ungestörten Coordinaten, und mit $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ die gestörten Coordinaten, mit $r + \delta r$ die gestörte Entfernung bezeichnet:

$$\frac{d^2(x + \xi)}{dt^2} + \frac{k^2(x + \xi)}{(r + \delta r)^3} = k^2 m_1\frac{x_1 - x}{r^3} - k^2 m_1\frac{x_1}{r_1^3} + 3k^2 m_1\frac{x_1 - x}{r^5}(xx_1 + yy_1 + zz_1),$$

wobei in den störenden Kräften die ungestörten Coordinaten verwendet wurden, weil auf Störungen zweiter Potenz der Massen nicht Rücksicht genommen wird. Vernachlässigt man in dem letzten Ausdrucke, welcher $r^5$ im Nenner hat, die Quadrate der Coordinaten des störenden Himmelskörpers, und berücksichtigt, dass

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k^2 x}{r^3} = 0$$
$$r\,\delta r = x\xi + y\eta + z\zeta$$

ist, so folgt

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{k^2\xi}{r^3} - \frac{3k^2 x(x\xi + y\eta + z\zeta)}{r^5} + k^2 m_1 \frac{x - x_1}{r^3} + k^2 m_1 \frac{x_1}{r_1^3} +$$
$$+ 3k^2 m_1 \frac{x}{r^5}(x x_1 + y y_1 + z z_1) = 0$$

und zwei ähnliche Gleichungen für $\eta$ und $\zeta$. Diesen Gleichungen wird genügt durch

$$\begin{aligned} \xi &= \tfrac{1}{2} m_1 x + m_1 x_1 \\ \eta &= \tfrac{1}{2} m_1 y + m_1 y_1 \\ \zeta &= \tfrac{1}{2} m_1 z + m_1 z_1. \end{aligned} \qquad (4)$$

68. **Bewegung der Kometen bei grosser Annäherung an einen Planeten.** Wesentlich complicirter werden die Verhältnisse bei grosser Annäherung eines Kometen an einen Planeten. Es war schon früher (vergl. den Artikel »Kometen und Meteore«) der bedeutenden Störungen gedacht worden, welche die Kometen erfahren, wenn sie in die Nähe eines grösseren Planeten gelangen. Kommt der Komet in so grosse Nähe der Planeten, dass die ursprünglich als störende Kraft des Planeten angesehene Wirkung derselben grösser wird, als die direkte Kraft der Sonne auf den Kometen, so wird man, gerade so, wie man bei den Nebenplaneten die Sonne als störenden Körper ansieht, auch hier den Planeten als Centralkörper, und die Sonne als störenden Körper anzusehen haben. Geht man von den Differentialgleichungen der Bewegung in rechtwinkligen Coordinaten aus, so hat man, wenn Kürze halber wieder $\rho$ für $r_{01}$ geschrieben wird, für den Kometen

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2(M + m)\frac{x}{r^3} - \frac{k^2 m_1(x_1 - x)}{\rho^3} + k^2 m_1 \frac{x_1}{r_1^3} = 0, \qquad (5a)$$

und für den Planeten, für welchen beispielsweise Jupiter gesetzt werden kann:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + k^2(M + m_1)\frac{x_1}{r_1^3} - \frac{k^2 m(x - x_1)}{\rho^3} + k^2 m \frac{x}{r^3} = 0. \qquad (5b)$$

Für den Uebergang auf die jovicentrische Bewegung müssen nun die jovicentrischen Coordinaten der Sonne und des Kometen eingeführt werden. Die ersteren sind $x_1' = -x_1$; $y_1' = -y_1$; $z_1' = -z_1$; der jovicentrische Radiusvector der Sonne ist $r_1$; die jovicentrischen Coordinaten des Kometen sind $x - x_1 = x'$; $y - y_1 = y'$; $z - z_1 = z'$; der jovicentrische Radiusvector des Kometen daher $\rho$ und ferner $r$ die Entfernung des Kometen von dem störenden Himmelskörper, der Sonne. Durch Subtraktion der Gleichungen (5a), (5b) folgt aber

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} + \frac{k^2(m + m_1)x'}{\rho^3} + k^2 M \frac{x}{r^3} + k^2 M \frac{x_1'}{r_1^3} = 0$$

oder wenn hier $x = x_1 + x' = x' - x_1'$ gesetzt wird:

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} + \frac{k^2(m_1 + m)x'}{\rho^3} - \frac{k^2 M(x_1' - x')}{r^3} + k^2 M \frac{x_1'}{r_1^3} = 0, \qquad (6)$$

welche Differentialgleichungen man auch unmittelbar hätte aufstellen können, indem sie aus den Gleichungen (5 a), (5 b) mutatis mutandis hervorgehen.

Nach (5 a) ist nun aber das Verhaltniss der Wirkung der Sonne zur störenden Wirkung des Jupiter

$$V_1 = \frac{\dfrac{k^2(M+m)x}{r^3}}{\dfrac{k^2 m_1(x-x_1)}{\rho^3} + k^2 m_1 \dfrac{x_1}{r_1^3}} = \frac{M+m}{m_1} \; \frac{\dfrac{x}{r^3}}{\dfrac{x-x_1}{\rho^3} + \dfrac{x_1}{r_1^3}}$$

und nach (6) das Verhältniss der Wirkung des Jupiter zur störenden Wirkung der Sonne:

$$V_2 = \frac{\dfrac{k^2(m_1+m)(x-x_1)}{\rho^3}}{k^2 M \dfrac{x}{r^3} - k^2 M \dfrac{x_1}{r_1^3}} = \frac{m_1+m}{M} \; \frac{\dfrac{x-x_1}{\rho^3}}{\dfrac{x}{r^3} - \dfrac{x_1}{r_1^3}}.$$

Je nachdem $V_1 > V_2$ oder $V_2 > V_1$ ist, wird man die Differentialgleichungen (5 a) oder diejenigen (6) verwenden. Der Uebergang von der heliocentrischen Bewegung auf die jovicentrische wird vorzunehmen sein, wenn $V_2 > V_1$ wird, und die Grenze hierfür wird gegeben durch $V_1 = V_2$, d. h. durch

$$\frac{M+m}{m_1} \frac{x}{r^3} \left(\frac{x}{r^3} - \frac{x_1}{r_1^3}\right) = \frac{m_1+m}{M} \frac{x-x_1}{\rho^3} \left(\frac{x-x_1}{\rho^3} + \frac{x_1}{r_1^3}\right). \qquad (7)$$

Für den einfachsten Fall, dass die drei Körper in gerader Linie sind, wird $x = r$; $x_1 = r_1$; $x_1 - x = \rho = r_1 - r$; demnach wenn die Kometenmasse $m$ vernachlässigt wird:

$$M^2 \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) = m_1^2 \frac{1}{(r_1-r)^2} \left[\frac{1}{(r_1-r)^2} - \frac{1}{r_1^2}\right]$$

oder

$$M^2 \frac{(r_1-r)(r_1+r)}{r^4} = m_1^2 \frac{2rr_1 - r^2}{(r_1-r)^4}.$$

Man kann aber wegen der grossen Annäherung des Kometen an den Planeten genügend genau $r_1 + r = 2r$, $2rr_1 - r^2 = r^2$ setzen, und dann wird

$$2M^2 \frac{r_1-r}{r^3} = m_1^2 \frac{r^2}{(r_1-r)^4},$$

mithin

$$r_1 - r = r\sqrt[5]{\tfrac{1}{2}\left(\frac{m_1}{M}\right)^2}. \qquad (8)$$

Diesen Werth bezeichnet man nach Laplace als die Wirkungssphäre des Planeten.

Für Jupiter ist $\frac{m_1}{M} = \frac{1}{1047}$, demnach $r_1 - r = 0{\cdot}0539\, r$;

für Saturn ist $\frac{m_1}{M} = \frac{1}{3512}$ und damit $r_1 - r = 0{\cdot}0332\, r$.

Im Ausdrucke (6) kommen die jovicentrischen Coordinaten des Kometen vor; dieselben für jeden einzelnen Zeitmoment aus den heliocentrischen Coordinaten nach den Formeln $x' = x - x_1$ u. s. w. abzuleiten, wäre sehr unpraktisch, da sie zur Zeit der grossen Annäherung sich als Differenzen sehr nahe gleicher Grössen ergeben würden. Es wird in diesem Falle am besten, jovicentrische Elemente des Kometen zu berechnen. Ist für einen gegebenen Moment die Gleichung (8) nahe erfüllt, so berechnet man für diesen Moment die heliocen-

trischen Coordinaten und Geschwindigkeiten des Jupiter und des Kometen nach 17 (8) und (12) und hierauf die jovicentrischen Coordinaten und Geschwindigkeiten des Kometen für diesen Moment nach

$$x' = x - x_1;\quad y' = y - y_1;\quad z' = z - z_1$$

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt};\qquad \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt};\qquad \frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt} - \frac{dz_1}{dt}.$$

Man erhält dann sofort die für den betrachteten Moment osculirende jovicentrische Bahn nach den Formeln 17 (18) und den Formeln 25 (2) bis (6); wenn die jovicentrische Bahn nicht als Ellipse anzusehen ist, so erhält man die Zeit des Durchgangs durch das Perijovium, indem man die Zwischenzeit sucht, welche der Komet braucht, um die wahre Anomalie $v$, wie sie sich durch 25 (5) ergab, zu durchlaufen, also nach

$$\frac{k\sqrt{m_1 + m}}{\sqrt{2}\, q^{\frac{3}{2}}}(t - T_0) = tang\,\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}\,tang^3\,\tfrac{1}{2}v.$$

Zu bemerken ist hiezu nur, dass sich die Bahnelemente auf eine Fundamentalebene beziehen, welche durch den Jupitermittelpunkt parallel zur ursprünglichen Fundamentalebene gelegt ist. Waren also heliocentrische Coordinaten und Geschwindigkeiten ursprünglich auf die Ekliptik bezogen, so erhält man die jovicentrische Bahn bezogen auf eine durch den Jupiter parallel zur Ekliptik bezogene Fundamentalebene, also auf eine jovicentrische Ekliptik, und der Anfangspunkt der Längen ist eine durch den Jupiter parallel zur Richtung nach dem Frühlingspunkte gelegte Linie, also das jovicentrische Aequinoktium. Es sind also jovicentrische Elemente, bezogen auf die Ekliptik und das Aequinoctium einer gegebenen Epoche.

Hat man hierauf die Störungen der Sonne in irgend einer Weise z. B. nach der Methode der speciellen Störungen in rechtwinkeligen Coordinaten, welche sich hiefür am meisten empfiehlt, gerechnet, bis der Komet aus der Wirkungssphäre, d. h. aus der Sphäre innerhalb welcher die Wirkung des Jupiter stärker ist, als diejenige der Sonne heraustritt, so wird für diesen Punkt neuerdings die Gleichung (8) erfüllt sein, und dann wird man mit den gestörten jovicentrischen Coordinaten und Geschwindigkeiten, welche direkt durch die Störungsrechnung in rechtwinkligen Coordinaten gegeben sind, oder welche aus den osculirenden Elementen für diesen Moment abgeleitet werden, und mit den zugehörigen heliocentrischen Coordinaten und Geschwindigkeiten des Jupiter neuerdings die heliocentrischen Coordinaten und Geschwindigkeiten des Kometen berechnen nach den Formeln

$$x = x' + x_1;\quad \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + \frac{dx_1}{dt};\ \ldots$$

Mittels dieser heliocentrischen Werthe werden neue osculirende heliocentrische Elemente des Kometen abgeleitet, mit denen die Störungsrechnung fortgesetzt werden kann.

**Beispiel:** Für den Kometen 1889 V wurde die Störungsrechnung bis 1886 Oct. 4 fortgeführt (vergl. pag. 359). Für 1886 Oct. 8 erhält man nun die osculirenden Elemente:

$$\left.\begin{array}{l} M_0 = 210^\circ\ 57'\ 14''\!\cdot\!06 \\ \pi = \phantom{00}2\ \ 46\ \ 44\!\cdot\!92 \\ \Omega = \phantom{0}18\ \ 55\ \ 14\!\cdot\!89 \\ i = \phantom{00}7\ \ 45\ \ 15\!\cdot\!49 \\ \varphi = \phantom{0}32\ \ 36\ \ 33\!\cdot\!56 \\ \mu = 527''\!\cdot\!7210 \end{array}\right\}\ \begin{array}{c}\text{Ekliptik und} \\ \text{mittleres Aequinoct. 1890·0}\end{array}$$

und aus diesen die heliocentrischen Coordinaten und Geschwindigkeiten des Kometen:

$$x = -5{\cdot}208720; \quad y = -1{\cdot}297106; \quad z = +0{\cdot}062683$$
$$\frac{dx}{dt} = +0{\cdot}018484; \quad \frac{dy}{dt} = -0{\cdot}087054; \quad \frac{dz}{dt} = -0{\cdot}005589.$$

Stellt man hiermit die heliocentrischen Coordinaten und Geschwindigkeiten des Jupiter zusammen, so erhält man die jovicentrischen Coordinaten und Geschwindigkeiten des Kometen

$$x' = +0{\cdot}081869; \quad y' = +0{\cdot}288758; \quad z' = -0{\cdot}061127$$
$$\frac{dx'}{dt} = +0{\cdot}002174; \quad \frac{dy'}{dt} = +0{\cdot}018069; \quad \frac{dz'}{dt} = -0{\cdot}005426,$$

und hiermit die jovicentrischen Elemente (Hyperbel):

Zeit des Perijoviums: $T = 1886$ Juli 19·9904.

$$\left.\begin{aligned} \pi &= 282^\circ\ 50'\ \ 2''{\cdot}2 \\ \Omega &= 256\ \ 16\ \ 19{\cdot}5 \\ i &= \ 68\ \ \ 8\ \ 48{\cdot}3 \end{aligned}\right\}\ \begin{array}{l}\text{Mittlere Ekliptik} \\ \text{u. Aequinoct. 1890 0.}\end{array} \qquad \begin{aligned} \log e &= 0{\cdot}004618 \\ \log a &= 8_n{\cdot}980000 \\ \log q &= 6{\cdot}958555. \end{aligned}$$

Mit dem Werthe für Jupiter (vergl. pag. 303): $\log k = 6{\cdot}725426$ und das Intervall $w = 8$ Tage wird mit der Sonnenmasse $M_\odot = 1047{\cdot}879$

$$\log (wk)^2 M_\odot 10^6 = 4{\cdot}277848.$$

Hiermit erhält man z. B. für October 4 als störende Kräfte:

$$X_1 = k^2 M_\odot \frac{x_1 - x}{\rho^3} = +688{\cdot}84; \quad X_2 = -k^2 M_\odot \frac{x_1}{r_1^3} = -611\ 85$$
$$Y_1 = k^2 M_\odot \frac{y_1 - y}{\rho^3} = +156{\cdot}57; \quad Y_2 = -k^2 M_\odot \frac{y_1}{r_1^3} = -175{\cdot}26$$
$$Z_1 = k^2 M_\odot \frac{z_1 - z}{\rho^3} = -\ \ 8{\cdot}02; \quad Z_2 = -k^2 M_\odot \frac{z_1}{r_1^3} = +\ \ 14{\cdot}44,$$

daher die störenden Kräfte

$$X_\odot = +26{\cdot}99; \quad Y_\odot = -18{\cdot}69; \quad Z_\odot = +6{\cdot}42.$$

Diese kurzen Andeutungen werden mit Rücksicht auf die früheren ausführlicheren Beispiele genügen, um das Verfahren auch numerisch anzudeuten Auf einige andere, die Berechnung erleichternde Details kann an dieser Stelle nicht eingegangen werden.

Rühren starke Aenderungen der Elemente eines Kometen von der Attraction eines Planeten her, in dessen Nähe derselbe kam, so muss zwischen den beiden verschiedenen Elementensystemen eine Beziehung bestehen, welche zuerst von Tisserand angegeben wurde. Im folgenden soll die sehr elegante Ableitung dieser Beziehung mitgetheilt werden, welche von Seeliger in den A. N. No. 2965 gegeben wurde. Multiplicirt man die drei Gleichungen (5a) mit $2\frac{dx}{dt}$, $2\frac{dy}{dt}$, $2\frac{dz}{dt}$, und integrirt, so folgt, da $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = v^2$, die Geschwindigkeit des Kometen ist, wenn die Integrationsconstante mit $c$ bezeichnet wird:

$$v^2 = c + \frac{2k^2(M+m)}{r} + 2k^2 m_1 \int \frac{dt}{\rho^3}\left[(x_1 - x)\frac{dx}{dt} + (y_1 - y)\frac{dy}{dt} + \right.$$
$$\left. + (z_1 - z)\frac{dz}{dt}\right] - 2k^2 m_1 \int \frac{dt}{r_1^3}\left[x_1 \frac{dx}{dt} + y_1 \frac{dy}{dt} + z_1 \frac{dz}{dt}\right].$$

Da nun

$$(x_1 - x)\frac{dx}{dt} = -(x_1 - x)\frac{d(x_1 - x)}{dt} + (x_1 - x)\frac{dx_1}{dt}$$

$$-x_1\frac{dx}{dt} = (x_1 - x)\frac{d(x_1 - x)}{dt} - (x_1 - x)\frac{dx_1}{dt} - x\frac{dx}{dt}$$

und

$$(x_1 - x)\frac{d(x_1 - x)}{dt} + (y_1 - y)\frac{d(y_1 - y)}{dt} + (z_1 - z)\frac{d(z_1 - z)}{dt} = \rho\frac{d\rho}{dt}$$

ist, so wird

$$\begin{aligned} v^2 = c + \frac{2k^2(M+m)}{r} + \frac{2k^2 m_1}{\rho} + 2k^2 m_1\int dt\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right)\Big[(x_1 - x)\frac{dx_1}{dt} + \\ + (y_1 - y)\frac{dy_1}{dt} + (z_1 - z)\frac{dz_1}{dt}\Big] + 2k^2 m_1\int\frac{dt}{r_1^3}\left(\rho\frac{d\rho}{dt} - \frac{r\,dr}{dt}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Während der Zeit, während welcher der Komet in der Nähe des störenden Planeten weilt, kann man dessen Bahn als kreisförmig und mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen ansehen[1]), also $r_1$ und $\frac{dv_1}{dt} = \mu_1$ constant ansehen, und dann hat man, wenn man noch die Bahnebene des störenden Planeten als Fundamentalebene, also $z_1 = \frac{dz_1}{dt} = 0$ annimmt:

$$x_1 = r_1\cos v_1;\quad \frac{dx_1}{dt} = -r_1\sin v_1\frac{dv_1}{dt} = -\mu_1 y_1$$

$$y_1 = r_1\sin v_1;\quad \frac{dy_1}{dt} = +r_1\cos v_1\frac{dv_1}{dt} = +\mu_1 x_1,$$

demnach

$$v^2 = c + \frac{2k^2(M+m)}{r} + \frac{2k^2 m_1}{\rho} + 2k^2 m_1\mu\int dt\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right)(xy_1 - x_1 y) + \frac{k^2 m_1}{r_1^3}(\rho^2 - r^2).$$

Multiplicirt man aber die Gleichungen (5a) (für $x$ und $y$) mit $-y$, $+x$, und addirt, so erhält man nach der Integration

$$k^2 m_1\int\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right)(xy_1 - x_1 y)dt = \left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = k\sqrt{M+m}\sqrt{p}\cos i,$$

wenn die Integrationsconstante weggelassen wird, welche sich nach der Substitution mit $c$ vereinigt. Die Gleichung für $v^2$ wird daher

$$v^2 = c + \frac{2k^2(M+m)}{r} + \frac{2k^2 m_1}{\rho} + 2k\sqrt{M+m}\,\mu_1\sqrt{p}\cos i + \frac{k^2 m_1}{r_1^3}(\rho^2 - r^2).$$

Es ist aber

$$v^2 = k^2(M+m)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

demnach

$$0 = c + \frac{k^2(M+m)}{a} + \frac{2k^2 m_1}{\rho} + 2k\sqrt{M+m}\,\mu_1\sqrt{p}\cos i + \frac{k^2 m_1}{r_1^3}(\rho^2 - r^2).$$

Da die mittlere Bewegung des störenden Körpers allgemein:

$$(\mu_1) = \frac{k\sqrt{M+m_1}}{a_1^{\frac{3}{2}}}$$

---

[1]) Diese Voraussetzung, welche bei der Ableitung des Satzes wesentlich ist, ist durchaus nicht unanfechtbar, im Gegentheil wird die Bewegung meist viel eher geradlinig (hyperbolisch mit sehr kleiner Distanz des Pericentrums) sein.

ist, die Geschwindigkeiten in den verschiedenen Theilen der Bahn aber sich verkehrt wie die Quadrate der Entfernung verhalten, so wird

$$\mu_1:(\mu_1) = a_1^2:r_1^2; \qquad \mu_1 = \frac{k\sqrt{M+m_1}\sqrt{a_1}}{r_1^2}.$$

Dividirt man daher die letzte Gleichung durch $k^2(M+m)$ und bezeichnet die selbst willkürliche Constante $\frac{c}{k^2(M+m)}$ wieder mit $c$ und setzt:

$$\frac{m_1}{M+m} = m_0; \qquad \sqrt{\frac{M+m_1}{M+m}}\,\frac{\sqrt{a_1}}{r_1^2} = \mu_0,$$

so wird

$$0 = c + \frac{1}{a} + \frac{2m_0}{\rho} + 2\mu_0\sqrt{p}\cos i + \frac{m_0}{r_1^3}(\rho^2 - r^2). \qquad (10a)$$

Betrachtet man nun einen Kometen an zwei verschiedenen Orten seiner Bahn, in denen er dieselbe Entfernung von dem störenden Planeten hat, das eine Mal also in seiner Bahn vor der Annäherung an den Planeten, das zweite Mal nach der grossen Störung, so werden die Elemente $a$, $p$, $i$ sich in $a'$, $p'$, $i'$ verwandelt haben; die heliocentrische Entfernung des Kometen wird im ersten Falle $r$, im zweiten $r'$ sein, und es gilt demnach vor der grossen Störung die Gleichung (10a) und nach derselben die Gleichung:

$$0 = c + \frac{1}{a'} + \frac{2m_0}{\rho} + 2\mu_0\sqrt{p'}\cos i' + \frac{m_0}{r_1^3}(\rho^2 - r'^2), \qquad (10b)$$

wobei während der Dauer der Störung $r$ constant angesehen wurde. Aus den Gleichungen (10a), (10b) folgt durch Subtraction:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a'} + 2\mu_0\sqrt{p}\cos i - 2\mu_0\sqrt{p'}\cos i' + \frac{m_0}{r_1^3}(r'^2 - r^2) = 0.$$

Vernachlässigt man das mit der Masse des störenden Planeten multiplicirte Glied, so folgt daraus der TISSERAND'sche Satz:

$$\frac{1}{a} + 2\mu_0\sqrt{p}\cos i = \frac{1}{a'} + 2\mu_0\sqrt{p'}\cos i' = K. \qquad (11)$$

Die Constanz der Verbindung $\frac{1}{a} + 2\mu_0\sqrt{p}\cos i$ zwischen grosser Axe, Excentricität und Neigung bildet daher ein Kriterium dafür, ob die Aenderung der Bahn eines Kometen durch die Annäherung desselben an einen Planeten stattgefunden hat, oder nicht. Zunächst gilt diese Formel allerdings ihrer Ableitung nach nur für jene Punkte der Bahn, in welchen der Komet gleich weit von dem störenden Planeten entfernt ist, und für die Bahnebene des störenden Planeten als Fundamentalebene; da aber die Bahnelemente, abgesehen von der grossen Störung keine durchgreifenden Aenderungen erfahren, und die Bahnneigungen der störenden Planeten sehr klein sind, so kann man dieselben für beide Theile der Bahn vor und nach der grossen Störung als constant betrachten, und diese Gleichung gilt dann für Elementensysteme vor und nach dieser Störung.

Dass die Bedeutung dieser Gleichung stark überschätzt wurde, wurde bereits in dem Artikel »Kometen und Meteore« hervorgehoben.

69. Anomale Bewegungserscheinungen bei Kometen. Berücksichtig man bei der Untersuchung der Bewegung des Kometen die Störungen, so wie sie durch die Einwirkung der Planeten entstehen, so lässt sich wohl für kleine Zeiträume, also bei den nicht periodischen Kometen, dann während einige

weniger Umläufe eines periodischen Kometen eine hinreichende Uebereinstimmung zwischen der Theorie und den Beobachtungen erzielen. Hingegen ergab sich zunächst bei dem von PONS entdeckten, von ENCKE untersuchten und nach ihm benannten Kometen mit etwa $3\frac{1}{3}$ Jahren Umlaufszeit, wie schon im I. Bande pag. 160 erwähnt wurde, aus der Discussion einer grossen Anzahl von Umläufen, dass sich die Umlaufszeit stetig verkürze: ENCKE zog daraus den Schluss, dass die Bewegung in einem widerstehenden Mittel stattfinde.

Um zunächst zu untersuchen, ob nicht eine Störung anderer Art die Ursache dieser Erscheinung sein könne, möge angenommen werden, dass irgend eine unbekannte störende Wirkung in der Richtung des Radiusvectors wirke; dann erhält man, da in den Formeln 67 (2) $(Q) = 0$ zu setzen ist:

$$\frac{d\mu}{dv} = -\frac{3k}{\sqrt{a}}\, e r \sin v (P) f_1; \qquad \frac{d\varphi}{dv} = \frac{pr}{\cos\varphi} \sin v (P) f_1. \tag{1}$$

Daraus folgt, wenn man das Integral

$$\int_0 r \sin v (P) f_1 dv = J \tag{2}$$

setzt, für die Aenderungen der mittleren Bewegung und des Excentricitätswinkels von der Zeit des Periheldurchganges bis zur Anomalie $v$:

$$\delta\mu = -\frac{3k}{\sqrt{a}} \sin\varphi J; \qquad \delta\varphi = \frac{p}{\cos\varphi} J, \tag{3}$$

demnach für das Verhältniss $V$ dieser Aenderungen:

$$V = \frac{\delta\mu}{\delta\varphi} = -\frac{3k}{a\sqrt{a}} \operatorname{tang}\varphi. \tag{4}$$

Für den ENCKE'schen Kometen ist $\log a = 0{\cdot}346$, $\varphi = 57^\circ 48'$, demnach $V = -0{\cdot}0248$.

Legt man die von v. ASTÉN für einen vollen Umlauf gefundenen Zahlen

$$\delta\mu = +0''{\cdot}1044; \quad \delta\varphi = -3''{\cdot}68$$

zu Grunde, so wird

$$\frac{\delta\mu}{\delta\varphi} = -0{\cdot}0284.$$

Eine selbst vollkommene Uebereinstimmung dieses Verhältnisses, mit dem aus den Beobachtungen folgenden Werthe ist jedoch noch nicht ausreichend, um das Vorhandensein von Kräften dieser Art als erwiesen zu betrachten. Nächstdem kommt es ja auf die absoluten Beträge der Störungen selbst an. Nimmt man an, dass z. B.

$$(P) = -\frac{W}{r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^n \tag{5}$$

ist, so wird, wenn der constante Faktor $m_1$ mit $W$ vereinigt wird:

$$J = -W\int_0^v \frac{r^2}{p} \sin v \cdot \frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^n dv = -\frac{W}{p}\int_0^v \left(\frac{dr}{dt}\right)^n \sin v\, dv.$$

Es ist aber

$$\frac{dr}{dt} = \frac{k_0}{\sqrt{p}}\, e \sin v,$$

demnach

$$J = -\frac{k_0^n}{p^{\frac{n+2}{2}}}\, W \int_0^v e^n \sin^{n+1} v\, dv$$

und damit

$$\delta\mu = +\frac{3k_0^{n+1} e^{n+1} W}{(\sqrt{p})^{n+3}} \cos\varphi \int_0^v \sin^{n+1} v\, dv,$$

Ist nun $n$ gerade, so wird das Integral über einen vollen Umlauf verschwinden, demnach $\delta\mu = 0$ sein; ist $n$ ungerade, so wird

$$\delta\mu = \frac{8 k_0^{n+1} e^{n+1} W \cos\varphi}{(\sqrt{p})^{n+3}} \binom{n+1}{\frac{n+1}{2}} \cdot \frac{\pi}{2^n}. \tag{6a}$$

Weiter wird

$$\frac{d\pi}{dv} = + \frac{rp}{e} \cos v \frac{W}{r^2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^n \cdot \frac{r}{p}$$

$$\delta\pi = \left(\frac{k_0}{\sqrt{p}}\right)^n W e^{n-1} \int_0^v \sin^n v \cos v \, dv, \tag{6b}$$

daher das Integral über einen vollen Umkreis genommen für jedes beliebige $n$ gleich Null. Daraus folgt demnach, dass ein in Form des WEBER'schen Gesetzes modificirtes Attractionsgesetz wohl geeignet wäre, eine Beschleunigung der mittleren Bewegungen zu erklären, dass jedoch das WEBER'sche Gesetz selbst solche Störungen nicht zu erklären vermag, da in demselben $n = 2$ ist. Für $n = 1$ würde folgen:

$$\delta\mu = \frac{8\pi k_0^2 e^2}{a^3 \cos^3\varphi} W.$$

$W$ kann dabei als eine absolute Constante angesehen werden, indem die Abhängigkeit der Kraft $P$ von dem verkehrten Quadrate der Entfernung bereits durch den Nenner $r^2$ ausgedrückt erscheint. Das Attractionsgesetz wird dann gegeben durch die Formel[1]):

$$\frac{k_0^2}{r^2}\left(1 - W \frac{dr}{dt}\right).$$

Nimmt man hier $W$ als absolute Constante an, so wäre für zwei verschiedene Himmelskörper

$$\delta\mu : \delta\mu_1 = \frac{e^2}{a^3 \cos^3\varphi} : \frac{e_1^2}{a_1^3 \cos^3\varphi_1}. \tag{7}$$

Das Auftreten des Faktors $e^2$ bei $\delta\mu$ ist nicht ausreichend, um die Erscheinung zu erklären, dass bei den Planeten eine Secularbeschleunigung nicht stattfindet; insbesondere aber ist hervorzuheben, dass Kräfte dieser Art nach (6b) nicht geeignet sind, die anomale Bewegung des Mercurperihels zu erklären.

Es sollen noch in Kürze wenigstens die Resultate angeführt werden, welche man erhält, wenn $W$ nicht constant, sondern mit $r$ veränderlich angenommen wird. Man kann dann annehmen, dass

$$(P) = -\frac{W}{r^m}\left(\frac{dr}{dt}\right)^n \tag{8}$$

ist, wo nunmehr $W$ wieder als constant angenommen werden kann. Man erhält dann, wenn $\left[\frac{n}{2}\right]$ die grösste in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl ist:

a) für gerade $n$:

$\delta\mu = 0$

$$\delta\pi = \frac{k^n W \left(\frac{e}{2}\right)^n \cdot 2\pi}{(\sqrt{p})^{n+2m-4}} \binom{n}{\frac{n}{2}} \sum_{\mu=1}^{\left[\frac{m-2}{2}\right]-1} \frac{(m-2)(m-3)\ldots(m-2\mu)}{(n+2)(n+4)\ldots(n+2\mu)} \frac{1}{(\mu-1)!} \left(\frac{e^2}{2}\right)^{\mu-1}.$$

---

1) Vergl. v. OPPOLZER, Astr. Nachr. No. 2319.

b) Für ungerade $n$:

$$\delta\mu = \frac{3k^{n+1} M\left(\frac{e}{2}\right)^{n+1} \cdot 2\pi}{(\sqrt{p})^{n+2m-1}} \cos\varphi \binom{n+1}{\frac{n+1}{2}} \sum_{\mu=0}^{\mu=\left[\frac{m-2}{2}\right]} \frac{(m-2)(m-3)\ldots(m-2\mu-1)}{(n+3)(n+5)\ldots(n+2\mu+1)} \frac{1}{\mu!}\left(\frac{e^2}{2}\right)^{\mu}$$

$\delta\pi = 0.$

Diese Resultate zeigen daher die Unvereinbarkeit der Annahme dieser Attractionsgesetze mit den Bewegungserscheinungen der Himmelskörper.

Die Untersuchung der Wirkung von Kräften, die in der Richtung senkrecht zum Radiusvector stehen, hat praktisch keine Bedeutung, da keinerlei Grund für die Annahme von solchen vorliegt.

70. Bewegungswiderstände. Die unter dem geringen äusseren Drucke stattfindenden Gasausströmungen und Verdunstungen von Flüssigkeiten, theils von den festen und flüssigen Bestandtheilen, theils von den Gashüllen der Himmelskörper müssen nothwendig zur Folge haben, dass der Weltraum mit einem wenn auch äusserst feinen Fluidum erfüllt ist. Dieses Fluidum hat man sich dann als einen gas- oder dampfförmigen Körper von äusserst geringer Dichte zu denken[1]), der sich in der Nähe der Himmelskörper zu Atmosphären ballt, oder eigentlich die in den Weltraum sich erstreckende und mehr und mehr verdünnende Atmosphäre ist. Wie die Atmosphäre selbst kann dann dieses Medium um die Weltkörper kreisen, aber in immer grösseren Entfernungen nach Massgabe desselben immer langsamer, sodass jene Himmelskörper, welche immer in nahe derselben Entfernung bleiben (Bahnen von kleinen Excentricitäten beschreiben) in ihren Bewegungen nicht wesentlich gehindert werden; hingegen solche, deren Entfernungen stark variiren (welche stark excentrische Bahnen beschreiben) merkliche Störungen erfahren können, und zwar um so stärker, je dichter das Medium ist.

Es finden sich aber im Weltraume nebst den grossen planetarischen Massen eine sehr grosse Zahl von sehr kleinen Körperchen, welche als Meteorschwärme regelmässige Bahnen beschreiben, und zwar entweder im Bereiche eines Sonnensystems diesem zugehörig, oder als stellare Schwärme, sich in parabolischen oder hyperbolischen Bahnen im Weltraume bewegend. Hierzu kommen vereinzelte Meteormassen, die sich als Meteorite, Feuerkugeln u. s. w. offenbaren, so dass man die Annahme wenigstens nicht ganz von der Hand weisen darf, dass der Weltraum von derartigen discreten, relativ kleinen, aber festen Körperchen erfüllt ist. Diese Massen werden, wenn sie in die Attractionssphäre einer relativ grossen Masse (eines Fixsternes oder einer Planetenmasse) gelangen, von dieser angezogen sich dieser nähern, oder um dieselbe mit der dieser Entfernung eigenthümlichen Geschwindigkeit kreisen; so werden um die grossen Massen Anhäufungen, Verdichtungen von Massenpartikelchen stattfinden.

Wenn auch die Verfolgung der Bewegungen dieser Massen, sofern es sich um die einzelnen derselben handelt, ganz bedeutende Schwierigkeiten darbieten würde, so ist es nicht schwer, sich ein Bild von ihrer Wirkung im ganzen zu machen — genau so, wie man in der kinetischen Gastheorie die Bewegung der Gasmoleküle nicht ins einzelne verfolgen, hingegen ein Bild der Gesammtwirkung erhalten kann. Es ist dann aber auch zum mindesten denkbar, dass die Wirkung derartiger kosmischer Massen in ihrer Totalität auf die Bewegung

[1]) Indessen bleibt dasselbe ein ponderabler Stoff und darf mit dem hypothetischen Weltäther, der als Träger der Licht- und Wärmewellen gedacht wird, nicht verwechselt werden.

der zu untersuchenden Himmelskörper als qualitativ gleichartig mit der Einwirkung von Gasmassen auf terrestrische Objekte sei, und sich mit derjenigen eines wirklich gasförmigen Mediums confundirt. Dass hierbei ein quantitativer Unterschied stattfinden kann, ist selbstverständlich; doch wird dadurch nur das ohnehin unbekannte Gesetz der Dichten und des Widerstandes alterirt.

Es möge zunächst über die Dichte $\rho$ dieses Mediums, ob es nun in der Form einer Gasmasse allein, oder von kosmischen, ihrer Grösse nach mit kleinen[1]) terrestrischen Objekten vergleichbaren Körperchen gedacht werde, nur die eine sehr wahrscheinliche Annahme gemacht werden, dass sie eine Function der Entfernung vom anziehenden Körper sei. Die Wirkung dieses Mediums wird man nach dem gewöhnlichen Widerstandsgesetze in der Richtung der Tangente, entgegengesetzt der Bewegungsrichtung annehmen können. Ueber die Abhängigkeit des Widerstandes von der Dichte und Geschwindigkeit soll jedoch vorerst nur die, ebenfalls sehr natürliche Annahme gemacht werden, dass der Widerstand in der Nähe der Sonne am stärksten ist, nach Massgabe der Entfernung aber nach einem vorläufig ebenfalls nicht näher zu bestimmenden Gesetze abnimmt. Bezeichnet man den Widerstand mit $-k_0^2 W$, so werden seine Componenten

$$X = -k_0^2 W \frac{dx}{ds}; \quad Y = -k_0^2 W \frac{dy}{ds}; \quad Z = -k_0^2 W \frac{dz}{ds}. \tag{1}$$

Wählt man als Fundamentalebene die Bahn des gestörten Himmelskörpers, so werden $z$ und $\frac{dz}{ds}$ sehr klein, und $Z$ kann gleich Null gesetzt werden. Geht man auf polare Coordinaten über, so wird:

$$x = r\cos l, \qquad y = r\sin l.$$

Wenn man nur Störungen erster Ordnung berücksichtigt, d. h. in den störenden Kräften die Elemente als constant ansieht, so wird sich ergeben:

$$\frac{dx}{dt} = -\sin l \frac{k_0}{\sqrt{p}}(1 + e\cos v) + \cos l \frac{k_0}{\sqrt{p}} e\sin v$$
$$\frac{dy}{dt} = +\cos l \frac{k_0}{\sqrt{p}}(1 + e\cos v) + \sin l \frac{k_0}{\sqrt{p}} e\sin v$$
$$\frac{ds}{dt} = \frac{k_0}{\sqrt{p}}\sqrt{1 + 2e\cos v + e^2}$$

und damit:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= -\sin l \frac{1 + e\cos v}{R} + \cos l \frac{e\sin v}{R} \\ \frac{dy}{ds} &= +\cos l \frac{1 + e\cos v}{R} + \sin l \frac{e\sin v}{R}, \end{aligned} \tag{2}$$

wobei

$$R = \sqrt{1 + 2e\cos v + e^2} \tag{3a}$$

gesetzt ist. Durch Einführung der excentrischen Anomalie erhält man

$$R = \sqrt{1-e^2}\sqrt{\frac{1 + e\cos E}{1 - e\cos E}}. \tag{3b}$$

---

[1]) Schon die Bezeichnung »klein« ist eine relative, und man braucht nicht allzu minimale Objekte zu wählen, um das Verhältniss derselben zur Sonnenmasse als Grösse derselben Ordnung zu erkennen mit derjenigen von Gasmolekülen zu »kleinen« terrestrischen Objecten.

Setzt man die Werthe (2) in (1) ein, so folgt

$$X = -\frac{k_0^2 W}{R}[e\cos l\sin v - \sin l(1 + e\cos v)]$$

$$Y = -\frac{k_0^2 W}{R}[e\sin l\sin v + \cos l(1 + e\cos v)].$$

Hiermit folgt nach 19 (8) (in welcher Formel jedoch $v$ durch $l$ zu ersetzen ist):

$$P = -\frac{k_0^2 W}{R} e\sin v \qquad Q = -\frac{k_0^2 W}{R}(1 + e\cos v).$$

Vergleicht man diese Werthe mit den in 67 (2) auftretenden, so folgt, dass man

$$(P) = e\sin v, \quad (Q) = 1 + e\cos v \tag{4}$$

und an Stelle von $m_1$ den Faktor $-\frac{W}{R}$ einzuführen hat; es wird daher $f = -\frac{W\sec\varphi}{R}$ und man erhält für die Variation der Elemente

$$\begin{aligned}
&\frac{da}{dE} = +2a^2p(1 + e\cos E)f && \frac{d\Omega}{dE} = 0\\
&\frac{d\mu}{dE} = -3\sqrt{p}\,k_0\cos\varphi(1 + e\cos E)f && \frac{di}{dE} = 0\\
&\frac{de}{dE} = +2p^2\cos E\cdot f && \left(\frac{dM_0}{dE}\right)_1 = -\frac{2pa}{e}\sin E(1 - e^2\cos E)f\\
&\frac{d\pi}{dE} = +2pa\,cotang\,\varphi\sin E\cdot f && \left(\frac{dM_0}{dE}\right)_2 = -3pr\int(1 + e\cos E)f\,dE.
\end{aligned} \tag{5}$$

Hieraus folgt zunächst $\Omega = \Omega_0$ und $i = i_0$ constant; die Lage der Bahnebene wird daher durch den Widerstand eines Mediums nicht geändert, was ja an und für sich klar ist, da der Widerstand in der Bahnebene selbst wirkt. Führt man als unabhängige Veränderliche $v$ ein, so wird

$$\begin{aligned}
&\frac{da}{dv} = -\frac{2a^2r^2}{p}WR && \frac{d\left(\frac{1}{a}\right)}{dv} = +\frac{2r^2}{p}WR\\
&\frac{de}{dv} = -2r^2(e + \cos v)\frac{W}{R} && \frac{d\mu}{dv} = +\frac{3kr^2}{\sqrt{ap}}WR\\
&\frac{d\pi}{dv} = -2r^2\frac{\sin v}{e}\frac{W}{R}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Sei nun

$$\int_0^v r^2 WR\,dv = J(v), \quad \int_0^v r^2\frac{W}{R}dv = J_1(v), \tag{7}$$

so wird

$$\delta\mu = +\frac{3k}{\sqrt{ap}}J(v); \quad \delta e = -\frac{1}{e}J(v) + \frac{1 - e^2}{e}J_1(v),$$

folglich

$$\frac{\delta e}{\delta\mu} = -\frac{\sqrt{ap}}{3ke} + \frac{1 - e^2}{e}\frac{\sqrt{ap}}{3k}\frac{J_1(v)}{J(v)},$$

daher das Verhältniss $V$

$$V = \frac{\delta\mu}{\delta\varphi} = -\frac{3k}{a^{\frac{3}{2}}}tang\,\varphi\frac{1}{1 - \cos^2\varphi\frac{J_1(v)}{J(v)}} = -\frac{3k}{p^{\frac{3}{2}}}\sin\varphi\cos^2\varphi\frac{1}{1 - \cos^2\varphi\frac{J_1(v)}{J(v)}}. \tag{8}$$

Nimmt man die Integrale $J, J_1$ von 0 bis 360°, so erhält man die Veränderungen $\delta\mu$, $\delta e$, $\delta\pi$ während eines vollen Umlaufs des Kometen. Je näher $e$ an die Ein-

heit kommt, desto mehr wird sich der Werth von $\cos^2\varphi \frac{J_1(v)}{J(v)}$ der Null nähern, desto näher kommt daher das Verhältniss $V$ dem Ausdrucke $-\frac{3k}{p^{\frac{3}{2}}} \sin\varphi \cos^2\varphi$, wird daher von dem Gesetze des Widerstandes völlig unabhängig. Im Allgemeinen aber wird $V$ von dem Verhältniss der beiden Integrale $J(v)$, $J_1(v)$ welche Functionen des Widerstandes sind, abhangig sein, und der numerische Werth dieses Verhältnisses wird eine Entscheidung darüber gestatten, in wieweit sich aus den beobachteten Veränderungen der Excentricität und mittleren Bewegung auch ein Widerstandsgesetz folgern lässt. Der Coëfficient $-\frac{3k}{a^{\frac{3}{2}}} \tang\varphi$ ist übrigens völlig identisch mit dem in 69 (4) unter ganz anderen Voraussetzungen erhaltenen; die Uebereinstimmung dieses Verhältnisses mit den Beobachtungen kann daher noch kein Kriterium für die Richtigkeit der einen oder anderen Hypothese bilden. Dass der aus den Beobachtungen folgende Werth von $V$ mit dem ersten, von dem Widerstandsgesetze unabhängigen Faktor übereinstimmt, könnte allerdings zu dem Schlusse führen, dass, wenn die anomalen Bewegungserscheinungen Folge eines Widerstand leistenden Mediums wären, das Widerstandsgesetz ein solches sein müsste, bei welchem das Verhältniss $\frac{J_1(v)}{J(v)}$ jedenfalls sehr klein ist[1]. Immerhin wird es nöthig, die absoluten Werthe der Störungen zu bestimmen. Dabei wird es jedoch etwas bequemer die excentrische Anomalie als Integrationsvariable beizubehalten, wobei der Fall $e = 1$ von der Betrachtung ausgeschlossen werden kann. Es wird

$$f = -\frac{W\sec\varphi}{R} = -\frac{W}{1-e^2}\sqrt{\frac{1-e\cos E}{1+e\cos E}}.$$

Nimmt man an, dass das Widerstandsgesetz analog dem auf der Erde beobachteten der Dichte und dem Quadrate der Geschwindigkeit direkt proportional sei, so wird

$$W = \rho\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \tag{9}$$

wo der Proportionalitätsfaktor in $\rho$ hineingezogen werden kann. LAPLACE setzt nun

$$\rho r^2 \frac{W}{R} = k_0^2 \rho r^2 R = A + eB\cos v + e^2 C\cos 2v + \dots.$$

Dann wird

$$\begin{aligned} pr^2 WR &= A + eB\cos v + e^2 C\cos 2v \dots \quad \dots)(1 + 2e\cos v + e^2) = \\ &= [A(1+e^2) + Be^2] + \text{periodische Glieder} \end{aligned}$$

$$r^2(e + \cos v)\frac{W}{R} = \frac{1}{p}(Ae + \tfrac{1}{2}Be) + \text{periodische Glieder}$$

und damit

$$\frac{d\frac{1}{a}}{dv} = \frac{2}{p^2}[A(1+e^2) + Be^2]$$

$$\frac{de}{dv} = -\frac{2}{p}(A + \tfrac{1}{2}B)e.$$

---

[1]) v. OPPOLZER setzt in den Astr. Nachrichten No. 2319 für den Faktor $1 + e\cos E$ im Ausdrucke für $\frac{d\mu}{dt}$ den Wert 2, wodurch dann die Willkürlichkeit des Widerstandsgesetzes, allerdings nicht ganz strenge, gefolgert wird.

Diese beiden Gleichungen enthalten $a$ und $e$ nicht getrennt; LAPLACE leitet daraus eine Gleichung zwischen $a$ und $e$ ab; man findet leicht durch Division

$$\frac{de}{da} = \frac{(2A+B)e(1-e^2)}{2a[A+(A+B)e^2)]}.$$

Hieraus erhält man zunächst eine Functionalbeziehung zwischen $a$ und $e$; drückt sich z. B. $a$ durch $e$ aus, und substituirt man den Ausdruck für $a$ in die Gleichung für $\frac{de}{dv}$, so erhält man dann $e$ und damit auch $a$ durch $v$ ausgedrückt. Die Gleichung ist übrigens leichter zu behandeln, als es auf den ersten Blick erscheint; es lassen sich nämlich die Variabeln trennen, und man erhält

$$\frac{2[A+(A+B)e^2]}{e(1-e^2)}de = \frac{(2A+B)da}{a}$$

oder

$$\left(\frac{2A}{e} + \frac{2A+B}{1-e} - \frac{2A+B}{1+e}\right) de = (2A+B)\frac{da}{a},$$

woraus durch Integration

$$ea = \frac{1}{1-e^2} e^{\frac{2A}{2A+B}}$$

folgt; $c$ bestimmt sich aus zusammengehörigen Werthen $a_0$, $e_0$; es ist

$$c = \frac{1}{p_0} e_0^{\frac{2A}{2A+B}}.$$

Hiermit wird

$$\frac{de}{dv} = -c\,(2A+B)\,e^{\frac{B}{2A+B}},$$

demnach

$$e^{-\frac{B}{2A+B}}de = -c(2A+B)dv.$$

Durch Integration folgt:

$$\frac{e^{1-\frac{B}{2A+B}}}{1-\frac{B}{2A+B}} = c_0(2A+B) - c(2A+B)v,$$

wenn die Integrationsconstante mit $c_0(2A+B)$ bezeichnet wird. Hieraus folgt endlich

$$\frac{1}{2A} e^{\frac{2A}{2A+B}} = c_0 - cv$$

$$e = 2A(c_0 - cv)^{\frac{2A+B}{2A}}.$$

$c_0$ bestimmt sich aus dem Werthe $e_0$ für eine gegebene Zeit. Für die Parabel ist $e_0 = 1$, demnach $c = 0$, $e$ constant, wie auch aus dem Werthe für $\frac{de}{da}$ folgt; dann wird auch $a$ constant, d. h. eine Parabel würde bei dem Vorhandensein eines widerstehenden Mittels ihren Charakter nicht ändern. Die Ableitung ist aber durchaus nicht einwurfsfrei, sie setzt nämlich die Entwickelung in einer nach $\cos$ der Vielfachen der mittleren Anomalien fortschreitenden Reihe voraus.

Die Coëfficienten $A$, $B$, $C$ können natürlich erst bestimmt werden, wenn $\rho = f(r)$ bekannt ist, d. h. die Abhängigkeit des Widerstandes oder der Dichte des Mittels von der Entfernung vom Centralkörper.

Dass $e$ nicht sehr gross werden kann, selbst wenn $B$ negativ wäre, kann auf folgende Art gezeigt werden. Man hat

$$\text{für } v = 0: \quad \left(p\frac{W}{R}\right)_0 = (A + Be + Ce^2 + \dots)\left(\frac{1+e}{p}\right)^2 = \frac{1}{p^2}[A + (2A+B)e + \dots]$$

$$\text{für } v = 180^\circ: \left(p\frac{W}{R}\right)_1 = (A - Be + Ce^2 + \dots)\left(\frac{1-e}{p}\right)^2 = \frac{1}{p^2}[A - (2A+B)e + \dots].$$

Da nun die Dichte des Mittels sowohl als auch die Geschwindigkeit des Himmelskörpers in grösserer Entfernung von der Sonne geringer sein muss, so wird

$$\left(p\frac{W}{R}\right)_0 > \left(p\frac{W}{R}\right)_1$$

sein müssen; daraus folgt, dass für den Fall einer convergenten Entwickelung, wie man dieselbe ja voraussetzen muss, $2A + B$ dasselbe Zeichen haben wird wie $A$, also $\frac{2A}{2A+B}$ jedenfalls positiv sein muss.

Führt man die excentrische Anomalie ein, so hat man

$$W = \rho\left(\frac{k_0}{\sqrt{p}}R\right)^2 = \rho\frac{k_0^2}{p}R^2; \quad f = -\sec\varphi R \cdot \rho\frac{k_0^2}{p}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\mu}{dE} &= +8\frac{\sqrt{a}}{p}k_0^2\cos^2\varphi\,\rho\sqrt{\frac{(1+e\cos E)^3}{1-e\cos E}} \\
\frac{de}{dE} &= -2p\,k_0^2\,\rho\cos E\sqrt{\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}} \\
\frac{d\pi}{dE} &= -2k_0^2 a\,\mathrm{cotang}\,\varphi\,\rho\sin E\sqrt{\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}},
\end{aligned} \tag{10}$$

demnach

$$\begin{aligned}
\delta\mu &= +\frac{8k_0^2}{\sqrt{p}}\cos\varphi\int_0^E\rho(1+e\cos E)\sqrt{\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}}\,dE \\
\delta e &= -2pk_0^2\int_0^E\rho\cos E\sqrt{\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}}\,dE \\
\delta\pi &= -2k_0^2\,a\,\mathrm{cotang}\,\varphi\int_0^E\rho\sin E\sqrt{\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}}\,dE.
\end{aligned} \tag{10a}$$

Nimmt man für $\rho$ die Beziehung

$$\rho = \frac{\rho_0}{r^n} = \frac{\rho_0}{a^n(1-e\cos E)^n},$$

so werden für ganzzahlige $n$ die Integrale elliptische Integrale werden; die Werthe $\delta\mu$, $\delta\varphi$, $\delta\pi$ lassen sich dann durch vollständige elliptische Integrale angeben[1], welche Tafeln entnommen werden können. Man erhält für den Encke'schen Kometen:

---

[1]) Vergl. Pontécoulant, »Théorie analytique du système du monde«, II. Bd., pag. 288. (Die daselbst gegebenen Fourier'schen Reihen sind jedoch nur bedingt richtig.) Ferner die Entwickelungen von Backlund in den »Astronom. Nachrichten« Bd. 101, No. 2414.

für $n = 0$: $\delta\mu = +0{\cdot}4102\,\rho_0$ $\delta\varphi = -9{\cdot}7116\,\rho_0$ $\frac{\delta\mu}{\delta\varphi} = -0{\cdot}04224$
für $n = 2$: $+1{\cdot}4517\,\rho_0$ $-51{\cdot}4267\,\rho_0$ $-0{\cdot}02823$.

Diese beiden Zahlen zeigen thatsächlich eine Abhängigkeit des Verhältnisses $V$ vom Widerstandsgesetze; mit dem aus den Beobachtungen gefolgerten Werthe 0·0284 stimmt der zweite Werth sehr gut überein, und könnte man hiernach das Widerstandsgesetz ausdrücken durch

$$W = \frac{\rho_0}{r^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \tag{9a}$$

wobei sich, die Constante $\rho_0$ in Bogensecunden ausgedrückt

$$\rho_0 = \frac{\delta\mu}{1{\cdot}4517} = 0{\cdot}071015$$

ergiebt. Das Verhältniss derselben zur Sonnenanziehung wird

$$\frac{\rho_0\, arc\, 1''}{k^2} = 0{\cdot}001178 = \frac{1}{848{\cdot}7} \tag{11}$$

sehr nahe der ENCKE'sche Werth.

**71. Absolute Bahnen; intermediäre Bahnen. GYLDÉN'sche Methode.** Unter Zugrundelegung der KEPLER'schen Ellipsen werden für die Störungen der Himmelskörper Reihen erhalten, deren Convergenz nicht nur nicht nachgewiesen ist, sondern in welchen bei Berücksichtigung der höheren Potenzen der Massen jedenfalls die Zeit ausserhalb der trigonometrischen Functionen erscheint. Derartige Lösungen können natürlich nur für beschränkte, wenn auch relativ sehr lange Zeiträume als gültig angenommen, jedoch keinesfalls als wirklich correcte Entwickelungen einer absolut richtigen Lösung angesehen werden. Unter einer »absoluten« Lösung versteht nun GYLDÉN[1]) eine solche, welche, sei es durch streng geschlossene Integration der Differentialgleichungen, oder auf dem Wege der successiven Näherungen erhalten, geschlossene Ausdrücke oder Reihen für die Coordinaten der Himmelskörper giebt, welche auf unbeschränkte Zeiträume gültig sind, d. h. bei denen die Zeit nur in den Ausdrücken für die den ganzen Umkreis durchlaufenden Coordinaten (Länge, Knoten und Perihel) sonst aber nicht ausserhalb der periodischen Functionen auftreten darf, und bei denen die in jeder Näherung eventuell auftretenden Reihen an sich selbst, aber auch die aufeinanderfolgenden Näherungen convergent sind. Von der Voraussetzung ausgehend, dass es nur eine einzige absolute Lösung geben kann, nämlich die sich in der Natur darbietende, in der mathematischen Analyse in verschiedene Formen gekleidete, kann dann geschlossen werden, dass das Resultat der successiven Näherungen, wenn diese den zuletzt erwähnten Bedingungen genügen, mit dem Resultate der Entwickelung der auf strengem Wege erhaltenen geschlossenen Integralformen identisch sein müsse. Dass die sämmtlichen, im früheren erwähnten Methoden absolute Lösungen in dem angeführten Sinne nicht geben, ist klar. Will man zu einer solchen gelangen, so muss man von vornherein die Rechnung so anlegen, dass bereits in der ersten Näherung jene Glieder gewonnen werden, welche, als zweite Näherung angesehen, viel zu gross sind, um die Methode als convergent erscheinen zu lassen. Es gilt dies ebensowohl für die Mondbewegung als für die Planetenbewegung; aber in erster Linie ist hierbei an die Entwickelungen für

---

[1]) Astron. Nachrichten 2453, Acta mathematica Bd. I: »Eine Näherungsmethode im Problem der drei Körper«; Traité des orbites absolues.

den Mond zu denken, da bei den Planeten die störende Wirkung der übrigen Himmelskörper gegenüber der Anziehung des Centralkörpers bedeutend zurücktritt. Erfahrungsgemäss erscheint dies auch dadurch ersichtlich, dass die Bahn des Mondes sich schon in sehr kurzen Zeiträumen, ja selbst während eines Umlaufs so sehr von der Ellipse entfernt, dass sie kaum als solche bezeichnet werden kann, während bei den Planeten selbst während einer sehr grossen Anzahl von Umläufen eine Abweichung nicht allzu merklich hervortritt.

Soll schon in erster Näherung ein analytischer Ausdruck gewonnen werden, welcher die wahre Bahn des Mondes einigermassen genau repräsentirt, so wird es durchaus nicht ausreichen, nur die Attraction des Centralkörpers, der Erde, zu berücksichtigen. Es erscheint nothwendig, von vornherein das Dreikörperproblem als solches anzuwenden, d. h. die Bewegung des Mondes unter der Einwirkung der Erde und der Sonne zu untersuchen. Da es nun aber nicht gelingt, die wahre Bahn, d. h. eine streng absolute Lösung zu finden, so muss man wenigstens zunächst eine solche Bahn suchen, von welcher sich die wahre Bahn nur um geringe Störungsbeträge unterscheidet. Diese Bahn nennt GYLDÉN eine »intermediäre« Bahn[1]). Sie wird erhalten, wenn man von der Kräftefunction, welche die Wirkung beider attrahirender Körper berücksichtigt, und die demgemäss hier nicht in ihrer Totalität als Störungsfunction betrachtet wird, diejenigen Glieder abtrennt, die von der niedrigsten Ordnung derjenigen Grössen sind, welche die Abweichung der Bahn von der Kreisform darstellen, und, die Summe der übrigen Glieder als Störungsfunction betrachtend, die Untersuchung der Einwirkung dieser auf die Gestaltung der wahren Bahn, einer zweiten Näherung vorbehält. Welche Glieder in erster Näherung zu behalten sind, zeigt die analytische Untersuchung selbst.

Die Stabilität der Bahnen erfordert, dass sie sich zwischen endlichen, nicht verschwindenden Grenzen bewegen. Liegt daher die Bahn nicht vollständig in einer Ebene, welches der allgemeinere und auch thatsächlich in der Natur vorkommende Fall ist, so wird dieselbe ganz in dem Zwischenraume zwischen zwei homocentrischen Hohlkugeln liegen, und wird bei jedem Umlaufe sowohl die äussere als auch die innere Kugel erreichen können, oder auch nicht. Im letzteren Falle kann man aber annehmen, dass die von dem Himmelskörper beschriebene Curve thatsächlich bei jedem Umlaufe zwei Kugeln, eine äussere und eine innere, jede mindestens einmal berührt, sonst aber beständig innerhalb des zwischen beiden liegenden Zwischenraumes fällt, dass aber die Distanz dieser Kugeln von einem Umlaufe zum andern variirt. Derartige Curven nennt GYLDÉN periplegmatische Curven, den Abstand der beiden Grenzkugeln das Diastema, und es werden daher periplegmatische Curven mit constantem und veränderlichem Diastema unterschieden.

Die periplegmatischen Curven werden als Raumcurven über irgend einer angenommenen Fundamentalebene verschiedene Höhen erreichen; nimmt man als Fundamentalebene eine Ebene, über welche sich der Himmelskörper ziemlich gleichmässig zu beiden Seiten entfernt, so wird die Gesammtbewegung des Körpers in der zu dieser Ebene senkrechten Richtung, d. h. der Abstand zweier paralleler Ebenen, zwischen welchen sich der Körper beständig bewegt, ohne sich jemals über die durch dieselben gesetzten Grenzen hinaus zu entfernen,

---

[1]) »Undersökningar af Theorien for himlakropparnas rörelser«. Abhandlungen der k. schwedischen Academie der Wissenschaften Bd. 6 und 7. Ferner A. N. No. 2383 und »Die intermediäre Bahn des Mondes«, Acta mathematica, Bd. 7.

das Anastema genannt. Das Argument, welches den Radiusvector bestimmt, d. i. der Winkel, welchen dieser Radiusvector von einer festen Richtung aus gezählt, beschreibt, und von welchem eben die Grösse desselben abhängt, heisst das diastematische Argument; das Argument, welches die Höhen (Entfernungen von der Fundamentalebene) bestimmt, heisst das anastematische Argument. Das erstere entspricht der Länge oder wahren Anomalie in der elliptischen Bewegung; das zweite dem Argument der Breite.

72. Aufstellung der Differentialgleichungen. Seien r, $l$ die Projection des Radiusvector und das diastematische Argument, $x$, $y$ die rechtwinkligen Coordinaten in der Fundamentalebene $X$-$Y$, so wird

$$x = \mathrm{r}\cos l,\; y = \mathrm{r}\sin l. \tag{1}$$

Bestimmt man die Cordinaten $\bar{x}$, $\bar{y}$ so, dass

$$\bar{x} = x\Gamma,\; \bar{y} = y\,\Gamma,\; \text{daher auch } \bar{\mathrm{r}} = \mathrm{r}\,\Gamma \tag{2}$$

$$\bar{x} = \bar{\mathrm{r}}\cos\bar{l},\; \bar{y} = \bar{\mathrm{r}}\sin\bar{l} \tag{1a}$$

ist, so wird zunächst, da

$$\tan g\, l = \frac{y}{x},\quad \tan g\,\bar{l} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \frac{y}{x} \text{ ist, } \bar{l} = l$$

sein. Führt man hier noch die reducirte Zeit $\zeta$ durch die Gleichung

$$\frac{dt}{d\zeta} = \frac{U}{\Gamma^2} \tag{3}$$

ein so ergeben sich hier vorerst dieselben Gleichungen die in No. 55 auftreten, wenn $\zeta$, $\Gamma$, $U$ wieder als unbestimmte Functionen betrachtet werden. Die Gleichungen 55 (7) werden unter Einführung der Polarcoordinaten (1a), wobei aber statt $\bar{l}$ sofort $l$ geschrieben wird:

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\zeta}\left(\bar{\mathrm{r}}^2\frac{dl}{d\zeta}\right) - \frac{1}{U}\frac{dU}{d\zeta}\cdot\bar{\mathrm{r}}^2\frac{dl}{d\zeta} = \frac{U^2}{\Gamma^2}Q \\ \left[\bar{\mathrm{r}}\frac{d^2\bar{\mathrm{r}}}{d\zeta^2} - \bar{\mathrm{r}}^2\left(\frac{dl}{d\zeta}\right)^2\right] - \frac{1}{U}\frac{dU}{d\zeta}\cdot\bar{\mathrm{r}}\frac{d\bar{\mathrm{r}}}{d\zeta} - \frac{\bar{\mathrm{r}}^2}{\Gamma}\left[\frac{d^2\Gamma}{d\zeta^2} - \frac{1}{U}\frac{dU}{d\zeta}\frac{d\Gamma}{d\zeta}\right] = \frac{U^2}{\Gamma^2}P - \frac{U^2}{\Gamma}\frac{k_0^2}{\mathrm{r}},\end{gathered} \tag{4}$$

wo nach 55 (8):

$$P = \frac{k_0^2}{\mathrm{r}} + (xX + yY);\quad Q = (xY - yX) \tag{5}$$

ist. Es soll nun weiter $l$ in zwei Theile $L$ und $\chi$ zerlegt werden, sodass

$$l = L + \chi \tag{6}$$

ist, und $L$ so bestimmt werden, dass

$$\bar{\mathrm{r}}^2\frac{dL}{d\zeta} = k_0\sqrt{p} \tag{7}$$

wird, wobei, wie man leicht sieht, $p$ eine dem Parameter der elliptischen Bewegung analoge Bedeutung hat, vorerst jedoch nicht als constant, sondern als veränderlich angesehen werden soll.

Die erste Gleichung (4) lässt sich nun schreiben:

$$\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{1}{U}\bar{\mathrm{r}}^2\frac{dl}{d\zeta}\right) = \frac{UQ}{\Gamma^2},$$

demnach:

$$\bar{\mathrm{r}}^2\frac{dl}{d\zeta} = U\left\{C + \int\frac{U}{\Gamma^2}Q\,d\zeta\right\}$$

oder

$$k_0\sqrt{p} + \bar{\mathrm{r}}^2\frac{d\chi}{d\zeta} = U\left\{C + \int\frac{U}{\Gamma^2}Q\,d\zeta\right\}.$$

wobei $C$ die Integrationsconstante ist, die, wie man sofort sieht, $k_0\sqrt{p_0}$ ist. Da

$$\bar{r}^2 \frac{d\chi}{d\zeta} = \bar{r}^2 \frac{d\chi}{dL}\frac{dL}{d\zeta} = \frac{d\chi}{dL}\cdot k_0\sqrt{p}$$

ist, so wird

$$k_0\sqrt{p}\left\{\frac{d\chi}{dL}+1\right\} = U\left\{k_0\sqrt{p_0}+\int\frac{U}{\Gamma^2}\,Q\,d\zeta\right\} \tag{8}$$

oder wegen

$$\frac{d\zeta}{dL} = \frac{\bar{r}^2}{k_0\sqrt{p}}$$

$$k_0\sqrt{p}\left\{\frac{d\chi}{dL}+1\right\} = U\left\{k_0\sqrt{p_0}+\frac{1}{k_0}\int\frac{U}{\Gamma^2}\frac{\bar{r}^2}{\sqrt{p}}\,Q\,dL\right\}. \tag{8a}$$

Um die zweite Gleichung (4) in derselben Weise zu transformiren, ist:

$$\frac{d\Gamma}{d\zeta} = \frac{d\Gamma}{dL}\frac{k_0\sqrt{p}}{\bar{r}^2};\qquad \frac{d\bar{r}}{d\zeta} = \frac{d\bar{r}}{dL}\cdot\frac{k_0\sqrt{p}}{\bar{r}^2}$$

$$\frac{d^2\Gamma}{d\zeta^2} = \frac{k_0^2 p}{\bar{r}^4}\frac{d^2\Gamma}{dL^2} - 2\frac{k_0^2 p}{\bar{r}^5}\frac{d\Gamma}{dL}\frac{d\bar{r}}{dL} + \frac{1}{2}\frac{k_0^2}{\bar{r}^4}\frac{d\Gamma}{dL}\frac{dp}{dL}$$

$$\frac{d^2\bar{r}}{d\zeta^2} = \frac{k_0^2 p}{\bar{r}^4}\frac{d^2\bar{r}}{dL^2} - 2\frac{k_0^2 p}{\bar{r}^5}\left(\frac{d\bar{r}}{dL}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{k_0^2}{\bar{r}^4}\frac{d\bar{r}}{dL}\frac{dp}{dL}$$

folglich

$$\begin{aligned}\frac{k_0^2 p}{\bar{r}^3}\frac{d^2\bar{r}}{dL^2} - \frac{2}{\bar{r}^4}k_0^2 p\left(\frac{d\bar{r}}{dL}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{k_0^2}{\bar{r}^3}\frac{d\bar{r}}{dL}\frac{dp}{dL} - \left(1+\frac{d\chi}{dL}\right)^2\frac{k_0^2 p}{\bar{r}^3} -\\ - \frac{k_0^2 p}{\bar{r}^3}\frac{d\bar{r}}{dL}\cdot\frac{1}{U}\frac{dU}{dL} - \frac{\bar{r}^2}{\Gamma}\left[\frac{k_0^2 p}{\bar{r}^4}\frac{d^2\Gamma}{dL^2} - 2\frac{k_0^2 p}{\bar{r}^5}\frac{d\Gamma}{dL}\frac{d\bar{r}}{dL} + \right.\\ \left. + \frac{1}{2}\frac{k_0^2}{\bar{r}^4}\frac{d\Gamma}{dL}\frac{dp}{dL} - \frac{k_0^2 p}{\bar{r}^4}\frac{d\Gamma}{dL}\cdot\frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\right] = \frac{U^2}{\Gamma^2}P - \frac{U^2}{\Gamma}\frac{k_0^2}{\bar{r}}.\end{aligned} \tag{9}$$

In dieser Formel sind noch zwei Functionen willkürlich; zunächst folgt aus (9) dass, wie immer man auch $\bar{r}$ in der intermediären Bahn wählt, $\Gamma$ hiernach so bestimmt werden kann, dass die Gleichung (4) befriedigt wird. Nimmt man nun noch für $U$ und $p$ beliebige Functionen, so folgt aus (8) $\chi$, und aus (7) $\zeta$ (als Function von $L$, welches überall als unabhängige Variable auftritt) aus (3) $t$ und aus (6) $l$. Wählt man hingegen $\chi$ beliebig, was darauf hinauskommt, in (6) eine ganz bestimmte Zerlegung vorzunehmen, so wird durch (8) $U$ bestimmt. Hierfür erhält man durch Differentiation:

$$k_0\sqrt{p}\frac{d^2\chi}{dL^2} + \frac{1}{2}\left(1+\frac{d\chi}{dL}\right)\frac{k_0}{\sqrt{p}}\frac{dp}{dL} = \frac{dU}{dL}\cdot\frac{k_0\sqrt{p}\left(1+\frac{d\chi}{dL}\right)}{U} + U\cdot\frac{U}{\Gamma^2}\,Q\,\frac{\bar{r}^2}{k_0\sqrt{p}}$$

oder

$$\frac{d^2\chi}{dL^2} + \left(1+\frac{d\chi}{dL}\right)\left(\frac{1}{2p}\frac{dp}{dL} - \frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\right) = \frac{U^2}{\Gamma^2}\frac{Q\bar{r}^2}{k_0^2 p}. \tag{10}$$

Diese Formeln sind noch für jede beliebige Annahme über $\bar{r}$ gültig; indem man für $\bar{r}$ den elliptischen Radiusvector wählen würde, erhielte man eine specielle Integrationsmethode, unter Zugrundelegung der elliptischen Bewegung als erster Näherung. Dann wäre in der Formel

$$\bar{r} = \frac{p}{1+\rho} \tag{11}$$

$p$ constant und $\rho = e\cos v$ zu setzen. Wird nun $\bar{r}$ in derselben Form vorausgesetzt, dabei aber $p$ als veränderlich angesehen, und auch über $\rho$ vorläufig keine weitere Annahme gemacht, so erhält man aus (11)

$$\frac{d\bar{\mathfrak{r}}}{dL} = \frac{1}{1+\rho}\frac{dp}{dL} - \frac{p}{(1+\rho)^2}\frac{d\rho}{dL}$$

$$\frac{d^2\bar{\mathfrak{r}}}{dL^2} = \frac{1}{1+\rho}\frac{d^2p}{dL^2} - \frac{2}{(1+\rho)^2}\frac{dp}{dL}\frac{d\rho}{dL} + \frac{2p}{(1+\rho)^3}\left(\frac{d\rho}{dL}\right)^2 - \frac{p}{(1+\rho)^2}\frac{d^2\rho}{dL^2}. \quad (12)$$

Setzt man diese Werthe in (9) ein, so erhält man nach einiger Reduction:

$$\frac{d^2p}{dL^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+\rho}\frac{dp}{dL}\frac{d\rho}{dL} - \frac{1}{2}\frac{1}{p}\left(\frac{dp}{dL}\right)^2 - \frac{p}{1+\rho}\frac{d^2\rho}{dL^2} - \frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\left(\frac{dp}{dL} - \frac{p}{1+\rho}\frac{d\rho}{dL}\right) -$$

$$-\left(1+\frac{d\chi}{dL}\right)^2 p - \frac{p}{\Gamma}\left[\frac{d^2\Gamma}{dL^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{p}\frac{d\Gamma}{dL}\frac{dp}{dL} + \frac{2}{1+\rho}\frac{d\Gamma}{dL}\frac{d\rho}{dL} - \frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\frac{d\Gamma}{dL}\right] = \quad (13)$$

$$= \frac{U^2}{\Gamma^2}\frac{p^2}{(1+\rho)^2}\frac{P}{k_0^2} - \frac{U^2}{\Gamma}\frac{p}{1+\rho}.$$

Da hier noch drei willkürliche Functionen: $\rho$, $\chi$ und $U$ oder $p$ zur Verfügung stehen, so wird man durch passende Zerfällung an Stelle der zweiten Gleichung (4) mehrere erhalten können, welche die Bewegung bestimmen werden. Von der Art der Zerfällung wird es abhangen, die elementären Glieder des Radiusvectors sämmtlich in $\rho$ zu vereinigen, so dass in $\Gamma$ keine Glieder dieser Art mehr auftreten. Ist dann $\rho = \eta \cos [(1-\varsigma)v - \pi]$, so ist $\eta$ der Hauptsache nach das Diastema, und die Bahn ist so zu bestimmen, dass die Werthe $\rho$ und $p$ die einzigen sind, welche nicht mit störenden Massen multiplicirt auftreten (von der nullten Ordnung der störenden Massen sind).

Ehe nun an die Fortsetzung der GYLDÉN'schen Untersuchungen geschritten wird, soll eine Modifikation derselben kurz erwähnt werden, welche von HARZER gewählt wurde. Dieser setzt $\chi = 0$ und $t = \zeta$, wodurch zwei der zu wählenden Functionen bestimmt sind, so dass nur mehr eine Bedingung freisteht. Zunächst folgt dann $l = L$ und aus (10):

$$\frac{1}{2p}\frac{dp}{dl} - \frac{1}{U}\frac{dU}{dl} = \frac{U^2}{\Gamma^2}\left(\frac{Q\bar{\mathfrak{r}}^2}{k_0^2 p}\right).$$

Da überdiess $t = \zeta$ vorausgesetzt ist, so wird nach (8):

$$U = \Gamma^2.$$

Setzt man nun

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt[4]{1+\nu}},$$

sodass

$$\frac{d\Gamma}{dl} = -\frac{1}{4}\frac{1}{(1+\nu)\sqrt[4]{1+\nu}}\frac{d\nu}{dl};$$

$$\frac{d^2\Gamma}{dl^2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{(1+\nu)\sqrt[4]{1+\nu}}\left(\frac{d^2\nu}{dl^2}\right) + \frac{5}{16}\frac{1}{(1+\nu)^2\sqrt[4]{1+\nu}}\left(\frac{d\nu}{dl}\right)^2$$

$$\frac{1}{U}\frac{dU}{dl} = \frac{2}{\Gamma}\frac{d\Gamma}{dl} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+\nu}\frac{d\nu}{dl}$$

wird, so wird die Gleichung zur Bestimmung von $\nu$:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{1+\nu}\frac{d\nu}{dl} + \frac{1}{2p}\frac{dp}{dl} = \frac{1}{\sqrt{1+\nu}}\left(\frac{Q\bar{\mathfrak{r}}^2}{k_0^2 p}\right)$$

oder da

$$\bar{\mathfrak{r}}^2 = \frac{\mathfrak{r}^2}{\sqrt{1+\nu}}$$

ist:

$$\frac{d\nu}{dl} + \frac{1+\nu}{p}\frac{dp}{dl} = 2\left(\frac{Q\mathfrak{r}^2}{k_0^2 p}\right). \quad (14)$$

Weiter folgt aus (13), wenn $\nu$ an Stelle von $\Gamma$ substituirt und entsprechend reducirt wird:

$$\frac{d^2 p}{dl^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+\rho}\frac{dp}{dl}\frac{d\rho}{dl} - \frac{1}{4}\frac{1}{p}\left(\frac{dp}{dl}\right)^2 - \frac{p}{1+\rho}\frac{d^2\rho}{dl^2} - p +$$
$$+ \left[\frac{1}{4}\frac{p}{1+\nu}\frac{d^2\nu}{dl^2} - \frac{3}{16}\frac{p}{(1+\nu)^2}\left(\frac{d\nu}{dl}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{1}{1+\nu}\frac{d\nu}{dl}\frac{dp}{dl}\right] = \frac{\mathfrak{r}}{1+\nu}\frac{P\mathfrak{r}}{k_0^2} - \frac{\mathfrak{r}}{1+\nu}.$$

Multiplicirt man hier mit $\frac{1+\rho}{p}$ und reducirt, so erhält man:

$$\frac{d^2\rho}{dl^2} + \rho = \left(1 - \frac{P\mathfrak{r}}{k_0^2}\right)\frac{1}{\sqrt{(1+\nu)^3}} - 1 + \frac{1+\rho}{p}\left[\frac{d^2 p}{dl^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+\rho}\frac{dp}{dl}\frac{d\rho}{dl} - \frac{1}{4}\frac{1}{p}\left(\frac{dp}{dl}\right)^2\right] +$$
$$+ \left[\frac{1}{4}\frac{1+\rho}{1+\nu}\frac{d^2\nu}{dl^2} - \frac{3}{16}\frac{1+\rho}{(1+\nu)^2}\left(\frac{d\nu}{dl}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{1+\rho}{p(1+\nu)}\frac{d\nu}{dl}\frac{dp}{dl}\right]. \quad (15)$$

Die Gleichungen (14) und (15) sind die Fundamentalgleichungen von HARZER[1]). Die Gleichung (14) dient zur Bestimmung von $\nu$. In Gleichung (15) kommen noch $\rho$, $\nu$, $p$ vor, und man kann nun noch eine Bedingung feststellen, wodurch erst die Lösung völlig bestimmt wird. Es wird die Gleichung (15) in zwei andere zerfällt, von denen die eine

$$\frac{d^2\rho}{dl^2} + (1-\varsigma)^2\rho = X \quad (15a)$$

zur Bestimmung von $\rho$ dient, während die übrigen Glieder vereinigt, eine Gleichung zur Bestimmung von $p$ geben. $X$ wird dabei so angenommen und die störenden Kräfte ausgeschieden, dass durch die Integration von (15a) die sämmtlichen elementaren Glieder in $\rho$ vereinigt auftreten[2]). Seien in (15a) diejenigen Glieder, welche zur Entstehung von elementaren Gliedern führen:

$$X = -\varkappa' \cos[(1-\sigma')l - A'] - \varkappa'' \cos[(1-\sigma'')l - A''] - \ldots$$

wobei $\sigma'$, $\sigma''$ ... ebenso wie $\varsigma$ von der Ordnung der störenden Massen sind, so wird das Integral von (15a):

$$\rho = \varkappa \cos[(1-\varsigma)l - B] + \frac{\varkappa'}{2(\varsigma-\sigma')[1-\frac{1}{2}(\varsigma+\sigma')]}\cos[(1-\sigma')l - A'] +$$
$$+ \frac{\varkappa''}{2(\varsigma-\sigma'')[1-\frac{1}{2}(\varsigma+\sigma'')]}\cos[(1-\sigma'')l - A''] + \ldots, \quad (16)$$

wo $\varkappa$ und B die Integrationsconstanten sind. Setzt man:

$$\eta \cos(\pi - B) = \varkappa + \frac{\varkappa'}{2(\varsigma-\sigma')[1-\frac{1}{2}(\varsigma+\sigma')]}\cos[(\sigma'-\varsigma)l + A' - B] +$$
$$+ \frac{\varkappa''}{2(\varsigma-\sigma'')[1-\frac{1}{2}(\varsigma+\sigma'')]}\cos[(\sigma''-\varsigma)l + A'' - B] + \ldots$$
$$\eta \sin(\pi - B) = + \frac{\varkappa'}{2(\varsigma-\sigma')[1-\frac{1}{2}(\varsigma+\sigma')]}\sin[(\sigma'-\varsigma)l + A' - B] +$$
$$+ \frac{\varkappa''}{2(\varsigma-\sigma'')[1-\frac{1}{2}(\varsigma+\sigma'')]}\sin[(\sigma''-\varsigma)l + A'' - B] + \ldots \quad (17)$$

so folgt:

$$\rho = \eta \cos[(1-\varsigma)l - \pi]. \quad (18)$$

Bei der Zerfällung der Gleichung (15) wurde dabei eine Grösse $\varsigma$ eingeführt, welche dann in dem Integral (16) oder (18) erscheint. Die Bestimmung des

[1]) »Untersuchungen über einen speciellen Fall des Problems der drei Körper«; Mémoires der Academie der Wissenschaften in St. Petersburg, Bd. 34, No. 12, pag. 24.

[2]) l. c., pag. 48. Nach GYLDÉN. Vergl. »Traité des orbites absolues«, pag. 122.

Werthes von $\varsigma$, welche allerdings auch nur successiv erfolgen kann, und zwar nach Maassgabe der auf der rechten Seite von (15) immer neu eintretenden Glieder $k\rho$, mit constanten Coefficienten $k$, ermöglicht eben die Vereinigung der elementären Glieder in $\rho$. An Stelle der Integrationsconstanten $\varkappa$, B treten hier die durch die elementären Glieder veränderten, nicht mehr constanten Grössen $\eta$, $\varkappa$; die durch (17) definirte Grösse $\eta$ ist das veränderliche Diastema. Erwähnt mag noch werden, dass die Differentialquotienten von $\eta$, $\varkappa$ nach $t$ von der Ordnung der störenden Massen sind, d. h. den Charakter der elementären Glieder verloren haben, da die Faktoren $\sigma' - \varsigma$, $\sigma'' - \varsigma$ heraustreten.

**73. Zerfällung der Bewegungsgleichungen in Differentialgleichungen für die intermediäre Bahn und die Störungsgleichungen.** Die in den Differentialgleichungen 72 (8), (10) und (18) auftretenden Functionen $\Gamma$ und $U$ sind nahe der Einheit gleich. Setzt man also

$$\Gamma = 1 + \gamma, \quad U = 1 + U',$$

so wird:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{dt}; \qquad \frac{d^2\Gamma}{dt^2} = \frac{d^2\gamma}{dt^2}.$$

Doch führt Gyldén an Stelle der Grösse $\gamma$ eine Grösse $\xi$ ein[1]), die mit $\gamma$ durch die Gleichung verbunden ist:

$$\gamma = \bar{\Gamma}\xi = \frac{p\xi}{1+\rho}. \tag{1}$$

Es wird dann

$$\Gamma = \frac{\bar{\Gamma}}{1+\Gamma\xi} = \frac{p}{1+\rho+p\xi} \tag{2}$$

folglich

$$\frac{d\Gamma}{dL} = \frac{p}{1+\rho}\frac{d\xi}{dL} + \frac{\xi}{1+\rho}\frac{dp}{dL} - \frac{p\xi}{(1+\rho)^2}\frac{d\rho}{dL}$$

$$\frac{d^2\Gamma}{dL^2} = \frac{p}{1+\rho}\frac{d^2\xi}{dL^2} + \frac{2}{1+\rho}\frac{dp}{dL}\frac{d\xi}{dL} - \frac{2p}{(1+\rho)^2}\frac{d\rho}{dL}\frac{d\xi}{dL} - \frac{2\xi}{(1+\rho)^2}\frac{d\rho}{dL}\frac{dp}{dL} +$$
$$+ \frac{\xi}{1+\rho}\frac{d^2p}{dL^2} + \frac{2p\xi}{(1+\rho)^3}\left(\frac{d\rho}{dL}\right)^2 - \frac{p\xi}{(1+\rho)^2}\frac{d^2\rho}{dL^2}.$$

Werden diese Werthe in 72 (18) substituirt, und berücksichtigt, dass

$$\Gamma = 1 + \gamma = \frac{1+\rho+p\xi}{1+\rho}$$
$$\Gamma(1+\rho) = 1+\rho+p\xi \tag{3}$$
$$1 - \frac{p\xi}{\Gamma(1+\rho)} = \frac{1+\rho}{1+\rho+p\xi} = \frac{1}{\Gamma}$$

ist, so erhält man nach einiger Reduction:

$$\frac{d^2\rho}{dL^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{p}\frac{dp}{dL}\frac{d\rho}{dL} + \frac{1}{2}\frac{1+\rho}{p^2}\left(\frac{dp}{dL}\right)^2 - \frac{1+\rho}{p}\frac{d^2p}{dL^2} + \frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\Gamma\left(\frac{1+\rho}{p}\frac{dp}{dL} - \frac{d\rho}{dL}\right) -$$
$$- \frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\left(\xi\frac{dp}{dL} - \frac{\xi p}{1+\rho}\frac{d\rho}{dL}\right) + \Gamma(1+\rho)\left(1+\frac{d\chi}{dL}\right)^2 + \tag{4}$$
$$+ p\left[\frac{d^2\xi}{dL^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{p}\frac{dp}{dL}\frac{d\xi}{dL} - \frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\frac{d\xi}{dL}\right] = -\frac{U^2}{\Gamma}\frac{p}{1+\rho}\frac{P}{k_0^2} + U^2.$$

[1]) Traité des orbites absolues, pag. 517; Acta mathematica, Bd. 7, pag. 134. $U$ kann zunächst Kürze halber beibehalten werden.

Nun ist

$$\frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\Gamma\left(\frac{1+\rho}{p}\frac{dp}{dL}-\frac{d\rho}{dL}\right)-\frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\left(\xi\frac{dp}{dL}-\frac{p\xi}{1+\rho}\frac{d\rho}{dL}\right)=$$
$$=\frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\left(\frac{1+\rho}{p}\frac{dp}{dL}-\frac{d\rho}{dL}\right)$$

$$\Gamma(1+\rho)\left(1+\frac{d\chi}{dL}\right)^2+\frac{3}{4}\frac{1+\rho}{p^2}\left(\frac{dp}{dL}\right)^2-\frac{1+\rho}{p}\frac{d^2p}{dL^2}+\frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\Gamma\left(\frac{1+\rho}{p}\frac{dp}{dL}-\frac{d\rho}{dL}\right)=$$
$$=\rho\left(1+\frac{d\chi}{dL}\right)^2+\frac{3}{4}\frac{\rho}{p^2}\left(\frac{dp}{dL}\right)^2-\frac{\rho}{p}\frac{d^2p}{dL^2}+\frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\frac{\rho}{p}\frac{dp}{dL}-\frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\frac{d\rho}{dL}+$$
$$+p\left[\xi\left(1+\frac{d\chi}{dL}\right)^2+\frac{3}{4}\frac{1}{p^3}\left(\frac{dp}{dL}\right)^2-\frac{1}{p^2}\frac{d^2p}{dL^2}\right]+p\left[\frac{1}{p}\left(1+\frac{d\chi}{dL}\right)^2+\frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\frac{1}{p^2}\frac{dp}{dL}\right].$$

Trennt man daher in Gleichung (4) die nur vom $\rho$ abhängigen Glieder von den mit $\xi$ und $U$ behafteten ab, so erhält man:

$$\frac{d^2\rho}{dL^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{p}\frac{dp}{dL}\frac{d\rho}{dL}+\left[\left(1+\frac{d\chi}{dL}\right)^2+\frac{3}{4}\frac{1}{p^2}\left(\frac{dp}{dL}\right)^2-\frac{1}{p}\frac{d^2p}{dL^2}\right]\rho=P_0+pw \quad (5)$$

$$\frac{d^2\xi}{dL^2}+\left(\frac{1}{2}\frac{1}{p}\frac{dp}{dL}-\frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\right)\frac{d\xi}{dL}+\left(1+\frac{d\chi}{dL}\right)^2\xi-\frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\cdot\frac{1}{p}\frac{d\rho}{dL}+\frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\frac{1}{p^2}\frac{dp}{dL}\rho=$$
$$=-\left[\frac{3}{4}\frac{1}{p^3}\left(\frac{dp}{dL}\right)^2-\frac{1}{p^2}\frac{d^2p}{dL^2}+\frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\frac{1}{p^2}\frac{dp}{dL}+\frac{1}{p}\left(1+\frac{d\chi}{dL}\right)^2\right]+P_1-w, \quad (6)$$

wobei $w$ eine vorläufig willkürliche Function sein kann, und

$$P_0+pP_1=S=-\frac{U^2}{\Gamma}\frac{p}{1+\rho}\frac{P}{k_0^2}+U^2 \quad (7)$$

ist. Setzt man weiter in 72 (8):

$$t=\zeta+T, \quad (8)$$

so wird:

$$1+\frac{dT}{d\zeta}=\frac{U}{\left(1+\frac{p\xi}{1+\rho}\right)^2}$$

oder

$$\frac{dT}{dL}=\left[\frac{U}{\left(1+\frac{p\xi}{1+\rho}\right)^2}-1\right]\frac{p^{\frac{3}{2}}}{k_0(1+\rho)^2}. \quad (9)$$

Durch Zerfällung der Gleichung (4) in zwei andere ist für die bisher willkürlich gebliebenen Functionen die erste Verfügung getroffen, indem die Bestimmung von $\rho$ diejenige von $\xi$ (d. i. $\Gamma$) nach sich zieht oder umgekehrt. Eine analoge Zerfällung kann man mit Gleichung 72 (10) vornehmen. Sei

$$\frac{U^2}{\Gamma^3}\frac{Q\,r^3}{k_0^2p}=\frac{U^2}{(1+\rho+p\xi)^3}\frac{Qp}{k_0^2}=W=Q_0+Q_1, \quad (7a)$$

so wird man setzen können:

$$\frac{d^2\chi}{dL^2}=Q_0 \quad (10)$$

und dann erhält man für die Bestimmung von $p$ oder $U$ die Differentialgleichung[1]):

$$\frac{1}{2p}\frac{dp}{dL}-\frac{1}{U}\frac{dU}{dL}=\frac{Q_1}{1+\frac{d\chi}{dL}}. \quad (11)$$

Die Art der Zerlegung in (7) und (7a) wird erst im Laufe der Integration durch die bei denselben zu erfüllenden Bedingungen näher präcisirt werden

[1]) Der Coëfficient von $\frac{d\xi}{dL}$ in Gleichung (6) ist die hier in (11) auftretende Grösse.

können. Endlich tritt noch die Gleichung 72 (7) hinzu, welche in die Form gesetzt werden kann:

$$\frac{d\zeta}{dL} = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{k_0 (1+\rho)^2}. \tag{12}$$

Es erübrigt noch eine Gleichung für die Bewegung in Breite abzuleiten. Setzt man in der dritten Fundamentalgleichung 9 (A):

$$s = \mathfrak{r}\mathfrak{z}, \tag{13}$$

so wird

$$\mathfrak{r}\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} + 2\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\frac{d\mathfrak{z}}{dt} + \mathfrak{z}\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = Z.$$

Nun ist

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = \frac{d\mathfrak{z}}{dL}\,\frac{k_0\sqrt{p}}{\mathfrak{r}^2}\,\frac{\Gamma^2}{U};$$

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} = \left(\frac{d^2\mathfrak{z}}{dL^2} + \frac{1}{2p}\frac{dp}{dL}\frac{d\mathfrak{z}}{dL} - \frac{2}{\mathfrak{r}}\frac{d\bar{\mathfrak{r}}}{dL}\frac{d\mathfrak{z}}{dL} + \frac{2}{\Gamma}\frac{d\Gamma}{dL}\frac{d\mathfrak{z}}{dL} - \frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\frac{d\mathfrak{z}}{dL}\right)\frac{k_0^2 p}{\mathfrak{r}^4}\,\frac{\Gamma^4}{U^2}.$$

Hiemit folgt, da [vergl. No. 26 (1)]:

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \left(\frac{1}{\Gamma}\frac{d\bar{\mathfrak{r}}}{dL} - \frac{\bar{\mathfrak{r}}}{\Gamma^2}\frac{d\Gamma}{dL}\right)\cdot\frac{k_0\sqrt{p}}{\mathfrak{r}^2}\,\frac{\Gamma^2}{U}$$

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{r}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 - \frac{k_0^2}{\mathfrak{r}^2(1+\mathfrak{z}^2)^{\frac{3}{2}}} + P$$

$$= \left(1 + \frac{d\chi}{dL}\right)^2\frac{k_0^2 p}{\mathfrak{r}^3}\,\frac{\Gamma^4}{U^2} - \frac{k_0^2\,\Gamma^2}{\bar{\mathfrak{r}}^2(1+\mathfrak{z}^2)^{\frac{3}{2}}} + P$$

ist nach einigen leichten Reductionen:

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dL^2} + \left[\frac{1}{2p}\frac{dp}{dL} - \frac{1}{U}\frac{dU}{dL}\right]\frac{d\mathfrak{z}}{dL} + \left(1 + \frac{d\chi}{dL}\right)^2\mathfrak{z} =$$
$$= \frac{\mathfrak{r}\,U^2}{k_0^2 p\,\Gamma^2}\left[\left(\frac{k_0^2\,\Gamma}{(1+\mathfrak{z}^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{P\bar{\mathfrak{r}}^2}{\Gamma}\right)\mathfrak{z} + \frac{Z\bar{\mathfrak{r}}^2}{\Gamma}\right]. \tag{14}$$

Die Gleichungen (10), (5), (12); (11), (6), (9), (14) sind jetzt die zu integrirenden Differentialgleichungen wobei (5), (6), (14) canonische Differential gleichungen sind. Für die intermediäre Bahn erhält man aus Gleichung (10): $\chi$; hierauf aus (5): $\rho$, sobald über $p$ eine Annahme gemacht ist[1]), und damit den intermediären Radiusvector; (12) bestimmt sodann die zur gegebenen intermediären Länge $L$ gehörige reducirte Zeit $\zeta$. Ist die intermediäre Bahn bekannt, so erhält man dann aus (11) den Werth von $U$; aus (6) die Störung des intermediären Radiusvectors, aus (9) die Störung der reducirten Zeit, endlich aus (14) die Störung in Breite. Die Form der intermediären Bahn wird nun wesentlich von der Art der Zerlegung der anziehenden Kräfte ($P_0$ und $P_1$; $Q_0$ und $Q_1$) abhängig sein. Je mehr von den bedeutendsten Gliedern der Kräftefunction benützt werden können, desto näher wird sich die Lösung der Wahrheit anschmiegen.

**74. Die Differentialgleichungen für die intermediäre Bahn des Mondes.** Sieht man $p$ als constant an, so werden die Differentialgleichungen zur Bestimmung der intermediären Bahn:

1) Statt dessen können auch gewisse zu erfüllende Bedingungen vorgeschrieben werden. Eine solche ist durch die Bedingungen (7) und (7a) theilweise fixirt. Die Störung $T$ der Zeit erfordert noch für eine absolute Lösung eine geeignete Transformation. Weiter wird man für $\mathfrak{z}$ ebenfalls eine Zerfällung vornehmen können, ähnlich derjenigen für $\rho$, doch muss selbstverständlich an dieser Stelle von zu weitgehenden Ausführungen abgesehen werden.

$$\frac{d^2\chi}{dL^2} = Q_0 \tag{1}$$

$$\frac{d^2\rho}{dL^2} + \left(1 + \frac{d\chi}{dL}\right)^2 \rho = P_0 \tag{2}$$

$$\frac{d\zeta}{dL} = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{k_0(1+\rho)^2}, \tag{3}$$

wobei $Q_0$ und $P_0$ diejenigen Theile der störenden Kräfte sind, welche eben berücksichtigt werden sollen, d. h. die Hauptglieder in den Entwickelungen:

$$\begin{aligned} Q_0 &= \left\{\frac{U^2}{(1+\rho+p\zeta)^2}\,\frac{Qp}{k_0^2}\right\}_0 \\ P_0 &= \left\{-\frac{U^2}{\Gamma}\,\frac{p}{1+\rho}\,\frac{P}{k_0^2} + U^2\right\}_0. \end{aligned} \tag{4}$$

Zunächst sind demnach $P$ und $Q$ zu ermitteln. Es ist nach 72 (5):

$$P = \frac{k_0^2}{\mathrm{r}} + (xX + yY); \quad Q = (xY - yX)$$

und da es sich hier zunächst um die Bestimmung derjenigen Theile der störenden Kräfte handelt, welche die intermediäre Bahn ergeben, so können alle Ausdrücke weggelassen werden, die nur zur Entstehung sehr kleiner Glieder Veranlassung geben können. Es können also vor allem die in $s^2$ [No. 56 (2)] multiplicirten Glieder in den Kräften $X$, $Y$ weggelassen werden; sodann ist nach 28 (1), wenn man sich auf die Wirkung dreier Körper beschränkt, die Sonnenmasse gleich $M$ setzt, und Kürze halber die Entfernung des Mondes von der Sonne $r_{01} = \Delta$ setzt:

$$\begin{aligned} xX_1 + yY_1 &= k^2 M\left[(xx' + yy')\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right) - \frac{\mathrm{r}^2}{\Delta^3}\right] \\ xY_1 - yX_1 &= k^2 M\left[(xy' - yx')\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right)\right]. \end{aligned}$$

Nach 56 (1) und (2) ist:

$$\frac{1}{\Delta^3} = \frac{1}{r'^3}\left[1 - \frac{2r}{r'}H + \frac{r^2}{r'^2}\right]^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{r'^3}\left[1 + 3\frac{r}{r'}H - \frac{3}{2}\frac{r^2}{r'^2} + \frac{15}{2}\frac{r^2}{r'^2}H^2\right],$$

daher, wenn von den parallaktischen Gliedern abgesehen wird:

$$\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} = 3\frac{r}{r'^4}H.$$

Führt man an Stelle von $r$ die Grössen $\mathrm{r}$ und $s$ ein, und analog für die Sonne, also:

$$r^2 = \mathrm{r}^2 + s^2; \quad r'^2 = \mathrm{r}'^2 + s'^2$$

und sieht dann von den Neigungen der Bahnen ab, indem zunächst die Breitenbewegungen nicht weiter in Betracht gezogen werden, so ist

$$\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} = 3\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{r}'^4}\,\frac{xx' + yy'}{\mathrm{r}\mathrm{r}'}.$$

Da weiter

$$xx' + yy' = +\,\mathrm{r}\mathrm{r}'\cos(l - l_1); \quad xy' - yx' = -\,\mathrm{r}\mathrm{r}'\sin(l - l_1)$$

ist, so wird

$$xX_1 + yY_1 = k^2 M \frac{r^2}{r_1^3}[3\cos^2(l - l_1) - 1];$$

$$xY_1 - yX_1 = -k^2 M \frac{r^2}{r_1^3} 3\sin(l - l_1)\cos(l - l_1),$$

demnach:

$$P = \frac{k_0^2}{r} + k^2 M \frac{r^2}{r_1^3}[\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}\cos 2(l - l_1)]$$

$$Q = -k^2 M \frac{r^2}{r_1^3}\tfrac{3}{2}\sin 2(l - l_1),$$

wobei $k_0^2 = k^2(1 + m)$ ist, wenn die Erdmasse gleich 1 gesetzt ist, und $m$ die Mondmasse bedeutet. Setzt man hier

$$r = \frac{\bar{r}}{1 + \bar{r}\xi} = \frac{p}{1 + \rho + p\xi}; \quad r' = \frac{\bar{r}'}{1 + \bar{r}'\xi'} = \frac{p_1}{1 + \rho_1 + p_1\xi_1},$$

berücksichtigt bei den für die intermediäre Bahn zu verwendenden Kräften nur die von $\xi$ unabhängigen Glieder und führt statt der wahren Längen $l$, $l_1$ die intermediären Längen $L$, $L_1$ ein, so wird:

$$\left.\begin{aligned}(Q_0) &= -\left(\frac{p}{p_1}\right)^3 \frac{M}{1+m}\frac{(1+\rho_1)^3}{(1+\rho)^4}\cdot\tfrac{3}{2}\sin 2(L - L_1 + \chi - \chi_1)\\ (P_0) &= -\left(\frac{p}{p_1}\right)^3 \frac{M}{1+m}\frac{(1+\rho_1)^3}{(1+\rho)^3}[\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}\cos 2(L - L_1 + \chi - \chi_1)].\end{aligned}\right\} \quad (4a)$$

Hieraus lassen sich dann die störenden Kräfte leicht finden; wenn man die vollständigen Entwickelungen der Ausdrücke $S$, $W$, [73 (7) und (7a)] vornimmt (in denen allerdings die noch unbekannten Störungen $\xi$, $T$, $\mathfrak{z}$ und eventuell ein zu $p$ tretender veränderlicher Factor eintreten), so wird dann[1]):

$$Q_1 = W - Q_0; \quad P_1 = \frac{S - P_0}{p}. \quad (5)$$

Aus (3) folgt

$$\frac{dL}{d\zeta} = \frac{k_0(1+\rho)^2}{p^{\frac{3}{2}}}. \quad (3a)$$

Sei der Radius der äusseren Grenzkugel $a(1 + e)$, derjenige der inneren $a(1 - e)$, so ist $2ae$ der Normalabstand der beiden Kugeln, zwischen denen sich die periplegmatische Curve bewegt; $a$ ist das arithmetische Mittel aus den beiden Halbmessern; $a(1 + e)$ ist der grösste Werth, den der Radiusvector erreichen wird, $a(1 - e)$ der kleinste. Setzt man

$$p = a(1 - \vartheta) \quad (6)$$

so wird in der intermediären Bahn (d. h. abgesehen von Störungen):

der Minimalwerth: $r_0 = \dfrac{a(1-\vartheta)}{1+\rho_0} = a(1 - e);$

der Maximalwerth: $r_1 = \dfrac{a(1-\vartheta)}{1+\rho_1} = a(1 + e),$

folglich

$$\rho_0 = +\frac{e - \vartheta}{1 - e}; \quad \rho_1 = -\frac{e + \vartheta}{1 + e}.$$

$\rho$ ist nun aber eine periodische Function, in welcher erfahrungsgemäss ein Hauptglied überwiegt, so dass der Hauptsache nach, $\rho$ nahe gleiche positive

[1]) Hierin sind natürlich für $P_0$ und $Q_0$ nicht die für die erste Integration noch nicht zu verwendenden Ausdrücke (4a), sondern die aus (4b) pag. 504 folgenden, eventuell noch weiter reducirten, einzusetzen.

und negative Werthe erreichen kann. Hieraus folgt, dass $\theta$ von höherer Ordnung der Kleinheit sein wird, wie $e$. Bei veränderlichen Diastemen wird nun allerdings $\theta$ nicht constant sein, man kann aber immerhin in dem Ausdrucke

$$\frac{dL}{d\zeta} = \frac{k_0(1+\rho)^2}{a^{\frac{3}{2}}(1-\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$\theta$ so bestimmen, dass die Entwickelung

$$\frac{(1+\rho)^2}{(1-\theta)^{\frac{3}{2}}} = 1 + \text{periodische Glieder} \tag{6a}$$

besteht, d. h. dass der constante Theil dieser Entwickelung gleich 1 wird. Dann wird

$$L = L^{(0)} + \frac{k_0}{a^{\frac{3}{2}}}\zeta + \text{periodische Glieder}$$

oder, wenn man

$$\frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}} = L' \tag{7}$$

setzt,

$$L = L^{(0)} + L'\zeta + \text{periodische Glieder.}$$

$L'$ hat daher die Bedeutung der mittleren siderischen Bewegung in der Zeiteinheit. Ebenso hat man für die Sonne:

$$L_1 = L_1^{(0)} + L_1{}'\zeta + \text{periodische Glieder,}$$

wobei $L_1{}'$ die mittlere siderische Bewegung der Sonne ist. Wird für das Verhältniss der mittleren siderischen Bewegung:

$$\frac{L_1{}'}{L'} = \mu \tag{7a}$$

gesetzt [vergl. No. 57 (7)], so wird:

$$L_1 = L_1{}^{(0)} + \mu L'\zeta + \text{period. Glieder} = L_1{}^{(0)} + \mu(L - L^{(0)}) + \text{period. Glieder,}$$

daher abgesehen von den periodischen Gliedern:

$$L - L_1 = (1-\mu)L - L_1{}^{(0)} + \mu L^{(0)}.$$

Setzt man jetzt:

$$1 - \mu = \lambda, \quad L_1{}^{(0)} - \mu L^{(0)} = \Lambda \tag{8}$$

und vernachlässigt für die Sonne die Abweichung der intermediären Länge von der wahren, setzt also $\chi_1 = 0$, so wird:

$$\begin{aligned} \sin 2(L - L_1 + \chi - \chi_1) &= \sin 2(\lambda L + \chi - \Lambda); \\ \cos 2(L - L_1 + \chi - \chi_1) &= \cos 2(\lambda L + \chi - \Lambda). \end{aligned}$$

Weiter hat man, wenn man in den Coëfficienten von (4a) an Stelle von $p$, $p_1$ deren constante Theile einführt:

$$\left(\frac{p}{p_1}\right)^3 \frac{M}{1+m} = \left(\frac{L_1{}'}{L'}\right)^2 = \mu^2$$

und wenn man nur Glieder der ersten Potenz von $\rho$, $\rho_1$ berücksichtigt:

$$\begin{aligned} Q_0 &= -\tfrac{3}{2}\mu^2(1 + 3\rho_1 - 4\rho)\sin 2(\lambda L + \chi - \Lambda) \\ P_0 &= -\tfrac{1}{2}\mu^2(1 + 3\rho_1 - 3\rho)[1 + 3\cos 2(\lambda L + \chi - \Lambda)], \end{aligned} \tag{4b}$$

und die zu integrirenden Differentialgleichungen werden, wenn noch Kürze halber

$$\tfrac{1}{2}\mu^2 = \mu_1 \tag{8a}$$

gesetzt, und in der Gleichung für $\rho$ die in $P_0$ mit dem Faktor $\rho$ behafteten Glieder mit den übrigen links vereinigt werden:

$$\frac{d^2\chi}{dL^2} = -\mu_1(1 + 3\rho_1 - 4\rho)\sin 2(\lambda L + \chi - \Lambda)$$

$$\frac{d^2\rho}{dL^2} + \left[1 - \mu_1 - 3\mu_1\cos 2(\lambda L + \chi - \Lambda) + 2\frac{d\chi}{dL} + \left(\frac{d\chi}{dL}\right)^2\right]\rho \qquad (8)$$

$$= -\tfrac{1}{2}\mu_1 - \mu_1\rho_1 - \mu_1\cos 2(\lambda L + \chi - \Lambda) - 3\mu_1\rho_1\cos 2(\lambda L + \chi - \Lambda).$$

Hierin ist noch $\chi$ enthalten; vernachlässigt man dies in der ersten Gleichung rechts, so erhält man eine erste Näherung:

$$\frac{d\chi}{dL} = +\frac{\mu_1}{2\lambda}\cos 2(\lambda L - \Lambda); \qquad \chi = +\frac{\mu_1}{4\lambda^2}\sin 2(\lambda L - \Lambda). \qquad (9)$$

und setzt man dies in die zweite Gleichung (8) ein, und vernachlässigt ebenso wie in (9) die zweite Potenz von $\mu_1$, welches die störende Masse repräsentirt, und die Produkte von $\mu_1$ in die kleine Grösse $\rho_1$ und in das Quadrat von $\rho$[1]), so erhält man:

$$\frac{d^2\rho}{dL^2} + \left[1 - \mu_1 - 3\mu_1\cos 2(\lambda L - \Lambda) + \frac{\mu_1}{\lambda}\cos 2(\lambda L - \Lambda)\right]\rho = -\tfrac{1}{2}\mu_1 - \mu_1\cos 2(\lambda L - \quad)$$

Setzt man daher noch:

$$\mu_1\left(3 - \frac{1}{\lambda}\right) = \mu_2 \qquad (10a)$$

$$W = -\tfrac{1}{2}\mu_1 - \mu_1\cos 2(\lambda L - \Lambda),$$

so wird die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\rho}{dL^2} + [1 - \mu_1 - \mu_2\cos 2(\lambda L - \Lambda)]\rho = W. \qquad (10)$$

**75. Die intermediäre Bahn des Mondes. Integration der Differentialgleichungen.** Um die Gleichung (10) der vorigen Nummer zu integriren, wird

$$\lambda L - \Lambda = \frac{\pi}{2K}x - 90^\circ \qquad (1)$$

gesetzt, wobei $K$ ein vollständiges elliptisches Integral erster Gattung ist[2]), dessen Modul $\varkappa$ erst bestimmt werden soll. Dann erhält man die Differentialgleichung:

[1]) Das Produkt $\mu_1\rho$ muss beibehalten werden, da hiervon der Coëfficient von $\rho$ in der zweiten Gleichung (8) abhängt. Es lässt sich auch für die intermediäre Bahn selbstverständlich die Näherung für $\rho$ und auch für $\chi$ weiter führen; doch kann auf diese vollständige Berechnung hier nicht eingegangen werden. Vergl. hierzu GYLDÉN, »Die intermediäre Bahn des Mondes«, Acta mathematica, Bd. 7, pag. 140–145. Es mag hier nur erwähnt werden, dass die genauere Berücksichtigung von $\chi$ auf eine Gleichung führt, welche durch die Substitution

$$\rho = E\sqrt{1 + \eta\cos(\lambda L - \Lambda)}$$

auf eine der Gleichung (10) völlig gleich gebaute Differentialgleichung führt, bei welcher nur die Coëfficienten um Grössen zweiter Ordnung in $\mu_1$ geändert werden.

[2]) Die Einführung der elliptischen Functionen in die Theorie der Bewegung der Himmelskörper hat sich als äusserst fruchtbringend erwiesen. Zwar kann man ohne dieselben ebenfalls Entwickelungen erhalten, welche von den Mängeln der früheren Methoden frei sind, wie dies z. B. bei den Entwickelungen von LINDSTEDT (Astron. Nachr. No. 2462, 2482, 2503, 2557), HILL (American Journal of Mathematics, Bd. I), HARZER (Astron. Nachr. No. 2826 und 2850) u. a. der Fall ist, jedoch hat die Einführung der elliptischen Functionen den Vorzug, dass man, wie z. B. in dem Integrale (10) eine grössere Anzahl von Gliedern vereinigt, diese überhaupt in anderer, und wie es scheint condensirterer Form geordnet erhält, und überhaupt in vielen Fällen zum mindesten eine grössere Convergenz erreicht. Vergl. hierfür das sehr instructive Beispiel, welches GYLDÉN aus der Bewegung der Pallas in den Astron. Nachrichten No. 2886 giebt. Sehr bemerkenswerth sind auch die Entwickelungen von HILL in »Acta mathematica« Bd. 8, pag. 1, welcher ohne Einführung der elliptischen Functionen die Bewegung des Mondperigeums bis auf den 15. Theil richtig erhält.

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} + \left(\frac{\frac{\pi}{2K}}{\lambda}\right)^2 \left[1 - \mu_1 + \mu_2 \cos 2\frac{\pi}{2K}x\right]\rho = \left(\frac{\frac{\pi}{2K}}{\lambda}\right)^2 W. \tag{2}$$

Nun hat man die Entwickelung

$$\left(\frac{\varkappa K}{2\pi}\right)^2 \cos 2\,am\,x = -D + \frac{q}{1-q^2}\cos 2\frac{\pi}{2K}x + \frac{2q^2}{1-q^4}\cos 4\frac{\pi}{2K}x + \ldots\ldots \tag{3}$$

wobei

$$D = 2\left(\frac{q^2}{(1-q^2)^2} + \frac{q^6}{(1-q^6)^2} + \frac{q^{10}}{(1-q^{10})^2} + \ldots\ldots\right) \tag{3a}$$

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}}; \qquad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa'^2\sin^2\varphi}} \tag{3b}$$

$$\varkappa^2 + \varkappa'^2 = 1$$

ist. Hieraus folgt:

$$\cos 2\frac{\pi}{2K}x = \frac{1-q^2}{q}\left\{\left(\frac{\varkappa K}{2\pi}\right)^2 \cos 2\,am\,x + D - \frac{2q^2}{(1-q^4)}\cos 4\frac{\pi}{2K}x - \ldots\right\}.$$

Substituirt man dies in die Differentialgleichung (2) und berücksichtigt, dass

$$\cos 2\,am\,x = 1 - 2\sin^2 am\,x$$

ist, so folgt:

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} + \frac{\pi^2}{4K^2\lambda^2}\left[1 - \mu_1 + \mu_2\left(\frac{1-q^2}{q}\right)\frac{\varkappa^2K^2}{4\pi^2}(1 - 2\sin^2 am\,x) + \frac{1-q^2}{q}D\right]\rho =$$

$$= \frac{\pi^2}{4K^2\lambda^2}W + \ldots$$

oder:

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} + \left[\frac{\pi^2}{4K^2\lambda^2}(1-\mu_1) + \mu_2\left(\frac{1-q^2}{q}\right)\frac{\varkappa^2}{16\lambda^2} - \right.$$

$$\left. - \mu_2\left(\frac{1-q^2}{q}\right)\frac{\varkappa^2}{16\lambda^2}\cdot 2\sin^2 am\,x + \frac{1-q^2}{q}\,\frac{\pi^2}{4K^2\lambda^2}D\right]\rho = \frac{\pi^2}{4K^2\lambda^2}W + \tag{4}$$

$$+ \frac{\pi^2\mu_2}{4K^2\lambda^2}\rho\left[2q\left(\frac{1-q^2}{1-q^4}\right)\cos 4\frac{\pi}{2K}x + 3q^3\left(\frac{1-q^2}{1-q^6}\right)\cos 6\frac{\pi}{2K}x + \ldots\ldots\right].$$

Der Modul $\varkappa$ soll nun zunächst so bestimmt werden, dass der Coefficient von $2\sin^2 am\,x$ gleich $\varkappa^2$ wird, d. h. dass

$$\mu_2\frac{1-q^2}{q}\,\frac{\varkappa^2}{16\lambda^2} = \varkappa^2 \tag{5}$$

wird. Setzt man noch[1]:

$$\frac{\pi^2}{4K^2\lambda^2}(1-\mu_1) + \frac{1-q^2}{q}\,\frac{\pi^2}{4K^2\lambda^2}D = 1 - \varkappa^2\sin^2 am\,i\omega, \tag{6}$$

so geht die Differentialgleichung über in:

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} - [2\varkappa^2\sin^2 am\,x - 1 - \varkappa^2 + \varkappa^2\sin^2 am\,i\omega]\rho =$$

$$= \frac{\pi^2}{4K^2\lambda^2}W + \frac{\pi^2\mu_2}{4K^2\lambda^2}\rho\left[2q\left(\frac{1-q^2}{1-q^4}\right)\cos 4\frac{\pi}{2K}x + \ldots\ldots\right]. \tag{7}$$

[1]) Das Imaginäre muss hier eingeführt werden, weil die linke Seite der Gleichung (6) grösser als 1 ist; würde man aber $1 + \varkappa^2\sin^2 am\,\omega$ setzen, so würde die Form der Gleichung (7) geändert. Das Imaginäre fällt schliesslich heraus, da ja $\sin am(i\omega, \varkappa) = i\,tang\,am\,(\omega, \varkappa')$ ist.

Das Integral dieser Differentialgleichung ohne letztem Gliede ist nach HERMITE:

$$\rho = C_1 \frac{H(x+i\omega)}{\theta(x)} e^{-\frac{\theta'(i\omega)}{\theta(i\omega)}x} + C_2 \frac{H(x-i\omega)}{\theta(x)} e^{+\frac{\theta'(i\omega)}{\theta(i\omega)}x}, \tag{8}$$

wobei in der JACOBI'schen Bezeichnungsweise

$$H(x) = \theta_1\left(\frac{x}{2K}\right); \qquad \theta(x) = \theta_0\left(\frac{x}{2K}\right)$$

ist. Um für $x$ wieder die Länge $L$ einzuführen, sei

$$\frac{\theta'(i\omega)}{\theta(i\omega)} = i\frac{\pi}{2K}\nu, \tag{9}$$

dann wird

$$\frac{\theta'(i\omega)}{\theta(i\omega)}x = i\nu(\lambda L - \Lambda + 90^\circ). \tag{9a}$$

Setzt man dies ein, so wird:

$$\theta(x)\rho = C_1 H(x+i\omega)e^{-i\nu(\lambda L-\Lambda+90^\circ)} + C_2 H(x-i\omega)e^{+i\nu(\lambda L-\Lambda+90^\circ)},$$

oder wenn man an Stelle der Constanten $C_1$, $C_2$ zwei andere $c'$, $C'$ durch

$$C_1 = c'e^{+iC'+i\nu 90^\circ}, \qquad C_2 = c'e^{-iC'-i\nu 90^\circ}$$

einführt, wodurch der in der letzten Formel auftretende Winkel von 90° in die Constante $C'$ eingezogen erscheint:

$$\begin{aligned}\theta(x)\rho &= c'\{H(x+i\omega)e^{-i\nu(\lambda L-\Lambda)+iC'} + H(x-i\omega)e^{+i\nu(\lambda L-\Lambda)-iC'}\}\\ &= c'[H(x+i\omega)+H(x-i\omega)]\cos[\nu(\lambda L-\Lambda)-C'] -\\ &\quad - ic'[H(x+i\omega)-H(x-i\omega)]\sin[\nu(\lambda L-\Lambda)-C'].\end{aligned} \tag{10}$$

In den Ausdrücken $H(x+i\omega)+H(x-i\omega)$ und $i[H(x+i\omega)-H(x-i\omega)]$ ist das Imaginäre verschwunden. Der Modul der hier auftretenden elliptischen Integrale und Funktionen ist bestimmt durch die Gleichung (5); aus dieser folgt:

$$\frac{q}{1-q^2} = \frac{\mu_2}{16\lambda^2}$$

$$q = \frac{\mu_2}{16\lambda^2}\left(1 - \frac{\mu_2^2}{(16\lambda^2)^2} + \ldots\right). \tag{11}$$

Hiermit erhält man nach den Formeln für die elliptischen Functionen: (S. z. B. JACOBI, »Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum«, Werke, Bd. I, pag. 159):

$$\begin{aligned}\log\varkappa &= \log 4\sqrt{q} - \frac{4q}{1+q} + \frac{4q^2}{2(1+q^2)} - \frac{4q^3}{3(1+q^3)} + \frac{4q^4}{4(1+q^4)} - \ldots\\ \frac{2K}{\pi} &= 1 + \frac{4q}{1+q^2} + \frac{4q^2}{1+q^4} + \frac{4q^3}{1+q^6} + \frac{4q^4}{1+q^8} + \ldots\\ D &= 2\left[\frac{q^2}{(1-q^2)^2} + \frac{q^6}{(1-q^6)^2} + \frac{q^{10}}{(1-q^{10})^2} + \ldots\right]\\ \pm i\varkappa \sin am\, i\omega &= \sigma = \sqrt{\left\{\frac{\pi^2}{4K^2\lambda^2}\left[(1-\mu_1) + \left(\frac{1-q^2}{q}\right)D\right] - 1\right\}}\end{aligned} \tag{12}$$

oder die noch stärker convergente Reihe

$$\log\varkappa' = -8\left\{\frac{q}{1-q^2} + \frac{q^3}{3(1-q^6)} + \frac{q^5}{5(1-q^{10})} + \ldots\right\} \tag{12a}$$

$$\varkappa^2 = 1 - \varkappa'^2.$$

Aus der letzten Formel (12) folgt

$$\sigma = \pm i\varkappa \cdot i \operatorname{tang} am(\omega, \varkappa') = \mp \varkappa \operatorname{tang} am(\omega, \varkappa').$$

Eine nach Potenzen von $\omega$ fortschreitende Reihe, welche gestattet, aus $\sigma$ sofort $\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}$ zu ermitteln, erhält man durch die WEIERSTRASS'schen *Al*-Functionen; doch sind diese Reihen, da sie nicht nach Potenzen von $q$ fortschreiten, für grössere Werthe von $\varkappa$ nur schwach convergent, und ist daher eine indirekte Lösung vorzuziehen. Es ist

$$q' = e^{-\pi\frac{K}{K'}} \tag{8c}$$

der zu $\varkappa' = \sqrt{1-\varkappa^2}$ gehörige $q$-Werth, und daher, wenn man BRIGG'sche Logarithmen versteht:

$$\log q \cdot \log q' = \varkappa^2 M^2 = 1{\cdot}8615229 \quad (\log = 0{\cdot}2698688{,}7)$$

$$\frac{2K'}{\pi} = 1 + \frac{4q'}{1+q'^2} + \frac{4q'^2}{1+q'^4} + \frac{4q'^4}{1+q'^6} + \frac{4q'^4}{1+q'^8} + \ldots, \tag{12b}$$

womit man zur Probe nach der Gleichung (8c) den Werth von $q'$ wiederfinden muss. Dann wird:

$$\tang am(\omega, \varkappa') = \frac{\pi}{2\varkappa K'}\left\{\tang\frac{\pi\omega}{2K'} - \frac{4q'^2}{1+q'^2}\sin\frac{\pi\omega}{K'} + \frac{4q'^4}{1+q'^4}\sin 2\frac{\pi\omega}{K'} - \right.$$
$$\left. - \frac{4q'^6}{1+q'^6}\sin 3\frac{\pi\omega}{K'} + \ldots\right\},$$

demnach

$$\tang\frac{\pi\omega}{2K'} = \frac{2K'}{\pi}\varkappa \tang am(\omega, \varkappa') + \frac{4q'^2}{1+q'^2}\sin\frac{\pi\omega}{K'} - \frac{4q'^4}{1+q'^4}\sin 2\frac{\pi\omega}{K'} + \ldots$$

oder[1])

$$\tang\frac{\pi\omega}{2K'} = 2\frac{K'}{\pi}\sigma + \frac{4q'^2}{1+q'^2}\sin\frac{\pi\omega}{K'} - \frac{4q'^4}{1+q'^4}\sin 2\frac{\pi\omega}{K'} + \ldots \tag{18}$$

Hier tritt noch rechts $\frac{\pi\omega}{K'}$ auf; da aber hierbei die Coëfficienten $q'^2, q'^4 \ldots$ vorkommen, so ist dieselbe leicht durch Näherungen zu lösen; um sofort einen provisorischen Werth zu erhalten, welcher in die rechte Seite substituirt, einen genügend genäherten Werth von $\tang\frac{\pi\omega}{2K'}$ giebt, sei

$$\tang\frac{\pi\omega}{2K'} = s, \qquad \frac{2K'}{\pi}\sigma = n, \qquad \frac{4q'^2}{1+q'^2} = \alpha; \tag{18a}$$

dann kann man mit Vernachlässigung von $q'^4$ schreiben:

$$s = n + 2\alpha\frac{s}{1+s^2} = n + 2\alpha\frac{s}{1+n^2+4\alpha n^2}$$

und daraus

$$s = \tang\frac{\pi\omega}{2K'} = \frac{n}{1 - \frac{2\alpha}{1+(1+4\alpha)n^2}}. \tag{18b}$$

---

[1]) Man braucht hier nur ein Zeichen zu berücksichtigen; nimmt man für $\sigma$ das entgegengesetzte Zeichen, so wird auch $\frac{\pi\omega}{K'}$ das entgegengesetzte Zeichen erhalten (überdiess treten noch zwei Werthe von $\frac{\pi\omega}{K'}$ auf, die um 180° grösser sind, welche aber in *sin* und *tang* wieder mit den beiden früheren identisch werden). Es würde dann auch $v$ das entgegengesetzte Zeichen erhalten, und damit gehen die beiden Glieder in (16) in einander über, wenn man nur auch bei der Integrationsconstanten $C'$ das Zeichen ändert.

Ist $\frac{\pi\omega}{2K'}$ bestimmt, so kann sofort

$$e^{\frac{\pi\omega}{K}} = \beta \tag{14}$$

berechnet werden. Wenn man dann weiter die Formel

$$\vartheta_0(w) = \sqrt{\frac{2K\kappa'}{\pi}} \cdot \frac{(1-2q\cos 2w\pi+q^2)(1-2q^3\cos 2w\pi+q^6)(1-2q^5\cos 2w\pi+q^{10})\ldots}{(1-q)^2(1-q^3)^2(1-q^5)^2\ldots}$$

logarithmisch differenzirt, und $\frac{i\omega}{2K}$ für $w$ setzt, so folgt:

$$\frac{\theta'(i\omega)}{\theta(i\omega)} = \frac{1}{2K}\frac{\vartheta_0'\left(\frac{i\omega}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{i\omega}{2K}\right)} =$$

$$= \frac{2\pi}{2K}\sin\frac{i\omega\pi}{K}\left\{\frac{2q}{1-2q\cos\frac{i\omega\pi}{K}+q^2} + \frac{2q^3}{1-2q^3\cos\frac{i\omega\pi}{K}+q^6} + \ldots\right\}.$$

Nun ist

$$\sin\frac{i\omega\pi}{K} = -\tfrac{1}{2}i\left(e^{-\frac{\omega\pi}{K}} - e^{+\frac{\omega\pi}{K}}\right) = -\tfrac{1}{2}i\left(\frac{1}{\beta}-\beta\right);\quad \cos\frac{i\omega\pi}{K} = +\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta}+\beta\right),$$

demnach

$$= \frac{\theta'(i\omega)}{\theta(i\omega)} = \frac{i\pi}{2K}\nu =$$

$$= -\tfrac{1}{2}i\frac{\pi}{K}\left(\frac{1}{\beta}-\beta\right)\left\{\frac{2q}{(1-q\beta)\left(1-\frac{q}{\beta}\right)} + \frac{2q^3}{(1-q^3\beta)\left(1-\frac{q^3}{\beta}\right)} + \frac{2q^5}{(1-q^5\beta)\left(1-\frac{q^5}{\beta}\right)}\cdots\right\}$$

$$\nu = 2\left(\beta-\frac{1}{\beta}\right)\left\{\frac{q}{(1-q\beta)\left(1-\frac{q}{\beta}\right)} + \frac{q^3}{(1-q^3\beta)\left(1-\frac{q^3}{\beta}\right)} + \frac{q^5}{(1-q^5\beta)\left(1-\frac{q^5}{\beta}\right)}\cdots\right\}. \tag{15}$$

In den Ausdrücken (10) ist nun $i$, allerdings nur scheinbar enthalten; um es aber thatsächlich zu eliminiren, und für die Berechnung brauchbare Formeln zu erhalten, muss (10) weiter entwickelt werden. Es ist aber:

$$H(x) = \vartheta_1\left(\frac{x}{2K}\right) = 2\left(q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{\pi}{2K}x - q^{\frac{9}{4}}\sin 3\frac{\pi}{2K}x + q^{\frac{25}{4}}\sin 5\frac{\pi}{2K}x - \ldots\right),$$

daher

$$H(x+i\omega) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}\sin(2n+1)\frac{\pi}{2K}(x+i\omega) =$$

$$= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}\left[e^{+i(2n+1)\frac{\pi}{2K}(x+i\omega)} - e^{-i(2n+1)\frac{\pi}{2K}(x+i\omega)}\right]$$

und ebenso für $H(x-i\omega)$, demnach

$$H(x+i\omega) + H(x-i\omega) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}\left[e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2K}\omega} + e^{+(2n+1)\frac{\pi}{2K}\omega}\right]\sin(2n+1)(90^\circ+\lambda L-\Lambda)$$

$$i[H(x+i\omega) - H(x-i\omega)] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}\left[e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2K}\omega} - e^{+(2n+1)\frac{\pi}{2K}\omega}\right]\cos(2n+1)(90^\circ+\lambda L-\Lambda).$$

Setzt man dies in (10) ein, und berücksichtigt, dass

$$\sin[(2n+1)90^\circ + \Lambda] = (-1)^n\cos\Lambda$$

ist, so wird endlich

$$\begin{aligned}\theta(x)\cdot\rho = c'\sum q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}\Big[&e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2K}\omega}\cos[(2n+1-\nu)(\lambda L-\Lambda)+C']+\\ &+e^{+(2n+1)\frac{\pi}{2K}\omega}\cos[(2n+1+\nu)(\lambda L-\Lambda)-C']\Big].\end{aligned} \tag{16}$$

Diese Reihe ist, da sie nach den Potenzen von $q$ geordnet ist, stark convergent; die beiden Hauptglieder entstehen für $n = 0$, sie sind:

$$c'\sqrt[4]{q}\left[\sqrt{\frac{1}{\beta}}\cos\{(1-\nu)(1-\mu)L-(1-\nu)\Lambda+C'\}+\sqrt{\beta}\cos\{(1+\nu)(1-\mu)L-(1+\nu)\Lambda-C'\}\right].$$

Je nachdem nun $\beta$ oder $\frac{1}{\beta}$ grösser als 1 ist, wird nach (15) $\nu$ positiv oder negativ: es sei $\nu$ positiv, wozu es genügt $\sigma = -i\varkappa \sin am\, i\omega$ zu setzen[1]); dann ist der Coëfficient des zweiten Gliedes grösser. Setzt man

$$\begin{gathered} c'\sqrt[4]{q}\sqrt{\beta} = c_0;\quad c'\sqrt[4]{q}\sqrt{\frac{1}{\beta}} = c_1 \\ (1+\nu)(1-\mu) = 1-\varsigma \end{gathered} \tag{17a}$$

und führt, statt der Constante $C'$ die Constante $C = (1+\nu)\Lambda + C'$ ein, so werden, da

$$\theta(x) = 1 - 2q\cos\frac{\pi}{K}x + \ldots$$

ist, mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von $q$ die Anfangsglieder der Entwickelung:

$$\rho = c_0\cos[(1-\varsigma)L - C] + c_1\cos[[2(1-\mu)-(1-\varsigma)]L - 2(1-\nu)\Lambda + C]. \tag{17}$$

Das erste Glied ist das Hauptglied der Mittelpunktsgleichung, das zweite die Evection. Sieht man $c_0$, $C$ an Stelle von $c'$, $C'$ als Integrationsconstante an, so haben dieselben die Bedeutung der Excentricität und Länge des Perigeums für eine gegebene Epoche. $\varsigma L$ ist die Bewegung des Perigeums und es folgt aus (17):

$$\varsigma = \mu - \nu(1-\mu). \tag{17b}$$

Die Bestimmung von $\nu$ erhält hierdurch eine besondere Bedeutung. Endlich ist noch zu bemerken, dass $c_0 = c_1\beta$ ist. Gyldén nimmt[2]):

$$\log n = 7{\cdot}255002,\quad \log n' = 6{\cdot}112594,$$

damit folgt

$$\log\mu = 8{\cdot}877592.$$

Die wegen Glieder höherer Ordnung corrigirten Coëfficienten der Gleichung (1) werden:

$$\log\mu_1 = 7{\cdot}915848,\quad \log\mu_2 = 9{\cdot}010769.$$

Damit wird:

$$\log q = 7{\cdot}874758,\quad \log q' = 9{\cdot}124091$$

$$\log\varkappa = 9{\cdot}526562,\quad \log\frac{2K}{\pi} = 0{\cdot}012928,\quad \log\frac{2K'}{\pi} = 0{\cdot}205897$$

$$\frac{\pi\omega}{2K'} = 28^\circ 54' 4''{\cdot}9 = 0{\cdot}504424,\quad \log\frac{\pi\omega}{2K} = 9{\cdot}895270$$

$$\log\sqrt{\beta} = 0{\cdot}341256,\quad \log\nu = 8{\cdot}855780$$

$$\varsigma = +\,0{\cdot}009115;\quad c_1 = 0{\cdot}2077\, c_0.$$

---

[1]) Man braucht darauf nicht weiter Rücksicht zu nehmen; indem $\sigma$ sich durch den Werth der Quadratwurzel in (12) bestimmt, und diese Wahl von $\sigma$ bereits in (13) berücksichtigt ist; vergl. die Anmerkung auf pag. 508.

[2]) Die Formeln von Gyldén sind etwas anders, führen aber zu demselben Resultate.

Hat man in dieser Weise das Integral der reducirten Gleichung, so erhält man für das Integral der completen Differentialgleichung (1) die Zusatzglieder

$$\Delta\rho = -ifF_1(x)\int F_2(x)W\,dL + ifF_2(x)\int F_1(x)W\,dL, \tag{18}$$

wo $f$ ein constanter, reeller Coëfficient ist, und

$$F_1(x) = \frac{H(x+i\omega)}{\Theta(x)}\,e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x}; \qquad F_2(x) = \frac{H(x-i\omega)}{\Theta(x)}\,e^{+\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} \tag{18a}$$

die beiden particulären Integrale der Gleichung ohne letztes Glied sind. Für die Entwickelung der Hauptglieder kann wieder $\Theta(x) = 1$ gesetzt werden, und es wird:

$$\begin{aligned}
2iF_1(x) &= \sqrt[4]{q}\left(e^{\frac{i\pi}{2K}(x+i\omega)} - e^{-\frac{i\pi}{2K}(x+i\omega)}\right)e^{-i\nu(\lambda L-\Lambda+90^\circ)}\\
&= \sqrt[4]{q}\left(e^{i(\lambda L-\Lambda+90^\circ)-\frac{\pi\omega}{2K}} - e^{-i(\lambda L-\Lambda+90^\circ)+\frac{\pi\omega}{2K}}\right)e^{-i\nu(\lambda L-\Lambda+90^\circ)}\\
&= \sqrt[4]{q}\left(e^{-i(\nu-1)(\lambda L-\Lambda+90^\circ)-\frac{\pi\omega}{2K}} - e^{-i(\nu+1)(\lambda L-\Lambda+90^\circ)+\frac{\pi\omega}{2K}}\right),
\end{aligned}$$

und in derselben Weise $2iF_2(x)$, indem nur $-\omega$ und $-\nu$ an Stelle von $+\omega$, $+\nu$ gesetzt wird. Ist nun ein Glied von $W$:

$$(W)_1 = 2g\cos(\gamma L+\Gamma) = g\left[e^{i(\gamma L+\Gamma)} + e^{-i(\gamma L+\Gamma)}\right], \tag{19}$$

so wird

$$\int F_1(x)(W)_1\,dL =$$

$$-g\sqrt[4]{q}\left\{+\frac{e^{-i[(\nu-1)\lambda-\gamma]L+i(\nu-1)(\Lambda-90^\circ)+i\Gamma-\frac{\pi\omega}{2K}}}{2[(\nu-1)\lambda-\gamma]} - \frac{e^{-i[(\nu+1)\lambda-\gamma]L+i(\nu+1)(\Lambda-90^\circ)+i\Gamma+\frac{\pi\omega}{2K}}}{2[(\nu+1)\lambda-\gamma]} + \right.$$
$$\left. + \frac{e^{-i[(\nu-1)\lambda+\gamma]L+i(\nu-1)(\Lambda-90^\circ)-i\Gamma-\frac{\pi\omega}{2K}}}{2[(\nu-1)\lambda+\gamma]} - \frac{e^{-i[(\nu+1)\lambda+\gamma]L+i(\nu+1)(\Lambda-90^\circ)-i\Gamma+\frac{\pi\omega}{2K}}}{2[(\nu+1)\lambda+\gamma]}\right\}$$

und ebenso für $\int F_2(x)\,(W)_1\,dL$. Vernachlässigt man im Nenner die kleine Grösse $\nu$ gegenüber der Einheit, was immer gestattet ist, wenn $\gamma$ nicht nahe gleich $\lambda$ ist, so werden die Nenner bezw. $-2(\lambda+\gamma)$ und $+2(\lambda-\gamma)$, und man erhält durch die in (18) angezeigte Multiplikation und eine leichte Reduction

$$\Delta\rho = -\tfrac{1}{2}fg\sqrt[4]{q}\left(e^{\frac{\pi\omega}{K}} - e^{-\frac{\pi\omega}{K}}\right)\left(e^{i(\gamma L+\Gamma)} + e^{-i(\gamma L+\Gamma)}\right)\cdot\frac{2\lambda}{\lambda^2-\gamma^2}$$

oder

$$\Delta\rho = -fg\sqrt[4]{q}\left(e^{\frac{\pi\omega}{K}} - e^{-\frac{\pi\omega}{K}}\right)\frac{\lambda}{\lambda^2-\gamma^2}\cos(\gamma L+\Gamma). \tag{20}$$

Berücksichtigt man nur die beiden Glieder von $W$, die in (10a) der vorigen Nummer angegeben sind, so wird:

für das erste Glied: $\gamma = 0$, $\Gamma = 0$, $g = -\frac{1}{8}\mu_1$

„ „ zweite Glied: $\gamma = 2\lambda$, $\Gamma = -2\Lambda$; $g = -\frac{1}{4}\mu_1$,

demnach

$$\Delta\rho = +f\sqrt[4]{q}\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)\left\{\frac{\mu_1}{8\lambda} - \frac{\mu_1}{6\lambda}\cos[2(1-\mu)L - 2\Lambda]\right\}. \tag{21}$$

Das variable Glied dieses Ausdruckes ist die Variation. Die intermediäre Länge ist eigentlich $L$; doch kann schon in der ersten Näherung (in der intermediären Bahn) die Correction $\chi$ aus 74 (9) berücksichtigt und $(L+\chi)$ für die Länge des Mondes benutzt werden. Es ist übrigens nicht schwer, schon in dieser Näherung weitere Glieder zu entwickeln, wodurch jedoch schon der Uebergang auf die wahre Bahn stattfindet[1]).

[1]) Vergl. Acta mathematica, Bd. 7, pag. 160.

Zunächst ist noch die Gleichung 74 (8) zu integriren, welche die Beziehung zwischen der intermediären Länge und der reducirten Zeit giebt. Beschränkt man sich hier ebenfalls auf die ersten Potenzen von $\rho$, so wird

$$\frac{d\zeta}{dL} = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{k_0}(1 - 2\rho),$$

oder mit Rücksicht auf 74 (7):

$$L_0 + L'\zeta = L - 2\int \rho \, dL,$$

demnach mit Berücksichtigung der Hauptglieder in (17) und (21):

$$\begin{aligned} L_0 + L'\zeta &= L - \frac{2e_0}{1-\varsigma} \sin[(1-\varsigma)L - C] - \\ &- \frac{2e_1}{2(1-\mu)-(1-\varsigma)} \sin\{[2(1-\mu)-(1-\varsigma)]L - 2(1-\nu)\Lambda + C\} - \qquad (22) \\ &- \frac{f\sqrt{q}\,\mu_1}{12\lambda(1-\mu)}\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right) \sin[2(1-\mu)L - 2\Lambda], \end{aligned}$$

wobei das $L$ proportionale Glied $f\sqrt{q}\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right) \cdot \frac{\mu_1}{6\lambda} L$ mit dem Gliede $L$ vereinigt, und durch den Coëfficienten

$$1 + \frac{f\mu_1\sqrt{q}}{6\lambda}\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)$$

dividirt wurde. Man hat dann unter dem Coëfficienten $L'$ wieder die wirkliche, aus der Beobachtung bestimmte, mit den Störungen behaftete mittlere Bewegung zu denken[1]). Das Verhältniss der Coëfficienten der Mittelpunktsgleichung und Evection wird

$$\frac{e_0}{e_1}\,\frac{1-2\mu+\varsigma}{1-\varsigma} = 0{\cdot}874\frac{e_0}{e_1} = 4{\cdot}21,$$

während das wirkliche Verhältniss 4·98 ist.

76. **Entwickelung der störenden Kräfte.** Die störenden Kräfte sind Functionen des Radiusvectors und der wahren Länge, welche als Functionen einer Variabeln darzustellen sind. Zieht man dabei für den Radiusvector die sämmtlichen elementären Glieder zusammen und berücksichtigt die übrigen, nicht elementären Glieder durch die Störung $\xi$, so wird man

$$p = a(1-\eta^2); \quad \rho = \eta \cos[(1-\varsigma)L - \pi] \qquad (1)$$

wählen können. Treten in $\rho$, eine Reihe von elementären Gliedern mit verschiedenen Argumenten auf, so werden dieselben zu einem einzigen vereinigt, sodass dann $\eta$ und $\pi$ veränderlich sind[2]). Die dabei über $p$ gemachte Annahme giebt dann in Gleichung 73 (11) eingesetzt, eine Bestimmung der Function $U$. Es ist zu bemerken, dass $\frac{1}{p}\frac{dp}{dL}$, ebenso wie $Q_1$ von der zweiten oder höheren Ordnung der Massen sind, sodass $U = 1 + U'$ sich nur um Grössen zweiter Ordnung der störenden Massen von der Einheit unterscheidet. Dann wird:

$$d\zeta = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{k_0}\,\frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{[1+\eta\cos\{(1-\varsigma)L-\pi\}]^2}\,dL \qquad (2)$$

eine Gleichung, welche, wenn

$$(1-\varsigma)L - \pi = v \qquad (3)$$

gesetzt wird, in die folgende übergeht:

---

[1]) Vergl. No. 42.

[2]) Vergl. die Formeln (16), (17), (18) in No. 72.

$$L' d\zeta = \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\eta\cos v)^2} dL, \tag{4}$$

welche mit derjenigen in der elliptischen Bewegung, bis auf die Veränderlichkeit von $\eta$ und $\pi$ übereinstimmt. Durch diese Veränderlichkeit wird jedoch die Integration etwas erschwert. GYLDÉN führt einen Hilfswinkel $E$ duch die Beziehungen

$$\cos E = \frac{\cos v + \eta}{1 + \eta\cos v} \qquad \cos v = \frac{\cos E - \eta}{1 - \eta\cos E}$$

$$\sin E = \frac{\sqrt{1-\eta^2}\sin v}{1+\eta\cos v} \quad (5) \qquad \sin v = \frac{\sqrt{1-\eta^2}\sin E}{1-\eta\cos E} \quad (6)$$

$$\tang\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}}\tang\tfrac{1}{2}E \tag{7}$$

ein, wonach

$$\bar{r} = a(1-\eta\cos E) \tag{8}$$

wird. Aus (6) folgt:

$$\cos E - \cos v + \eta\cos v\cos E - \eta = 0$$

und daraus durch Differentiation:

$$-(1+\eta\cos v)\sin E\,dE + (1-\eta\cos E)\sin v\,dv - (1-\cos v\cos E)d\eta = 0.$$

Da aber nach (3):

$$dv = (1-\varsigma)dL - d\pi \tag{9}$$

ist, so wird

$$(1-\eta\cos E)\sin v[(1-\varsigma)dL - d\pi] - (1+\eta\cos v)\sin E\,dE - (1-\cos v\cos E)d\eta = 0,$$

folglich

$$(1-\varsigma)dL = d\pi + \frac{1+\eta\cos v}{1-\eta\cos E}\frac{\sin E}{\sin v}dE + \frac{1-\cos v\cos E}{(1-\eta\cos E)\sin v}d\eta =$$

$$= d\pi + \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{1-\eta\cos E}dE + \frac{\sin E}{\sqrt{1-\eta^2}(1-\eta\cos E)}d\eta,$$

und damit aus (4) nach einiger Reduction

$$L'(1-\varsigma)d\zeta = (1-\eta\cos E)dE + \frac{\sin E(1-\eta\cos E)}{1-\eta^2}d\eta + \frac{(1-\eta\cos E)^2}{\sqrt{1-\eta^2}}d\pi, \tag{10}$$

daher durch Integration:

$$(1-\varsigma)L'\zeta = \pi + E - \eta\sin E + (1-\varsigma)X, \tag{11}$$

wobei

$$(1-\varsigma)X = \int\frac{\sin E(1-\eta\cos E)}{1-\eta^2}d\eta + \int\frac{(1-\eta\cos E)^2}{\sqrt{1-\eta^2}}d\pi + \int\sin E\,d\eta - \int d\pi$$

$$(1-\varsigma)X = \int\frac{\sin E(2-\eta\cos E-\eta^2)}{1-\eta^2}d\eta + \int\left[\frac{(1-\eta\cos E)^2}{\sqrt{1-\eta^2}} - 1\right]d\pi. \tag{12}$$

Setzt man

$$(1-\varsigma)(L'\zeta - X) - \pi = M, \tag{13}$$

so wird

$$M = E - \eta\sin E. \tag{14}$$

Die Beziehungen zwischen (7) oder (8) und (14) zeigen, dass zwischen $v$ und $M$ dieselben Beziehungen bestehen, wie in der elliptischen Bewegung (vergl. No. 14), mit dem Unterschiede, dass an Stelle der constanten Excentricität das veränderliche Diastema $\eta$ getreten ist. Der Werth von $M$ ist jedoch hier von der mittleren Anomalie $(1-\varsigma)L'\zeta - \pi$ um den Betrag $(1-\varsigma)X$ verschieden. Die Berechnung von $M$ aus Gleichung (13) erfordert bereits die Kenntniss von $X$; Gleichung (12) zeigt aber, dass $X$ von der Ordnung $\int d\eta$ und $\int\eta\,d\pi$, d. i. von der Ordnung der Veränderlichkeit des Diastemas ist; hieraus

folgt, dass sich die an $(1-\varsigma)L'\zeta - \pi$ anzubringende Correction in eine rasch convergente Reihe entwickeln lassen wird.

Hiernach werden auch die weiteren Entwickelungen für die positiven und negativen Potenzen des Radiusvectors der gegenseitigen Entfernung $\Delta$ u. s. w. der Hauptsache nach mit dem bei den früheren Integrationsmethoden angegebenen Vorgange identisch, obwohl sich auch bei diesen Entwickelungen verschiedene Formen angeben lassen, die mehr oder weniger von einander abweichen (vergl. die »Allgem. Einleitung in die Astronomie«, pag. 158). Diese Differenzen sind jedoch nicht durch die Methode der Integration der Differentialgleichungen bedingt; auf diese Abweichungen braucht nach den bereits durchgeführten Beispielen von No. 37, 44, 48, 53, 56, 65 und 66 nicht näher eingegangen zu werden.

77. Die Störungen. Hat man eine erste Näherung für $\rho$, $\zeta$ durch die intermediäre Bahn erhalten, so geben die Gleichungen 73 (6), (9), (11), (14) die Störungen. Würde man die in 73 vorgenommene Zerlegung der Kräfte in der in 74 (4b) angezeigten Form als definitiv betrachten, und die gesammten übrigen Theile $P_1$, $Q_1$ nach 74 (5) zur Ermittelung der Störungen verwenden, so würden gerade so wie in den früheren Methoden im Laufe der Entwickelungen seculare oder elementäre Glieder entstehen. Diese Zerfällung darf daher nicht als definitiv angesehen werden. Treten im Laufe der Entwickelungen in den störenden Kräften (also vor den vorzunehmenden Integrationen) Glieder derselben Form wie in 74 (4b) auf, so können diese von $P_1$, $Q_1$ abgetrennt, und, wenngleich von höherer Ordnung der Kleinheit, doch mit $P_0$, $Q_0$ vereinigt werden; es sind dies die in 73 (5), (6) mit $w$, bezw. $\rho w$ bezeichneten, dort noch willkürlich gelassenen Functionen. Hieraus folgt, dass in der gestörten Bahn der durch $\rho$ bestimmte intermediäre Radiusvector nicht ungeändert bleibt, sondern dass die Störung in zwei Theile zerfällt erscheint, von denen der eine sich unmittelbar mit $\rho$ verbindet, der andere $\xi$ dabei so bestimmt wird, dass er von elementären Gliedern frei ist. Bei dieser Zerfällung wird nun gleichzeitig die bei der Bestimmung von $\rho$ auftretende Grösse $\varsigma$ in jeder Näherung so bestimmt werden können, dass eben elementäre Glieder in $\rho$ nicht auftreten. Es wird daher der bei der Bestimmung der intermediären Bahn gefundene erste Näherungswerth von $\varsigma$ in jeder folgenden Näherung neu bestimmt bezw. corrigirt.

Es sind nun zweierlei elementäre Glieder zu unterscheiden. In Gleichung 73 (10) würden elementäre Glieder durch die doppelte Integration aus Entwickelungsgliedern entstehen, welche die Form haben

$$a \cos [\sigma L - A] \quad \text{und} \quad a \sin [\sigma L - A] \tag{1}$$

wo $\sigma$ von der Ordnung der störenden Kräfte ist. Die Integration der Gleichungen (5), (6) hingegen liefert, wie aus 75 (20) hervorgeht, elementäre Glieder aus jenen Entwickelungsgliedern, in denen $\gamma$ nahe gleich $\lambda$, also von der Form $(1-\sigma)L$ ist, d. h. wenn in den störenden Kräften Glieder von der Form

$$b \cos [(1-\sigma)L - B] \quad \text{oder} \quad b \sin [(1-\sigma)L - B] \tag{2}$$

vorkommen. Gyldén nennt diese Glieder bezw. »Glieder vom Typus $(A)$ und vom Typus $(B)$«. Die Gleichung 73 (6) kann nun auch geschrieben werden

$$\frac{d^2\xi}{dL^2} + \left[1 + \frac{d\chi}{dL}\right]^2 \xi = V, \tag{3}$$

wo das zweite Glied, da es $\frac{Q_1}{1+\frac{d\chi}{dL}} \frac{d\xi}{dL}$ ist, als von höherer Ordnung der

störenden Kräfte nach rechts geschafft worden kann. Die Gleichung hat dann denselben Charakter wie 78 (5), nur dass die störenden Kräfte von höherer Ordnung sind. Damit dann in $\xi$ keine elementären Glieder auftreten, genügt es, die Zerfällung von $S$ so vorzunehmen, dass $P_1$ keine Glieder vom Typus ($B$) enthält, diese daher in der Summe $w$ zu vereinigen, von $P_1$ wegzunehmen, und dafür $pw$ in (5) zuzulegen, und die entsprechende Correction zu suchen. Da nun bei jeder folgenden Näherung die Glieder von $P_1$ um eine Ordnung höher in den störenden Massen sind, ebenso auch die Glieder in $P_0$, so wird für die Störung in $\xi$ eine convergente Entwickelung erhalten, ebenso wie für die elementären Glieder für sich betrachtet, so dass auch die Bestimmung von $\varsigma$ durch ein convergentes Näherungsverfahren bestimmt erscheint. Die Integration der Gleichungen 78 (5), (6) bietet hiernach weiter keine Schwierigkeiten.

Schwierigkeiten anderer Natur treten aber bei der Integration der Störungsgleichung 78 (10) und der entsprechend transformirten Gleichung für $T$ auf. Die Integration der Gleichung für $\chi$ gab in 74 (9) auf leichte Art einen genäherten Werth für $\chi$; allein die Unbekannte $\chi$ tritt in den Argumenten selbst auf, und allgemein werden die beiden zu betrachtenden Differentialgleichungen die Form haben[1]):

$$\frac{d^2\chi}{dL^2} = \Sigma - a_i \sin(\alpha_i\chi + A_i L + A_i^{(0)}), \tag{4}$$

wo die in den Argumenten auftretenden Functionen $A_i L + A_i^{(0)}$ bekannte Functionen von $L$ sind. $a_i$, $\alpha_i$, $A_i$, $A_i^{(0)}$ sind dabei Constante; $\alpha_i$ kann stets als positiv vorausgesetzt werden, da es im entgegengesetzten Falle genügt, das Zeichen des Argumentes und des Gliedes zu ändern, um $\alpha_i$ positiv zu erhalten; $a_i$ kann ebenfalls als positiv und das Zeichen aller Glieder als negativ vorausgesetzt werden, da im entgegengesetzten Falle durch die Vermehrung des Argumentes um 180° diese Form resultirt.

Die Glieder der Entwickelung können nun vier verschiedene Formen erhalten; es können $\alpha_i$ und $A_i$ entweder von der nullten Ordnung in den störenden Massen oder auch von der Ordnung der störenden Massen sein ($a_i$ ist immer von der Ordnung der störenden Massen). Im ersten Falle mögen sie mit $\alpha$, $\beta$, . . . . $A$, $B$ . . . im letzteren Falle mit $\rho$, $\sigma$ . . . P, $\Sigma$ bezeichnet werden. (Die Grösse der Constanten $A_i^{(0)}$ ist dabei gleichgültig). Es wird dann $\chi$ in zwei Theile $\chi'$, $\chi''$ zerlegt, so dass

$$\chi = \chi' + \chi'' \tag{5}$$

ist, und die beiden Theile so bestimmt, dass

$$\frac{d^2\chi'}{dL^2} = \Sigma - a\sin(\alpha\chi + AL + A_0) + \Sigma - b\sin(\beta\chi + BL + B_0) - w \tag{5a}$$

$$\frac{d^2\chi''}{dL^2} = \Sigma - f\sin(\rho\chi + \mathrm{P}L + \mathrm{P}_0) + \Sigma - g\sin(\sigma\chi + \Sigma L + \Sigma_0) + w \tag{5b}$$

ist, wo in der ersten Gleichung alle jene Glieder vereinigt sind, in denen die in den Argumenten enthaltenen bekannten Functionen von der nullten Ordnung, in der zweiten Gleichung, wo ihre Coëfficienten von der ersten Ordnung der störenden Massen sind, und $w$ vorläufig ganz willkürlich, etwa gleich Null gesetzt werden kann.

Da die Coëfficienten $a$, $b$, $f$, $g$ von der Ordnung der störenden Massen sind, so wird $\chi$, sofern es möglich ist, die kleinen Integrationsdivisoren von der

[1]) Es ist dieses auch die Differentialgleichung, welche bei den früher erwähnten Integrationsmethoden für die Länge auftreten. Vergl. 19 (15) und ferner das Doppelintegral in 47 (8).

Ordnung der störenden Massen zu vermeiden, ebenfalls klein sein; nimmt man dieses vorerst an, so wird $\alpha\chi$, von der ersten, $\rho\chi$ und $\sigma\chi$ von der zweiten Ordnung der störenden Massen sein, und es liesse sich entwickeln:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha\chi + AL + A_0) &= \sin(AL + A_0) + \alpha(\chi' + \chi'')\cos(AL + A_0) - \\ &\quad - \tfrac{1}{2}\alpha^2(\chi' + \chi'')^2 \sin(AL + A_0) + \ldots \qquad (6)\\ \sin(\rho\chi + BL + B_0) &= \sin(BL + B_0) + \rho(\chi' + \chi'')\cos(BL + B_0) - \ldots\end{aligned}$$

Integrirt man nun die Gleichung (5a), so folgt mit Vernachlässigung der in (6) rechts mit $(\chi' + \chi'')$ multiplicirten Glieder:

$$\chi' = \Sigma \frac{a}{A^2} \sin(AL + A_0) + \Sigma \frac{b}{B^2} \sin(BL + B_0). \qquad (6a)$$

Substituirt man diesen Werth rechts in (6), so entstehen nebst den noch unbekannten Gliedern, welche von $\chi''$ herrühren, Argumente, in denen $2A_1L$, $2B_1L$, $(A_1 \pm B_2)\,L$, $(A_1 \pm A_2)\,L$, $(B_1 \pm B_2)\,L$ vorkommen. Sofern die $A$ und $B$ untereinander so weit verschieden sind, dass ihre Summe oder Differenz nicht von der Ordnung der störenden Masse ist, werden die Glieder wieder den Typus der rechts in (5a) enthaltenen Glieder haben, und die nächste Näherung wird von der zweiten Ordnung der störenden Massen, u. s. w. Treten aber Glieder auf, in denen eine Summe oder Differenz der $A$ oder $B$ von der Ordnung der störenden Massen wird, so kann dieses Glied von der ersten Gleichung in Abzug gebracht (es wird die Function $w$) und zur zweiten Gleichung hinzugelegt, also aus der ersten Gleichung in die zweite geschafft werden. Treten hingegen irgendwo in $\chi'$ oder $\chi''$ selbst Glieder vom Typus ($B$) auf, so werden diese, in (6) eingesetzt, nur wieder Glieder geben, welche der Form nach denen in (5a) gleichen, und in dieser weiter behandelt werden können. Diese Gleichung bietet daher weiter keine Schwierigkeiten.

Die Glieder der rechten Seite in (5b) können jedoch nicht auf diese Weise behandelt werden. Setzt man voraus, dass $\chi''$ mindestens von der ersten Ordnung der störenden Massen ist, so werden die rechten Seiten in (5b), wenn keine kleinen Integrationsdivisoren auftreten, von der zweiten Ordnung der störenden Massen; lässt man aber jetzt die Produkte von $\chi$, $\sigma\chi$ gegenüber den bekannten Functionen weg, und integrirt auf gewöhnlichem Wege, so treten die Quadrate der kleinen Zahlen P, Σ in den Nenner, es entsteht also hier ein Ausdruck, der nicht, wie vorausgesetzt wurde, mindestens von der ersten Ordnung der störenden Masse ist, sondern es werden im Gegentheil noch die ersten Potenzen der störenden Massen im Nenner bleiben, d. h. in $\chi''$ treten elementäre Glieder vom Typus (A) auf; dann aber dürfte man $\chi$ in den Klammern nicht vernachlässigen: die Integrationsmethode ist fehlerhaft.

Zerlegt man $\chi''$ in mehrere Theile $\chi_1, \chi_2, \chi_3 \ldots \chi_1', \chi_2' \ldots$ so dass

$$\chi'' = \chi_1 + \chi_2 + \ldots + \chi_1' + \chi_2' + \ldots$$

sei, und setzt den Differentialquotienten jedes Theiles einem Gliede rechts in (5b) gleich, so erhält man die Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\chi_1}{dL^2} &= -f\sin(\alpha\chi_1 + \mathrm{P}L + \mathrm{P}_0) - X_1\\ \frac{d^2\chi_2}{dL^2} &= -f'\sin(\alpha'\chi_2 + \mathrm{P}'L + \mathrm{P}_0') - X_2 \qquad (7a)\\ \frac{d^2\chi_1'}{dL^2} &= -g\sin(\sigma\chi_1' + \Sigma L + \Sigma_0) - X_1'\\ \frac{d^2\chi_2'}{dL^2} &= -g'\sin(\sigma'\chi_2' + \Sigma L + \Sigma_0) - X_2', \qquad (7b)\end{aligned}$$

. . . . . . . .

wobei in den Argumenten der einzelnen Differentialgleichungen rechts an Stelle von $\chi$ nur derjenige Theil von $\chi$ gesetzt ist, dessen zweiter Differentialquotient links auftritt, während die innerhalb des Argumentes weggelassenen Theile zur Entstehung von Zusatzgliedern Veranlassung geben, die in $X_1, X_2 \ldots X_1', X_2' \ldots$ zusammengefasst sind[1]). Die Gleichungen (7a), (7b) haben alle dieselbe Form, und es genügt eine derselben zu behandeln. Sei z. B. in der ersten Gleichung (7b)

$$\chi_1' = \psi + u, \tag{8}$$

so kann diese Zerlegung so vorgenommen werden, dass $u$ gegenüber $\psi$ sehr klein sei, so dass man nach Potenzen von $u$ entwickeln kann; dann wird:

$$\frac{d^2\psi}{dL^2} + \frac{d^2 u}{dL^2} = -g\sin(\sigma\psi + \Sigma L + \Sigma_0) - g\cos(\sigma\psi + \Sigma L + \Sigma_0)\sigma u + \\ + \tfrac{1}{2} g \sin(\sigma\psi + \Sigma L + \Sigma_0)\sigma^2 u^2 + \ldots\ldots - X_1'$$

und diese Gleichung kann in die folgenden beiden zerfällt werden:

$$\frac{d^2\psi}{dL^2} = -g\sin(\sigma\psi + \Sigma L + \Sigma_0) \tag{8a}$$

$$\frac{d^2 u}{dL^2} = -g\cos(\sigma\psi + \Sigma L + \Sigma_0)\cdot\sigma u + \tfrac{1}{2} g\sin(\sigma\psi + \Sigma L + \Sigma_0)\sigma^2 u^2 + \ldots\ldots - X_1'. \tag{8b}$$

Setzt man in der Gleichung (8a):

$$\sigma\psi + \Sigma L + \Sigma_0 = \Psi, \tag{9}$$

so geht dieselbe über in

$$\frac{d^2\Psi}{dL^2} = -\sigma g \sin\Psi,$$

aus welcher man durch Multiplication mit $\frac{d\Psi}{dL}$ und Integration das erste Integral:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{d\Psi}{dL}\right)^2 = C + \sigma g\cos\Psi$$

und daraus

$$dL = \sqrt{\frac{2}{C+\sigma g}}\,\frac{d(\frac{1}{2}\Psi)}{\sqrt{1 - \frac{2\sigma g}{C+\sigma g}\sin^2\frac{1}{2}\Psi}}$$

erhält. Setzt man nun

$$\frac{2\sigma g}{C+\sigma g} = \varkappa^2, \tag{10}$$

so wird

$$\sqrt{\frac{\sigma g}{\varkappa^2}}\,(L - L_0) = \int_0^{\frac{1}{2}\Psi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2\sin^2\varphi}},$$

folglich

$$\tfrac{1}{2}\Psi = am\frac{\sqrt{\sigma g}}{\varkappa}(L - L_0); \quad \Psi = 2\,am\frac{\sqrt{\sigma g}}{\varkappa}(L - L_0). \tag{11}$$

Zu Gleichung (10) ist zu bemerken, dass, da $\sigma$ und $g$ positiv vorausgesetzt werden konnten, $\varkappa$ reell sein wird, wenn auch für die Integrationsconstante $C$ ein positiver Werth gewählt wird. Diese, sowie die zweite Integrationsconstante $L_0$ lassen sich in folgender Weise bestimmen, bezw. durch die Constanten der Differentialgleichung ersetzen: für $am\,x$ hat man die Entwickelung:

---

[1]) Um die Berechtigung dieser Zerlegung, bezw. der Vernachlässigung von $X_1, X_2, X_1', \ldots$ einzusehen, sind ausgedehntere Untersuchungen über die Convergenz der Reihen erforderlich; man vergl. hierzu GYLDÉN in den »Acta mathematica« Bd. 9, pag. 192 und 211.

$$am\,x = \frac{\pi x}{2K} + \frac{2q}{1+q^2} \sin\frac{\pi}{K}x + \frac{2q^2}{2(1+q^4)} \sin 2\frac{\pi}{K}x + \frac{2q^3}{3(1+q^6)} \sin 3\frac{\pi}{K}x + \ldots,$$

wo $\varkappa$, $q$, $K$ die frühere Bedeutung haben. Man erhält daher:

$$\Psi = 2\left[\frac{\pi}{2K}\frac{\sqrt{\sigma g}}{\varkappa}(L - L_0) + \frac{2q}{1+q^2} \sin\frac{\pi}{K}\frac{\sqrt{\sigma g}}{\varkappa}(L - L_0) + \ldots\ldots\right].$$

Vergleicht man diesen Werth mit dem in (9) angenommenen, so folgt:

$$\Sigma L + \Sigma_0 = \frac{\pi}{K}\frac{\sqrt{\sigma g}}{\varkappa}(L - L_0)$$

$$\sigma\psi = 2\frac{2q}{1+q^2} \sin\frac{\pi}{K}\frac{\sqrt{\sigma g}}{\varkappa}(L - L_0) + \ldots,$$

folglich

$$\frac{K\varkappa}{\pi} = \frac{\sqrt{\sigma g}}{\Sigma} = \lambda$$
$$\Psi = 2\,am\,\frac{K}{\pi}(\Sigma L + \Sigma_0) \tag{12}$$

$$\psi = \frac{4}{\sigma}\left[\frac{q}{1+q^2} \sin(\Sigma L + \Sigma_0) + \frac{q^2}{2(1+q^4)} \sin 2(\Sigma L + \Sigma_0) + \right.$$
$$\left. + \frac{q^3}{3(1+q^6)} \sin 3(\Sigma L + \Sigma_0) + \ldots\ldots\right]. \tag{13}$$

Die erste Gleichung (12) giebt eine Bestimmung für den Modul $\varkappa$. Substituirt man die Reihe für $K^2\varkappa^2$, so folgt:

$$4\left(\frac{q}{1-q^2} + \frac{3q^3}{1-q^6} + \frac{5q^5}{1-q^{10}} + \ldots\right) = \lambda^2. \tag{14}$$

In den Gleichungen (7a) tritt $\alpha$ an Stelle von $\sigma$; für diese wird daher $\psi$ von der Ordnung $\sigma q$, also da $q$ stets kleiner als $\sigma$ ist[1]), mindestens von der ersten Ordnung der störenden Masse. Für die Gleichungen (7b) ist der Nenner $\sigma$ aber ebenfalls von der Ordnung der störenden Massen. $q$ bestimmt sich aus Gleichung (14), und es wird von dem numerischen Werthe von $\lambda$ abhängen, welchen Werth $q$ annimmt. Jedenfalls lässt sich $q$ zwischen 0 und 1 bestimmen. Ist $\sigma$ sehr klein gegenüber $\Sigma$, so wird $q$ von der Ordnung von $\sigma$, daher $\psi$ von der Ordnung von $\Sigma$, also von der Ordnung der störenden Massen; ist umgekehrt $\Sigma$ sehr klein gegenüber $\sigma$, so wird $q$ nahe 1 und $\psi$ von der Ordnung von $\frac{\Sigma}{\sigma}$ daher wieder von der Ordnung der störenden Massen. Für mässige Werthe von $\lambda$ lässt sich die Reihe (14) umkehren, und es wird:

$$q = \tfrac{1}{4}\left(\lambda^2 - \tfrac{1}{4}\lambda^6 + \tfrac{21}{128}\lambda^{10} - \tfrac{73}{512}\lambda^{14} + \ldots\ldots\right). \tag{14a}$$

Diese Reihe kann noch bis $\lambda = 1$ benutzt werden, und zeigt, dass wenn $\sigma$, $\Sigma$ und $g$ von derselben Ordnung und auch numerisch in jener Beziehung stehen, dass $\lambda$ sehr nahe 1 ist, $q$ nahe 1 bleibt, und $\psi$ von der nullten Potenz der störenden Massen wird. Für diesen ganz speziellen Fall kann es daher thatsächlich eintreten, dass auch in dieser Form der Entwickelung elementare Glieder nicht zu vermeiden sind.

---

[1]) Zwischen $q$ und $q'$ besteht die Gleichung 75 (12b); es wird $q = q'$ für $q = 0{\cdot}0432$; wenn $q \gtrless 0{\cdot}0432$, so wird $q' \lesseqgtr 0{\cdot}0432$. Wenn $q > 0{\cdot}5421$, so wird $q' < 0{\cdot}000001$ und wenn $q > 0{\cdot}6510$, so wird $q' < 0{\cdot}00000001$; dann wird $\varkappa' = 0$, $\varkappa = 1$; $K' = \frac{1}{2}\pi$, $K = \infty$; für $q > 0{\cdot}5421$ muss aber $\lambda > 2{\cdot}564$. Wenn daher $\lambda > 1$, so wird $q$ rasch anwachsen, ebenso wie bei Werthen von $\lambda < 1$, $q$ rasch abnehmen wird.

Ist $\psi$ bestimmt, so giebt die zweite Gleichung (8b) die Zusatzglieder $u$. Hier kann $u^2$ vernachlässigt werden, und man erhält die Gleichung

$$\frac{d^2u}{dL^2} = -g\cos\Psi \cdot \sigma u - X_1'.$$

Setzt man in derselben:

$$\frac{\sqrt{\sigma g}}{\varkappa}(L - L_0) = \frac{K}{\pi}(\Sigma L + \Sigma_0) = \xi,$$

so geht sie über in

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + \varkappa^2\cos 2am\xi \cdot u = -\frac{\varkappa^2}{\lambda^2\Sigma^2}X_1'. \qquad (15)$$

Ihr Integral wird[1])

$$u = c_1\Delta am\xi + c_2\Delta am\xi\left\{\frac{\Theta'(\xi)}{\Theta(\xi)} + \frac{E}{K}\xi\right\} - \frac{\varkappa^2}{\lambda^2\Sigma^2}\Delta am\xi\int\frac{d\xi}{\Delta am\xi}\int X_1'\Delta am\xi d\xi, \quad (16)$$

wo $E$ das vollständige elliptische Integral zweiter Gattung ist. Die Discussion dieser Gleichung kann hier nicht vorgenommen werden, und möge nur das Resultat derselben mit den eigenen Worten GYLDÉN's[2]) wiedergegeben werden:

»Mais le resultat auquel on est parvenu de la sorte, doit-on le considérer comme une vraie approximation, c'est à dire comme une approximation par laquelle on n'aura pas de developpement divergent? En général ce n'est pas ainsi. En effet, si l'on revient à l'équation complète, et qu'on y suppose toujours la fonction $X$ consistant en un seul terme, on verra naître des developpements qui procèdent suivant les puissances d'une fraction dont le numérateur est une quantité du quatrième ordre, et le dénominateur le carré du coëfficient $\sigma$. Ce développement peut être convergent, il est vrai; mais dans le cas des termes élémentaires, où $\sigma$ est une très petite quantité de l'ordre des masses troublantes, il peut facilement être divergent.«

78. Convergenz der Entwickelungen. Sind durch die im vorhergehenden erwähnten Untersuchungen auch die Hauptschwierigkeiten bei der Integration der canonischen Differentialgleichung beseitigt, so bleiben nichtsdestoweniger noch andere, nicht beseitigte. Nebst den elementären Gliedern, welche von der secularen Veränderlichkeit der Elemente herrühren, und welche sich durch die Bestimmung dieser secularen Aenderungen selbst eliminiren lassen, treten noch Glieder mit kleinen Integrationsdivisoren auf, wenn bei der Entwickelung der störenden Kräfte in den Argumenten kleine Coëfficienten der Variabeln in Folge der nahen Commensurabilität der mittleren Bewegungen entstehen. Diese sind unter den hier betrachteten elementären Gliedern nicht enthalten, geben aber Anlass zur Entstehung von Gliedern mit grossen Coëfficienten und langer Periode[3]). Hierdurch haben sie auf die Ausdrücke für die Coordinaten des gestörten Himmelskörpers dieselbe Wirkung, wie die elementären Glieder, und können als secundär-elementäre Glieder bezeichnet werden[4]). In allen Fällen müssen die in den auftretenden Divisoren zu verwendenden Werthe der mittleren Bewegungen (sowohl des gestörten und störenden Himmelskörper, als auch ihrer Elemente) die wahren Werthe sein. Wenn diese nicht bekannt sind, und man

[1]) Vergl. »Traité des orbites absolues«, pag. 568. »Acta Mathematica«, Bd. 9, pag. 237.

[2]) ibid., pag. 570.

[3]) Vergl. hierfür die bereits erwähnte Abhandlung von HARZER: »Ueber einen speciellen Fall des Problems der drei Körper«.

[4]) Von GYLDÉN »charakteristische Glieder« genannt.

irgend ein System genäherter mittlerer Bewegungen (aus der Theorie bestimmter Bewegungen der Elemente oder osculirende mittlere siderische Bewegungen) verwendet, so werden schon hierdurch die Coefficienten ganz bedeutend alterirt. Im Falle, dass man es mit secundär-elementären Gliedern zu thun hat, kann es vorkommen, dass gewisse osculirende Elemente eine vollständige Commensurabilität zwischen den mittleren Bewegungen andeuten[1]), welche thatsächlich nicht stattfindet. Verwendet man aber statt des wahren Divisors[2]) *(diviseur effectif)* irgend einen bekannten genäherten Werth desselben *(diviseur linéair)*, so wird dies eine Darstellung geben, in welcher die aufeinanderfolgenden Näherungen eigentlich nach Potenzen des Verhältnisses

$$\frac{\text{wahrer Divisor} - \text{genäherter Divisor}}{\text{genäherter Divisor}}$$

entwickelt sind, sodass, wenn dieses Verhältniss nicht genügend klein ist, neuerdings schwach convergente Reihen auftreten. Auch diese Schwierigkeit wird durch die letzterwähnte Methode nicht vollständig beseitigt. GYLDÉN nennt die dadurch auftretenden Glieder kritische (termes critiques), und bemerkt: »Dans le cas des termes critiques on est obligé de refaire plusieurs fois, les approximations dès le debut, mais on pourra aussi mettre à profit des méthodes de tâtonnement conduisant plus promptement au but[3]).« Man ist demnach wieder vor die Frage gestellt, ob man es mit thatsächlich convergenten Entwickelungen zu thun hat.

Zunächst ist hervorzuheben, dass eine strenge Definition der Convergenz nirgends festgestellt erscheint, so dass der Ausspruch von POINCARÉ, dass sich die Astronomen bei ihren Entwickelungen vom Instinkt leiten lassen, beinahe gerechtfertigt erscheint. Sodann aber ist, wie POINCARÉ treffend bemerkt, wohl zu unterscheiden zwischen der Convergenz einer Reihe im Sinne der Mathematiker und Convergenz im Sinne des praktischen Rechnens. Die erste, am passendsten und kürzesten als »theoretische Convergenz« bezeichnet, fordert, dass die Glieder einer Reihe von einem gewissen angefangen, beständig abnehmen (wenn sie auch anfänglich bis zu einem gewissen Punkte ab- oder auch zunehmen) und dass die Summe derselben, bis ins unendliche genommen, einen festen bestimmten endlichen Werth hat. Die zweite, im Gegensatz zur ersten als »praktische Convergenz« zu bezeichnen, erfordert, dass die Glieder von dem ersten an, wenigstens bis zu einem gewissen hin, beständig abnehmen, und die Summe dieser Glieder die gegebene Function bis auf einen kleinen, als praktisch zulässig erklärten Fehler, darstellt. In diesem Sinne sind demnach die zuerst von STIRLING betrachteten semiconvergenten Reihen, als »praktisch convergent« zu bezeichnen. In dieser Weise ist z. B. die Reihe

$$\frac{A^n}{n!}, \tag{a}$$

wo $A$ eine sehr grosse Zahl, z. B. 1000 oder auch noch mehr, ist, »theoretisch convergent«, nicht aber »praktisch convergent«; und umgekehrt die Reihe

$$\frac{n!}{A^n} \tag{b}$$

»theoretisch divergent«, hingegen »praktisch convergent«. Während eine theo-

1) Ein Fall, den man als Libration bezeichnet.

2) Ueber die Berechnung des wahren Werthes des Divisors aus dem genäherten; vergl. GYLDÉN in »Acta Mathematica« Bd. 9, pag. 201 ff.

3) Traité des orbites absolues, pag. 564.

retisch convergente Reihe thatsächlich gemäss den der Definition entsprungenen Criterien der Convergenz einen endlichen, fest bestimmten Werth hat, wird dieses für den Fall der praktischen Convergenz durchaus nicht der Fall sein müssen; die Summe der Reihe (b) ist thatsächlich unendlich, und wird nur dann als eine praktisch verwendbare zu bezeichnen sein, wenn ausdrücklich bekannt ist, dass die Summe der ersten Glieder als die zu berechnende Function zu betrachten ist.

In Folge dessen bleibt der Begriff der praktischen Convergenz ein wissenschaftlich nicht genügend präcisirter, weshalb es nach dem Vorschlage POINCARÉ's vorzuziehen ist, den Ausdruck Convergenz stets im analytischen Sinne zu verstehen; dann aber ist es nöthig, den allgemein üblichen, aber nicht genügend präcisirten Ausdruck der praktischen Convergenz durch andere, analytisch definirbare zu ersetzen. Als solche werden von POINCARÉ[1]) die »asymptotische Gleichheit« (égalité asymptotique) und die »formelle Befriedigung der Differentialgleichungen« (satisfaire formellement aux équations différentielles) in Vorschlag gebracht.

Betrachtet man in dem Ausdrucke

$$f_0 + f_1 m + f_2 m^2 + \dots \tag{1}$$

in welchem die Coëfficienten $f_0$, $f_1$, ... Functionen von einer Veränderlichen $x$ oder auch von $x$ und $m$ sind, die $p + 1$ ersten Glieder

$$\varphi_p(x, m) = f_0 + f_1 m + f_2 m^2 + \dots + f_p m^p \tag{2}$$

und sei die Function $\varphi(x, m)$ derart beschaffen, dass

$$\lim \frac{\varphi - \varphi_p}{m^p} = 0, \qquad \text{für } \lim m = 0 \tag{3}$$

ist, so wird für verschwindende $m$ die Function $\varphi(x, m)$ offenbar durch die Reihe (1) dargestellt, welches dadurch angezeigt wird, dass man schreibt:

$$\varphi(x, m) = f_0 + f_1 m + f_2 m^2 + \dots \tag{4}$$

Diese Darstellung wird als eine »asymptotische Gleichheit« bezeichnet.

Hat man eine zweite asymptotische Gleichheit:

$$\psi(x, m) = g_0 + g_1 m + g_2 m^2 + \dots,$$

so wird gemäss der Definition (3):

$$\lim \frac{\psi - \psi_p}{m^p} = 0,$$

demnach

$$\lim \frac{\varphi - \varphi_p}{m^p} \pm \lim \frac{\psi - \psi_p}{m^p} = 0$$

oder

$$\lim \frac{(\varphi \pm \psi) - (\varphi_p \pm \psi_p)}{m^p} = 0,$$

daher

$$\varphi + \psi = (f_0 + g_0) + (f_1 + g_1)m + (f_2 + g_2)m^2 + \dots \tag{5}$$

Aus (3) folgt

$$\varphi = \varphi_p + \varepsilon m^p,$$

wenn $\varepsilon$ eine mit $m$ verschwindende Grösse bezeichnet; ebenso wird

$$\psi = \psi_q + \varepsilon' m^q,$$

demnach

$$\varphi\psi = \varphi_p \psi_q + \varepsilon'' m^r,$$

wenn $r$ die kleinere der beiden Zahlen $p$, $q$ ist, folglich ist

[1]) Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, II. Bd., pag. 5 und 8.

$$\lim \frac{\varphi\psi - \varphi_r\psi_r}{m^r} = 0,$$

und ebenso wird

$$\frac{\varphi}{\psi} = \frac{\varphi_r}{\psi_r} + \frac{\varepsilon\psi_r m^r - \varepsilon'\varphi_r m^r}{\psi_r(\psi_r + \varepsilon' m^r)} = \frac{\varphi_r}{\psi_r} + \varepsilon'' m^r,$$

folglich

$$\varphi\psi = (f_0 + f_1 m + f_2 m^2 + \ldots)(g_0 + g_1 m + g_2 m^2 + \ldots)$$

$$\frac{\varphi}{\psi} = \frac{f_0 + f_1 m + f_2 m^2 + \ldots\ldots\ldots}{g_0 + g_1 m + g_2 m^2 + \ldots\ldots\ldots}. \tag{6}$$

Asymptotische Gleichheiten können daher addirt, subtrahirt, multiplicirt, dividirt werden wie gewöhnliche Gleichungen. In den Störungsausdrücken treten immer derartige Reihen auf, in denen $m$ die Bedeutung einer störenden Masse hat: die analytischen Ausdrücke werden streng richtig, wenn die störenden Massen verschwinden, und die nach Potenzen der Massen entwickelten Ausdrücke können daher als Entwickelungen gewisser unbekannter Functionen betrachtet werden, welchen sie asymptotisch gleichen.

Betrachtet man das System von $n$ linearen Differentialgleichungen

$$\frac{dx_i}{dt} - X_i = 0, \qquad i = 1, 2 \ldots . n, \tag{7}$$

wo $X_i$ eindeutige Functionen von $t$, $x_1$, $x_2 \ldots x_n$ und einem Parameter $m$ sind[1]), deren Lösungen $x_i = \theta_i(t)$ seien; lassen sich $n$ Reihen

$$S_i = f_{i,0} + f_{i,1} m + f_{i,2} m^2 + \ldots \tag{8}$$

über deren Convergenz oder Divergenz keinerlei beschränkende Annahmen gemacht werden, derart finden, dass die Differenz $\frac{dx_i}{dt} - X_i$ durch $m^p$ theilbar wird, wenn

$$S_i^{(p)} = f_{i,0} + f_{i,1} m + f_{i,2} m^2 + \ldots f_{i,p} m^p \tag{8a}$$

an Stelle der $x_i$ substituirt werden, d. h. also, dass

$$\left(\frac{dx_i}{dt} - X_i\right)_{x_i = S_i^{(p)}} = K m^p.$$

ist, so wird das System der $S_i$ als eine »formelle Lösung des Systems der Differentialgleichungen (7)« angesehen, und dann ist[2])

$$\theta_i(t, m) = S_i, \tag{9}$$

d. h. die Reihen $S_i$ sind asymptotische Darstellungen der strengen Lösungen der Differentialgleichungen (7).

In den Störungsrechnungen treten die störenden Massen als kleine Parameter $m$ auf. Gelingt es daher, für die Differentialgleichungen Integrale anzugeben, welche in der $(p + 1)$ten Näherung sämmtliche Glieder berücksichtigen, die von der $p$ten Ordnung der störenden Massen sind, wozu also gehört, dass die elementären Glieder, bei denen die störenden Massen im Nenner auftreten, ebenfalls entsprechende Berücksichtigung finden, so werden die erhaltenen Lösungen

---

1) Dieses System von linearen Differentialgleichungen enthält die allgemeinste Form, denn die Differentialgleichungen höherer Ordnung lassen sich durch die Substitution

$$\frac{dx_x}{dt} = y_x, \qquad \frac{dy_x}{dt} = z_x \ldots\ldots \tag{a}$$

auf die lineare Form bringen, indem die durch die Substitution entstandenen Gleichungen mit den Gleichungen (7) ein lineares System der gegebenen Form liefern.

2) Eine Ausnahme findet nur statt in den singulären Punkten der Funktionen $X_i$.

formelle Lösungen der Differentialgleichungen im Sinne POINCARÉ's sein, und sich mit verschwindender Masse asymptotisch den wahren Lösungen nähern. Ueber die Convergenz des Coëfficienten $f_{i,k}$ in den Reihen (8) ist, wie erwähnt, keinerlei Annahme nöthig, womit erwiesen erscheint, dass der in der astronomischen Praxis gebräuchliche Vorgang, Entwickelungen nach Potenzen der störenden Massen, ohne Rücksicht auf die praktische Convergenz der in den aufeinanderfolgenden Näherungen auftretenden numerischen Störungswerthe vorzunehmen, als gerechtfertigt angesehen werden kann. Der Satz erleidet auch für die Berechnung der Störungen der Satelliten keine Ausnahme, da dann $\mu^2$ [(vergl. 67 (7) und 74 (7a)] als kleiner Parameter $m$ aufzufassen ist. Für die secundär elementären Glieder werden die Reihen der $f_{i,k}$ dadurch divergent, dass die Nenner $i - i'\frac{\mu'}{\mu} = \nu$ sehr klein werden; sei dann $\frac{m}{\nu} = \alpha$ eine endliche Grösse, und tritt in $f_{i,k}$ ein Glied $\frac{1}{\nu}f_{i,k}^{(0)}$ auf, so wird das hieraus entstehende Glied geschrieben werden können:

$$\frac{m}{\nu}f_{i,k}^{(0)}m^{k-1} = \alpha f_{i,k}m^{k-1},$$

und es kann demnach als zu den Störungen der $(p-1)$ten Ordnung der störenden Massen gehörig angesehen werden, woraus folgt, dass der Satz auch für secundär elementäre Glieder gültig bleibt.

## II. Abschnitt. Die Rotationsbewegung.

79. Das Potential. Bei der Untersuchung der Rotationsbewegung der Himmelskörper spielt die Figur derselben eine wesentliche Rolle, indem gerade die wichtigsten zu Tage tretenden Erscheinungen eben durch diese bedingt sind. Andererseits aber wird die Figur eines Gestirnes durch seine Rotation mit bestimmt; beide stehen daher in einer Wechselbeziehung, welche es erfordert, das wichtigste über die Figur der Himmelskörper den Auseinandersetzungen über die Rotationsbewegung voranzuschicken.

Bei diesen Untersuchungen spielt die in No. 8 eingeführte Function

$$U = k^2\Sigma\frac{mm_1}{u} \tag{1}$$

wo $u$ die gegenseitige Entfernung der Massenpunkte bedeutet, eine wichtige Rolle. Handelt es sich um die Wirkung eines aus Massenpunkten $m, m', m'' \ldots$ bestehenden Massencomplexes $M = m + m' + m'' + \ldots$ auf den Massenpunkt $m_1$, so kann an Stelle von (1) gesetzt werden:

$$U = k^2 m_1\Sigma\frac{m}{u}. \tag{1a}$$

Nach der atomistischen Hypothese bestehen die Massen aus discreten Massentheilchen (Molekülen), die durch relativ sehr grosse Zwischenräume (Poren) getrennt sind, und es ist nicht nur gelungen, unter dieser Annahme die Entfernung der Moleküle, sondern auch die Grösse dieser selbst annähernd zu ermitteln. Für die analytischen Operationen der Mechanik, welche sich nicht auf die Molekularbewegungen oder Molekularveränderungen (Molekularphysik oder Chemie) erstrecken, ersetzt man diese Hypothese mit gleichem Vortheil durch die philosophisch gleich berechtigte einer continuirlichen Erfüllung des Raumes und nimmt die in einem gegebenen Volumen eingeschlossene Masse proportional diesem Volumen und einem constanten oder veränderlichen Faktor $\delta$, welcher

die Dichte genannt wird. Es wird dann die in einem Volumelemente $dv$ eingeschlossene Masse $\delta dv$, und die Summirung über die sämmtlichen discreten Massenpunkte des Complexes $M$ geht über in eine Integration über die sämmtlichen Volumelemente. Ist für ein Massenelement des betrachteten Complexes $u$ die Entfernung von dem angezogenen Punkte, so wird der in $U$ auftretende Faktor von $m_1$:

$$V = k^2 \int \frac{\delta\, dv}{u} \tag{2}$$

ausgedehnt über das ganze Volumen $v$. Diesen Ausdruck nennt man das Potential der Masse $M$ auf den von der Masseneinheit erfüllt gedachten Punkt $m_1$. Zerlegt man den Massencomplex $M$, welcher Kürze halber stets als Körper $M$ bezeichnet wird, durch irgend eine krumme Fläche in die beiden Körper $M_1$ und $M_2$, so dass

$$M = M_1 + M_2; \quad v = v_1 + v_2,$$

ist, so kann das Integral (2) ebenfalls in zwei Theile über die beiden Volumina ausgedehnt werden, so dass

$$V = V_1 + V_2; \qquad V_1 = k^2 \int\limits_{(v_1)} \frac{\delta\, dv}{u}; \qquad V_2 = k^2 \int\limits_{(v_2)} \frac{\delta\, dv}{u}. \tag{3}$$

ist. Legt man ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde, und seien $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die Coordinaten des Punktes $m_1$; $x$, $y$, $z$ die (veränderlichen) Coordinaten des Massenelementes $dv$, so wird

$$u^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$

$$V = \iiint \frac{k^2 \delta\, dx\, dy\, dz}{u}. \tag{2a}$$

Das Potential tritt als Function der Coordinaten $\xi$, $\eta$, $\zeta$ auf, und kann daher geschrieben werden:

$$V = V(\xi, \eta, \zeta).$$

Durch Differentiation desselben nach diesen drei Grössen erhält man die Kräfte in den Richtungen der drei Coordinatenaxen:

$$X = \frac{\partial V}{\partial \xi}; \qquad Y = \frac{\partial V}{\partial \eta}; \qquad Z = \frac{\partial V}{\partial \zeta}. \tag{4}$$

Die Kraft in irgend einer beliebigen Richtung $\nu$, welche durch die Richtungscosinus $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ gegen die drei Axen bestimmt ist, wird

$$X = \alpha \frac{\partial V}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial V}{\partial \eta} + \gamma \frac{\partial V}{\partial \zeta}.$$

Ist aber $\nu$ in die Function $V$ eingeführt, so erhält man die Kraft durch Differentiation nach $\nu$ selbst:

$$X = \frac{\partial V}{\partial \nu}. \tag{4a}$$

In derselben Weise, wie sich [nach (3)] das Potential einer Masse zerlegen lässt, wird auch das Potential verschiedener Massen gleich der Summe der Potentiale der einzelnen Massen. Befinden sich unter diesen einzelne Massenpunkte, so ist das Potential eines jeden derselben gleich der in diesem Massenpunkte gedachten Masse $\overline{m}$, dividirt durch die Entfernung $\overline{u}$ desselben von der Masse $m_1$ und es wird das Gesammtpotential der Massen $M'$, $M''$, $M'''$ ..., $\overline{m}'$, $\overline{m}''$, $\overline{m}'''$ ..., auf $m_1$:

$$V = V' + V'' + V''' \ldots + \overline{V}' + \overline{V}'' + \overline{V}''' + \ldots$$

$$V^{(i)} = k^2 \int \frac{\delta^{(i)}\, d\sigma^{(i)}}{u^{(i)}}; \qquad \overline{V}^{(i)} = \frac{k^2 \overline{m}^{(i)}}{\overline{u}^{(i)}}. \tag{6}$$

Da $\frac{\partial V^{(i)}}{\partial \nu}$, $\frac{\partial \overline{V}^{(i)}}{\partial \nu}$ die von den verschiedenen Massencomplexen und Punkten auf die Masseneinheit in $m_1$ ausgeübten Kräfte in der Richtung $\nu$ sind, diese aber unmittelbar summirbar sind, so folgt, dass $\frac{\partial V}{\partial \nu}$ die von den sämmtlichen wirkenden Massen auf die in $m_1$ befindliche Masseneinheit ausgeübte Gesammtkraft in der Richtung $\nu$ darstellt.

Der Ausdruck

$$V = V(\xi, \eta, \zeta) = C,$$

wo $C$ eine Constante ist, stellt bei veränderlichem $\xi$, $\eta$, $\zeta$ eine Fläche dar, welche die Eigenschaft hat, dass das Potential der sämmtlichen wirkenden Massen auf die einzelnen Punkte $\xi$, $\eta$, $\zeta$ überall denselben Werth hat. Solche Flächen nennt man äquipotentielle Flächen oder aus einem sofort ersichtlichen Grunde Niveauflächen. Zwei Niveauflächen können sich nicht schneiden. Für eine gewisse Niveaufläche hat nämlich die Constante $C$ in ihrer ganzen Ausdehnung denselben Werth; verschiedene Niveauflächen entsprechen verschiedenen Constanten $C$, $C'$. Würde es einen Punkt $\xi_1$, $\eta_1$, $\zeta_1$ geben, in denen sich diese beiden Niveauflächen schneiden, so müsste $V(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = C$, $V(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = C'$, daher $C = C'$ sein, was der Voraussetzung widerspricht.

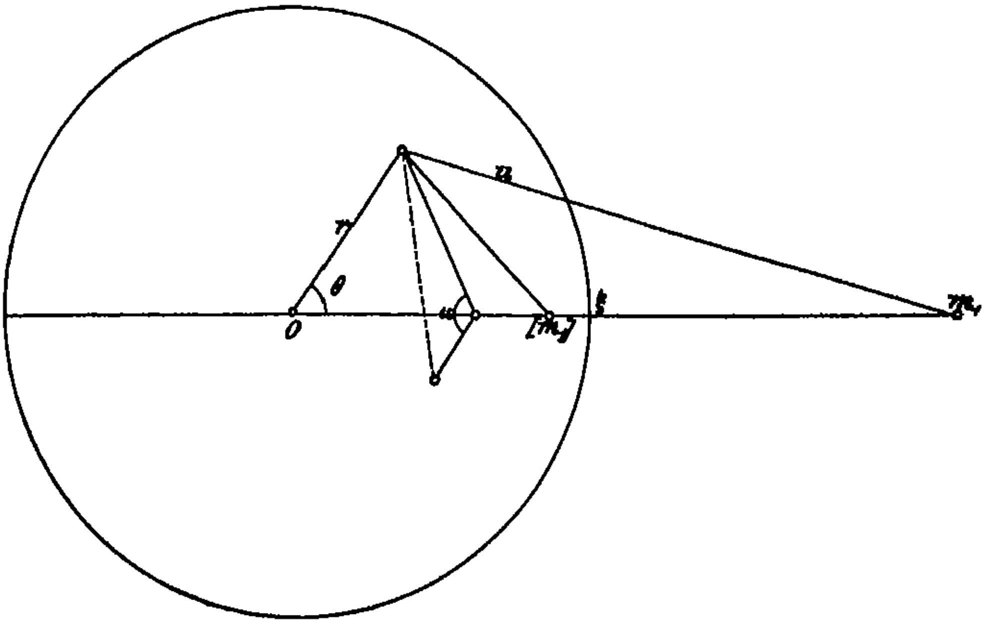
Legt man ein Coordinatensystem in einen Punkt $\xi$, $\eta$, $\zeta$ einer Niveaufläche, so dass die $xy$-Ebene in die Tangentialebene, und die $z$-Axe daher in die Normale der Niveaufläche fallen, so wird man bei dem Uebergange von einem Punkte $\xi$, $\eta$, $\zeta$ zu einem benachbarten $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, $\zeta$ in der Niveaufläche selbst bleiben, da man sich längs zweier aufeinander senkrecht stehender Tangenten der Fläche bewegt; da für diese Punkte der Werth des Potentials derselbe ist, so wird

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial \zeta} = -g, \tag{7}$$

wo $g$ die Kraft in der Richtung der Flächennormale ist, hier also gleich der Gesammtkraft, welche auf den Punkt $m_1$ wirkt. Denkt man sich z. B. eine Flüssigkeitsmasse, auf welche verschiedene Kräfte wirken, so wird ihre Oberfläche unter deren Einwirkung eine gewisse Form annehmen, welche aber derart sein muss, dass die Gesammtkraft senkrecht zur Oberfläche wirkt: die Oberfläche wird demnach eine äquipotentielle Fläche (daher der Name Niveaufläche) und wird dadurch erhalten, dass man das Potential der sämmtlichen wirkenden Kräfte auf einen Punkt der Flüssigkeitsmasse sucht, und dieses Potential gleich $C$ (constant) setzt. Besteht die Flüssigkeitsmasse aus Flüssigkeiten verschiedener Dichte, so wird jede Trennungsfläche ebenfalls eine Niveaufläche sein, und dasselbe gilt von den Schichten einer nicht homogenen Flüssigkeit von continuirlich veränderlicher Dichte. Der Werth der Constanten $C$ wird aber für die verschiedenen Niveauflächen verschieden sein, und kann aus der Gesammtmasse oder dem Gesammtvolumen der innerhalb dieser Niveaufläche befindlichen Flüssigkeit ermittelt werden.

Unter den Massencomplexen von geometrisch bestimmbarer Gestalt sind für die Zwecke der Mechanik des Himmels besonders hervorzuheben die Kugel und das Ellipsoid.

**80. Das Potential einer Kugel.** Sei zunächst für die Kugel die Entfernung des angezogenen Massenpunktes $m_1$ von dem Mittelpunkte der Kugel $O$ (Fig. 274) $\xi$. Wählt man die Linie $Om_1$ als $x$-Axe und bestimmt die Lage irgend eines Punktes in Raume durch die Polarcoordinaten: die Entfernung $r$




(A. 274.)

von $O$, den Winkel $\theta$, welchen $r$ mit der $x$-Axe einschliesst, und den Winkel $\omega$ welchen die Ebene $r\xi$ mit der $xy$-Ebene einschliesst, so wird:

$$x = r \cos \theta$$
$$y = r \sin \theta \cos \omega$$
$$z = r \sin \theta \sin \omega$$
$$dm = \delta r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\omega \, dr$$
$$u^2 = r^2 + \xi^2 - 2r\xi \cos \theta,$$

demnach

$$V = \iiint \frac{\delta r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\omega \, dr}{u}, \tag{1}$$

wo Kürze halber $\delta$ statt $k^2\delta$ gesetzt ist. Integrirt man hier zunächst nach $\omega$ von 0 bis $2\pi$, so wird dabei $\theta$ und $u$ constant bleiben, und es wird

$$V = 2\pi \iint \frac{\delta r^2 \sin \theta \, d\theta \, dr}{u}.$$

Integrirt man nach $\theta$ und lässt dabei $r$ constant, d. h. integrirt man nach einer Kugelschale vom Halbmesser $r$, so ist

$$u\,du = + r\xi \sin \theta \, d\theta; \qquad \sin \theta \, d\theta = \frac{u\,du}{r\xi},$$

folglich

$$V = 2\pi \iint \frac{\delta r \, dr \, du}{\xi}.$$

Nach $u$ ist dabei zu integriren von demjenigen Werthe von $u$, welcher $\theta = 0$ entspricht, bis zu dem $\theta = \pi$ entsprechenden Werthe. Hierbei ist nun zu unterscheiden, ob $m_1$ ausserhalb oder innerhalb der Kugelschale liegt.

1) Für einen äusseren Punkt $m_1$ werden die beiden Grenzen: $u_0 = \xi - r$, $u_1 = \xi + r$, daher

$$V_a = 2\pi\int\frac{\delta r\,dr}{\xi}[(\xi + r) - (\xi - r)] = \frac{4\pi}{\xi}\int\delta r^2\,dr.$$

2) Für einen inneren Punkt $[m_1]$ werden die beiden Grenzen: $[u]_0 = r - \xi$, $(u)_1 = r + \xi$, demnach

$$V_i = 2\pi\int\frac{\delta r\,dr}{\xi}[(r + \xi) - (r - \xi)] = 4\pi\int\delta r\,dr.$$

Dabei wurde aber vorausgesetzt, dass $\delta$ von $\omega$ und $\theta$ unabhängig ist, d. h. in der ganzen Kugelschale vom Halbmesser $r$ constant, eine Annahme, welche bei den Himmelskörpern als die wahrscheinlichste gelten kann. Für verschiedene Schalen wird aber die Dichte verschieden und als Function von $r$ aufgefasst werden können, so dass

$$\delta = \varphi(r)$$

ist. Bei dem Uebergange auf die Wirkung der ganzen Kugel vom Halbmesser $a$ wird aber wohl der Punkt $m_1$ ein äusserer sein, nicht aber $[m_1]$ für alle Schichten ein innerer. Man hat daher:

1) Für den äusseren Punkt $m_1$:

$$V = \frac{4\pi}{\xi}\int_0^a\varphi(r)r^2\,dr = \frac{M}{\xi}, \quad \text{wenn } M = 4\pi\int_0^a\varphi(r)r^2dr \tag{2}$$

ist. $M$ ist, wie man sieht, die Masse der Kugel; die Anziehung in der Richtung $\xi$ (d. h. die Totalanziehung) wird:

$$\frac{\partial V}{\partial\xi} = -\frac{M}{\xi^2}, \tag{3}$$

wo die Constante $k^2$ (wie im Folgenden stets) in die Masse einbezogen ist. Die Wirkung einer Kugel auf einen äusseren Punkt ist daher dieselbe, als wenn die Gesammtmasse in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre, wodurch sich die bisher festgehaltene Betrachtung der Himmelskörper als **Massenpunkte** rechtfertigt.

2) Für einen Punkt $[m_1]$ im Innern der Kugel muss man die Gesammtmasse in zwei Theile theilen; für alle Schalen, für welche der Halbmesser kleiner als $\xi$ ist, ist der Punkt ein äusserer, für die übrigen Schalen, vom Halbmesser $\xi$ bis $a$ ist er ein innerer; es wird daher

$$V = \frac{4\pi}{\xi}\int_0^\xi\varphi(r)r^2dr + 4\pi\int_\xi^a\varphi(r)r\,dr.$$

Sei nun

$$\int_0^\xi\varphi(r)r^2dr = f_1(\xi); \qquad \int_0^\xi\varphi(r)r\,dr = f_2(\xi), \tag{4}$$

so wird:

$$V = 4\pi\frac{f_1(\xi)}{\xi} + 4\pi[f_2(a) - f_2(\xi)] = 4\pi\left[\frac{f_1(\xi)}{\xi} - f_2(\xi)\right] + 4\pi f_2(a). \tag{5}$$

Für $\xi = a$ gehen die Ausdrücke (2) und (5) in einander über. Aus (5) folgt für die Grösse der Anziehung:

$$\frac{\partial V}{\partial\xi} = -\frac{4\pi}{\xi^2}f_1(\xi) + \frac{4\pi}{\xi}\xi^2\varphi(\xi) - 4\pi\xi\varphi(\xi) = -\frac{4\pi}{\xi^2}f_1(\xi).$$

Nun ist $4\pi f_1(\xi) = M_\xi$ die Masse der Kugel vom Halbmesser $\xi$, also

$$\frac{\partial V}{\partial\xi} = -\frac{M_\xi}{\xi^2}. \tag{6}$$

Da die Masse, abgesehen von den Dichtenänderungen, proportional $\xi^3$ ist, so folgt daraus die Anziehung proportional der Entfernung vom Mittelpunkte. Setzt man voraus, dass sich die Function $\varphi(\xi)$ in eine nach Potenzen von $\xi$ fortschreitende Reihe entwickeln lässt, dass also[1])

$$\varphi(\xi) = \delta + \delta'\xi + \delta''\xi^2 + \ldots \tag{7}$$

ist, so wird

$$f_1(\xi) = \tfrac{1}{3}\delta\xi^3 + \tfrac{1}{4}\delta'\xi^4 + \tfrac{1}{5}\delta''\xi^5 + \ldots$$

$$f_2(\xi) = \tfrac{1}{2}\delta\xi^2 + \tfrac{1}{3}\delta'\xi^3 + \tfrac{1}{4}\delta''\xi^4 + \ldots$$

$$V = -2\pi\left[\tfrac{1}{3}\delta\xi^2 + \tfrac{1}{6}\delta'\xi^3 + \tfrac{1}{10}\delta''\xi^4 + \ldots\right] + 4\pi\left[\tfrac{1}{2}\delta a^2 + \tfrac{1}{3}\delta' a^3 + \ldots\right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = -4\pi\left(\tfrac{1}{3}\delta\xi + \tfrac{1}{4}\delta'\xi^2 + \tfrac{1}{5}\delta''\xi^4 + \ldots\right). \tag{8}$$

Ist die Kugel homogen, so sind $\delta' = \delta'' = \ldots = 0$ und es wird

$$V = 2\pi\delta a^2 - \tfrac{2}{3}\pi\delta\xi^2; \qquad \frac{\partial V}{\partial \xi} = -\tfrac{4}{3}\pi\delta\xi. \tag{9}$$

81. **Das Potential eines Ellipsoïdes auf einen inneren Punkt** Legt man den Ursprung des Axensystems in den angezogenen Punkt $[m_1]$, so wird das Volumelement

$$dv = u^2\, do\, du,$$

wenn $do$ der von den Radienvectoren der Begrenzung des Flächenelementes eingeschlossene Winkel (das Flächenelement der Einheitskugel) ist, und $u$ die stets positiv zu nehmende Entfernung des anziehenden Massenpunktes von $[m_1]$ ist. Dann wird:

$$V = \iiint \delta u\, du\, do = \tfrac{1}{2}\iint \delta u^2\, do \tag{1}$$

(A. 275.)

Die Integrationsgrenzen für $u$ sind von 0 bis zu demjenigen Werthe von $u$, welcher der Oberfläche des anziehenden Ellipsoïds entspricht. Um diesen Werth zu erhalten, seien $x, y, z$ die Coordinaten eines Punktes, bezogen auf ein Axensystem, dessen Ursprung im Mittelpunkte $O$ (Fig. 275) des Ellipsoïds ist, und

[1]) Bei nach dem Innern zunehmender Dichte wird natürlich $\delta'$ negativ; negative Potenzen von $\xi$ können nicht auftreten, da sonst die Dichte für $\xi = 0$ unendlich würde.

für welches die Richtungen der Axen mit den Richtungen der Ellipsoidaxen zusammenfallen; $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die Coordinaten von $[m_1]$; $\lambda$, $\mu$, $\nu$ die Winkel, welche die Strecke $u$ mit den Coordinatenaxen einschliesst, so wird:

$$\begin{aligned} x &= \xi + u\cos\lambda \\ y &= \eta + u\cos\mu \\ z &= \zeta + u\cos\nu \end{aligned} \tag{2}$$

und für einen Punkt des Ellipsoides muss

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{3}$$

sein, wenn $a$, $b$, $c$ die drei Hauptaxen des Ellipsoides sind. Substituirt man (2) in (3), so erhält man für $u$ die Gleichung:

$$hu^2 + 2ku = l, \tag{4}$$

wenn

$$\begin{aligned} h &= \frac{\cos^2\lambda}{a^2} + \frac{\cos^2\mu}{b^2} + \frac{\cos^2\nu}{c^2} \\ k &= \frac{\xi\cos\lambda}{a^2} + \frac{\eta\cos\mu}{b^2} + \frac{\zeta\cos\nu}{c^2} \\ l &= 1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2} \end{aligned} \tag{5}$$

ist. Für einen Punkt $\xi$, $\eta$, $\zeta$ im Innern des Ellipsoides ist $l$ positiv; und da $k^2$ und $h$ ebenfalls wesentlich positiv sind, so wird in dem Ausdrucke

$$u = -\frac{k}{h} \pm \frac{\sqrt{k^2 + hl}}{h},$$

welcher stets positiv zu nehmen ist, das obere Zeichen beizubehalten sein, daher

$$u = \frac{-k + \sqrt{k^2 + hl}}{h} \tag{6}$$

und das Zeichen der Quadratwurzel positiv. Die Winkel $\lambda$, $\mu$, $\nu$ sind von einander nicht unabhängig, und lassen sich durch zwei andere $\theta$, $\omega$ ersetzen, welche, bezogen auf das Axensystem, dessen Ursprung in $[m_1]$ liegt, dieselbe Bedeutung haben, wie die in Fig. 274 auf das durch $O$ gehende Axensystem bezogenen Winkel; dann ist

$$\cos\lambda = \cos\theta; \qquad \cos\mu = \sin\theta\cos\omega; \qquad \cos\nu = \sin\theta\sin\omega \tag{7}$$

$$do = \sin\theta\, d\theta\, d\omega \tag{8}$$

und die Integrationsgrenzen sind:

für $\theta$: 0 und $\pi$; für $\omega$: 0 und $2\pi$.

Substituirt man den Werth

$$u^2 = \frac{2k^2 + hl}{h^2} - 2\frac{k}{h}\sqrt{k^2 + hl} \tag{6a}$$

in den Ausdruck (1), so erhält man eine Reihe von Integralen, deren Ausführung durch die folgenden Sätze theilweise umgangen werden kann. Es sei in dem Integrale

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F(\theta, \omega)\, do. \tag{9}$$

a) $F(\theta, \pi + \omega) = -F(\theta, \omega)$, so wird

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F(\theta, \omega)\sin\theta\, d\theta\, d\omega = \int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\left[\int_0^{\pi} F(\theta, \omega)\, d\omega + \int_{\pi}^{2\pi} F(\theta, \omega)\, d\omega\right].$$

Setzt man im zweiten Integrale $\omega = \pi + \omega_1$ und lässt zum Schlusse den Index 1 wieder weg, da die Bezeichnung der Integrationsvariabeln willkürlich ist, so folgt:

$$A = \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \left[\int_0^\pi F(\theta,\ \omega)\, d\omega - \int_0^\pi F(\theta,\ \omega)\, d\omega\right],\ \text{d. h. } A = 0. \qquad (9\,\text{a})$$

b) Es sei $F(\theta,\ \pi \pm \omega) = F(\theta,\ \omega)$. Zerlegt man das Integral nach $\omega$ in zwei andere zwischen den Grenzen 0 und $\pi$ und zwischen $\pi$ und $2\pi$ und substituirt in dem zweiten $\omega = \pi + \omega_1$, so wird:

$$A = 2\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^\pi F(\theta,\ \omega)\, d\omega.$$

Zerlegt man nunmehr das Integral nach $\omega$ neuerdings in zwei andere zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ und zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und $\pi$ und substituirt im zweiten $\omega = \pi - \omega_1$, so erhält man

$$A = 4\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\theta,\ \omega)\, d\omega. \qquad (9\,\text{b})$$

c) Sei $F(\theta,\ \pi + \omega) = F(\theta,\ \omega)$; $F(\theta,\ \pi - \omega) = -F(\theta,\ \omega)$, so erhält man in derselben Weise

$$A = 0. \qquad (9\,\text{c})$$

d) Sei $F(\pi - \theta,\ \omega) = F(\theta,\ \omega)$, so wird man in der Zerlegung

$$A = \int_0^{2\pi} d\omega \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\theta,\ \omega) \sin\theta\, d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} F(\theta,\ \omega) \sin\theta\, d\theta\right]$$

in das zweite Integral $\theta = \pi - \theta_1$ substituiren, und erhält:

$$A = 2\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\theta,\ \omega) \sin\theta\, d\theta. \qquad (9\,\text{d})$$

e) Sei $F(\pi - \theta,\ \omega) = F(\theta,\ \omega)$; $F(\theta,\ \pi \pm \omega) = F(\theta,\ \omega)$, so folgt durch Combination von b) und d):

$$A = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\theta,\ \omega) \sin\theta\, d\theta\, d\omega. \qquad (9\,\text{e})$$

*f*) Sei $F(\pi - \theta,\ \pi + \omega) = -F(\theta,\ \omega)$; zerlegt man das Integral nach $\omega$ in zwei andere zwischen den Grenzen 0 und $\pi$ und zwischen $\pi$ und $2\pi$, und substituirt im zweiten $\theta = \pi - \theta_1$, $\omega = \pi + \omega_1$, so folgt

$$A = 0. \qquad (9\,f)$$

Wendet man nun auf $k^2$, $hl$ die Substitution (f) an, so bleiben ihre Werthe ungeändert; da aber $k$ eine Function ist, welche der Bedingung *f*) genügt, so ist auch $\frac{2k}{h}\sqrt{k^2 + hl}$ eine solche Function, so dass dieser Theil des Integrals $\int u^2\, do$ verschwindet. Es bleibt daher, die Dichte als constant vorausgesetzt:

$$V = \delta \int\!\!\int \frac{k^2}{h^2}\, do + \tfrac{1}{2}\delta l \int\!\!\int \frac{1}{h}\, do.$$

Hier ist weiter:

$$k^2 = \frac{\xi^2}{a^4}\cos^2\lambda + \frac{\eta^2}{b^4}\cos^2\mu + \frac{\zeta^2}{c^4}\cos^2\nu + \frac{2\xi\eta}{a^2b^2}\cos\lambda\cos\mu + \frac{2\xi\zeta}{a^2c^2}\cos\lambda\cos\nu + \frac{2\eta\zeta}{b^2c^2}\cos\mu\cos\nu.$$

$\cos\lambda\cos\mu$ und $\cos\lambda\cos\nu$ genügen der Substitution a); $\cos\mu\cos\nu$ der Substitution c); $h^2$ bleibt hierbei unverändert, so dass die Integrale der drei letzten Glieder verschwinden, und man erhält:

$$V = \frac{\delta \xi^2}{a^4} L + \frac{\delta \eta^2}{b^4} M + \frac{\delta \zeta^2}{c^4} N + \delta l K, \tag{10}$$

wobei

$$K = \tfrac{1}{2}\int\int \frac{do}{h};\quad L = \int\int \frac{\cos^2\lambda}{h^2} do;\quad M = \int\int \frac{\cos^2\mu}{h^2} do;\quad N = \int\int \frac{\cos^2\nu}{h^2} do \tag{10a}$$

$$\theta = 0 \ldots \pi; \qquad \omega = 0 \ldots 2\pi$$

ist. Hier genügen die zu integrirenden Functionen sämmtlich der Bedingung c), so dass:

$$K = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{do}{h};\ L = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\lambda}{h^2} do;\ M = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\mu}{h^2} do;\ N = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\nu}{h^2} do. \tag{11}$$

Nun ist

$$h = \frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\omega}{b^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\omega}{c^2} =$$

$$= \left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)\cos^2\omega + \left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{c^2}\right)\sin^2\omega.$$

Setzt man daher

$$\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2} = B_1;\qquad \frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{c^2} = C_1, \tag{12a}$$

so wird

$$h = B_1\cos^2\omega + C_1\sin^2\omega;\qquad J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{B_1\cos^2\omega + C_1\sin^2\omega} \tag{13a}$$

$$K = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_1 \sin\theta\, d\theta. \tag{14a}$$

Aus (13a) erhält man:

$$\frac{\partial J_1}{\partial b} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega\cos^2\omega}{h^2}\frac{\partial B_1}{\partial b} = \frac{2}{b^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\mu}{h^2} d\omega;\qquad \frac{\partial J}{\partial c_1} = \frac{2}{c^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\nu}{h^2} d\omega$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial a} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{h^2}\left(\cos^2\omega\frac{\partial B_1}{\partial a} + \sin^2\omega\frac{\partial C_1}{\partial a}\right) = \frac{2}{a^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\lambda}{h^2} d\omega,$$

demnach

$$L = 4a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \frac{\partial J_1}{\partial a};\quad M = 4b^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \frac{\partial J_1}{\partial b};\quad N = 4c^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \frac{\partial J_1}{\partial c}. \tag{14b}$$

Nun ist

$$J_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{B_1C_1}};\qquad \frac{\partial J_1}{\partial b} = -\frac{\pi}{4B_1\sqrt{B_1C_1}}\frac{\partial B_1}{\partial b} = \frac{\pi}{2b^3}\frac{\sin^2\theta}{B_1\sqrt{B_1C_1}};$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial c} = \frac{\pi}{2c^3}\frac{\sin^2\theta}{C_1\sqrt{B_1C_1}}$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial a} = -\frac{\pi}{4B_1C_1\sqrt{B_1C_1}}\left(B_1\frac{\partial C_1}{\partial a} + C_1\frac{\partial B_1}{\partial a}\right) = \frac{\pi}{2a^3}\frac{(B_1+C_1)\cos^2\theta}{B_1C_1\sqrt{B_1C_1}},$$

demnach[1])

---

[1]) Nach (10a) oder (11) ist

$$\frac{L}{a^2} + \frac{M}{b^2} + \frac{N}{c^2} = 2K,\ \text{daher}\ a\frac{\partial J_1}{\partial a} + b\frac{\partial J_1}{\partial b} + c\frac{\partial J_1}{\partial c} = 2J_1,$$

welche Gleichung als Probegleichung dienen kann.

$$4b^2\frac{\partial J_1}{\partial b}=2\pi\frac{\sin^2\theta}{B_1\sqrt{B_1C_1}};\quad 4c^2\frac{\partial J_1}{\partial c}=2\pi\frac{\sin^2\theta}{C_1\sqrt{B_1C_1}};$$
$$4a^2\frac{\partial J_1}{\partial a}=2\pi\frac{\cos^2\theta}{\sqrt{B_1C_1}}\left(\frac{1}{B_1}+\frac{1}{C_1}\right) \tag{15}$$

und

$$K=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{B_1C_1}};\quad L=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{B_1C_1}}\left(\frac{1}{B_1}+\frac{1}{C_1}\right)$$
$$M=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3\theta\,d\theta}{B_1\sqrt{B_1C_1}};\quad N=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3\theta\,d\theta}{C_1\sqrt{B_1C_1}}. \tag{14c}$$

Nun ist

$$V=\delta\cdot K-\frac{\delta\xi^2}{a^2}\left(K-\frac{1}{a^2}L\right)-\frac{\delta\eta^2}{b^2}\left(K-\frac{1}{b^2}M\right)-\frac{\delta\zeta^2}{c^2}\left(K-\frac{1}{c^2}N\right), \tag{16}$$

daher

$$X=+\frac{\partial V}{\partial\xi}=-\frac{2\delta\xi}{a^2}\left(K-\frac{1}{a^2}L\right)$$
$$Y=+\frac{\partial V}{\partial\eta}=-\frac{2\delta\eta}{b^2}\left(K-\frac{1}{b^2}M\right) \tag{17}$$
$$Z=+\frac{\partial V}{\partial\zeta}=-\frac{2\delta\zeta}{c^2}\left(K-\frac{1}{c^2}N\right).$$

Durch die Substitution

$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+t}}$$

erhält man

$$B_1=\frac{b^2+t}{b^2(a^2+t)};\qquad C_1=\frac{c^2+t}{c^2(a^2+t)},$$

demnach, wenn

$$T=\sqrt{\left(1+\frac{t}{a^2}\right)\left(1+\frac{t}{b^2}\right)\left(1+\frac{t}{c^2}\right)} \tag{18}$$

gesetzt wird:

$$K=\pi\int_0^\infty\frac{dt}{T};\quad L=\pi\int_0^\infty\frac{dt}{T}a^2\left[\frac{1}{1+\frac{t}{b^2}}+\frac{1}{1+\frac{t}{c^2}}\right]$$
$$M=\pi\int_0^\infty\frac{t\,dt}{\left(1+\frac{t}{b^2}\right)T};\quad N=\pi\int_0^\infty\frac{t\,dt}{\left(1+\frac{t}{c^2}\right)T}. \tag{19}$$

Setzt man:

$$L'=K-\frac{1}{a^2}L=\pi\int_0^\infty\frac{dt}{T}\left[1-\frac{1}{1+\frac{t}{b^2}}-\frac{1}{1+\frac{t}{c^2}}\right]$$
$$M'=K-\frac{1}{b^2}M=\pi\int_0^\infty\frac{dt}{T\left(1+\frac{t}{b^2}\right)} \tag{20a}$$
$$N'=K-\frac{1}{c^2}N=\pi\int_0^\infty\frac{dt}{T\left(1+\frac{t}{c^2}\right)},$$

so wird[1])

---

[1]) Es ist $L'+M'+N'=K$.

$$V = \delta \cdot K - \frac{\delta\xi^2}{a^2} L' - \frac{\delta\eta^2}{b^2} M' - \frac{\delta\zeta^2}{c^2} N'$$
$$X = -\frac{2\delta\xi}{a^2} L'; \quad Y = -\frac{2\delta\eta}{b^2} M'; \quad Z = -\frac{2\delta\zeta}{c^2} N'. \tag{21}$$

In diesen Formeln spielt die $x$-Axe insofern eine besondere Rolle, als der Winkel $\theta$ auf sie bezogen ist. Es ist sofort klar, dass man ähnliche Formeln erhalten würde, wenn man von der $y$- oder $z$-Axe ausgehen würde. Sei dann:

$$\frac{\cos^2\theta}{b^2} + \frac{\sin^2\theta}{a^2} = A_2 \qquad \frac{\cos^2\theta}{c^2} + \frac{\sin^2\theta}{a^2} = A_3$$
$$\frac{\cos^2\theta}{b^2} + \frac{\sin^2\theta}{c^2} = C_2 \qquad \frac{\cos^2\theta}{c^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2} = B_3 \tag{12b}$$

$$J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{C_2\cos^2\omega + A_2\sin^2\omega}; \quad J_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{A_3\cos^2\omega + B_3\sin^2\omega}, \tag{18b}$$

so wird

$$K = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{A_2 C_2}}; \qquad K = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{A_3 B_3}}.$$

Die Identität dieser Integrale mit dem früheren folgt sofort durch die Substitution:

$$\cos\theta = \frac{b}{\sqrt{b^2+t}}; \quad \cos\theta = \frac{c}{\sqrt{c^2+t}},$$

indem für $K$ sofort die Form (19) resultirt. Die drei anderen Integrale erhält man in den Formen:

$$L' = \pi \int_0^\infty \frac{dt}{T\left(1+\frac{t}{a^2}\right)}; \quad M' = \pi \int_0^\infty \frac{dt}{T}\left[1 - \frac{1}{1+\frac{t}{a^2}} - \frac{1}{1+\frac{t}{c^2}}\right]$$
$$N' = \pi \int_0^\infty \frac{dt}{T\left(1+\frac{t}{c^2}\right)} \tag{20b}$$

$$L' = \pi \int_0^\infty \frac{dt}{T\left(1+\frac{t}{a^2}\right)}; \quad M' = \pi \int_0^\infty \frac{dt}{T\left(1+\frac{t}{b^2}\right)}$$
$$N' = \int_0^\infty \frac{dt}{T}\left[1 - \frac{1}{\left(1+\frac{t}{a^2}\right)} - \frac{1}{\left(1+\frac{t}{b^2}\right)}\right], \tag{20c}$$

sodass man einfach schreiben kann[1])

$$K = \pi \int_0^\infty \frac{dt}{T}; \; L' = \pi \int_0^\infty \frac{dt}{T\left(1+\frac{t}{a^2}\right)}; \; M' = \pi \int_0^\infty \frac{dt}{T\left(1+\frac{t}{b^2}\right)}; \; N' = \pi \int_0^\infty \frac{dt}{T\left(1+\frac{t}{c^2}\right)}. \tag{22}$$

---

[1]) Hieraus folgt dann die für beliebige Werthe von $a$, $b$, $c$ gültige Identität:

$$\int_0^\infty \frac{dt}{T}\left[\frac{1}{1+\frac{t}{a^2}} + \frac{1}{1+\frac{t}{b^2}} + \frac{1}{1+\frac{t}{c^2}}\right] = \int_0^\infty \frac{dt}{T}.$$

Durch die Substitution

$$t = a^2\,\frac{1-\vartheta^2}{\vartheta^2}$$

erhält man, wenn

$$\varkappa^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}\,,\quad \varkappa'^2 = \frac{a^2-c^2}{a^2}\,;\quad \mathrm{H} = \sqrt{(1-\varkappa^2\vartheta^2)(1-\varkappa'^2\vartheta^2)} \tag{23}$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned} K &= 2bc\pi\int_0^1\frac{d\vartheta}{\mathrm{H}}\,; & \frac{L'}{a^2} &= \frac{2bc\pi}{a^2}\int_0^1\frac{\vartheta^2\,d\vartheta}{\mathrm{H}}\,; \\ \frac{M'}{b^2} &= \frac{2bc\pi}{a^2}\int_0^1\frac{\vartheta^2\,d\vartheta}{(1-\varkappa^2\vartheta^2)\mathrm{H}}\,; & \frac{N'}{c^2} &= \frac{2bc\pi}{a^2}\int_0^1\frac{\vartheta^2\,d\vartheta}{(1-\varkappa'^2\vartheta^2)\mathrm{H}}\,. \end{aligned} \tag{24}$$

Setzt man

$$\int_0^1\frac{d\vartheta}{\mathrm{H}} = J, \tag{25}$$

so wird

$$\int_0^1\frac{\vartheta^2\,d\vartheta}{(1-\varkappa^2\vartheta^2)\mathrm{H}} = \frac{1}{\varkappa}\,\frac{\partial J}{\partial\varkappa}\,;\qquad \int_0^1\frac{\vartheta^2\,d\vartheta}{(1-\varkappa'^2\vartheta^2)\mathrm{H}} = \frac{1}{\varkappa'}\,\frac{\partial J}{\partial\varkappa'}\,, \tag{25a}$$

so dass sich die drei Attractionen auf ein einziges Integral zurückführen lassen[1]). Für $\xi = \eta = \zeta = 0$ geht $V$ in $\vartheta\cdot K$ über; dieses ist demnach das Potential des Ellipsoïdes auf einen im Mittelpunkte desselben gelegenen Punkt.

Für ein Ellipsoïd, dessen Halbaxen $a'$, $b'$, $c'$ dasselbe Verhältniss haben, so dass

$$a' : b' : c' = a : b : c$$

ist, werden $\varkappa$ und $\varkappa'$ dieselben Werthe erhalten, daher sind nach (21) und (25a) die Attractionen auf einen inneren Punkt dieselben. Denkt man sich nun ein concentrisches Ellipsoïd, dessen Axen $a'$, $b'$, $c'$ kleiner sind als $a$, $b$, $c$, so wird die Attraction des inneren, kleineren Ellipsoïdes dieselbe sein, wie die des äusseren, grossen, folglich die Attraction der zwischen beiden befindlichen Schale gleich Null. Eine von zwei concentrischen ähnlichen Ellipsoïden begrenzte Schale übt demnach auf einen in ihrem Hohlraume befindlichen Punkt keine Anziehung aus[2]). Man kann daher die Attraction eines beliebigen Ellipsoïdes auf einen inneren Punkt durch die Attraction desjenigen concentrischen ähnlichen Ellipsoïdes ersetzen, welches durch den angezogenen Punkt $[m_1]$ geht; für dieses ist dann der angezogene Punkt auch bereits als äusserer an der Oberfläche desselben liegender anzusehen; es ist

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2} = 1$$

und die Formeln (20), (24), (25) gelten daher auch für diesen Fall; für das Potential kann auch sofort in (10): $l = 0$ gesetzt werden[3]).

---

[1]) Wollte man für alle drei Attractionen symmetrische Formen, so würden überdies die Verhältnisse $\frac{b^2-a^2}{b^2}$ u. s. w. eintreten.

[2]) Nicht dasselbe gilt von dem Potentiale. Dieses wird, wenn

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \alpha$$

ist:

$$V = \vartheta(K-K') = 2\vartheta\pi bc(1-\alpha^2)\int_0^1\frac{d\vartheta}{\mathrm{H}}\,.$$

[3]) Doch dürfen die Kräfte nicht aus dieser vereinfachten Form $V$ abgeleitet werden, da die Bedingung $l = 0$ erst nach der Differentiation eingeführt werden darf.

82. Potential eines Ellipsoides auf einen äusseren Punkt. Für den äusseren Punkt ist $l$ negativ; damit fallen die aus (6) und (6a) in 81 sich ergebenden Vereinfachungen weg. Doch lässt sich die Berechnung der Anziehung auf einen äusseren Punkt mittels des Theorems von JVORY auf den vorigen Fall zurückführen.

Die Componenten der Anziehung des Ellipsoides $E$ (Fig. 275) auf den Punkt $m_1$, dessen Coordinaten mit $\xi_1$, $\eta_1$, $\zeta_1$ bezeichnet werden mögen, sind gegeben durch:

$$X = -\iiint \frac{\delta \cdot dx dy dz (x - \xi_1)}{u^3} = \iint \delta \cdot dy dz \int_{u'}^{u''} \frac{\partial \frac{1}{u}}{\partial x} dx \tag{1}$$

und ähnlich für $Y$, $Z$, wobei die Grenzwerthe $u'$, $u''$ diejenigen Werthe von $u$ sind, welche sich auf die Durchgangspunkte der durch das Element $dm$ parallel zur $X$-Axe gezogenen Geraden $A'A''$ mit dem Ellipsoide[1]) beziehen. Es ist daher:

$$X = \iint \delta \cdot dy dz \left(\frac{1}{u''} - \frac{1}{u'}\right) \tag{2}$$

das Integral ausgedehnt über alle Grenzpunkte $A'$, $A''$, d. h. über die ganze Oberfläche des Ellipsoides $E$.

Ordnet man jedem Punkte des Ellipsoides $E$ einen anderen $x_1, y_1, z_1$ zu, so dass mit den Constanten $a_1$, $b_1$, $c_1$:

$$x_1 = \frac{a_1}{a} x; \quad y_1 = \frac{b_1}{b} y; \quad z_1 = \frac{c_1}{c} z \tag{3}$$

ist, so wird da

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ ist, auch } \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{y_1^2}{b_1^2} + \frac{z_1^2}{c_1^2} = 1 \tag{4}$$

sein, d. h. die zugeordneten Punkte bilden ebenfalls ein Ellipsoid. Wählt man die Axen so, dass

$$\frac{\xi_1^2}{a_1^2} + \frac{\eta_1^2}{b_1^2} + \frac{\zeta_1^2}{c_1^2} = 1 \tag{5}$$

ist, so geht dieses zweite Ellipsoid $E_1$ durch den Punkt $m_1$. Die den Punkten $A'$, $A''$ entsprechenden Punkte seien $A_1'$, $A_1''$, und umgekehrt möge dem Punkte $m_1$ ein Punkt $m_0$ entsprechen, dessen Coordinaten $\xi$, $\eta$, $\zeta$ bestimmt sind durch die Beziehungen

$$\xi_1 = \frac{a_1}{a}\xi, \quad \eta_1 = \frac{b_1}{b}\eta, \quad \zeta_1 = \frac{c_1}{c}\zeta \quad \text{oder} \quad \xi = \frac{a}{a_1}\xi_1, \quad \eta = \frac{b}{b_1}\eta_1, \quad \zeta = \frac{c}{c_1}\zeta_1,$$

welcher für das Ellipsoid $E_1$ ein innerer Punkt ist. Die Anziehung des Ellipsoides $E_1$ auf $m_0$ ist daher nach früherem bekannt; sie lässt sich schreiben:

$$X' = \iiint \frac{\delta \cdot dx_1 dy_1 dz_1 (x_1 - \xi)}{u_1^3} = \iint \delta\, dy_1 dz_1 \int_{u_1'}^{u_1''} \frac{\partial \frac{1}{u_1}}{\partial x_1} dx_1 =$$
$$= \iint \delta\, dy_1 dz_1 \left(\frac{1}{u_1''} - \frac{1}{u_1'}\right).$$

Angenommen nun, es lasse sich das Ellipsoid $E_1$ so bestimmen, dass für zwei beliebige Punktepaare $P'(x'y'z')$, $P''(x''y''z'')$ des Ellipsoides $E$ und die entsprechenden $P_1'(x_1'y_1'z_1')$, $P_1''(x_1''y_1''z_1'')$ die wechselseitigen Ent-

[1]) Die Integration für die $X$-Componenten ist ja nach (1) zuerst nach $x$ vorzunehmen.

fernungen $P'P_1'' = P''P_1'$ sind, so wird auch $A_1'A'' = A'A_1''$ u. s. w., also auch $A'm_1 = A_1'm_0$; $A''m_1 = A_1''m_0$, d. h. $u_1'' = u''$; $u_1' = u'$, demnach

$$X' = \int\int \delta \cdot dy_1\, dz_1 \left(\frac{1}{u''} - \frac{1}{u'}\right) = \frac{b_1 c_1}{b c} \int\int \delta\, dy\, dz \left(\frac{1}{u''} - \frac{1}{u'}\right)$$

$$X' = \frac{b_1 c_1}{b c} X,$$

daher

$$X = \frac{b c}{b_1 c_1} X'; \qquad Y = \frac{a c}{a_1 c_1} Y'; \qquad Z = \frac{a b}{a_1 b_1} Z',$$

d. h. die Anziehung des Ellipsoides $E$ auf den Punkt $m_1$ lässt sich aus den Anziehungen des correspondirenden Ellipsoïdes $E_1$ auf den entsprechenden, für dieses Ellipsoïd inneren Punkt $m_0$ direkt ableiten.

Es ist aber

$$\begin{aligned} \text{I} = P'P_1'' &= (x' - x_1'')^2 + (y' - y_1'')^2 + (z' - z_1'')^2 = \\ &= x'^2 + y'^2 + z'^2 + x_1''^2 + y_1''^2 + z_1''^2 - 2\,(x'x_1'' + y'y_1'' + z'z_1'') \\ \text{II} = P''P_1' &= (x'' - x_1')^2 + (y'' - y_1')^2 + (z'' - z_1')^2 = \\ &= x''^2 + y''^2 + z''^2 + x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2 - 2\,(x''x_1' + y''y_1' + z''z_1'). \end{aligned}$$

Führt man hier für die Coordinaten der Punkte $P_1'$, $P_1''$ die Beziehungen (5) ein, und setzt

$$a_1^2 = a^2 + \varepsilon_1; \qquad b_1^2 = b^2 + \varepsilon_2; \qquad c_1^2 = c^2 + \varepsilon_3,$$

so folgt

$$\text{I} = x'^2 + y'^2 + z'^2 + x''^2 + y''^2 + z''^2 - 2\left(\frac{a_1}{a} x'x'' + \frac{b_1}{b} y'y'' + \frac{c_1}{c} z'z''\right) + \\ + \frac{\varepsilon_1}{a^2} x''^2 + \frac{\varepsilon_2}{b^2} y''^2 + \frac{\varepsilon_3}{c^2} z''^2$$

$$\text{II} = x'^2 + y'^2 + z'^2 + x''^2 + y''^2 + z''^2 - 2\left(\frac{a_1}{a} x'x'' + \frac{b_1}{b} y'y'' + \frac{c_1}{c} z'z''\right) + \\ + \frac{\varepsilon_1}{a^2} x'^2 + \frac{\varepsilon_2}{b^2} y'^2 + \frac{\varepsilon_3}{c^2} z'^2.$$

Damit also I = II werde, muss

$$\varepsilon_1\left(\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} + \frac{z''^2}{c^2}\right) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\frac{y''^2}{b^2} + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)\frac{z''^2}{c^2} = \\ = \varepsilon_1\left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2}\right) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\frac{y'^2}{b^2} + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)\frac{z'^2}{c^2}.$$

Da aber die beiden Punkte $(x'y'z')$, $(x''y''z'')$ Punkte des Ellipsoides $E$ sind, so sind die auf beiden Seiten mit $\varepsilon_1$ multiplicirten Ausdrücke gleich 1, und die letzte Gleichung reducirt sich auf

$$(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\left(\frac{y''^2 - y'^2}{b^2}\right) + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)\left(\frac{z''^2 - z'^2}{c^2}\right) = 0.$$

Diese Gleichung kann für beliebige Punkte nur erfüllt sein, wenn $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$ ist. Dann ist, wenn der Index bei $\varepsilon$ weggelassen wird:

$$a_1^2 = a^2 + \varepsilon; \qquad b_1^2 = b^2 + \varepsilon; \qquad c_1^2 = c^2 + \varepsilon \tag{7}$$

d. h. das Ellipsoïd $E_1$ ist dem Ellipsoïde $E$ homofocal. Durch den Punkt $m_1$ giebt es nur ein zu $E$ homofocales Ellipsoïd, für welches sich der Werth von $\varepsilon$ aus Gleichung (6), d. i. aus

$$\frac{\xi_1^2}{a^2 + \varepsilon} + \frac{\eta_1^2}{b^2 + \varepsilon} + \frac{\zeta_1^2}{c^2 + \varepsilon} = 1 \tag{8}$$

bestimmt[1]). Dann erhalt man die Anziehungen $X'$, $Y'$, $Z'$ nach den Formeln 81 (21), (22) oder (25), wobei jedoch überall $a^2+\varepsilon$, $b^2+\varepsilon$, $c^2+\varepsilon$ an Stelle von $a^2$, $b^2$, $c^2$ und $\xi$, $\eta$, $\zeta$ an Stelle von $\xi_1$, $\eta_1$, $\zeta_1$ zu setzen ist. Es wird also

$$X' = -2\delta\xi\pi\int_0^\infty \frac{dt}{(a^2+\varepsilon+t)\sqrt{\left(1+\frac{t}{a^2+\varepsilon}\right)\left(1+\frac{t}{b^2+\varepsilon}\right)\left(1+\frac{t}{c^2+\varepsilon}\right)}}$$

$$X = -2\delta\frac{a}{a_1}\xi_1\pi\sqrt{a^2+\varepsilon}\cdot bc\int_0^\infty \frac{dt}{(a^2+\varepsilon+t)\sqrt{(a^2+\varepsilon+t)(b^2+\varepsilon+t)(c^2+\varepsilon+t)}}.$$

Setzt man hier $\varepsilon + t = t_1$, so transformirt sich dieser Ausdruck in

$$X = -2\delta\xi_1\pi abc\int_\varepsilon^\infty \frac{dt}{(a^2+t)\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}$$

$$= -\frac{2\delta\xi_1\pi}{a^2}\int_\varepsilon^\infty \frac{dt}{\left(1+\frac{t}{a^2}\right)T}.$$

Man erhält daher das Potential und die Anziehungen eines Ellipsoides, dessen Axen $a$, $b$, $c$ sind, auf einen äusseren Punkt $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ ebenfalls nach den Formeln

$$\begin{aligned} V &= \delta\cdot K - \frac{\delta\xi_1^2}{a^2}L' - \frac{\delta\eta_1^2}{b^2}M' - \frac{\delta\zeta_1^2}{c^2}N' \\ X &= -\frac{2\delta\xi_1}{a^2}L';\quad Y = -\frac{2\delta\eta_1}{b^2}M';\quad Z = -\frac{2\delta\zeta_1}{c^2}N', \end{aligned} \tag{9}$$

wobei nun

$$K = \pi\int_\varepsilon^\infty \frac{dt}{T};$$

$$L' = \pi\int_\varepsilon^\infty \frac{dt}{\left(1+\frac{t}{a^2}\right)T};\quad M' = \pi\int_\varepsilon^\infty \frac{dt}{\left(1+\frac{t}{b^2}\right)T};\quad N' = \pi\int_\varepsilon^\infty \frac{dt}{\left(1+\frac{t}{c^2}\right)T} \tag{10}$$

$$T = \sqrt{\left(1+\frac{t}{a^2}\right)\left(1+\frac{t}{b^2}\right)\left(1+\frac{t}{c^2}\right)}$$

und der Werth von $\varepsilon$ aus der Gleichung (8) zu ermitteln ist. Rückt der Punkt an die Oberfläche des Ellipsoides heran, so wird $\varepsilon = 0$, und die Formeln gehen in die früheren über. Setzt man wieder

$$t = a^2\frac{1-\vartheta^2}{\vartheta^2},$$

so folgt

$$\varkappa^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2},\qquad \varkappa'^2 = \frac{a^2-c^2}{a^2},\qquad \mathrm{H} = \sqrt{(1-\varkappa^2\vartheta^2)(1-\varkappa'^2\vartheta^2)}$$

$$K = 2bc\pi\int_0^{\frac{a}{\sqrt{a^2+\varepsilon}}}\frac{d\vartheta}{\mathrm{H}};\qquad \frac{L'}{a^2} = \frac{2bc\pi}{a^2}\int_0^{\frac{a}{\sqrt{a^2+\varepsilon}}}\frac{\vartheta^2\,d\vartheta}{\mathrm{H}}; \tag{11}$$

$$\frac{M'}{b^2} = \frac{2bc\pi}{a^2}\int_0^{\frac{a}{\sqrt{a^2+\varepsilon}}}\frac{\vartheta^2\,d\vartheta}{(1-\varkappa^2\vartheta^2)\mathrm{H}};\qquad \frac{N'}{c^2} = \frac{2bc\pi}{a^2}\int_0^{\frac{a}{\sqrt{a^2+\varepsilon}}}\frac{\vartheta^2\,d\vartheta}{(1-\varkappa'^2\vartheta^2)\mathrm{H}}.$$

---

1) Da $m_1$ ein äusserer Punkt ist, daher $a_1$, $b_1$, $c_1$ grösser als $a$, $b$, $c$ sein müssen, so muss $\varepsilon$ positiv sein. Für $\varepsilon$ ist daher die positive Wurzel der Gleichung (8) zu wählen.

Für das Rotationsellipsoïd sei $b = c$, $\varkappa^2 = \varkappa'^2$, $\Pi = 1 - \varkappa^2 \vartheta^2$. Für das abgeplattete Rotationsellipsoïd wird $a < b$, daher $\varkappa^2$ negativ[1]); sei also

$$\frac{b^2 - a^2}{a^2} = \lambda^2 = -\varkappa^2,$$

so wird

$$\int \frac{d\vartheta}{\Pi} = \frac{1}{\lambda}\, arctang\, \lambda\vartheta; \quad \int \frac{\vartheta^2\, d\vartheta}{\Pi} = \frac{\vartheta}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^3}\, arctang\, \lambda\vartheta;$$

$$\int \frac{\vartheta^2\, d\vartheta}{\Pi^2} = -\frac{\vartheta}{2\lambda^2(1 + \lambda^2\vartheta^2)} + \frac{1}{2\lambda^3}\, arctang\, \lambda\vartheta.$$

Ersetzt man noch $\vartheta$ durch $\lambda\vartheta = l$, so wird für die beiden Grenzen 0 und $\frac{\lambda a}{\sqrt{a^2 + \varepsilon}}$ zu nehmen sein; daher, weil sämmtliche Integrale für die untere Grenze verschwinden:

$$K = \frac{2b^2\pi}{\lambda}\, arctang\, l; \quad \frac{L'}{a^2} = \frac{2b^2\pi}{a^2\lambda^3}(l - arctang\, l)$$

$$\frac{M'}{b^2} = \frac{N'}{c^2} = \frac{b^2\pi}{a^2\lambda^3}\left(arctang\, l - \frac{l}{1 + l^2}\right); \quad l = \frac{\lambda a}{\sqrt{a^2 + \varepsilon}} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{\sqrt{a^2 + \varepsilon}} \qquad (12)$$

Sind die Coordinaten des angezogenen Punktes in dem Meridianschnitte, welcher durch diesen Punkt geht, $\xi_1$, $\rho_1$, so wird $\varepsilon$ die Lösung der Gleichung

$$\frac{\xi_1^2}{a^2 + \varepsilon} + \frac{\rho_1^2}{b^2 + \varepsilon} = 1.$$

für einen inneren Punkt und für einen Punkt auf der Oberfläche selbst wird $l = \lambda$.

Wesentlich schwieriger wird die Behandlung des Problems, wenn die Dichte nicht als constant angesehen werden kann. Das Gesetz der Dichte wird dann durch eine Function des Ortes

$$\delta = F(x, y, z)$$

gegeben sein müssen, und die Integrationen werden dann in den meisten Fällen unausführbar. Eine verhältnissmässig einfache Lösung kann man für den Fall erhalten, dass die Massen in concentrischen homofocalen Schalen gleicher Dichtigkeit angeordnet sind. Sei für eine Schale die innere Begrenzung ein Ellipsoïd mit den Hauptaxen $a$, $b$, $c$, die äussere ein solches mit den Hauptaxen $\sqrt{a^2 + \alpha}$, $\sqrt{b^2 + \alpha}$, $\sqrt{c^2 + \alpha}$, so ergeben sich die beiden zugehörigen Werthe von $\varepsilon$ aus den beiden Gleichungen:

$$\frac{\xi_1^2}{a^2 + \varepsilon} + \frac{\eta_1^2}{b^2 + \varepsilon} + \frac{\zeta_1^2}{c^2 + \varepsilon} = 1$$

und

$$\frac{\xi_1^2}{a^2 + \alpha + \varepsilon'} + \frac{\eta_1^2}{b^2 + \alpha + \varepsilon'} + \frac{\zeta_1^2}{c^2 + \alpha + \varepsilon'} = 1,$$

woraus sofort folgt

$$\varepsilon' = \varepsilon - \alpha. \qquad (13)$$

Potential und Attraction der Schale erhält man, wenn man von dem für das äussere Ellipsoïd geltenden Werthe die auf das innere Ellipsoïd bezüglichen abzieht; für das innere gelten die Formeln (11); für das äussere ist überall $\sqrt{a^2 + \alpha}$, $\sqrt{b^2 + \alpha}$, $\sqrt{c^2 + \alpha}$, $\varepsilon - \alpha$ an Stelle von $a$, $b$, $c$, $\varepsilon$ zu setzen. Daher wird, wenn man sich auf das abgeplattete Rotationsellipsoïd beschränkt: $l' = l$, daher:

---

[1]) Ist $a > b$, das Ellipsoïd ein überhöhtes, so wird $\varkappa$ positiv, und die Integrale drücken sich durch Logarithmen aus.

$$K_a = 2\frac{\sqrt{a^2+\alpha}\,(b^2+\alpha)\pi}{\sqrt{b^2-a^2}}\, arctang\, l; \qquad \frac{L_a'}{a^2+\alpha} = \frac{2\sqrt{a^2+\alpha}\,(b^2+\alpha)\pi}{(b^2-a^2)\sqrt{b^2-a^2}}\,(l - arctang\, l)$$

$$\frac{M_a'}{b^2+\alpha} = \frac{N_a'}{c^2+\alpha} = \frac{\sqrt{a^2+\alpha}\,(b^2+\alpha)\pi}{\sqrt{b^2-a^2}}\left(arctang\, l - \frac{l}{1+l^2}\right),$$

daher

$$K_a - K_i = \frac{2\pi D}{\sqrt{b^2-a^2}}\, arctang\, l; \qquad \frac{L_a'}{a^2+\alpha} - \frac{L_i'}{a^2} = \frac{2\pi D}{\sqrt{(b^2-a^2)^3}}\,(l - arctang\, l)$$

$$\frac{M_a'}{b^2+\alpha} - \frac{M_i'}{b^2} = \frac{N_a'}{c^2+\alpha} - \frac{N_i'}{c^2} = \frac{\pi D}{\sqrt{(b^2-a^2)^3}}\left(arctang\, l - \frac{l}{1+l^2}\right)$$

$$D = \sqrt{a^2+\alpha}\,(b^2+\alpha) - ab^2.$$

Nimmt man die Schichtung continuirlich, so dass die Dicke der Schichten nur unendlich klein ist, so wird $\alpha$ als unendlich kleine Grösse zu betrachten sein, und dann wird

$$D = \left(ab^2 + a\alpha + \tfrac{1}{2}\alpha\frac{b^2}{a}\right) - ab^2 = \left(a + \tfrac{1}{2}\frac{b^2}{a}\right)\alpha$$

oder da $\alpha$ der Zuwachs von $a^2$ beim Uebergange von einer Schichte zur nächstliegenden äusseren ist:

$$D = \frac{a^2 + \frac{1}{2}b^2}{a}\, d(a^2) = (2a^2 + b^2)da.$$

Da $b^2 - a^2 = k^2$ der lineare Abstand der Brennpunkte der Meridianellipse vom Mittelpunkte ist, daher für confocale Ellipsoide constant, so wird man, $k$ an Stelle von $b$ einführend:

$$D = (3a^2 + k^2)da$$

$$d(\delta K) = \frac{2\pi\delta}{k}\, arctang\, l\cdot(3a^2 + k^2)da$$

erhalten, und es wird:

$$dX = -\frac{4\pi\xi_1}{k^3}\,\delta\cdot(3a^2 + k^2)(l - arctang\, l)da$$

$$dY = -\frac{4\pi\eta_1}{k^3}\,\delta\cdot(3a^2 + k^2)\left(arctang\, l - \frac{l}{1+l^2}\right)da$$

$$dZ = -\frac{4\pi\zeta_1}{k^3}\,\delta\cdot(3a^2 + k^2)\left(arctang\, l - \frac{l}{1+l^2}\right)da.$$

Da $l = \frac{k}{\sqrt{a^2+\varepsilon}}$ wegen $a^2 + \varepsilon = a^2 + \alpha + \varepsilon'$ für alle Schichten constant ist, so werden die Coëfficienten

$$\frac{4\pi}{k^3}(l - arctang\, l) = L_1, \quad \frac{4\pi}{k^3}\left(arctang\, l - \frac{l}{1+l^2}\right) = L_2 \tag{14}$$

ebenfalls constant, und man erhält daher die Totalanziehungen

$$X = -L_1\xi_1\int_{a_0}^{a_1}\delta\cdot(3a^2 + k^2)da$$

$$Y = -L_2\eta_1\int_{a_0}^{a_1}\delta\cdot(3a^2 + k^2)da \tag{15}$$

$$Z = -L_2\zeta_1\int_{a_0}^{a_1}\delta\cdot(3a^2 + k^2)da,$$

wobei nunmehr vorausgesetzt ist, dass $\delta$ als Function von $a$ gegeben ist.

**83. Potential eines Massencomplexes auf einen sehr entfernten Punkt.** Sind die Dimensionen der anziehenden Masse nur klein gegenüber der Entfernung des angezogenen Punktes, so kann man selbst für unregelmässige

Formen der anziehenden Massen leicht Reihenentwickelungen ableiten, welche um so rascher convergiren, je weiter der angezogene Punkt sich befindet. Legt man den Coordinatenanfang in einen vorläufig beliebig gelassenen Punkt der anziehenden Masse, seien $x$, $y$, $z$ die Coordinaten und $r$ der Radiusvector des Massenelementes; $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die Coordinaten und $\rho$ der Radiusvector des angezogenen Punktes, so ist

$$u^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = r^2 + \rho^2 - 2(x\xi + y\eta + z\zeta).$$

Ist $\rho$ sehr gross gegenüber $r$, so kann man $\frac{1}{u}$ nach Potenzen von $\frac{r}{\rho}$ entwickeln; es wird

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{\rho}\left[1 + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2 - \frac{2(x\xi + y\eta + z\zeta)}{\rho^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{\rho}\left[1 + \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{\rho^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{\rho}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{\rho^2}\right)^2\right],$$

demnach

$$V = \frac{k^2}{\rho}\int dm + \frac{k^2\xi}{\rho^3}\int x\,dm + \frac{k^2\eta}{\rho^3}\int y\,dm + \frac{k^2\zeta}{\rho^3}\int z\,dm - \frac{k^2}{2\rho^3}\int r^2 dm + \frac{3}{2}\frac{k^2}{\rho^5}\int (x\xi + y\eta + z\zeta)^2 dm. \tag{1}$$

$\int dm = M$ ist die Gesammtmasse. Legt man das Coordinatensystem so, dass der Ursprung in den Schwerpunkt der anziehenden Masse fällt, so werden die Integrale

$$\int x\,dm = 0, \quad \int y\,dm = 0, \quad \int z\,dm = 0$$

und es wird

$$V = \frac{k^2 M}{\rho} - \frac{k^2}{2\rho^3}\int r^2 dm + \frac{3}{2}\frac{k^2}{\rho^5}\left[\xi^2\int x^2 dm + \eta^2\int y^2 dm + \zeta^2\int z^2 dm + 2\xi\eta\int xy\,dm + 2\eta\zeta\int yz\,dm + 2\zeta\xi\int xz\,dm\right]. \tag{2}$$

Die Glieder erster Ordnung sind verschwunden. Ist die Entfernung $\rho$ so gross, dass man die Glieder zweiter Ordnung vernachlässigen kann, so wird

$$V = \frac{k^2 M}{\rho}$$

d. h. das Potential wird dasselbe, als wenn die Gesammtmasse im Schwerpunkt der anziehenden Masse vereinigt gedacht wird.

Wenn man die Richtungen der Coordinatenaxen mit den drei Hauptträgheitsaxen zusammenfallen lässt, so wird

$$\int xy\,dm = 0, \quad \int xz\,dm = 0, \quad \int yz\,dm = 0 \tag{3}$$

und die Trägheitsmomente, bezogen auf die drei Hauptträgheitsaxen werden:

$$\begin{aligned} &\text{Um die } X\text{-Axe:} && A = \int (y^2 + z^2) dm \\ &\text{um die } Y\text{-Axe:} && B = \int (x^2 + z^2) dm \\ &\text{um die } Z\text{-Axe:} && C = \int (x^2 + y^2) dm. \end{aligned} \tag{4}$$

Hieraus folgt:

$$\frac{1}{2}(A + B + C) = \int r^2 dm \qquad \begin{aligned} \int x^2 dm &= \tfrac{1}{2}(B + C - A) \\ \int y^2 dm &= \tfrac{1}{2}(A + C - B) \\ \int z^2 dm &= \tfrac{1}{2}(A + B - C). \end{aligned} \tag{4a}$$

Führt man die Werthe aus (3) und (4) in (2) ein, so folgt:

$$V = \frac{k^2 M}{\rho} - \frac{k^2}{4\rho^3}(A+B+C) +$$

$$+ \frac{3}{4}\frac{k^2}{\rho^5}\left[\xi^2(B+C-A) + \eta^2(A+C-B) + \zeta^2(A+B-C)\right]$$

oder reducirt:

$$V = \frac{k^2 M}{\rho} + \frac{k^2}{2\rho^3}(A+B+C) - \frac{3}{2}\frac{k^2}{\rho^5}(A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2). \qquad (5)$$

Sind die Winkel, welche die Verbindungslinie des Schwerpunktes und des angezogenen Punktes mit den drei Hauptträgheitsaxen bildet $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, so wird $\xi = \rho \cos\alpha$, $\eta = \rho\cos\beta$, $\zeta = \rho\cos\gamma$, demnach

$$V = \frac{k^2 M}{\rho} + \frac{1}{2}\frac{k^2}{\rho^3}\left\{(A+B+C) - 3(A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma)\right\} \qquad (5a)$$

oder auch

$$\begin{aligned} V &= \frac{k^2 M}{\rho} + \frac{1}{2}\frac{k^2}{\rho^3}\left\{(A+B+C) - 3\left[(A-C)\cos^2\alpha + (B-C)\cos^2\beta + C\right]\right\} = \\ &= \frac{k^2 M}{\rho} + \frac{1}{2}\frac{k^2}{\rho^3}\left\{(A-C)(1-3\cos^2\alpha) + (B-C)(1-3\cos^2\beta)\right\} \end{aligned} \qquad (5b)$$

Durch Differentiation von $V$ nach $\xi$, $\eta$, $\zeta$ [Ausdruck (5)] erhält man die Kraftcomponenten:

$$X = -\frac{k^2 M\xi}{\rho^3}\left(G + \frac{3A}{M\rho^2}\right); \quad Y = -\frac{k^2 M\eta}{\rho^4}\left(G + \frac{3B}{M\rho^2}\right); \quad Z = -\frac{k^2 M\zeta}{\rho^3}\left(G + \frac{3C}{M\rho^2}\right)$$

$$G = 1 + \frac{3}{2M\rho^2}(A+B+C) - \frac{15}{2M\rho^4}(A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2). \qquad (6)$$

Für Rotationskörper sind zwei von den drei Hauptträgheitsmomenten einander gleich; sei $C$ das Trägheitsmoment um die Rotationsaxe, so wird $A = B$ sein, und dann erhält man nach einiger Reduction:

$$V = \frac{k^2 M}{\rho}\left[1 + \frac{(C-A)(1-3\cos^2\gamma)}{2M\rho^2}\right]. \qquad (7)$$

Für ein homogenes Rotationsellipsoid, dessen Polaraxe $c$, dessen Aequatorealhalbmesser $a$ ist, wird

$$A = \frac{1}{5}M(a^2+c^2); \qquad C = \frac{2}{5}Ma^2; \qquad \frac{C-A}{2M} = \frac{1}{10}(a^2-c^2).$$

Ist daher $e$ die Excentricität der Meridianellipse, also $a^2e^2 = (a^2 - c^2)$, so wird:

$$V = \frac{k^2 M}{\rho}\left[1 + \frac{1}{10}e^2(1-3\cos^2\gamma)\left(\frac{a}{\rho}\right)^2\right]. \qquad (7a)$$

Bezeichnet man mit $\varepsilon$ die Abplattung $\varepsilon = \frac{a-c}{a}$, so wird

$$e^2 = \frac{(a-c)(a+c)}{a^2} = \frac{\varepsilon(a+c)}{a},$$

demnach für sehr kleine Abplattungen $e^2 = 2\varepsilon$ und

$$V = \frac{k^2 M}{\rho}\left[1 + \frac{1}{5}\varepsilon(1-3\cos^2\gamma)\left(\frac{a}{\rho}\right)^2\right]. \qquad (7b)$$

**84. Die Laplace-Poisson'sche Gleichung.** Bildet man die zweiten Differentialquotienten des Potentials nach den drei Coordinaten, so hat man, wenn man sich zunächst auf eine Masse beschränkt (für mehrere Massencomplexe

hat man die Summen der für die einzelnen Massen gültigen Ausdrücke zu bilden):

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} = \int\int\int \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\delta \cdot dx\, dy\, dz}{u} = \int\int\int \delta \cdot dx\, dy\, dz \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{1}{u}\right). \tag{1}$$

Es ist aber

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{x-\xi}{u^3}; \qquad \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^3} + \frac{3\,(x-\xi)^2}{u^5}. \tag{2}$$

Führt man nun für eine beliebige Function $F$ die Bezeichnung ein

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2}, \tag{3}$$

so wird

$$\Delta V = \int\int\int \delta\, dx\, dy\, dz\, \Delta\left(\frac{1}{u}\right).$$

Es ist aber

$$\Delta\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{3}{u^3} + \frac{3}{u^5}\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2\right] = 0$$

demnach

$$\Delta V = 0 \tag{4}$$

die LAPLACE'sche Gleichung. Es ist jedoch nicht zu übersehen, dass hierbei vorausgesetzt wurde, dass kein Element des Integrals unendlich wird, d. h. dass nirgend $u = 0$ wird. Die Beziehung (4) gilt daher nur für den Fall, dass der angezogene Punkt ein äusserer ist, d. h. nicht selbst der anziehenden Masse angehört. Für einen inneren Punkt, d. i. für einen solchen, der innerhalb der anziehenden Masse liegt, würde für einzelne Elemente des Integrals $u = 0$, und es ist zu untersuchen, ob die Gleichung (4) auch für diesen Fall noch gültig bleibt, oder was an ihre Stelle tritt.

In der Form 79 (2a) ist aber nicht einmal ersichtlich, dass das Potential und seine Differentialquotienten endliche, bestimmte Werthe haben, da schon in dem Potential ein Element des Integrales unendlich wird; legt man aber wieder ein Polarcoordinatensystem zu Grunde, dessen Ursprung im angezogenen Punkt ist, so wird

$$V = \int\int\int \frac{\delta \cdot u^2 \sin\theta\, d\theta\, d\omega\, du}{u} = \int\int\int \delta \cdot u \sin\theta\, d\theta\, d\omega\, du.$$

Für das Potential selbst wird also die zu integrirende Function auch für innere Punkte nicht unendlich, sondern für $u = 0$, Null; das Potential hat daher einen endlichen, bestimmten Werth. Der erste Differentialquotient des Potentials wird, wenn man unter dem Integralzeichen differenzirt:

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = -\int\int\int \frac{\delta \cdot (x-\xi)\, dv}{u^3}$$

$$= -\int\int\int \delta \cdot \sin\theta \cos\theta\, d\theta\, d\omega\, du \tag{5}$$

demnach die zu integrirende Function wieder für keinen Punkt (auch nicht für den angezogenen Punkt) unendlich; es behalten demnach auch die ersten Differentialquotienten, d. h. die Darstellungen der Kräfte in dieser Form, ihre Gültigkeit. Der zweite Differentialquotient wird nach (1) und (2):

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} = -\int\int\int \frac{\delta \cdot \sin\theta\, d\theta\, d\omega\, du}{u}(1 - 3\cos^2\theta).$$

Die zu integrirende Function wird für $u = 0$ unendlich. Nichts desto weniger wird aber das Integral selbst nicht unendlich. Um dies zu zeigen, und gleichzeitig seinen Werth auszumitteln, werde das Potential nach 79 (8) in zwei Theile zerlegt, indem man um den Massenpunkt ein gewisses Volumen $v_2$ so ausschliesst, dass für das übrige Volumen $v_1$ der Punkt $m_1$ ein äusserer wird; es wird daher $\Delta V_1 = 0$, und demnach

$$\Delta V = \Delta V_2.$$

Wählt man für das Volumen $v_2$ ein solches, für welches sich $V_2$ leicht auswerthen lässt, so können die zweiten Differentialquotienten aus dem berechneten Werthe von $V_2$ gebildet werden; für $v_2$ soll nun eine um $m_1$ concentrische Kugel $K$ vom Halbmesser $a$ genommen werden. Setzt man die Dichte derselben constant gleich $\delta$ voraus[1]), so wird das Potential auf einen Punkt im inneren derselben im Abstande $\rho$ vom Mittelpunkte nach 80 (9):

$$V_2 = 2\pi\delta a^2 - \tfrac{2}{3}\pi\delta\cdot\rho^2,$$

und es wird:

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial \xi^2} = -\tfrac{2}{3}\pi\delta\frac{\partial^2(\rho^2)}{\partial\xi^2} \qquad \text{daher} \qquad \Delta V_2 = -\tfrac{2}{3}\pi\delta\cdot\Delta(\rho^2).$$

Nun ist

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

folglich

$$\frac{\partial(\rho^2)}{\partial\xi} = 2\rho\frac{\partial\rho}{\partial\xi} = 2\xi; \qquad \frac{\partial^2(\rho^2)}{\partial\xi^2} = 2, \quad \frac{\partial^2(\rho^2)}{\partial\eta^2} = 2, \quad \frac{\partial^2(\rho^2)}{\partial\zeta^2} = 2$$

demnach $\Delta(\rho^2) = 6$ unabhängig von $\rho$, daher $\Delta V_2 = -4\pi\delta$. Folglich wird

$$\Delta V = -4\pi\delta. \tag{7}$$

Dabei ist $\delta$ die Dichte der (unendlich) kleinen Kugel um $m_1$, d. h. die Dichte in diesem Punkte selbst. Die Gleichung (7), welche von POISSON gefunden wurde, ist eine Erweiterung der Gleichung (4), enthält aber diese als speziellen Fall, denn für Punkte, welche dem Massencomplexe nicht angehören, ist $\delta = 0$.

Führt man die Polarcoordinaten $r$, $\theta$, $\omega$ ein[2]), so geht die Gleichung (7) über in

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} + \cot\theta\,\frac{\partial V}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 V}{\partial\omega^2} + r\,\frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2} = -4\pi\delta, \tag{8}$$

oder wenn $\mu = \cos\theta$ gesetzt wird:

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\,\frac{\partial V}{\partial\mu}\right\} + \frac{1}{1-\mu^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial\omega^2} + r\,\frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2} = -4\pi\delta. \tag{9}$$

---

[1]) Bei nicht constanter Dichte wird man dieselbe nicht als concentrisch geschichtet ansehen können, sondern die Schichten werden die kleine Kugel in nahe parallelen Niveauflächen durchsetzen; die Resultate bleiben jedoch auch in diesem Falle dieselben, wie schon daraus hervorgeht, dass man die Kugel immer so klein wählen kann, dass innerhalb derselben die Dichte als constant betrachtet werden kann. Für strenge Beweise s. ausführliche Lehrbücher der Potentialtheorie z. B. NEUMANN, »Vorlesungen über das Potential«.

[2]) Es ist $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial\omega}\frac{\partial\omega}{\partial x}$ und da $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta$, $\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}$, $\frac{\partial\omega}{\partial x} = 0$ ist, so wird $\frac{\partial V}{\partial x} = \cos\theta\,\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial V}{\partial\theta}$ u. s. w.

Da die Gleichung (4) für das Potential aus der analogen Gleichung $\Delta\left(\frac{1}{u}\right) = 0$ hervorging, so wird auch $\frac{1}{u}$ den Gleichungen (8) und (9) (für $\delta = 0$) genügen. Es ist aber

$$u^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\gamma \tag{10}$$
$$\cos\gamma = \mu\mu_0 + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu_0^2}\cos(\omega - \omega_0),$$

wo $\theta$, $\omega$, $\mu$ sich in der früheren Bedeutung auf das Massenelement $dm$, $\theta_0$, $\omega_0$, $\mu_0$ in derselben Bedeutung auf den angezogenen Punkt $m_1$ beziehen. Da nun nach Potenzen von $\frac{\rho}{r}$ oder $\frac{r}{\rho}$ entwickelt die Coefficienten der einzelnen Potenzen Functionen von $\cos\gamma$ sein werden, so wird

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} &= \frac{1}{r} + P^{(1)}(\cos\gamma)\frac{\rho}{r^2} + P^{(2)}(\cos\gamma)\frac{\rho^2}{r^3} + \dots \quad \rho < r \\ \frac{1}{u} &= \frac{1}{\rho} + P^{(1)}(\cos\gamma)\frac{r}{\rho^2} + P^{(2)}(\cos\gamma)\frac{r^2}{\rho^3} + \dots \quad \rho > r \end{aligned} \tag{11}$$

und es wird

$$P^{(0)}(\cos\gamma) = 1; \qquad P^{(1)}(\cos\gamma) = \cos\gamma; \qquad P^{(2)}(\cos\gamma) = \tfrac{3}{2}\cos^2\gamma - \tfrac{1}{2} \dots \tag{11a}$$

Substituirt man (10) an Stelle von $V$ in die Gleichung (9) und setzt die Coëfficienten der einzelnen Potenzen von $\frac{\rho}{r}$ oder $\frac{r}{\rho}$ gleich Null, da die Gleichung identisch für jedes $\rho$ und $r$ bestehen muss, so folgt

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial P^{(i)}}{\partial\mu}\right] + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 P^{(i)}}{\partial\omega^2} + i(i+1)P^{(i)} = 0. \tag{12}$$

Die aus der Entwickelung von $\frac{1}{u}$ hervorgehenden speciellen Functionen $P^{(i)}$, welche den Gleichungen (12) genügen, heissen Kugelfunctionen; sie sind ganze, rationale Functionen von $\mu$, $\sqrt{1-\mu^2}\cos\omega$ und $\sqrt{1-\mu^2}\sin\omega$. Eine allgemeine Kugelfunction $Y^{(i)}$ ist jede solche ganze rationale Function von $\mu$, $\sqrt{1-\mu^2}\cos\omega$, $\sqrt{1-\mu^2}\sin\omega$, welche der Gleichung (12) genügt. Für das folgende genügt der Satz, dass die Entwickelung einer Function $f(\mu, \omega)$ nach allgemeinen Kugelfunctionen in der Form

$$f(\mu, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} Y^{(n)}(\mu, \omega) \tag{13a}$$

möglich ist, wenn die Coëfficienten

$$Y^{(n)}(\mu, \omega) = \frac{2n+1}{4\pi}\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} P^{(n)} f(\mu, \omega)\, d\mu\, d\omega \tag{13b}$$

sind[1]).

85. Attraction von Sphäroiden. Unter Sphäroiden versteht man nach LAPLACE Körper, welche von der Kugelgestalt nur wenig abweichen. Ist $p$ der Halbmesser der Kugel, der selbst vorläufig ganz beliebig sein kann (die Kugel kann ganz innerhalb oder ganz ausserhalb der gegebenen Begrenzungsfläche liegen, oder auch diese schneiden), so wird der Radiusvector der Begrenzungsfläche in irgend einer Richtung, $\theta$, $\omega$ dargestellt werden können in der Form

$$r = p(1 + \alpha y), \tag{1}$$

wobei

$$y = Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + \dots \tag{1a}$$

---

[1]) Ueber die allgemeinen Eigenschaften vergl. das Lehrbuch von NEUMANN, die »Mécanique céleste« von LAPLACE u. a.

eine Function von $p$, $\theta$, $\omega$ ist, deren hier vorgenommene Zerlegung in die Summe mehrerer anderer vorerst noch willkürlich ist, und wo $\alpha$ eine kleine Grösse ist, deren Quadrate und höhere Potenzen vernachlässigt werden können, wenn, wie hierbei vorausgesetzt wird, die Abweichungen des Sphäroides von der Kugelform nur sehr klein sind.

Substituirt man nun für $\frac{1}{u}$ die Reihe 84 (11) in den Ausdruck für das Potential, so erhält man:

a) für einen äusseren Punkt:

$$V = \frac{k^2 M}{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n}{\rho^{n+1}} \tag{2}$$

$$V_n = \iiint \delta \cdot \sin\theta \, d\theta \, d\omega \, P^{(n)} r^{n+2} \, dr = \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} d\omega \, d\mu \int \delta P^{(n)} r^{n+2} \, dr. \tag{2a}$$

Nimmt man an, dass die Dichte $\delta$ nach Schichten constant ist, welche durch sphäroidische Begrenzungsflächen von der Form (1) getrennt sind, und seien die äussersten Begrenzungsflächen[1]) gegeben durch die Gleichung

$$r_0 = a_0(1 + \alpha y_0); \qquad r_1 = a_1(1 + \alpha y_1), \tag{3}$$

so wird, wenn man zuerst nach $r$ integrirt, also $\theta$ und $\omega$ als constant ansieht:

$$dr = \frac{\partial r}{\partial p} dp$$

sein. Die Integration nach $r$ ist aber von dem kleinsten Werthe $p = a_0$ (innere Oberfläche) bis zum grössten Werthe $p = a_1$ (äussere Oberfläche) vorzunehmen, d. h. es wird:

$$V_n = \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} d\omega \, d\mu \int_{a_0}^{a_1} \frac{\delta \cdot P^{(n)}}{n+3} \frac{\partial (r^{n+3})}{\partial p} dp.$$

$\delta$ ist nun eine blosse Function von $p$, $P^{(n)}$ hingegen eine blosse Function von $\omega$, $\theta$; man kann demnach auch schreiben:

$$V_n = \frac{1}{n+3} \int_{a_0}^{a_1} \delta \cdot dp \frac{\partial}{\partial p} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} P^{(n)} r^{n+3} \, d\omega \, d\mu. \tag{4}$$

Lässt sich $r^{n+3}$ in eine Reihe von Kugelfunctionen

$$r^{n+3} = Y^{(0)}_{(n)} + Y^{(1)}_{(n)} + Y^{(2)}_{(n)} + \ldots$$

entwickeln, so wird nach 84 (18):

$$V_n = \frac{4\pi}{(n+3)(2n+1)} \int_{a_0}^{a_1} \delta \cdot dp \frac{\partial Y^{(n)}_{(n)}}{\partial p}. \tag{5}$$

Um die Gleichung (4) anwenden zu können, muss $r$ nach Kugelfunctionen entwickelt sein. Sind daher $Y^{(i)}$ Kugelfunctionen, d. h. genügen sie der Differentialgleichung 84 (12), so wird[2])

$$r^{n+3} = p^{n+3}\{1 + \alpha(n+3)(Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + \ldots)\}$$

$$Y^{(0)}_n = p^{n+3} + (n+3)\alpha p^{n+3} Y^{(0)}; \quad Y^{(n)}_n = (n+3)\alpha p^{n+3} Y^{(n)},$$

daher

---

[1]) Für $a_0 = 0$ geht die Schale in einen Körper ohne Hohlraum über.

[2]) Zu den allgemeinen Kugelfunctionen treten noch gewisse Coëfficienten auf, die hier Functionen von $p$ sind, so dass die Form der Begrenzungsfläche von Schichte zu Schichte wechselt.

$$V_0 = \frac{4\pi}{3}\int_{a_0}^{a_1} \delta\, d p\, \frac{\partial}{\partial p}\left[p^3(1 + 3\alpha Y^{(0)})\right]$$
$$V_n = \frac{4\pi\alpha}{2n+1}\int_{a_0}^{a_1} \delta\, d p\, \frac{\partial}{\partial p}\left(p^{n+3} Y^{(n)}\right). \tag{6}$$

$V_0$ ist nichts anderes, als die Masse des Sphäroides; denn es ist

$$M = \int\int\int \delta r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\omega\, dr = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1}\int_{a_0}^{a_1} \delta\, d\mu\, d\omega\, \frac{\partial}{\partial p}(r^3)\, dp =$$
$$= \int_{a_0}^{a_1} \delta \cdot dp\, \frac{\partial}{\partial p}\left[p^3(1+3\alpha Y^{(0)})\right].$$

Wählt man daher für jedes einzelne Sphäroid den Halbmesser $p$ der Kugel so, dass diese (mit der der zugehörigen Schicht eigenthümlichen Dichte) an Masse gleich der Masse des Sphäroides wird, so wird $Y^{(0)} = 0$ zu setzen sein, und zwar für jede Schicht.

Der Werth von $V$ erlangt in einem speciellen Falle eine weitere Vereinfachung; setzt man in (4) für $V_1$ den Werth $P^{(1)}$ ein, so wird

$$\begin{aligned} V_1 &= \iiint P^{(1)} \cdot \delta \cdot d\mu\, d\omega \cdot r^3\, dr \\ &= \iiint \delta \cdot r^3\, dr\, d\mu\, d\omega\left[\mu\mu_0 + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu_0^2}\cos(\omega - \omega_0)\right] \\ &= \iiint dm\left[x\mu_0 + y\cos\omega_0\sqrt{1-\mu_0^2} + z\sin\omega_0\sqrt{1-\mu_0^2}\right] \\ &= \mu_0\int x\, dm + \sqrt{1-\mu_0^2}\cos\omega_0\int y\, dm + \sqrt{1-\mu_0^2}\sin\omega_0\int z\, dm. \end{aligned}$$

Fallen daher die Mittelpunkte sämmtlicher Kugeln in den Schwerpunkt der ganzen Masse, so wird $V_1$ gleich Null zu setzen sein.

b) Ein im Innern der Masse gelegener Punkt wird auf irgend einer der Grenzflächen liegen, für welche der Kugelhalbmesser $a$ sein mag. Für alle Schichten, für welche $p > a$ ist, wird der Punkt ein innerer, für alle anderen ein äusserer sein. Für die ersteren wird:

$$V = V_0 + \Sigma \rho^n V_n \tag{7}$$
$$V_n = \int\int\int \frac{\delta\, d\mu\, d\omega\, dr}{r^{n-1}} P^{(n)} = -\int_a^{a_1}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} \delta\, d\mu\, d\omega\, \frac{P^{(n)}}{n-2}\, \frac{\partial}{\partial p}\, \frac{1}{r^{n-2}}\, dp.$$

Sei $\frac{1}{r^{n-2}} = Y^{(0)}_{(-n)} + Y^{(1)}_{(-n)} + \ldots$, so wird

$$V_n = -\int_a^{a_1} \frac{\delta}{n-2}\, dp\, \frac{\partial}{\partial p}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} \frac{d\mu\, d\omega\, P^{(n)}}{r^{n-2}} = -\frac{4\pi}{2n+1}\int_a^{a_1} \frac{\delta}{n-2}\, dp\, \frac{\partial}{\partial p}\, Y^{(n)}_{(-n)}$$

Nun ist

$$\frac{1}{r^{n-2}} = \frac{1}{p^{n-2}}\left[1 - (n-2)\,\alpha\,(Y^{(0)} + Y^{(1)} + \ldots)\right],$$

also

$$Y^{(0)}_{(-n)} = \frac{1}{p^{n-2}}\left[1 - (n-2)\,\alpha\, Y^{(0)}\right],\quad Y^{(n)}_{(-n)} = -(n-2)\,\alpha\, Y^{(n)},$$

demnach

$$V_0 = 2\pi\int_a^{a_1} \delta\, dp\, \frac{\partial}{\partial p}\, p^2(1 + 2\alpha Y^{(0)});\quad V_n = \frac{4\pi\alpha}{2n+1}\int_a^{a_1} \delta\, dp\, \frac{\partial}{\partial p}\, \frac{Y^{(n)}}{p^{n-2}}. \tag{8}$$

Die Ableitung wird unrichtig für $n = 2$; für diesen Fall wird aber

$$V_2 = \int\int\int \delta\, d\mu\, d\omega\, P^{(2)} \frac{dr}{r} = \int \delta\, dp \frac{\partial}{\partial p}\int\int d\mu\, d\omega\, P^{(2)} \log r.$$

Da aber

$$\log r = \log p + \alpha\,(Y^{(0)} + Y^{(1)} + \ldots)$$

ist, so wird

$$V_2 = \frac{4\pi}{5}\int_{a}^{a_1} \delta\, dp \frac{\partial}{\partial p}\, \alpha\, Y^{(2)}$$

im Resultate identisch mit dem aus (8) folgenden Werthe. Das Gesammtpotential wird daher für diesen Fall, indem nach der Integration in den von $\alpha$ freien Gliedern $\rho = r = a\,(1 + \alpha\,y)$ zu setzen ist:

$$V = \frac{4\pi}{3a}(1 - \alpha\,y)\int_{a_0}^{a} \delta \frac{\partial\,(p^3)}{\partial p}\, dp + 4\alpha\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)a^{n+1}} \int_{a_0}^{a} \delta \cdot \frac{\partial}{\partial p}\,(p^{n+3}\,Y^{(n)})\, dp +$$

$$+ 2\pi \int_{a}^{a_1} \delta \cdot \frac{\partial\,(p^2)}{\partial p}\, dp + 4\alpha\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{2n+1} \int_{a}^{a_1} \delta \cdot dp\, \frac{\partial}{\partial p}\, \frac{Y^{(n)}}{p^{n-2}}. \qquad (9)$$

**86. Figur einer flüssigen rotirenden Masse.** Da die äussere Begrenzung eine Niveaufläche sein muss, so wird man dieselbe erhalten, wenn man das Potential aller wirkenden Kräfte auf irgend einen Punkt der Oberfläche selbst, gleich einer Constanten setzt. Um aber das Potential zu bestimmen, muss auch die Attraction der rotirenden Masse auf einen Punkt ihrer Oberfläche schon bekannt sein, da diese nicht nur nicht vernachlässigt werden kann, sondern sogar überwiegt. Um diese zu kennen, muss bereits die Form der Masse, ihre Dichteanordnung u. s. w. bekannt sein. Eine direkte Lösung der Aufgabe ist daher nicht möglich. Nachdem aber erfahrungsgemäss die Gleichgewichtsfigur einer von keinen Kräften afficirten Masse eine Kugel, diejenige einer rotirenden Masse ein Umdrehungsellipsoid ist, so wird es natürlich, zunächst die Annahme, dass die Gleichgewichtsfigur ein dreiaxiges Ellipsoid sei, der Untersuchung zu unterziehen.

Ist die Rotationsgeschwindigkeit der Masse $w$, so ist das Potential der Fliehkraft, wenn die $X$-Axe als Rotationsaxe angenommen wird[1]): $\frac{1}{2}w^2(\eta^2 + \zeta^2)$. Fügt man dieses Potential zu demjenigen des Ellipsoides auf einen Punkt seiner Oberfläche No. 81 (21) hinzu, so erhält man als Gleichgewichtsfigur:

$$\delta \cdot L'\,\frac{\xi^2}{a^2} + (\delta \cdot M' - \tfrac{1}{2}w^2 b^2)\frac{\eta^2}{b^2} + (\delta \cdot N' - \tfrac{1}{2}w^2 c^2)\frac{\zeta^2}{c^2} = \delta K - const. \quad (1)$$

---

[1]) Bei der Drehung um die $X$-Axe wird für jeden Punkt $\Theta$ (Fig. 274) unveränderlich, die Veränderung von $\omega$ in der Zeiteinheit ist gegeben durch die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\omega}{dt} = w$. Unter Voraussetzung einer constanten Winkelgeschwindigkeit $\left(\frac{dw}{dt} = 0\right)$ ist daher

$$\frac{dx}{dt} = 0 \qquad\qquad \frac{d^2x}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = -r\sin\Theta\sin\omega\frac{d\omega}{dt} = -zw \qquad\qquad \frac{d^2y}{dt} = -w\frac{dz}{dt} = -yw^2$$

$$\frac{dz}{dt} = +r\sin\Theta\cos\omega\frac{d\omega}{dt} = +yw \qquad\qquad \frac{d^2z}{dt} = -w\frac{dy}{dt} = -zw^2.$$

Diese drei Beschleunigungen mit entgegengesetzten Zeichen lassen sich als die Componenten einer Kraft, der sogenannten Fliehkraft auffassen, deren Potential daher $\frac{1}{2}w^2(y^2 + z^2)$ ist.

wobei sich die Constante aus der Gesammtmasse bestimmt. Diese Gleichung soll mit der Gleichung des Ellipsoides

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1$$

identisch werden, folglich muss

$$\delta \cdot L' = \delta \cdot M' - \tfrac{1}{2} w^2 b^2 = \delta \cdot N' - \tfrac{1}{2} w^2 c^2 \qquad (3)$$

sein. Führt man hier für $L'$, $M'$, $N'$ ihre Werthe ein, so erhält man

$$\tfrac{1}{2} w^2 b^2 = 2bc\pi\delta \int_0^1 \frac{\theta^2 d\theta}{\Pi} \left(\frac{b^2}{a^2} \frac{1}{1+\lambda^2\theta^2} - 1\right),$$

oder da $b^2 = a^2(1+\lambda^2)$; $c^2 = a^2(1+\lambda'^2)$ ist:

$$\tfrac{1}{2} w^2 = \frac{2bc\pi}{a^2}\delta \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} \int_0^1 \frac{(1-\theta^2)\theta^2 d\theta}{\Pi(1+\lambda^2\theta^2)};$$
$$\tfrac{1}{2} w^2 = \frac{2bc\pi}{a^2}\delta \cdot \frac{\lambda'^2}{1+\lambda'^2} \int_0^1 \frac{(1-\theta^2)\theta^2 d\theta}{\Pi(1+\lambda'^2\theta^2)}, \qquad (4)$$

demnach durch Gleichsetzung der beiden Werthe

$$\frac{2bc\pi\delta}{a^2}\int_0^1 \frac{(1-\theta^2)\theta^2 d\theta}{\Pi}\left[\frac{\lambda^2}{(1+\lambda^2)(1+\lambda^2\theta^2)} - \frac{\lambda'^2}{(1+\lambda'^2)(1+\lambda'^2\theta^2)}\right] = 0$$

oder

$$\frac{2bc\pi\delta(\lambda^2-\lambda'^2)}{a^2(1+\lambda^2)(1+\lambda'^2)}\int_0^1 \frac{(1-\theta^2)(1-\lambda^2\lambda'^2\theta^2)\theta^2 d\theta}{\Pi^3} = 0. \qquad (5)$$

Diese Gleichung wird befriedigt durch $\lambda = \lambda'$, $b = c$, also durch ein Umdrehungsellipsoid. Für dieses folgt dann aus (4):

$$\frac{w^2}{4\pi\delta\lambda^3} = \int_0^1 \frac{(1-\theta^2)\theta^2 d\theta}{(1+\lambda^2\theta^2)^2}$$

oder integrirt[1])

$$\frac{w^2}{2\pi\delta} = \Psi(\lambda), \qquad (6)$$

wobei

$$\Psi(\lambda) = \frac{3+\lambda^2}{\lambda^3} \operatorname{arctang}\lambda - \frac{3}{\lambda^2} = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\frac{4i}{(2i+1)(2i+3)}\lambda^{2i}. \qquad (7)$$

$$\Psi'(\lambda) = \frac{9+7\lambda^2}{\lambda^3(1+\lambda^2)} - \frac{9+\lambda^2}{\lambda^4}\operatorname{arctang}\lambda = \frac{\lambda^2+9}{\lambda^4}\Phi(\lambda),$$

wenn

$$\Phi(\lambda) = \frac{9\lambda+7\lambda^3}{(\lambda^2+1)(\lambda^2+9)} - \operatorname{arctang}\lambda \qquad (8)$$

ist. Hieraus folgt durch einfache Differentiation:

---

1) Für ein überhöhtes Ellipsoid würde man durch Entwickelung des Logarithmus die Formel erhalten:

$$\frac{w^2}{2\pi\delta} = -\sum_{i=1}^{\infty}\frac{4i}{(2i+1)(2i+3)}\varkappa^{2i},$$

welche Formel aus der vorigen für $\lambda^2 = -\varkappa^2$ hervorgeht. Da sonach $w^2$ negativ würde, so giebt es kein reelles $w$, für welches diese Gleichung befriedigt werden kann; das überhöhte Ellipsoid kann demnach keine Gleichgewichtsfigur sein.

$$\Phi'(\lambda) = -\frac{8\lambda^4(\lambda^2-8)}{(1+\lambda^2)^2(\lambda^2+9)^2}. \tag{9}$$

Es ist, wie aus der entwickelten Form (7) hervorgeht: $\Psi(0)=0$ und $\Psi(\infty)=0$. Da nur positive Werthe von $\lambda$ in Betracht zu ziehen sind, so wird die Gleichung (6) für eine gegebene Geschwindigkeit $w$ reelle Lösungen in gerader Zahl haben, wenn $\Psi(\lambda)$ positiv ist. Das Maximum von $\Psi(\lambda)$ ergiebt sich aus der Gleichung $\Psi'(\lambda)=0$, also $\Phi(\lambda)=0$. Ist eine Lösung dieser Gleichung $\lambda_0$ und der zugehörige $\Psi$-Werth $\Psi(\lambda_0)$, so wird die Gleichung (6) keine Lösung haben, wenn $w^2 > 2\pi\delta\cdot\Psi(\lambda_0)$; sie hat zwei Lösungen, wenn $w^2 < 2\pi\delta\Psi(\lambda_0)$, und dann ist die eine Lösung zwischen 0 und $\lambda_0$, die zweite zwischen $\lambda_0$ und $\infty$. Die Gleichung könnte aber mehr als zwei reelle Lösungen haben, wenn die Gleichung $\Phi(\lambda)=0$ mehr als eine positive Wurzel hat. Da aber $\Phi'(\lambda)=0$ wird, für $\lambda=\pm\sqrt{8}$, so wird $\Phi(\lambda)$ (da der negative Werth von $\lambda$ nicht zu berücksichtigen ist) ein Maximum für $\lambda=+\sqrt{8}$ und dieses Maximum wird $\Phi(\sqrt{8}) = \frac{4}{3}\sqrt{8} - arctg\sqrt{8} = 0{\cdot}0868$. Da aber $\Phi(0)=0$, $\Phi(\infty) = -\frac{1}{2}\pi$ ist, so kann es nur mehr einen positiven Werth von $\lambda$ geben, für welchen $\Phi(\lambda)$ verschwindet, und dieser liegt zwischen $\sqrt{8}$ und $\infty$. Dieser Nullwerth von $\Phi(\lambda)$ ist

$$\lambda_0 = 2{\cdot}5293, \quad \Psi(\lambda_0) = 0{\cdot}22467. \tag{10}$$

Wenn daher $w^2 > 1{\cdot}4116\,\delta$ oder $w > 1{\cdot}1881\sqrt{\delta}$ ist, so ist die Rotation so schnell, dass sich eine Gleichgewichtsfigur nicht bilden kann[1]). Wenn $w < 1{\cdot}1881\sqrt{\delta}$ ist, so giebt es zwei Gleichgewichtsfiguren, für die eine ist $\lambda_1 < \lambda_0$, für die zweite $\lambda_2 > \lambda_0$; die zweite entspricht daher einem sehr stark abgeplatteten Rotationsellipsoide. Von diesen beiden hat aber jedes ein anderes Rotationsmoment. Da sich dasselbe aber vermöge des Satzes von der Erhaltung der Flächen nicht ändern kann, so wird durch den Anfangszustand, welcher das Rotationsmoment der gegebenen Masse bestimmt, auch die Form des Rotationsellipsoides mitbestimmt. Ist $\mu$ das durch den Anfangszustand gegebene, constante Rotationsmoment, $\mathfrak{M}$ das Massenmoment, so ist

$$\mu = \mathfrak{M}\cdot w$$

und da

$$\mathfrak{M} = \tfrac{2}{5}Mb^2 = \tfrac{2}{5}Ma^2(1+\lambda^2)$$

und

$$M = \tfrac{4}{3}\pi\delta a^3(1+\lambda^2), \quad \text{daher} \quad a = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\delta(1+\lambda^2)}}$$

ist, so wird

$$\frac{w^2}{2\pi\delta} = \frac{25}{4}\,\frac{\mu^2}{M^2a^4(1+\lambda^2)^2}\cdot\frac{1}{2\pi\delta} = \frac{25}{6M^2}\,\frac{\mu^2}{(1+\lambda^2)}\sqrt[3]{\frac{4\pi\delta(1+\lambda^2)}{3M}}$$

oder

$$(1+\lambda^2)^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{w^2}{2\pi\delta} = \frac{25}{6}\,\frac{\mu^2}{M^2}\sqrt[3]{\frac{4\pi\delta}{3M}} = q.$$

$q$ ist durch den Anfangszustand $\mu$ und die gegebene Masse $M$ völlig bestimmt, und man hat daher $\lambda$ aus der Gleichung zu ermitteln:

$$X(\lambda) = (1+\lambda^2)^{\frac{2}{3}}\Psi(\lambda) = q. \tag{11}$$

Nun ist

$$X'(\lambda) = \tfrac{1}{3}(1+\lambda^2)^{-\frac{1}{3}}\left[arctang\,\lambda + \frac{9(3+2\lambda^2)}{\lambda^4}\chi(\lambda)\right]$$

wenn

[1]) Wobei sich jedoch durch die Verlangsamung der Rotation die Bedingung für eine Gleichgewichtsfigur ergeben kann.

$$\chi(\lambda) = \frac{(3+\lambda^2)\lambda}{3+2\lambda^2} - arctang\,\lambda$$

ist. Hieraus folgt noch

$$\chi'(\lambda) = \frac{\lambda^4(1+2\lambda^2)}{(1+\lambda^2)(3+2\lambda^2)^2}.$$

Da $\chi'(\lambda)$ stets positiv ist, so wird $\chi(\lambda)$ beständig wachsen; nun ist $\chi(0) = 0$, $\chi(\infty) = \infty$, daher das Wachsen zwischen 0 und $\infty$, also $\chi(\lambda)$ ebenfalls beständig positiv. Demnach wird auch $X'(\lambda)$ stets positiv sein, $X(\lambda)$ beständig wachsen, und da $X(0) = 0$, $X(\infty) = \infty$ ist, so kann bei dem beständigen Wachsen $X(\lambda)$ nur einmal den Werth $q$ erlangen.

Für $w = 1{\cdot}1881\sqrt{\delta}$ fallen die beiden Wurzeln zusammen; es wird $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ je näher $w$ der Grenze $1{\cdot}1881\sqrt{\delta}$ rückt, desto näher werden die beiden Lösungen $\lambda_1$, $\lambda_2$ zu $\lambda_0$. Für sehr kleine Werthe von $w$ hingegen werden die Werthe beständig verschieden und für sehr kleine Werthe von $w$ wird $\lambda_1$ sehr klein, $\lambda_2$ sehr gross.

Für einen Punkt des Aequators wird $\xi = 0$, $\eta = b$, $\zeta = 0$; daher die Anziehungskraft, d. i. die Schwere am Aequator

$$G = Y = -\frac{2\delta}{b}M'$$
$$= -2\delta\frac{b^2\pi}{a^2\lambda^3}\left(arctang\,\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) = -2\delta a\pi\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^3}\left[(1+\lambda^2)\,arctang\,\lambda - \lambda\right]$$
$$G = -4\delta\pi a\sqrt{1+\lambda^2}\left(\tfrac{1}{15} - \tfrac{1}{35}\lambda^2 + \tfrac{1}{57}\lambda^4 \ldots\right). \tag{12}$$

Die Fliehkraft ist $w^2 b$, demnach das Verhältniss der Fliehkraft zur Schwerkraft

$$\mathfrak{b} = \frac{w^2 b}{G} = \frac{\Psi(\lambda)}{2(\frac{1}{3} - \frac{1}{15}\lambda^2 \ldots)}$$

und daraus

$$\mathfrak{b} = \tfrac{2}{5}\lambda^2 - \tfrac{46}{175}\lambda^4;\quad \lambda^2 = \tfrac{5}{2}\mathfrak{b} + \tfrac{115}{28}\mathfrak{b}^2. \tag{13}$$

Die Abplattung

$$\mathfrak{a} = \frac{b-a}{b}$$

folgt hieraus:

$$\mathfrak{a} = \frac{\sqrt{1+\lambda^2} - 1}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \tfrac{1}{2}\lambda^2 - \tfrac{3}{8}\lambda^4$$
$$\mathfrak{a} = \tfrac{5}{4}\mathfrak{b}. \tag{14}$$

Ist $T$ die Rotationsdauer der Erde, so wird

$$w = \frac{2\pi}{T};$$

wenn weiter $l$ die Länge des Secundenpendels am Aequator ist, so ist

$$G = \pi^2 l$$

demnach

$$\mathfrak{b} = \frac{4\pi^2 b}{T^2\pi^2 l} = \frac{4b}{T^2 l}.$$

Nimmt man $T = 86164^s$ mittlere Zeit, $b = 6378249^m$, $l = 0^m{\cdot}99103$, so würde $a = \frac{1}{231}$ folgen; da jedoch $\mathfrak{a} = \frac{1}{299}$ ist, so folgt, dass die bei dieser Ableitung gemachte Voraussetzung der Homogenität der Erde nicht zutrifft.

Mit dem zu $w$ und $G$, d. i. zu $T$ und $l$ gehörigen Werthe $a = \frac{1}{231}$ folgt $\lambda^2 = 0{\cdot}008669$ und damit

$$\Psi(\lambda) = 0{\cdot}0022945.$$

Für zwei verschiedene Himmelskörper ist

$$\Psi(\lambda) = \frac{2\pi}{T^2\delta}; \quad \Psi(\lambda') = \frac{2\pi}{T'^2\delta'};$$

daher

$$\frac{\Psi(\lambda')}{\Psi(\lambda)} = \left(\frac{T}{T'}\right)^2\left(\frac{\delta}{\delta'}\right).$$

Drückt man die Rotationsdauer eines Himmelskörpers in Sterntagen ($T = 1$ für die Erde), die Dichte derselben in Einheiten der Dichte der Erde ($\delta = 1$) aus, so wird

$$\Psi(\lambda') = \frac{0\cdot0022945}{T'^2\delta'}. \tag{15}$$

Beispielsweise wird

| | $T$ | $\delta$ | $\lambda'^2$ | $\alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| für die Sonne . . | $25^d\ 4^h$ | 0·25 | 0·000054 | 1 : 36800 |
| für den Jupiter . . | $9^h\ 56^m$ | 0·24 | 0·20925 | 1 : 9·56 |
| für den Saturn . | $10^h\ 14^m$ | 0·12 | 0·39439 | 1 : 5·07. |

Da aber die beobachteten Abplattungen für den Jupiter $\frac{1}{17}$, für Saturn $\frac{1}{9}$ sind so zeigt dies, dass auch diese Körper nicht homogen sind.

Die Gleichung (5) wird ausser für $\lambda = \lambda'$ noch befriedigt, wenn $\lambda$ von $\lambda$ verschieden ist, aber der zweite Faktor verschwindet, nämlich

$$\int_0^1 \frac{(1-\theta^2)(1-\lambda^2\lambda'^2\theta^2)\theta^2 d\theta}{H^3} = 0.$$

Diese Bedingung giebt ein sehr gestrecktes, dreiaxiges Ellipsoid, eine Figur, welche in der Natur nicht auftritt, welche daher hier nicht weiter in Betracht kommt[1].

Hiermit waren drei Gleichgewichtsfiguren gegeben, welche theoretisch eine rotirende flüssige Masse annehmen könnte, ein sehr wenig abgeplattetes Rotationsellipsoid, ein sehr stark abgeplattetes Rotationsellipsoid und ein dreiaxiges, das »JACOBI'sche Ellipsoid«.

H. POINCARÉ fasst das Problem in seiner wichtigen Abhandlung »Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation« (Acta mathematica, Bd. 7, pag. 259) von einem anderen Gesichtspunkte aus auf. Er findet, dass es unendlich viele Gleichgewichtsfiguren giebt, die aber nicht alle stabil sind; damit die Gleichgewichtsfigur stabil sei, müssen gewisse Bedingungen erfüllt sein, welche sich analytisch dadurch ausdrücken, dass die Zeichen der Coëfficienten gewisser quadratischen Formen, von POINCARÉ Stabilitätscoëfficienten genannt, negativ sein müssen. Verschwinden einzelne dieser Coëfficienten, so gehört die Gleichgewichtsfigur zwei verschiedenen Reihen an, und wird »forme de bifurcation« genannt, wenn die unendlich benachbarten Formen reell sind; sind aber die benachbarten Gleichgewichtsformen imaginär, so wird diese Gleichgewichtsform »forme limite« genannt (l. c., pag. 270).

So werden beispielsweise für eine flüssige rotirende Masse alle abgeplatteten Rotationsellipsoide Gleichgewichtsfiguren sein; und ebenso giebt es eine unendliche Anzahl dreiaxiger Ellipsoide, welche sämmtlich Gleichgewichtsfiguren sind; sie geniessen aber nicht die Eigenschaft der Stabilität. In der That wird für eine gegebene Geschwindigkeit der Uebergang der Flüssigkeit aus der Kugel-

[1]) Auf diese Lösung hat zuerst JACOBI in POGG. Ann., Bd. 33. aufmerksam gemacht. Vergl. auch LIOUVILLE's Journal, Bd. 16, pag. 241. Dass es noch andere Gleichgewichtsfiguren giebt, hat zuerst THOMSON ausgesprochen, und später POINCARÉ bewiesen.

form in die ellipsoidische Form durch Ellipsoide aller möglichen Abplattungen hindurchgehen, die sämmtlich Gleichgewichtsfiguren sind, aber keine Stabilität besitzen, bis ein Ellipsoid erreicht ist, für welches die Bedingung erfüllt ist, dass die Stabilitätscoëfficienten der zugehörigen quadratischen Form sämmtlich negativ werden; allein ausser den angegebenen drei Ellipsoiden[1]) giebt es noch andere Gleichgewichtsformen, die ebenfalls Stabilität besitzen, Rotationskörper, die aber nicht symmetrisch nach drei Ebenen sind; eine solche stabile Gleichgewichtsfigur von birnenförmiger Gestalt wird pag. 347 beschrieben.

**87. Gleichgewicht von sphäroidisch geschichteten Körpern unter Berücksichtigung äusserer Kräfte; die Oberflächenform.** Das Potential der Anziehung eines äusseren Punktes $m_1$ (Fig. 275), dessen Coordinaten $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$ sind, auf ein Massenelement des Sphäroides ist $\frac{m_1}{u_1}$. Von den Componenten der Anziehung sind aber die Componenten der Anziehung auf den Schwerpunkt abzuziehen, da es sich um die relative Verschiebung der Massenpunkte gegenüber einem als fest angenommenen Punkte (dem Schwerpunkte des Systems $E$) handelt. Das Potential dieser Anziehung ist[2]):

$$\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_1}{\rho_1^3}(x\xi_1 + y\eta_1 + z\zeta_1),$$

daher das Potential der Anziehung für den Punkt $m_1$:

$$\begin{aligned} V' &= \frac{m_1}{u_1} - \frac{m_1}{\rho_1} - \frac{m_1}{\rho_1^3}(x\cos\theta_1 + y\sin\theta_1\cos\omega_1 + z\sin\theta_1\sin\omega_1) \\ &= \frac{m_1}{u_1} - \frac{m_1}{\rho_1} - \frac{m_1 r}{\rho_1^2}\cos\gamma_1. \end{aligned} \tag{1}$$

Da nun

$$\frac{1}{u_1} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{r}{\rho_1^2}P^{(1)}(\cos\gamma_1) + \frac{r^2}{\rho_1^3}P^{(2)}(\cos\gamma_1) + \dots,$$

ist, so wird

$$V' = m_1\frac{r^2}{\rho_1^3}\left(P_1^{(2)} + \frac{r}{\rho_1}P_1^{(3)} + \frac{r^2}{\rho_1^2}P_1^{(4)} + \dots\right). \tag{2}$$

Das Potential der Fliehkraft $\frac{1}{2}w^2(y^2+z^2)$ wird, nach Kugelfunctionen geordnet:

$$V_0 = \tfrac{1}{3}w^2r^2 - \tfrac{1}{2}w^2r^2(\mu^2 - \tfrac{1}{3}), \tag{3}$$

wo die beiden Theile Kugelfunctionen nullter, bezw. zweiter Ordnung sind. Sind mehrere anziehende Körper $m_1, m_2, m_3 \dots$, so wird sich das Gesammtpotential der äusseren Kräfte zusammensetzen aus den gleichartigen Bestandtheilen $V', V'' \dots$ und dem Potential $V_0$ und es wird:

$$V' + V'' + V''' + \dots + V_0 = \alpha r^2[Z^{(0)} + Z^{(2)} + rZ^{(3)} + r^2Z^{(4)} + \dots], \tag{4}$$

wenn[3])

$$\begin{aligned} \alpha Z^{(0)} &= \tfrac{1}{3}w^2 \\ \alpha Z^{(2)} &= -\tfrac{1}{2}w^2(\mu^2 - \tfrac{1}{3}) + \Sigma\frac{m_i}{\rho_i^3}P_i^{(2)} \\ \alpha Z^{(3)} &= \Sigma\frac{m_i}{\rho_i^4}P_i^{(3)}. \end{aligned} \tag{4a}$$

. . . . . . . .

---

[1]) Hierzu muss jedoch bemerkt werden, dass die wenig abgeplattete Form seculare Stabilität besitzt, die stark abgeplattete jedoch nicht; hierüber vergl. l. c., pag. 373.

[2]) Die Constante $\frac{m_1}{\rho_1}$ ist hinzuzufügen, da das Potential für den Schwerpunkt selbst verschwinden muss.

[3]) Der Faktor $\alpha$ wird hinzugefügt, weil diese Theile des Potentiales gegenüber dem Haupttheile, welcher das Potential des Sphäroides selbst darstellt, sehr klein sind.

Fügt man hier noch das Potential des Sphäroides 85 (2) und (6) auf einen Punkt der Oberfläche ($r_1$ statt $\rho$) hinzu, und setzt die Summe gleich einer Constanten, so wird

$$V = \frac{M}{r_1} + 4\alpha\pi \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)r_1^{i+1}} \int_{a_0}^{a_1} \delta \cdot dp \frac{\partial}{\partial p} (p^{i+3} Y^{(i)}) + \\ + \alpha r_1^2 (Z^{(0)} + Z^{(2)} + r_1 Z^{(3)} + \ldots) = const \tag{5}$$

$r_1$ zu bestimmen gestatten. Ist die zu bestimmende Gleichgewichtsfigur der äusseren Oberfläche gegeben durch

$$r_1 = a_1[1 + \alpha(Y_1^{(1)} + Y_1^{(2)} + \ldots)], \tag{6}$$

so erhalt man, wenn dieser Werth eingeführt und nur die erste Potenz von $\alpha$ berücksichtigt wird:

$$\frac{M}{a_1}[1 - \alpha(Y_1^{(1)} + Y_1^{(2)} + \ldots)] + 4\alpha\pi \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)a_1^{i+1}} \int_{a_0}^{a_1} \delta dp \frac{\partial}{\partial p} (p^{i+3} Y^{(i)}) + \\ + \alpha a_1^2 Z^{(0)} + \alpha a_1^2 Z^{(2)} + \alpha a_1^3 Z^{(3)} + \ldots = C. \tag{5a}$$

Hieraus folgt, indem die Kugelfunctionen der einzelnen Ordnungen für sich zusammengefasst werden:

$$\frac{M}{a_1} + \alpha a_1^2 Z^{(0)} = const$$
$$\frac{M}{a_1} Y_1^{(1)} = 0 \tag{7}$$
$$-\alpha \frac{M}{a_1} Y_1^{(i)} + \frac{4\alpha\pi}{(2i+1)a_1^{i+1}} \int_{a_0}^{a_1} \delta dp \frac{\partial (p^{i+3} Y^{(i)})}{\partial p} + \alpha a_1^i Z^{(i)} = 0.$$

Die erste Gleichung bestimmt die übrigens weiter nicht benöthigte Constante $C$ aus der Gesammtmasse. Aus der zweiten Gleichung folgt $Y_1^{(1)} = 0$, was selbstverständlich ist, da der Schwerpunkt der Masse zum Ursprung gewählt worden war. Die dritte Gleichung giebt:

$$Y_1^{(i)} = \frac{4\pi}{M(2i+1)a_1^i} \int_{a_0}^{a_1} \delta dp \frac{\partial}{\partial p} (p^{i+3} Y^{(i)}) + \frac{a_1^{i+1}}{M} Z^{(i)}. \tag{8}$$

Die Gleichungen (6) und (8) bestimmen die Oberfläche des Sphäroides.

Aus (5) erhält man für die Kraftcomponente in der Richtung des Radiusvectors $r_1$:

$$\frac{\partial V}{\partial r_1} = -\frac{M}{r_1^2} - 4\alpha\pi \sum_{i=2}^{\infty} \frac{i+1}{(2i+1)r_1^{i+2}} \int_{a_0}^{a_1} \delta dp \frac{\partial}{\partial p} (p^{i+3} Y^{(i)}) + \\ + \alpha r_1 (2Z^{(0)} + 2Z^{(2)} + 3r_1 Z^{(3)} + 4r_1^2 Z^{(4)} + \ldots). \tag{9}$$

Da die Abweichungen von der Kugelgestalt nur als äusserst gering angesehen werden, so wird der Radiusvector mit der Normalen nur einen sehr kleinen Winkel einschliessen, dessen Cosinus man gleich der Einheit setzen kann, so dass der Ausdruck (9) als die Kraft in der Richtung der Normalen, also als die Schwerkraft $g$ in dem Punkte $x, y, z$ angesehen werden kann. Ersetzt man hier wieder $r_1$ durch seinen Ausdruck (6), so folgt mit Rücksicht auf die Gleichung (8):

$$g = +\frac{M}{a_1^2}[1 - 2\alpha(Y_1^{(2)} + Y_1^{(3)} + \ldots)] - 2\alpha a_1 Z^{(0)} +$$

$$+ \alpha \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(i+1)}{a_1^2} M\left(Y_1^{(i)} - \frac{a_1^{i+1}}{M} Z^{(i)}\right) - \alpha \sum_{i=0}^{\infty} i a_1^{i-1} Z^{(i)}$$

$$g = +\frac{M}{a_1^2} - 2\alpha a_1 Z^{(0)} + \frac{\alpha M}{a_1^2}\sum_{i=2}^{\infty}(i-1) Y_1^{(i)} - \alpha \sum_{i=0}^{\infty}(2i+1) a_1^{i-1} Z^{(i)}. \tag{10}$$

Für ein Rotationsellipsoid, dessen Halbaxen $m$, $n$ sind, wird

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2 + z^2}{n^2} = 1$$

und daraus

$$r_1^2 = \frac{n^2}{1 + \lambda^2 \cos^2\theta};$$

oder mit Vernachlässigung von $\lambda^4$

$$r_1 = m[1 + \tfrac{1}{3}\lambda^2 - \tfrac{1}{2}\lambda^2(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3})]$$

$$\alpha Y_1^{(2)} = -\tfrac{1}{2}\lambda^2(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}), \tag{11}$$

demnach

$$g = +\frac{M}{a_1^2} - \tfrac{2}{3} a_1 w^2 - \frac{M}{2a_1^2}\lambda^2(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}) + \tfrac{5}{2} a_1 w^2(\mu^2 - \tfrac{1}{3}) -$$

$$- \alpha \sum^{\infty}(2i+1) a_1^{i-1} \sum \frac{m_x}{\rho_x^{i+1}} P_x^{(i)}$$

$$= +\frac{M}{a_1^2}\left[1 - \tfrac{2}{3}\frac{w^2 a_1^3}{M} + \left(\tfrac{5}{2}\frac{w^2 a_1^3}{M} - \tfrac{1}{2}\lambda^2\right)(\mu^2 - \tfrac{1}{3}) - \right.$$

$$\left. - \frac{\alpha}{M}\sum^{\infty}(2i+1) a_1^{i+1} \sum \frac{m_x}{\rho_x^{i+1}} P_x^{(i)}\right].$$

Nun ist mit Vernachlässigung von $\lambda^4$: $\tfrac{1}{2}\lambda^2 = \mathfrak{a}$ die Abplattung

$$\frac{w^2 a_1^3}{M} = \frac{w^2 a_1}{g}\left(1 - \tfrac{2}{3}\frac{w^2 a_1^3}{M} \ldots\right),$$

folglich weil $\frac{w^2 a_1}{g}$ selbst von der Ordnung von $\lambda^2$ ist:

$$\frac{w^2 a_1^3}{M} = \frac{w^2 a_1}{g} = \frac{w^2 b_1\sqrt{1+\lambda^2}}{g} = \mathfrak{b}, \tag{12}$$

wobei $\lambda^2$ wieder zu vernachlässigen ist. Man erhält daher innerhalb derselben Genauigkeitsgrenze:

$$g = \frac{M}{a_1^2}[1 - \tfrac{2}{3}\mathfrak{b} + (\tfrac{5}{2}\mathfrak{b} - \mathfrak{a})(\mu^2 - \tfrac{1}{3}) - G]$$

$$G = \frac{\alpha}{M}\sum_{i=0}^{\infty}(2i+1) a_1^{i+1} \sum \frac{m_x}{\rho_x^{i+1}} P_x^{(i)}. \tag{13}$$

Die von der Anziehung der übrigen Himmelskörper herrührenden Glieder $G$ sind praktisch von viel niedrigerer Ordnung wie $\lambda^2$, und können in dieser Näherung unbedenklich vernachlässigt werden. Ist dann $g_0$ die Schwere am Aequator, $g_{90}$ die Schwere an den Polen, so wird

$$g_0 = \frac{M}{a_1^2}[1 - \tfrac{2}{3}\mathfrak{b} - \tfrac{1}{3}(\tfrac{5}{2}\mathfrak{b} - \mathfrak{a})]$$

$$g_{90} = \frac{M}{a_1^2}[1 - \tfrac{2}{3}\mathfrak{b} + \tfrac{2}{3}(\tfrac{5}{2}\mathfrak{b} - \mathfrak{a})]$$

$$g_{90} - g_0 = \frac{M}{a_1^2}(\tfrac{5}{2}\mathfrak{b} - \mathfrak{a})$$

$$\frac{g_{90} - g_0}{g_0} = \tfrac{5}{2}\mathfrak{b} - \mathfrak{a}. \tag{14}$$

Die Gleichung (14) giebt eine Beziehung zwischen der Abplattung, dem Verhältniss der Centrifugalkraft zur Schwerkraft am Aequator und dem Verhältniss der Schwerezunahme vom Aequator zum Pol zur Schwere selbst. Diese Beziehung heisst das CLAIRAUT'sche Theorem. Sie ist wie sofort zu sehen, unabhängig von der Dichtenlagerung im Innern der Erde.

Mit Hilfe der Gleichung (8) kann man einfach das Potential eines sphäroidischen Körpers auf einen äusseren Punkt aus seiner äusseren Gestalt, ohne Kenntniss der inneren Schichtung ableiten. Es ist nach 85 (2) und (6):

$$V = \frac{k^2 M}{\rho} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\rho^{i+1}} \frac{4\pi\alpha}{2i+1} \int_{a_0}^{a_1} \delta \, dp \, \frac{\partial}{\partial p} (p^{i+3} Y^{(i)}).$$

Setzt man hier für das Integral seinen Werth aus (8), so folgt

$$V = \frac{k^2 M}{\rho} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_1^i}{\rho^{i+1}} [\alpha k^2 M Y_1^{(i)} - \alpha a_1^{i+1} Z^{(i)}]. \qquad (15)$$

Vernachlässigt man für die Bestimmung der Oberflächenform des Sphäroides die Wirkung der äusseren Kräfte und nimmt nur auf die Rotation Rücksicht, so wird

$$\alpha Z^{(2)} = -\tfrac{1}{2} w^2 (\mu^2 - \tfrac{1}{3}), \qquad Z^{(3)} = Z^{(4)} = \ldots = 0$$

zu setzen sein. Nun kann man $Y_1^{(1)} = 0$ setzen, wenn man den Ursprung in den Schwerpunkt des Körpers verlegt; nimmt man weiter an, dass man es mit einem Rotationssphäroide zu thun hat, so wird

$$\alpha Y_1^{(2)} = -\mathfrak{a}(\mu^2 - \tfrac{1}{3}), \quad Y_1^{(3)} = Y_1^{(4)} \ldots = 0$$

und die Gleichung (15) geht über in

$$V = \frac{k^2 M}{\rho} + \frac{a_1^3 k^2 M}{\rho^3} \left[ -\mathfrak{a}(\mu^2 - \tfrac{1}{3}) + \frac{a_1^3}{M} \cdot \tfrac{1}{2} w^2 (\mu^2 - \tfrac{1}{3}) \right]$$

oder mit Rücksicht auf (12):

$$V = \frac{k^2 M}{\rho} + \frac{k^2 M a_1^2}{\rho^3} (\tfrac{1}{2}\mathfrak{b} - \mathfrak{a})(\mu^2 - \tfrac{1}{3}). \qquad (16)$$

88. **Gleichgewicht von sphäroidisch geschichteten Körpern. Innere Lagerung.** Für einen Punkt im Innern erhält man, wenn man das Potential der äusseren Kräfte und der Fliehkraft zu dem Potential 85 (9) hinzufügt:

$$V = \frac{4\pi}{3a}(1 - \alpha y) \int_{a_0}^{a} \delta \cdot \frac{\partial(p^3)}{\partial p} dp + 4\alpha\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)a^{n+1}} \int_{a_0}^{a} \delta \cdot \frac{\partial(p^{n+3} Y^{(n)})}{\partial p} dp +$$

$$+ 2\pi \int_{a}^{a_1} \frac{\partial(p^2)}{\partial p} dp + 4\alpha\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{2n+1} \int_{a}^{a_1} \delta \cdot dp \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{Y^{(n)}}{p^{n-2}} \right) +$$

$$+ \alpha a^2 (Z^{(0)} + Z^{(2)} + aZ^{(3)} + \ldots) = C.$$

Hierdurch erhält man

$$\frac{4\pi}{3a}(1 - \alpha Y^{(0)}) \int_{a_0}^{a} \delta \cdot \frac{\partial(p^3)}{\partial p} dp + 2\pi \int_{a}^{a_1} \frac{\partial(p^2)}{\partial p} dp + \alpha a^2 Z^{(0)} = C$$

$$-\frac{4\pi}{3a} \alpha Y^{(n)} \int_{a_0}^{a} \delta \cdot \frac{\partial(p^3)}{\partial p} dp + \frac{4\alpha\pi}{(2n+1)a^{n+1}} \int_{a_0}^{a} \delta \cdot \frac{\partial}{\partial p} (p^{n+3} Y^{(n)}) dp + \qquad (1)$$

$$+ 4\alpha\pi \frac{a^n}{2n+1} \int_{a}^{a_1} \delta \cdot dp \frac{\partial}{\partial p} \frac{Y^{(n)}}{p^{n-2}} + \alpha a^n Z^{(n)} = 0.$$

Die erste Gleichung giebt eine Beziehung zwischen $a$, $Y^{(0)}$ und $C$; es kann daher wieder $a$ so gewählt werden, dass $Y^{(0)} = 0$ ist. Die zweite Gleichung liefert eine Bestimmung für $Y^{(n)}$ (für $Y^{(1)}$ ergiebt sich eine ganz ähnliche Gleichung, wo nur $Z^{(1)} = 0$ ist). Setzt man

$$\frac{4\pi}{2n+1}\int_{a_0}^{a_1} \delta\, dp\, \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{Y^{(n)}}{p^{n-2}}\right) + Z^{(n)} = \frac{4\pi}{2n+1} Z'^{(n)},$$

so wird diese Gleichung

$$-\frac{Y^{(n)}}{a}\int_{a_0}^{a} \delta p^2\, dp + \frac{1}{(2n+1)a^{n+1}}\int_{a_0}^{a} \delta\, dp\, \frac{\partial}{\partial p}\left(Y^{(n)} p^{n+3}\right) -$$

$$-\frac{a^n}{(2n+1)}\int_{a_0}^{a} \delta\, dp\, \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{Y^{(n)}}{p^{n-2}}\right) + \frac{a^n Z'^{(n)}}{(2n+1)} = 0.$$

Dividirt man durch $a^n$ und differenzirt nach $a$, so erhält man, da $Z'$ von $a$ unabhängig ist, nach einiger Reduction:

$$\frac{(n+1)Y^{(n)}}{a^{n+2}} P - \frac{1}{a^{n+1}}\frac{\partial Y^{(n)}}{\partial a} P - \frac{1}{a^{2n+3}}\int_{a_0}^{a} \delta \cdot dp\, \frac{\partial}{\partial p}\left(Y^{(n)} p^{n+3}\right) = 0,$$

wo Kürze halber

$$P = \int_{a_0}^{a} \delta p^2\, dp, \quad \frac{dP}{da} = \delta \cdot a^2$$

gesetzt ist. In dem letzten Ausdrucke ist noch $Y^{(n)}$ unter dem Integralzeichen; multiplicirt man daher mit $a^{2n+3}$ und differenzirt neuerdings, so folgt

$$\frac{\partial^2 Y^{(n)}}{\partial a^2} + 2\,\frac{\delta a^2}{P}\,\frac{\partial Y^{(n)}}{\partial a} + 2\,\frac{\delta a\left(1 - \dfrac{(n+1)n}{2\delta a^2} P\right)}{P}\, Y^{(n)} = 0. \tag{3}$$

Durch die Integration treten zwei willkürliche Functionen von $\theta$ und $\omega$ ein; die eine bestimmt sich aus der Function $Z'^{(n)}$, die zweite dadurch, dass die $Y^{(n)}$ für eine gewisse Niveaufläche (Oberfläche eines festen Kernes) bestimmt sind. Ist jedoch kein fester Kern vorhanden, so scheint es, als ob dadurch eine Unbestimmtheit entstehen würde. Zunächst ist dann zu beachten, dass ein leerer Hohlraum, wie er innerhalb eines festen Körpers wohl denkbar ist, in Folge des Druckes der äusseren Massen, nicht entstehen kann. Es wird daher $a_0 = 0$ zu setzen sein. Weiter ist zu beachten, dass in Gleichung (3) die $Y^{(n)}$ Kugelfunctionen sind, die auch von $a$ abhängig sind (von Schichte zu Schichte variiren). Da aber nur partielle Differentialquotienten nach $a$ vorkommen, so wird der Differentialgleichung genügt, wenn man setzt:

$$Y^{(n)} = h^{(n)} X^{(n)}, \tag{4}$$

wo $X^{(n)}$ Kugelfunctionen sind, die von $a$ unabhängig sind, und $h^{(n)}$ nur von $a$ abhängt. Dann wird

$$\frac{d^2 h^{(n)}}{da^2} + 2\,\frac{\delta a^2}{P}\,\frac{dh^{(n)}}{da} + \left(\frac{2\delta a^2}{P} - n(n+1)\right)\frac{h^{(n)}}{a^2} = 0. \tag{5}$$

Für eine homogene Masse ist[1] $P = \frac{1}{3}\delta a^3$. Nun ist $\delta$ die Dichte, welche

---

[1]) Der LAPLACE'sche Beweis, in dem neueren »Traité de mécanique céleste« von TISSERAND fast unverändert reproducirt, ist, wie man leicht sieht, unrichtig. LAPLACE wird auf die Gleichung geführt:

$$\frac{\partial Y'^{(1)}}{\partial a} = \frac{c a^2}{\left[\int_{a_0}^{a} \delta p^2\, dp\right]^2}. \tag{α}$$

an der äussersten betrachteten Niveauschicht von dem Parameter $a$ stattfindet. Da in allen Fällen durch den äusseren Druck eine Dichtezunahme gegen das Innere zu stattfinden wird, und erfahrungsgemäss auch stattfindet, so wird

$$P > \frac{1}{8}\delta a^2, \quad \frac{\delta a^2}{8P} < 1.$$

Sei also

$$\frac{\delta a^2}{8P} = 1 - F(a), \tag{6}$$

so wird

$$\frac{d^2 h^{(n)}}{da^2} + \frac{6}{a}\left[1 - F(a)\right]\frac{dh^{(n)}}{da} + \left[6\left\{1 - F(a)\right\} - n(n+1)\right]\frac{h^{(n)}}{a^2} = 0. \tag{7}$$

Es wird nun $h^{(n)}$ in der Form vorausgesetzt:

$$h^{(n)} = \eta_n a^s + \eta_n' a^{s'} + \ldots\ldots, \tag{8}$$

wobei $\eta_n, \eta_n' \ldots s, s' \ldots$ von $a$ unabhängige Unbekannte sind. Dann geht die Gleichung (7) über in:

$$\begin{aligned}(s + n + 3)(s - n + 2)\eta_n a^{s-2} + (s' + n + 3)(s' - n + 2)\eta_n' a^{s'-2} + \ldots \\ = 6F(a)\left[(s+1)\eta_n a^{s-2} + (s'+1)\eta_n' a^{s'-2} + \ldots\ldots\right].\end{aligned} \tag{7a}$$

---

Er setzt nun $\delta$ in der Form voraus: $\delta = \alpha - \beta p^{\varkappa} + \gamma p^{\lambda} + \ldots$, wo $\beta$ negativ angenommen ist, um dem Umstande Rechnung zu tragen, dass gegen das Innere zu eine Zunahme der Dichte stattfinden muss. Für positive $\varkappa$, $\lambda$, .. wird nun die niedrigste im Nenner auftretende Potenz von $a$ die sechste, daher würde $\frac{\partial Y'(1)}{\partial a}$ für $a = 0$ unendlich, wenn nicht $\epsilon = 0$ ist. Hieraus schliesst LAPLACE, dass $\frac{\partial Y'(1)}{\partial a} = 0$, $Y' = \epsilon_1$ constant, also, da es für eine gegebene Fläche (die Oberfläche des Kernes) gleich Null ist, wenn man den Schwerpunkt als Ursprung wählt, dass $Y'(1)$ für sämmtliche Schichten Null ist, d. h., dass die Schwerpunkte sämmtlicher Schichten zusammenfallen. Zunächst kann nun aber $\delta$ dennoch eine gebrochene Function sein, wenn nur die Unendlichkeitspunkte ausserhalb der Integrationsgrenzen 0 und $a_1$ fallen, da für die Rechnung nur der Verlauf der Dichte innerhalb der Integrationsgrenzen (des mit Masse gefüllten Raumes) von Belang ist. In dem Punkte $p = 0$ selbst wäre ausserdem eine Ausnahme zulässig. Wäre in der That der Nullpunkt ein Unstetigkeitspunkt zweiter Ordnung, also

$$\delta = \alpha + \frac{\beta}{p} + \frac{\gamma}{p^2}, \tag{$\beta$}$$

so wäre

$$\int_0^a \delta p^2 dp = \frac{1}{3}\alpha a^3 + \frac{1}{2}\beta a^2 + \gamma a, \tag{$\gamma$}$$

also endlich. Eine nicht homogene Kugel, deren Dichte nach dem Innern zu nach dem Gesetze ($\beta$) zunehmen würde, würde daher allerdings im Mittelpunkte selbst eine unendliche Dichte haben, aber in einem unendlich kleinen Volumelement, die Masse dieser Kugel (das mit $4\pi$ multiplicirte Integral $\gamma$) wäre thatsächlich endlich. In ($\alpha$) tritt nun das Quadrat des Integrals ($\gamma$) auf; wenn daher nicht $\alpha$, $\beta$ Null wären, so wird der Nenner mindestens $a^4$ enthalten, demnach $\frac{\partial Y(1)}{\partial a}$ unendlich werden. Ist aber $\alpha = \beta = 0$, also

$$\delta = \gamma p^{-2}, \tag{$\beta'$}$$

so würde

$$\frac{\partial Y'(1)}{\partial a} = \frac{\epsilon}{\gamma^2}; \quad Y'(1) = \frac{\epsilon}{\gamma^2}(a - a_1), \tag{$\delta$}$$

wobei die Integrationsconstante $\frac{\epsilon a_1}{\gamma^2}$ ist, da für $a = a_1$: $Y'(1)$ verschwindet. Dann würde aber $Y'(1)$ nicht für alle Schichten verschwinden, d. h. die Schwerpunkte der Schichten fielen nicht mit dem Schwerpunkte der ganzen Masse zusammen. In diesem Falle würde nun aber der Unstetigkeitspunkt $p = 0$ innerhalb des Bereiches innerhalb dessen die Schwerpunkte der sämmtlichen Schichten liegen unbestimmt. Den Mangel dieses Beweises hat zuerst RÉSAL erkannt, und statt desselben den im Text angeführten gegeben.

Denkt man sich nun $F(a)$ in derselben Weise entwickelt, wie $h^{(n)}$, so wird man durch Vergleiche der gleichhohen Potenzen in (7a) Beziehungen zwischen den Exponenten $s$ in $h^{(n)}$ und denjenigen in $F(a)$ ableiten können. In $F(a)$ kann aber eine Constante nicht auftreten, da $F(0) = 0$ ist. Da weiters von den Exponenten $s$, $s'$ ... alle wesentlich positiv sein müssen, weil sonst $h^{(n)}$ also $Y^{(n)}$ unendlich würde, so kann, wenn man von $s$ ausgeht, weder $s+1$ noch $s+n+3$ verschwinden; es wird daher $s-n+2=0$,

$$s = n-2, \quad h^{(n)} = \eta_n a^{n-2} + \eta_n' a^{s'} + \ldots$$

Für $n = 1$ würde

$$h^{(1)} = \frac{\eta_1}{a}, \qquad Y^{(1)} = \frac{\eta_1}{a} X^{(1)},$$

demnach $Y^{(1)}$ für $a = 0$ unendlich. Es muss daher $\eta_1 = 0$, demnach $Y^{(1)} = 0$ sein: die Schwerpunkte sammtlicher Schichten fallen zusammen. Für $n \geqq 2$ haben $h^{(n)}$ und $\frac{dh^{(n)}}{da}$ die Eigenschaft vom Mittelpunkte aus beständig positiv und wachsend zu sein. So lange dieses der Fall ist, muss auch $\frac{d^2h^{(n)}}{da^2}$ positiv sein; in der Gleichung

$$\frac{d^2h^{(n)}}{da^2} = \left[n(n+1) - 6\{1-F(a)\}\right]\frac{h^{(n)}}{a^2} - \frac{6}{a}[1-F(a)]\frac{dh^{(n)}}{da}$$

ist aber für $n \geqq 2: n(n+1) > 6$, daher a fortiori $> 6[1-F(a)]$, demnach der Coëfficient von $h^{(n)}$ und ebenso der von $\frac{dh^{(n)}}{da}$ stets positiv. Wenn nun $h^{(n)}$ und $\frac{dh^{(n)}}{da}$ für irgend einen Werth von $a$ noch positiv sind, so kann $h^{(n)}$ nur dann anfangen abzunehmen, wenn $\frac{dh^{(n)}}{da}$ zuerst null und dann negativ wird, also selbst abnimmt, während negativen Werthen von $\frac{dh^{(n)}}{da}$ nothwendig positive Werthe von $\frac{d^2h^{(n)}}{da^2}$ entsprechen, für welche aber $\frac{dh^{(n)}}{da}$ wachsen sollte. Es werden daher $h^{(n)}$ und $\frac{dh^{(n)}}{da}$, wenn sie für irgend einen Werth von $a$ positiv sind, beständig wachsen.

Sei nun $F(a)$ nach steigenden positiven Potenzen von $a$ entwickelt[1]):

$$6F(a) = \alpha a^{\lambda} + \alpha' a^{\lambda'} + \ldots, \tag{9}$$

so wird

$$\begin{aligned}(s'+n+3)(s'-n+2)\eta_n' a^{s'-2} + (s''+n+3)(s''-n+2)\eta_n'' a^{s''-2} + \ldots \\ = \alpha(s+1)\eta_n a^{\lambda+s-2} + \alpha(s'+1)\eta_n' a^{\lambda+s'-2} + \alpha(s''+1)\eta_n'' a^{\lambda+s''-2} + \\ + \alpha'(s+1)\eta_n a^{\lambda'+s-2} + \alpha'(s'+1)\eta_n' a^{\lambda'+s'-2} + \alpha''(s''+1)\eta_n a^{\lambda'+s''-2} + \ldots\end{aligned}$$

und hieraus zunächst:

$$s' = \lambda + s = \lambda + n - 2; \quad \eta_n' = \frac{\alpha(n-1)}{\lambda(\lambda+2n+1)}\eta_n.$$

Der Werth von $s''$ wird bedingt durch den Werth von $\lambda'$; die Entwickelung von $h^{(n)}$ ebenso wie von $F(a)$ ist nach steigenden Potenzen vorausgesetzt. Jenachdem daher

$$\lambda + s' - 2 \lesseqgtr \lambda' + s - 2, \quad \text{d. h.} \quad \lambda' \gtreqless 2\lambda,$$

[1]) Hier dürfen negative Potenzen nicht auftreten, da $F(a)$ für $a = 0$ verschwinden muss.

ist, wird $s'' - 2$ gleich $\lambda + s' - 2$ oder $\lambda' + s - 2$, d. h. $s''$ gleich $2\lambda + n - 2$ oder $\lambda' + n - 2$. Ist[1] $\lambda' = 2\lambda$, so wird

$$s'' = 2\lambda + n - 2;$$

$$\eta_n'' = \frac{(n-1)(\lambda+n-1)\alpha^2}{1\cdot 2\lambda^2(\lambda+2n+1)(2\lambda+2n+1)}\,\eta_n + \frac{(n-1)\alpha'}{2\lambda(2\lambda+2n+1)}\,\eta_n.$$

In derselben Weise $\lambda''' = 3\lambda$ annehmend, folgt $s''' = 3\lambda + n - 2$ u. s. w. Die Constante $\eta_n$ tritt überall als Faktor auf, und kann daher gleich 1 gesetzt werden, indem sie mit den Constanten von $X^{(n)}$ vereinigt gedacht wird, und es wird:

$$\eta_n = 1, \quad \eta_n' = \frac{(n-1)}{(\lambda+2n+1)}\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right);$$

$$\eta_n'' = \frac{(n-1)(\lambda+n-1)}{1\cdot 2(\lambda+2n+1)(2\lambda+2n+1)}\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 + \frac{(n-1)}{(2\lambda+2n+1)}\left(\frac{\alpha'}{2\lambda}\right) \qquad (10)$$

$$\eta_n''' = \frac{(n-1)(\lambda+n-1)(2\lambda+n-1)}{1\cdot 2\cdot 3(\lambda+2n+1)(2\lambda+2n+1)(3\lambda+2n+1)}\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^3 +$$

$$+ \frac{(n-1)}{3(3\lambda+2n-1)}\left[\frac{(2\lambda+n-1)}{(2\lambda+2n+1)} + \frac{(2\lambda+2n-2)}{(\lambda+2n+1)}\right]\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)\left(\frac{\alpha'}{2\lambda}\right) + \frac{(n-1)}{(3\lambda+2n+1)}\left(\frac{\alpha''}{3\lambda}\right).$$

Kann man $\alpha'$, $\alpha''$ ... in der Entwickelung von $R(a)$ vernachlässigen, so wird:

$$h^{(n)} = a^{n-2}\left[1 + \frac{(n-1)}{(\lambda+2n+1)}\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)a^{\lambda} + \right. \qquad (11)$$

$$\left. + \frac{(n-1)(\lambda+n-1)}{1\cdot 2(\lambda+2n+1)(2\lambda+2n+1)}\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 a^{2\lambda} + \dots\right].$$

Im Allgemeinen wird es genügen, bei der Attraction sehr entfernter Körper sich auf das erste Glied $\frac{m_i}{\rho_i^3}P_i^{(2)}$ zu beschranken. Dann wird

$$Z^{(3)} = Z^{(4)} = \dots = 0.$$

Lässt man diese Glieder in der zweiten Gleichung (1) weg, und ersetzt $Y^{(n)}$ durch $h^{(n)}X^{(n)}$, so folgt für $n \gtreqless 3$:

$$-h^{(n)}X^{(n)}\int_0^a \delta\frac{\partial a^3}{\partial a}\,da + \frac{3}{(2n+1)a^n}\int_0^a \delta\frac{\partial}{\partial a}\left(a^{n+3}h^{(n)}X^{(n)}\right)da +$$

$$+ \frac{3a^{n+1}}{2n+1}\int_a^{a_1}\delta\,da\,\frac{\partial}{\partial a}\,\frac{h^{(n)}X^{(n)}}{a^{n-2}} = 0,$$

wobei $X^{(n)}$, da es von $a$ unabhängig ist (blos $\theta$ und $\omega$ enthält) auch vor das Integral gesetzt werden kann. Wendet man diese Gleichung auf die Oberfläche selbst an $(a = a_1)$, so verschwindet das letzte Integral, und es wird, wenn $H^{(n)}$ den Werth von $h^{(n)}$ für die Oberfläche bedeutet:

$$\left[(2n+1)a_1^n H^{(n)}\int_0^{a_1}\delta\,da^3 - 3\int_0^{a_1}\delta\frac{\partial}{\partial a}\left(a^{n+3}h^{(n)}\right)da\right]X^{(n)} = 0.$$

Durch theilweise Integration der beiden Integrale folgt:

$$\left[(2n+1)a_1^n H^{(n)}\left(\delta a_1^3 - \int_0^{a_1} a^3\frac{d\delta}{da}\,da\right) - 3\left(a_1^{n+3}H^{(n)}\delta - \int_0^{a_1} a^{n+3}h^{(n)}\frac{d\delta}{da}\,da\right)\right]X^{(n)} = 0$$

oder, entsprechend reducirt:

---

[1] Da das Anfangsglied der Reihe für $1 - R(a)$ die Einheit ist, so wird der allgemeinste Fall der Entwickelung $\lambda' = n\lambda$, wobei $n$ eine ganze Zahl ist; dabei kann $\lambda$ ganz oder gebrochen sein; vergl. z. B. Königsberger »Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen«, I. Theil, pag. 109 und 137.

$$\left[2(n-1)H^{(n)}\delta - \int_0^{a_1}\left\{\left(\frac{p}{a_1}\right)^2\cdot(2n+1)H^{(n)} - \left(\frac{p}{a_1}\right)^{n+3}\cdot 3h^{(n)}\right\}\frac{d\delta}{dp}dp\right]X^{(n)} = 0.$$

$\delta$ und $h^{(n)}$ sind stets positiv, $\frac{d\delta}{dp}$ negativ, weil die Dichte mit wachsendem $p$ abnimmt, und $h^{(n)} < H^{(n)}$, weil $h^{(n)}$ eine nach aussen beständig wachsende Function ist. Da weiter $\frac{p}{a_1} < 1$ ist, so wird:

$$\left(\frac{p}{a_1}\right)^2 > \left(\frac{p}{a_1}\right)^{n+3}$$
$$H^{(n)} > h^{(n)}$$
$$2n+1 > 3 \quad \text{für} \quad n \geqq 2,$$

daher der Klammerausdruck unter dem Integral positiv und da $\frac{d\delta}{dp}$ negativ ist, so wird der Faktor von $X^{(n)}$ für $n \geqq 2$ aus zwei positiven Gliedern bestehen, und kann daher nicht verschwinden. Mit verschwindendem $Z^{(n)}$ muss also auch $X^{(n)} = 0$ sein, und der Radiusvector irgend einer Schicht wird von der Form

$$r = p(1 + \alpha Y^{(0)} + \alpha Y^{(2)}). \tag{12}$$

Zur Bestimmung von $Y^{(2)}$ hat man, wenn man wieder $Y^{(2)} = h^{(2)} X^{(2)}$ setzt:

$$X^{(2)}\left(-h^{(2)}\int_0^{a_1}\delta p^2\,dp + \frac{1}{5a^2}\int_0^{a}\delta\frac{\partial}{\partial p}(p^5 h^{(2)})\,dp + \tfrac{1}{5}a^2\int_a^{a_1}\delta\,dp\frac{\partial h^{(2)}}{\partial p}\right) + \frac{a^2}{4\pi}Z^{(2)} = 0.$$

Für die Oberfläche ergiebt sich hieraus

$$\alpha X_1^{(2)} = \frac{\frac{a_1^3}{4\pi}\alpha Z^{(2)}}{H^{(2)}\int_0^{a_1}\delta p^2 dp - \frac{1}{5a_1^2}\int_0^{a_1}\delta\frac{\partial(p^5 h^{(2)})}{\partial p}dp}$$

oder

$$\alpha X_1^{(2)} = \frac{\frac{a_1^3}{4\pi}\,\frac{\alpha Z^{(2)}}{\int_0^{a_1}\delta p^2 dp}}{H^{(2)} - \frac{1}{5a_1^2}\,\frac{\int_0^{a_1}\delta\frac{\partial(p^5 h^{(2)})}{\partial p}dp}{\int_0^{a_1}\delta p^2 dp}} \tag{13}$$

Sieht man von der Attraction der entfernten Weltkörper ganz ab, so wird

$$\alpha Z^{(2)} = -\tfrac{1}{2}w^2(\mu^2 - \tfrac{1}{3}).$$

Setzt man dann

$$\frac{a_1^3}{4\pi\int_0^{a_1}\delta p^2 dp} = \mathfrak{b};\quad h = \frac{\mathfrak{b}}{2H^{(2)} - \frac{2}{5a_1^2}\,\frac{\int_0^{a_1}\delta\frac{\partial(p^5 h^{(2)})}{\partial p}dp}{\int_0^{a_1}\delta p^2 dp}}, \tag{14}$$

so wird.

$$\alpha X_1^{(2)} = -hw^2(\mu^2 - \tfrac{1}{3})$$
$$r_1 = a_1[1 + \alpha Y_1^{(0)} - hw^2(\mu^2 - \tfrac{1}{3})H^{(2)}].$$

Die Unbestimmtheit von $Y_1^{(0)}$ gestattet noch

$$\alpha Y_1^{(0)} = \tfrac{1}{3}\cdot kH^{(\lambda)}w^2$$

zu setzen[1]) und dann wird

$$\begin{aligned} r_1 &= a_1[1 - kH^{(2)}w^2(\mu^2 - 1)] \\ &= a_1(1 + kH^{(2)}w^2 \sin^2\theta). \end{aligned} \tag{15}$$

Dabei ist

$$H^{(2)} = 1 + \frac{1}{\lambda + 3}\left(\frac{\alpha a^\lambda}{\lambda}\right) + \frac{1\cdot\lambda}{1\cdot 2(\lambda+3)(2\lambda+3)}\left(\frac{\alpha a^\lambda}{\lambda}\right)^2 + \ldots,$$

daher für sehr kleine Werthe von $\alpha$ [Formel (9)] gleich 1 zu setzen. Die hierdurch bestimmte Figur wird manchmal vorzugsweise als »Rotationssphäroid« bezeichnet. Ihr Meridianschnitt ist eine der Ellipse ähnliche Figur mit den beiden Halbaxen $a_1(1 + kH^{(2)}w^2)$ und $a_1$. Die Abplattung ist daher

$$\mathfrak{a} = kH^{(2)}w^2 = \frac{\mathfrak{b}w^2}{2 - \dfrac{2}{5a_1^2 H^{(2)}}\dfrac{\int_0^{a_1} \delta\dfrac{\partial(p^5 h^{(2)})}{\partial p}dp}{\int_0^{a_1}\delta p^2 dp}} \tag{16}$$

wobei $\mathfrak{b}w^2$ die früher mit $\mathfrak{b}$ bezeichnete Grösse ist. Für constante Dichten folgt hieraus $\mathfrak{a} = \frac{5}{4}\mathfrak{b}$ (übereinstimmend mit dem Resultate 86 (14). Da sich zeigen lässt, dass das zweite Glied des Nenners nicht negativ werden kann, und nicht grösser als für constante $\delta$, so sind

$$\mathfrak{a} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{b} \quad \text{und} \quad \mathfrak{a} = \tfrac{5}{4}\mathfrak{b}$$

die Grenzen zwischen denen $\mathfrak{a}$ jedenfalls enthalten sein muss.

89. Figur der Satelliten. Bei den Satelliten ist die Anziehung der Hauptplaneten nicht zu vernachlässigen; es ist dann

$$\begin{aligned} \alpha Z^{(2)} &= -\tfrac{1}{2}w^2(\mu^2 - \tfrac{1}{3}) + \\ &+ \frac{m_1}{\rho_1^3}[\tfrac{3}{2}(\mu^2 - \tfrac{1}{3})(\mu_1^2 - \tfrac{1}{3}) + 3\mu\sqrt{1-\mu^2}\mu_1\sqrt{1-\mu_1^2}\cos(\omega - \omega_1) + \\ &+ \tfrac{3}{4}(1-\mu^2)(1-\mu_1^2)\cos 2(\omega - \omega_1)]. \end{aligned} \tag{1}$$

$\omega_1$, und $\theta_1$ oder $\mu_1$ bestimmen dabei die Lage des anziehenden Punktes. Für die in der Natur vorkommenden Fälle kann man sich auf zwei Annahmen beschränken.

a) Im allgemeinen befindet sich der Satellit nahe im Aequator des Hauptplaneten; es ist also $\theta_1 = 90°$, $\mu_1 = 0$, folglich

$$\alpha Z^{(2)} = -\tfrac{1}{2}w^2(\mu^2 - \tfrac{1}{3}) - \tfrac{1}{2}\frac{m_1}{\rho_1^3}(\mu^2 - \tfrac{1}{3}) + \tfrac{3}{4}\frac{m_1}{\rho_1^3}(1-\mu^2)\cos 2(\omega - \omega_1).$$

Führt man wieder die früheren Grössen $\mathfrak{b}$, $k$ ein, so wird

$$\alpha X_1^{(2)} = -k\left(w^2 + \frac{3m_1}{2\rho_1^3}\right)(\mu^2 - \tfrac{1}{3}) - k\cdot\tfrac{3}{2}\frac{m_1}{\rho_1^3}(\mu^2 - 1)\cos 2(\omega - \omega_1) \tag{2}$$

und wenn man über die Constante $Y_1^{(0)}$ so verfügt, dass

$$\alpha Y_1^{(0)} = \tfrac{1}{3}k\left(w^2 + \frac{3m_1}{2\rho_1^3}\right)H^{(2)}$$

ist, so wird

[1]) Wenn $Y_1(0) = 0$ wäre, so wäre $a_1$ der Halbmesser der Kugel gleichen Inhaltes. Bei der hier getroffenen Wahl von $Y_1(0)$ wird, wie aus Formel (15) hervorgeht, $a_1$ der Halbmesser der eingeschriebenen Kugel.

$$r_1 = a_1\left[1 - kH^{(2)}\left(w^2 + \frac{3m_1}{2\rho_1^3}\right)(\mu^2 - 1) - kH^{(2)}\cdot\frac{3}{2}\frac{m_1}{\rho_1}(\mu^2 - 1)\cos 2(\omega - \omega_1)\right]$$

oder

$$r_1 = a_1\left[1 - kH^{(2)}\left\{\left(w^2 + \frac{3m_1}{2\rho_1^3}\right) + \frac{3m_1}{2\rho_1^3}\cos 2(\omega - \omega_1)\right\}(\mu^2 - 1)\right]. \qquad (8)$$

Hieraus erhält man: für die Rotationsaxe: $\theta = 0$, $\mu = 1$ die Länge $a_1$; für den Aequatorradius in der Richtung zum anziehenden Hauptplaneten: $\theta = 90°$, $\mu = 0$, $\omega - \omega_1 = 0$ oder $180°$:

$$1 + kH^{(2)}\left(w^2 + \frac{3m_1}{\rho_1^3}\right);$$

für den Aequatorradius in der dazu senkrechten Richtung: $\theta = 90°$, $\mu = 0$, $\omega - \omega_1 = 90°$ oder $270°$:

$$1 + kH^{(2)}w^2.$$

Die Figur des Himmelskörpers wird daher die eines dreiaxigen Ellipsoides, dessen längste Axe gegen den Hauptplaneten zu gerichtet ist. Die Abplattung der Aequatorellipse wird $\frac{3m_1}{\rho_1^3}kH^{(2)}$, diejenige der Meridianellipse in der zur Verbindungslinie des Satelliten und Hauptplaneten senkrechten Richtung $kH^{(2)}w^2$; das Verhältniss dieser Abplattungen ist daher

$$\frac{3m_1}{\rho_1^3 w^2}.$$

Nun ist

$$\frac{m_1}{\rho_1^3} = \frac{1}{T^2},$$

wenn $T$ die Umlaufszeit des Satelliten um seinen Hauptplaneten ist, und

$$w = \frac{2\pi}{t},$$

wenn $t$ die Rotationszeit des Satelliten ist; das Verhältniss der Abplattungen wird daher

$$\frac{3}{4\pi^2}\left(\frac{t}{T}\right)^2.$$

Für den Erdmond ist $t = T$, daher die Abplattung der Aequatorellipse etwa $\frac{1}{13}$ derjenigen der Meridianellipse und zwar bleibend, in der Art, dass die grösste Axe des Mondkörpers stets gegen die Erde zu gerichtet ist. Für die Hauptplaneten gelten natürlich dieselben Formeln. Für die Erde ist z. B. $T = 365{\cdot}25\,t$, demnach die Abplattung der Aequatorellipse

$$\frac{3}{4\pi^2(365{\cdot}25)^2} = \frac{1}{177605}$$

derjenigen der Meridianellipse also verschwindend. Ueberdiess wäre diese Abplattung stets gegen die Sonne zu gerichtet (in der Richtung $\omega - \omega_1 = 0$), würde also eine veränderliche Gestalt des Erdkörpers eine (allerdings ganz unmerkliche) Fluthbewegung mit täglicher Periode erzeugen.

b) Wesentlich schwieriger gestalten sich die Untersuchungen über die Gestalt des Saturnringes, die auch an dieser Stelle zu erwähnen sind. Die erste Theorie derselben rührt von Laplace her. Er nimmt ihn als aus einer grösseren Anzahl von Ringen bestehend an, von denen jeder durch die Rotation einer sehr gestreckten Ellipse um eine ausserhalb derselben parallel zu ihrer kleinen Axe liegenden Geraden entsteht (elliptischer Wulstring). In der That giebt dies eine Gleichgewichtsfigur; doch hat schon Laplace erkannt, dass diese sowie jede reguläre Figur des Saturnringes nur eine labile Gleichgewichtsfigur sein kann. Die geringste äussere Kraft, und deren sind ja schon durch die Attraction

der Himmelskörper thatsächlich vorhanden, müsste bewirken, dass der Ringmittelpunkt sich von dem Saturnsmittelpunkt entfernt, so dass der Ring sich schliesslich mit dem Saturn vereinigen müsste. Dieses gilt sowohl, wenn der Ring einfach, als auch, wenn er aus zwei oder mehreren derartigen stark abgeplatteten ringförmigen Körpern besteht. S. v. KOWALEWSKY nahm die Frage so auf, dass sie den Querschnitt des Ringes in einer durch den Saturnsmittelpunkt gehenden Ebene so zu bestimmen suchte, dass stabiles Gleichgewicht bestehe. Diese, sowie die Untersuchungen MAXWELL's über einen continuirlich mit Masse belegten Ring führten jedoch zu keinem befriedigenden Resultate, weshalb sich MAXWELL zu der Annahme veranlasst fand, dass der Ring aus discreten Massentheilchen bestehe, die sich wie eine grosse Reihe von Satelliten um den Saturn bewegen, eine Annahme, die u. a. auch darin eine Stütze findet, dass in ähnlicher Weise die kleinen Planeten einen ringförmigen Gürtel dieser Constitution um die Sonne zu bilden scheinen. Die Untersuchung der Bewegung discreter Massen bietet aber selbstverständlich besondere Schwierigkeiten durch den Umstand dar, dass man über die Anordnung der Massen keine auch nur durch die geringste Erfahrungsthatsache gestützte Hypothese machen kann. Erleichtert werden allerdings die analytischen Operationen durch den Umstand, dass es sich nicht um die Bewegung der einzelnen Satelliten handelt, sondern um den Gesammteffekt, den die jeweilige Anordnung der Massen in ihren Bahnen als Ring übt. Insofern ist es möglich, aber durchaus nicht erwiesen, dass vereinfachende Annahmen, welche die Behandlung wesentlich erleichtern, zu richtigen Resultaten führen[1]. Annahmen dieser Art, zu denen MAXWELL seine Zuflucht nimmt, sind: Gleichheit der Massen der einzelnen Partikelchen, specielle, regelmässige Anordnung derselben für den Anfangszustand u. s. w. Aber selbst unter diesen Voraussetzungen unterliegt die Untersuchung noch bedeutenden Schwierigkeiten.

Dass der Ring nicht aus einer zusammenhängenden, mit durchaus derselben Geschwindigkeit rotirenden Masse besteht, wurde erst neuerdings von KEELER auf spectroskopischem Wege nachgewiesen[2], indem es ihm gelang, bei den verschiedenen Punkten des Ringes verschiedene Rotationsgeschwindigkeiten nachzuweisen, woraus allerdings noch nicht gefolgert werden darf, dass der Ring aus getrennten Körpern besteht, wohl aber, dass er mindestens aus mehreren ineinander liegenden, selbstständig von einander rotirenden Ringen besteht[3].

**90.** Die Differentialgleichungen der Rotationsbewegung. Handelt es sich um die Bewegung eines Massencomplexes, so wird nebst der Translationsbewegung seines Schwerpunktes auch noch seine Rotationsbewegung zu untersuchen sein. Die hierfür geltenden Differentialgleichungen sind in rechtwinkeligen Coordinaten:

$$\begin{aligned}\Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)&=\Sigma(xY-yX)\\ \Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)&=\Sigma(yZ-zY)\qquad(1)\\ \Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)&=\Sigma(zX-xZ).\end{aligned}$$

Die Anzahl der veränderlichen Coordinaten $x$, $y$, $z$ ist hier gleich dreimal der Anzahl der beweglichen Punkte, also für eine continuirliche Masse unendlich

[1] Vergl. auch den Artikel »Planeten«.
[2] Astrophys. Journal, I. Bd., pag. 416.
[3] Vergl. SEELIGER, »Astron. Nachrichten«, Bd. 138, pag. 99.

gross. Zwischen denselben bestehen aber, wenn es sich um die Rotation von starren Körpern handelt, gewisse Beziehungen, so dass im Ganzen doch nur eine endliche Anzahl von von einander ganz unabhängig Veränderlichen bleibt. Um auf diese überzugehen, wird es am besten, ein in dem Körper festes Axensystem zu wählen, den Körper auf dieses zu beziehen, und die Bewegung des Axensystems zu untersuchen; hiermit ist auch die Zahl[1]) der unter allen Fällen nothwendigen und hinreichenden von einander völlig unabhängigen Veränderlichen bestimmt.

Der Uebergang auf dieses Axensystem wird durch die Formeln 8 (1) geleistet, in denen daher die Coordinaten $x'$, $y'$, $z'$ als constant anzusehen und nur die Richtungscosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \ldots \gamma_3$ veränderlich sind. Man hat daher

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x'\frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + y'\frac{d^2\beta_1}{dt^2} + z'\frac{d^2\gamma_1}{dt^2}$$

und ebenso für $y$, $z$. Führt man die Werthe für $x, y, z, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ in (1) ein, und berücksichtigt, dass die Transformation der Kraftcomponenten in derselben Weise vorgenommen wird, wie diejenige der Coordinaten, dass also, wenn $X'$, $Y'$ $Z'$ die Componenten der auf den Punkt $x, y, z$ wirkenden Kraft, bezogen auf die im Körper festen Axen sind:

$$X = \alpha_1 X' + \beta_1 Y' + \gamma_1 Z'$$

ist, so folgt

$$\Sigma m\left\{(\alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z')\left(x'\frac{d^2\alpha_2}{dt^2} + y'\frac{d^2\beta_2}{dt^2} + z'\frac{d^2\gamma_2}{dt^2}\right) - \right.$$
$$\left. - (\alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z')\left(x'\frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + y'\frac{d^2\beta_1}{dt^2} + z'\frac{d^2\gamma_1}{dt^2}\right)\right\} =$$
$$= \Sigma\{(\alpha_1x'+\beta_1y'+\gamma_1z')(\alpha_2X'+\beta_2Y'+\gamma_2Z') - (\alpha_2x'+\beta_2y'+\gamma_2z')(\alpha_1X'+\beta_1Y'+\gamma_1Z')\}$$

und ebenso aus den beiden andern. Hierin bezieht sich die Summation auf die Coordinaten $x'$, $y'$, $z'$ und auf die Kräfte $X'$, $Y'$, $Z'$, während die Richtungscosinus $\alpha_1, \beta_1, \ldots \gamma_3$ für alle Punkte dieselben sind. Diese, sowie ihre Differentialquotienten können daher bei der Summation vor das Summenzeichen gesetzt werden. Löst man daher die Klammern unter dem $\Sigma$ auf, so erhält man links Ausdrücke mit den Coëfficienten $\Sigma m x'^2$, $\Sigma m y'^2$, $\Sigma m z'^2$, $\Sigma m x'y'$, $\Sigma m y'z'$, $\Sigma m x'z'$. Ueber die Lage des neuen Axensystemes war bisher keine weitere Verfügung getroffen worden, als die, dass es in dem Korper fest sei. Wählt man es nunmehr so, dass die drei Coordinatenaxen mit den Hauptträgheitsaxen zusammenfallen, so werden die drei letzten Summen verschwinden. Löst man auch die rechts stehenden Ausdrücke auf, und berücksichtigt die Gleichungen 8 (8), (9), (10), so erhält man

$$\left(\alpha_2\frac{d^2\alpha_3}{dt^2} - \alpha_3\frac{d^2\alpha_2}{dt^2}\right)\Sigma m x'^2 + \left(\beta_2\frac{d^2\beta_3}{dt^2} - \beta_3\frac{d^2\beta_2}{dt^2}\right)\Sigma m y'^2 +$$
$$+\left(\gamma_2\frac{d^2\gamma_3}{dt^2} - \gamma_3\frac{d^2\gamma_2}{dt^2}\right)\Sigma m z'^2 = \alpha_1\Sigma(y'Z'-z'Y')+\beta_1\Sigma(z'X'-x'Z')+\gamma_1\Sigma(x'Y'-y'X')$$

$$\left(\alpha_3\frac{d^2\alpha_1}{dt^2} - \alpha_1\frac{d^2\alpha_3}{dt^2}\right)\Sigma m x'^2 + \left(\beta_3\frac{d^2\beta_1}{dt^2} - \beta_1\frac{d^2\beta_3}{dt^2}\right)\Sigma m y'^2 +$$
$$+\left(\gamma_3\frac{d^2\gamma_1}{dt^2} - \gamma_1\frac{d^2\gamma_3}{dt^2}\right)\Sigma m z'^2 = \alpha_2\Sigma(y'Z'-z'Y')+\beta_2\Sigma(z'X'-x'Z')+\gamma_2\Sigma(x'Y'-y'X').$$

$$\left(\alpha_1\frac{d^2\alpha_2}{dt^2} - \alpha_2\frac{d^2\alpha_1}{dt^2}\right)\Sigma m x'^2 + \left(\beta_1\frac{d^2\beta_2}{dt^2} - \beta_2\frac{d^2\beta_1}{dt^2}\right)\Sigma m y'^2 +$$
$$+\left(\gamma_1\frac{d^2\gamma_2}{dt^2} - \gamma_2\frac{d^2\gamma_1}{dt^2}\right)\Sigma m z'^2 = \alpha_3(y'Z'-z'Y')+\beta_3\Sigma(z'X'-x'Z')+\gamma_3\Sigma(x'Y'-y'X').$$

---

[1]) Der »Grad der Freiheit«.

Multiplicirt man diese Gleichungen mit $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ und addirt, sodann mit $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$, endlich mit $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$, führt die Trägheitsmomente $A$, $B$, $C$ nach 88 (4) und (4a) ein, und berücksichtigt die Gleichungen 2 (18) und 2 (5) bis (10), so erhalt man die EULER'sche Differentialgleichung für die Rotationsbewegung.

$$
\begin{aligned}
A\frac{dp}{dt} + (C-B)\,q\,r &= \mathfrak{L} & \mathfrak{L} &= \Sigma(y'Z' - z'Y') \\
B\frac{dq}{dt} + (A-C)\,p\,r &= \mathfrak{M} \quad (2) & \mathfrak{M} &= \Sigma(z'X' - x'Z') \qquad (3)\\
C\frac{dr}{dt} + (B-A)\,pq &= \mathfrak{N} & \mathfrak{N} &= \Sigma(x'Y' - y'X').
\end{aligned}
$$

Die Componenten der Geschwindigkeit der Bewegung für irgend einen Punkt sind gegeben durch die Ausdrücke $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$. Wenn einzelne Punkte des Massencomplexes sich in Ruhe befinden sollen, so müssen für diese die drei Geschwindigkeitscomponenten Null werden. Nach 2 (1) wird dann aber:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= x'\frac{d\alpha_1}{dt} + y'\frac{d\beta_1}{dt} + z'\frac{d\gamma_1}{dt} = 0 \\
\frac{dy}{dt} &= x'\frac{d\alpha_2}{dt} + y'\frac{d\beta_2}{dt} + z'\frac{d\gamma_2}{dt} = 0 \qquad (4)\\
\frac{dz}{dt} &= x'\frac{d\alpha_3}{dt} + y'\frac{d\beta_3}{dt} + z'\frac{d\gamma_3}{dt} = 0.
\end{aligned}
$$

Da man zur Bestimmung der Coordinaten $x'$, $y'$, $z'$ der in Ruhe befindlichen Punkte nicht mehr als drei Gleichungen hat, so wird die Lösung der Aufgabe möglich, d. h. es giebt stets solche Punkte. Multiplicirt man die Gleichungen (4) mit $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, dann mit $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$, endlich mit $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$, so erhält man an ihrer Stelle die folgenden

$$
qz' - ry' = 0; \quad rx' - pz' = 0; \quad py' - qx' = 0,
$$

von denen aber jede die Folge der beiden anderen ist, so dass sie nur zwei unabhängige Gleichungen

$$
\frac{x'}{p} = \frac{y'}{q} = \frac{z'}{r} \qquad (4a)
$$

darstellen. Es wird mithin nicht einzelne Punkte der angegebenen Eigenschaft geben, sondern sämmtliche Punkte einer Geraden $G$, welche durch die Gleichungen (4a) bestimmt ist, befinden sich zur Zeit $t$ in Ruhe; die Bewegung tritt als eine Drehung um diese Gerade auf, und man nennt diese, da sie mit $p$, $q$, $r$ also mit der Zeit veränderlich ist, die momentane oder instantane Rotationsaxe. Ihre Schnittpunkte mit der Körperoberfläche bezeichnet man als Pole (für die Erde: Erdpole und zwar Nordpol und Südpol).

Die Richtung der Rotationsaxe ist bestimmt durch ihre Richtungscosinus gegen die Hauptträgheitsaxen:

$$
\lambda_1' = \cos Gx' = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}; \qquad \lambda_2' = \cos Gy' = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}};
$$
$$
\lambda_3' = \cos Gz' = \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}. \qquad (5).
$$

Da

$$
\cos Gx = \cos Gx' \cos xx' + \cos Gy' \cos xy' + \cos Gz' \cos xz'
$$

ist, so werden die Richtungscosinus der instantanen Rotationsaxe gegen das im Raume feste Axensystem der $x$, $y$, $z$:

$$\lambda_1 = \cos Gx = \frac{\alpha_1 p + \beta_1 q + \gamma_1 r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}; \qquad \lambda_2 = \cos Gy = \frac{\alpha_2 p + \beta_2 q + \gamma_2 r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}};$$
$$\lambda_3 = \cos Gz = \frac{\alpha_3 p + \beta_3 q + \gamma_3 r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}. \tag{6}$$

Um die Rotationsgeschwindigkeit um die Axe zu bestimmen, genügt es irgend einen beliebigen Punkt zu betrachten, da ja die sämmtlichen Punkte des Körpers in starrer Verbindung sind, und daher jederzeit dieselbe Rotationsgeschwindigkeit haben müssen. Nimmt man als solchen einen Punkt der $z'$-Axe, dessen Coordinaten daher $x' = 0$, $y' = 0$, $z'$ sind, so wird die absolute Geschwindigkeit im Raume gegeben durch

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = z' \sqrt{\left(\frac{d\gamma_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2} = z' \sqrt{\Delta_3}$$

mit der Bezeichnung 2 (16). Der Abstand des betrachteten Punktes von der Rotationsaxe ist aber

$$d = z' \sin(Gz') = z' \sqrt{1 - (\cos Gz')^2} = z' \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}.$$

Daher mit Rücksicht auf 2 (20)

$$d = z' \frac{\sqrt{\Delta_3}}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}.$$

Daraus folgt nun die Winkelgeschwindigkeit $w = v : d$, also

$$w = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} \tag{7}$$

und nach (5) sind dann $p$, $q$, $r$ die Componenten der Winkelgeschwindigkeit, d. h. die Rotationsgeschwindigkeiten um die drei Axen $x'$, $y'$, $z'$, und die Zähler in (6) die Rotationsgeschwindigkeiten um die drei im Raume feststehenden Axen $x$, $y$, $z$.

91. Die Bewegung des Körpers im Raume. Die Bestimmung der $p$, $q$, $r$ aus den Differentialgleichungen 90 (2) giebt die Lage der Rotationsaxe gegenüber den Hauptträgheitsaxen im Korper selbst [Gleichungen 90 (5)], nicht aber die Lage dieser Rotationsaxe oder des Körpers im Raume. Zu diesem Zwecke ist noch die Kenntniss der Grössen $\alpha_1$, $\alpha_2$, ... $\gamma_3$ nöthig. Hierzu gelangt man durch die Integration der Gleichungen 2 (14), sobald die darin auftretenden Grössen $p$, $q$, $r$ bekannt sind[1]). Man kennt dann die Lage des Körpers in jedem Augenblicke, indem man die Lage der drei Hauptträgheitsaxen kennt. Von diesen 9 sind aber nur 3 von einander unabhängig. Gegen die im Raume festen Axen der $x$, $y$, $z$ wird diese Bestimmung aber auch festgelegt sein durch die Kenntniss des Bogens $XX' = \alpha_1$ (Fig. 271, pag. 283) und des Winkels $X'XY = l_1$; und den Bogen $XY' = \beta_1$ oder $XZ' = \gamma_1$. Führt man der grösseren Symmetrie wegen noch die Winkel $Y'XY = l_2$, $Z'XY = l_3$ ein, so bestehen zwischen diesen sechs Grössen ebenfalls drei Beziehungen. Die eine derselben ist die erste der Gleichungen 2 (5); die beiden anderen erhält man aus zweien der drei rechtseitigen Dreiecke $XX'Y'$, $XX'Z'$, $XY'Z'$; sie sind:

$$\cos(l_2 - l_1) = -\frac{\alpha_1 \beta_1}{\sqrt{1 - \alpha_1^2}\sqrt{1 - \beta_1^2}}; \qquad \cos(l_3 - l_2) = -\frac{\beta_1 \gamma_1}{\sqrt{1 - \beta_1^2}\sqrt{1 - \gamma_1^2}}$$
$$\cos(l_3 - l_1) = -\frac{\alpha_1 \gamma_1}{\sqrt{1 - \alpha_1^2}\sqrt{1 - \gamma_1^2}}.$$

---

[1]) Diese neun Cosinus lassen sich direkt durch Theta-Functionen ausdrücken. Vergl. JACOBI Ges. Werke, II. Bd., pag. 306.

Zur Bestimmung des Winkels $l_1$ hat man zunächst im Dreiecke $XX'Y$, wenn der Winkel $XX'Y$ mit $C$ bezeichnet wird:

$$\cos C = -\frac{\alpha_1 \alpha_3}{\sqrt{1-\alpha_1^2}\sqrt{1-\alpha_3^2}}$$

$$\sin l_1 = \sqrt{1-\alpha_3^2}\,\sin C = \sqrt{1-\alpha_3^2}\sqrt{1-\frac{\alpha_1^2\alpha_3^2}{(1-\alpha_1^2)(1-\alpha_3^2)}}$$

demnach

$$\sin l_1 = \frac{\alpha_2}{\sqrt{1-\alpha_1^2}}; \qquad \cos l_1 = \frac{\alpha_3}{\sqrt{1-\alpha_1^2}}. \tag{1}$$

Differenzirt man die zweite Gleichung (1), so folgt

$$-(1-\alpha_1^2)\sqrt{1-\alpha_1^2}\,\sin l_1 \frac{dl_1}{dt} = \alpha_2^2 \frac{d\alpha_3}{dt} + \alpha_3\left(\alpha_3 \frac{d\alpha_3}{dt} + \alpha_1 \frac{d\alpha_1}{dt}\right),$$

daher mit Rücksicht auf die erste Gleichung (1):

$$(1-\alpha_1^2)\frac{dl_1}{dt} = \alpha_3 \frac{d\alpha_2}{dt} - \alpha_2 \frac{d\alpha_3}{dt}.$$

Substituirt man hier die Gleichungen 2 (14), so wird mit Rücksicht auf 2 (8):

$$(1-\alpha_1^2)\frac{dl_1}{dt} = \gamma_1 r + \beta_1 q.$$

Die sechs Gleichungen[1])

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \beta_1 r - \gamma_1 q \qquad (1-\alpha_1^2)\frac{dl_1}{dt} = \gamma_1 r + \beta_1 q$$

$$\frac{d\beta_1}{dt} = \gamma_1 p - \alpha_1 r \qquad (2) \qquad (1-\beta_1^2)\frac{dl_2}{dt} = \alpha_1 p + \gamma_1 r \qquad (3)$$

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = \alpha_1 q - \beta_1 r \qquad (1-\gamma_1^2)\frac{dl_3}{dt} = \beta_1 q + \alpha_1 r$$

bestimmen die Lage des Körpers (der drei Hauptträgheitsaxen) im Raume.

Da jedoch nur drei Winkel hierzu ausreichend sind, so wird es wieder am passendsten, von den Substitutionen 2 (21) Gebrauch zu machen, wobei jedoch eine kleine Aenderung angezeigt erscheint. Als Fundamentalebene, auf welche alle anderen Ebenen bezogen werden, wählt man hier, so wie früher, eine feste Ekliptik. Es stelle daher in Fig. 271 die $XY$-Ebene eine feste Ekliptik dar, und die $X'Y'$-Ebene die zur Hauptträgheitsaxe des grössten Momentes senkrechte Ebene, also den Trägheitsäquator[2]). Consequenterweise würde dann ☊ der aufsteigende Knoten des Trägheitsäquators auf der Ekliptik sein, da die Rotationsrichtung von $X'$ gegen $Y'$ zu stattfindet, und $i$ wäre die Neigung des Trägheitsäquators gegen die Ekliptik, also die »Schiefe des Aequators«. Man spricht jedoch von einer »Schiefe der Ekliptik«, gemessen am aufsteigenden Knoten der Ekliptik am Aequator, gezählt in der Bewegungsrichtung. Wenn dann die Figur und die Formeln diesem Gebrauche entsprechen, so wird, wenn ♈ den Frühlingspunkt darstellt, die Lage der $X'Y'$-Ebene ☊$A$ und in den Formeln $i = -\varepsilon'$ zu setzen sein. Ist nunmehr ($X'$) eine in der Ebene des Trägheitsäquators des Körpers

---

[1]) Diese Gleichungen wurden von EULER seinen Arbeiten zu Grunde gelegt. Vergl. »Mémoires de l'académie de Berlin« für 1758, pag. 171 und für 1759, pag. 279.

[2]) Diese Bezeichnung wird gerechtfertigt durch die Nothwendigkeit der Unterscheidung von dem Himmelsäquator, der senkrecht steht auf der Rotationsaxe; er ist identisch mit dem geographischen Aequator.

feste Richtung (eine der Hauptträgheitsaxen), so wird die Bewegung von $(X')$ nahe der Rotation der Erde (wenn vorerst auf die Rotationserscheinungen bei dieser Rücksicht genommen wird) entsprechen. Unter der Annahme, dass die Erde ein Rotationsellipsoid sei, wird man für $(X')$ jede beliebige Richtung in der Aequatorebene wählen können; nimmt man hierfür die Richtung des Meridians eines gewissen Ortes, so wird $\varphi$ der Stundenwinkel des Frühlingspunktes, also sehr nahe die Sternzeit des angenommenen Meridians (Normalmeridian). Setzt man daher hier $\psi'$, $\varphi$, $-\varepsilon'$ an Stelle von $\Omega$, $\omega$, $i$, so erhält man an Stelle von 2 (21):

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= +\cos\psi'\cos\varphi - \sin\psi'\sin\varphi\cos\varepsilon' & \alpha_2 &= +\sin\psi'\cos\varphi + \cos\psi'\sin\varphi\cos\varepsilon' \\
\beta_1 &= -\cos\psi'\sin\varphi - \sin\psi'\cos\varphi\cos\varepsilon' & \beta_2 &= -\sin\psi'\sin\varphi + \cos\psi'\cos\varphi\cos\varepsilon' \\
\gamma_1 &= -\sin\psi'\sin\varepsilon' & \gamma_2 &= +\cos\psi'\sin\varepsilon'
\end{aligned}$$

$$\alpha_3 = -\sin\varphi\sin\varepsilon' \qquad \beta_3 = -\cos\varphi\sin\varepsilon' \qquad \gamma_3 = +\cos\varepsilon' \tag{4}$$

und damit an Stelle von 2 (24)

$$\begin{aligned}
p &= -\sin\varphi\sin\varepsilon'\frac{d\psi'}{dt} - \cos\varphi\frac{d\varepsilon'}{dt} \\
q &= -\cos\varphi\sin\varepsilon'\frac{d\psi'}{dt} + \sin\varphi\frac{d\varepsilon'}{dt} \\
r &= +\cos\varepsilon'\frac{d\psi'}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}
\end{aligned} \tag{5}$$

und hieraus durch passende Verbindung

$$\begin{aligned}
\sin\varepsilon'\frac{d\psi'}{dt} &= -p\sin\varphi - q\cos\varphi \\
\frac{d\varepsilon'}{dt} &= -p\cos\varphi + q\sin\varphi \\
\frac{d\varphi}{dt} &= r + \sin\varphi\,\mathrm{cotang}\,\varepsilon'\cdot p + \cos\varphi\,\mathrm{cotang}\,\varepsilon'\,q.
\end{aligned} \tag{6}$$

Die vollständige Auflösung der Aufgabe erfordert die Auflösung der Gleichungen 90 (2) und 91 (6).

**92. Die Bewegung der Rotationsaxe im Raume.** In vielen Fällen ist es nicht nur wünschenswerth, sondern sogar erforderlich, die Bewegungen der Rotationsaxe im Raume selbst zu kennen. Hierzu kann man die Gleichungen 91 (6) benützen. Der Trägheitsäquator, wie er in 91 eingeführt ist, steht senkrecht auf der Axe des grössten Trägheitsmomentes, kurz Trägheitsaxe genannt. Fällt die Rotationsaxe in diese Axe hinein, so fallen Trägheitspole und Rotationspole, Trägheitsäquator und Rotationsäquator zusammen; fällt aber die Rotationsaxe nicht in die Trägheitsaxe, so wird die letztere durch die Richtungscosinus $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$, die erstere aber durch die Richtungscosinus $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ bestimmt sein.

Die Rotationsaxe bestimmt an der Himmelskugel die Himmelspole und damit den Himmelsäquator, d. i. denjenigen grössten Kreis, auf welchen die Rectascensionen und Deklinationen der Gestirne bezogen werden. Ist also die Lage des Himmelsäquators gegen die feste Ekliptik bestimmt durch die den früheren analogen Grössen $\psi$, $\varepsilon$, so wird:

$$\lambda_1 = -\sin\psi\sin\varepsilon, \quad \lambda_2 = +\cos\psi\sin\varepsilon, \quad \lambda_3 = \cos\varepsilon. \tag{1}$$

Nach 90 (6) und (7) ist aber

$$w\lambda_1 = \alpha_1 p + \beta_1 q + \gamma_1 r; \quad w\lambda_2 = \alpha_2 p + \beta_2 q + \gamma_2 r; \quad w\lambda_3 = \alpha_3 p + \beta_3 q + \gamma_3 r.$$

Differenzirt man diese Gleichungen und berücksichtigt die Beziehungen 3 (19), so entsteht:

$$\frac{d(w\lambda_1)}{dt} = \alpha_1 \frac{dp}{dt} + \beta_1 \frac{dq}{dt} + \gamma_1 \frac{dr}{dt}$$
$$\frac{d(w\lambda_2)}{dt} = \alpha_2 \frac{dp}{dt} + \beta_2 \frac{dq}{dt} + \gamma_2 \frac{dr}{dt}$$
$$\frac{d(w\lambda_3)}{dt} = \alpha_3 \frac{dp}{dt} + \beta_3 \frac{dq}{dt} + \gamma_3 \frac{dr}{dt},$$

oder wenn für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Werthe (1) gesetzt werden:

$$\begin{aligned} -\sin\psi\sin\epsilon\frac{dw}{dt} - w\cos\psi\sin\epsilon\frac{d\psi}{dt} - w\sin\psi\cos\epsilon\frac{d\epsilon}{dt} &= \alpha_1\frac{dp}{dt} + \beta_1\frac{dq}{dt} + \gamma_1\frac{dr}{dt} \\ +\cos\psi\sin\epsilon\frac{dw}{dt} - w\sin\psi\sin\epsilon\frac{d\psi}{dt} + w\cos\psi\cos\epsilon\frac{d\epsilon}{dt} &= \alpha_2\frac{dp}{dt} + \beta_2\frac{dq}{dt} + \gamma_2\frac{dr}{dt} \\ +\cos\epsilon\frac{dw}{dt} - w\sin\epsilon\frac{d\epsilon}{dt} &= \alpha_3\frac{dp}{dt} + \beta_3\frac{dq}{dt} + \gamma_3\frac{dr}{dt} \end{aligned} \quad (2)$$

und wenn man hieraus $\frac{dw}{dt}, \frac{d\psi}{dt}, \frac{d\epsilon}{dt}$ bestimmt:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= (w)_1\frac{dp}{dt} + (w)_2\frac{dq}{dt} + (w)_3\frac{dr}{dt} \\ w\sin\epsilon\frac{d\psi}{dt} &= (\psi)_1\frac{dp}{dt} + (\psi)_2\frac{dq}{dt} + (\psi)_3\frac{dr}{dt} \\ w\frac{d\epsilon}{dt} &= (\epsilon)_1\frac{dp}{dt} + (\epsilon)_2\frac{dq}{dt} + (\epsilon)_3\frac{dr}{dt}, \end{aligned} \quad (3)$$

wo die Coëfficienten $(w)_1$ $(w)_2$ .... $(\epsilon)_3$ die folgende Bedeutung haben:

$$(w)_1 = -\alpha_1\sin\psi\sin\epsilon + \alpha_2\cos\psi\sin\epsilon + \alpha_3\cos\epsilon$$
$$(w)_2 = -\beta_1\sin\psi\sin\epsilon + \beta_2\cos\psi\sin\epsilon + \beta_3\cos\epsilon$$
$$(w)_3 = -\gamma_1\sin\psi\sin\epsilon + \gamma_2\cos\psi\sin\epsilon + \gamma_3\cos\epsilon$$

$$(\psi)_1 = -(\alpha_1\cos\psi + \alpha_2\sin\psi) \qquad (\epsilon)_1 = -\alpha_1\sin\psi\cos\epsilon + \alpha_2\cos\psi\cos\epsilon - \alpha_3\sin\epsilon$$
$$(\psi)_2 = -(\beta_1\cos\psi + \beta_2\sin\psi) \qquad (\epsilon)_2 = -\beta_1\sin\psi\cos\epsilon + \beta_2\cos\psi\cos\epsilon - \beta_3\sin\epsilon$$
$$(\psi)_3 = -(\gamma_1\cos\psi + \gamma_2\sin\psi) \qquad (\epsilon)_3 = -\gamma_1\sin\psi\cos\epsilon + \gamma_2\cos\psi\cos\epsilon - \gamma_3\sin\epsilon$$

Setzt man hier für $\alpha_1$ $\alpha_2$ ... $\gamma_3$ die Werthe 91 (4) ein, so folgt:

$$\begin{aligned} (w)_1 &= +\cos\varphi\sin\epsilon\sin(\psi'-\psi) + [\sin\epsilon\cos\epsilon'\cos(\psi'-\psi) - \sin\epsilon'\cos\epsilon]\sin\varphi \\ (w)_2 &= -\sin\varphi\sin\epsilon\sin(\psi'-\psi) + [\sin\epsilon\cos\epsilon'\cos(\psi'-\psi) - \sin\epsilon'\cos\epsilon]\cos\varphi \\ (w)_3 &= +\sin\epsilon\sin\epsilon'\cos(\psi'-\psi) + \cos\epsilon\cos\epsilon' . \\ (\psi)_1 &= -\cos\varphi\cos(\psi'-\psi) + \sin\varphi\cos\epsilon'\sin(\psi'-\psi) \\ (\psi)_2 &= +\sin\varphi\cos(\psi'-\psi) + \cos\varphi\cos\epsilon'\sin(\psi'-\psi) \\ (\psi)_3 &= +\sin\epsilon'\sin(\psi'-\psi) \\ (\epsilon)_1 &= +\cos\varphi\cos\epsilon\sin(\psi'-\psi) + [\cos\epsilon\cos\epsilon'\cos(\psi'-\psi) + \sin\epsilon'\sin\epsilon]\sin\varphi \\ (\epsilon)_2 &= -\sin\varphi\cos\epsilon\sin(\psi'-\psi) + [\cos\epsilon\cos\epsilon'\cos(\psi'-\psi) + \sin\epsilon'\sin\epsilon]\cos\varphi \\ (\epsilon)_3 &= +\cos\epsilon\sin\epsilon'\cos(\psi'-\psi) - \sin\epsilon\cos\epsilon'. \end{aligned} \quad (4)$$

Substituirt man nun in (3) für die Differentialquotienten der $p$, $q$, $r$ ihre Werthe aus 90 (2) und setzt:

$$(w)_1 \frac{\mathfrak{L}}{A} + (w)_2 \frac{\mathfrak{M}}{B} + (w)_3 \frac{\mathfrak{N}}{C} = W$$
$$(\psi)_1 \frac{\mathfrak{L}}{A} + (\psi)_2 \frac{\mathfrak{M}}{B} + (\psi)_3 \frac{\mathfrak{N}}{C} = \Psi$$
$$(\epsilon)_1 \frac{\mathfrak{L}}{A} + (\epsilon)_2 \frac{\mathfrak{M}}{B} + (\epsilon)_3 \frac{\mathfrak{N}}{C} = \mathrm{E}$$
$$(w)_1 \frac{C-B}{A} qr + (w)_2 \frac{A-C}{B} pr + (w)_3 \frac{B-A}{C} pq = W' \tag{5}$$
$$(\psi)_1 \frac{C-B}{A} qr + (\psi)_2 \frac{A-C}{B} pr + (\psi)_3 \frac{B-A}{C} pq = \Psi'$$
$$(\epsilon)_1 \frac{C-B}{A} qr + (\epsilon)_2 \frac{A-C}{B} pr + (\epsilon)_3 \frac{B-A}{C} pq = \mathrm{E}'$$

so wird

$$\frac{dw}{dt} = W - W'$$
$$w \sin\epsilon \frac{d\psi}{dt} = \Psi - \Psi' \tag{6}$$
$$w \frac{d\epsilon}{dt} = \mathrm{E} - \mathrm{E}'.$$

$W$, $\Psi$, $\mathrm{E}$ drücken sich durch die wirkenden Kräfte aus; $W'$, $\Psi'$, $\mathrm{E}'$ sind von $p, q, r$ selbst abhängig, welche aus den Formeln 91 (5) benutzt werden können. Diese Glieder sind jedoch wegen der Faktoren $(C - B)$, $(A - C)$, $(B - A)$ sehr klein, und können in den für die Praxis wichtigen Fällen, wie in No. 96 gezeigt wird, auch ganz übergangen werden.

**93. Integration der Differentialgleichungen für den Fall, dass keine äusseren Kräfte wirken.** In diesem Falle werden die zu integrirenden Differentialgleichungen der Bewegung:

$$A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr = 0$$
$$B \frac{dq}{dt} + (A - C)pr = 0 \tag{1}$$
$$C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq = 0.$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit $p$, die zweite mit $q$, die dritte mit $r$, addirt und integrirt, so folgt

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h^2, \tag{2}$$

wobei $h^2$ die Integrationsconstante ist. Multiplicirt man hingegen mit $Ap$, $Bq$, $Cr$, addirt und integrirt, so erhält man mit der Integrationsconstante $k^2$

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) kann man $p$, $q$ als Functionen von $r$ bestimmen; es wird

$$p^2 = \frac{(k^2 - Bh^2) - C(C - B)r^2}{A(A - B)}; \quad q^2 = \frac{(k^2 - Ah^2) - C(C - A)r^2}{B(B - A)}. \tag{4}$$

Werden diese Werthe in die dritte Gleichung substituirt, so erhält man

$$dt = \frac{C\sqrt{-AB}\,dr}{\sqrt{k^2 - Bh^2 - C(C - B)r^2}\sqrt{k^2 - Ah^2 - C(C - A)r^2}}. \tag{5}$$

Die vollständige Integration lässt sich demnach durch elliptische Functionen leisten. Ist $r$ als Function von $t$ durch die Integration von (5) bestimmt, so geben die Gleichungen (4) $p$ und $q$.

Sind $p$, $q$, $r$ veränderlich, so folgt aus 90 (5), dass die Rotationsaxe im Körper selbst ihre Lage ändert. Dann werden die Pole auf der Oberfläche der Erde nicht fest sein; man kann nur von instantanen Polen sprechen.

Sind $p$, $q$, $r$ als Functionen der Zeit gegeben, so bestimmen die Gleichungen 90 (6) in Verbindung mit der Gleichung der Oberfläche (bezogen auf das feste Axensystem: das System der Hauptträgheitsaxen) den Ort der Pole als Functionen der Zeit.

Sollen $p$, $q$, $r$ constant sein, so muss $\frac{dp}{dt}=0$, $\frac{dq}{dt}=0$, $\frac{dr}{dt}=0$ sein, und die Gleichungen reduciren sich auf ihre zweiten Glieder. Sie können dann nur erfüllt sein, wenn zwei der drei Grössen $p$, $q$, $r$ verschwinden. Sei also $p=q=0$ $r=n$ constant[1]). In diesem Falle fällt also die Rotationsaxe mit einer der Hauptträgheitsaxen zusammen, und es ist dies auch der einzige Fall, in welchem sich die Lage der Rotationsaxe im Körper nicht ändert. Der Werth $n$ ist die Rotationsgeschwindigkeit um die Hauptträgheitsaxe.

Treten störende Kräfte hinzu, so dass die rechten Seiten in (1) nicht mehr Null sind, sondern Functionen der Zeit, so wird den Gleichungen nur durch veränderliche Werthe von $p$, $q$, $r$ genügt werden können. Bei den in der Natur vorkommenden Fällen wird jedoch die Rotationsaxe stets sehr nahe mit einer der Hauptträgheitsaxen zusammenfallen; denn durch die Rotation selbst werden, wie aus den No. 86 bis 88 hervorgeht, die Himmelskörper jene Formen annehmen (abgeplattete Sphäroide), deren eine Hauptträgheitsaxe in die Rotationsaxe fällt. Wenn nun dieses Zusammenfallen nicht auf die Dauer zu erhalten ist, so wird, wenigstens im Anfange der Bewegung, ob auch bleibend, muss erst die Untersuchung zeigen, dieses Zusammenfallen genähert stattfinden, und dann wird z. B. $p$, $q$, sehr klein sein.

Aus den Gleichungen (2), (3) folgt aber durch Elimination von $r$:

$$A(A-C)p^2+B(B-C)q^2=h^2-Ck^2=D.$$

Sind nun für einen gegebenen Augenblick $p$, $q$ sehr kleine Grössen, so wird auch die Constante $D$ einen dem entsprechend kleinen Werth haben, woraus folgt, dass, da die Coëfficienten $A(A-C)$, $B(B-C)$ Constante sind, $p$ und $q$ stets kleine Werthe behalten.

Da überdiess nach früherem auch $B$ sehr nahe gleich $A$ sein wird, indem die Figuren der Himmelskörper unter dem Einfluss der Rotation zum mindesten nicht sehr verschieden von Rotationskörpern sein werden, so kann man das Produkt $(B-A)pq$ in der dritten Gleichung vernachlässigen, und sie wird einfach

$$C\frac{dr}{dt}=0, \qquad r=n \tag{6}$$

constant; nunmehr allerdings nur genähert, da die absolute Constanz sofort auch $p$, $q$ constant ergeben müsste. Die beiden andern Gleichungen werden dann:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt}+(C-B)\,nq&=0\\ B\frac{dq}{dt}+(A-C)\,np&=0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

---

[1]) Dann wird $h^2=C^2n^2$, $k^2=Cn^2$, und es werden die Gleichungen (4) identisch erfüllt sein.

Diesen simultanen linearen Differentialgleichungen wird genügt durch

$$\begin{aligned} p &= h \sin(mt + H) \\ q &= h' \cos(mt + H) \end{aligned} \tag{8}$$

wobei $h$, $m$, $H$ Constante sind. Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (7) so folgt:

$$\begin{aligned} mAh + (C - B)h'n &= 0 \\ mBh' + (C - A)hn &= 0 \end{aligned}$$

und hieraus

$$\frac{h'}{h} = -\frac{mA}{(C-B)n} = -\frac{(C-A)n}{mB}; \qquad \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{(C-A)(C-B)}{AB}$$

$$m = \sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}}\, n; \qquad \frac{h'}{h} = -\sqrt{\frac{A}{B}}\sqrt{\frac{C-A}{C-B}}. \tag{8a}$$

Da eine der beiden Constanten $h$, $h'$ willkürlich bleibt, so kann man

$$h' = -\sqrt{A}\sqrt{C-A}\, gn; \qquad h = +\sqrt{B}\sqrt{C-B}\, gn$$

setzen, und dann wird

$$\begin{aligned} p &= +\sqrt{B}\sqrt{C-B}\, gn \sin\left(\sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}}\, nt + H\right) \\ q &= -\sqrt{A}\sqrt{C-A}\, gn \cos\left(\sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}}\, nt + H\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Mit diesen Werthen würde die dritte Gleichung:

$$\frac{dr}{dt} - \frac{1}{2}\frac{B-A}{C}\sqrt{AB}\sqrt{(C-A)(C-B)}\, g^2 n^2 \sin 2\left(\sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}}\, nt + H\right) = 0$$

$$r = \left[1 + \frac{1}{4}\frac{AB}{C}(B-A)g^2 \cos 2\left(\sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}}\, nt + H\right)\right] n. \tag{10}$$

Sind $B$ und $A$ genau gleich, wo dann das Trägheitsmoment für irgend eine in der Aequatorebene liegende Axe ebenso gross ist, so wird, wenn keine äusseren störenden Kräfte wirken, in aller Strenge $r = n$ constant. Dann wird

$$\begin{aligned} p &= +gn \sin\left(\frac{C-A}{A}\, nt + H\right) \\ q &= -gn \cos\left(\frac{C-A}{A}\, nt + H\right). \end{aligned} \tag{9a}$$

Es wird daher die Rotationsaxe um die Trägheitsaxe des grössten Momentes (die Erdaxe) einen Kegel beschreiben, dessen Oeffnungswinkel $\eta$ und Umlaufszeit (Periode) $\tau$ bestimmt sind durch

$$\sin\eta = \frac{gn}{\sqrt{n^2 + g^2 n^2}}; \qquad \tau = \frac{2\pi}{\frac{C-A}{A}\, n}.$$

Ist $t$ die Rotationsdauer des Körpers um seine Axe, so ist

$$t = \frac{2\pi}{n}, \quad \tau = \frac{A}{C-A}\, t.$$

Für die Erde ist[1] $\frac{C-A}{A} = 0{\cdot}003272$, und damit wird, da $t = 1$ Tag ist, $\tau = 304{\cdot}8$ Tage.

Bei der Kleinheit von $\eta$ kann man $g^2$ gegen die Einheit vernachlässigen, und dann wird

$$\eta = g.$$

---

[1]) Vergl. No. 98.

$g$ ist demnach die Grösse des Oeffnungswinkels und muss als Integrationsconstante aus den Beobachtungen ermittelt werden. C. A. F. PETERS fand diesen Winkel $0''\cdot079$; $\tau = 303^d\cdot87$; NYRÉN[1]) $g = 0''\cdot04$, $H = 228^\circ\cdot8$ und $m = 428\cdot55$, wenn für $t$ als Einheit das tropische Jahr und als Anfangspunkt der Zählung das Jahr 1850·0 für den Meridian von Pulkowa gewählt wird. DOWNING erhält durch Discussion 10jähriger Beobachtungen des Polarsternes in Greenwich $0''\cdot075$ so dass man für $k$ jedenfalls einen reellen, wenn auch sehr kleinen Werth anzunehmen genöthigt ist. Nimmt man $g = 0''\cdot06$, so wird die hieraus resultirende Polhöhenänderung

$$+ 0''\cdot06 \sin[224^\circ + \lambda + 428^\circ\cdot55(t - 1850)], \tag{11}$$

wenn $\lambda$ die westliche Länge des betrachteten Ortes von Pulkowa ist, und $t$ in Einheiten des tropischen Jahres auszudrücken ist. Die Gleichungen 91 (6) werden damit:

$$\left.\begin{aligned} \sin\epsilon' \frac{d\psi'}{dt} &= + g n \cos(mt + \varphi + H) \\ \frac{d\epsilon'}{dt} &= - g n \sin(mt + \varphi + H). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Hiermit wird, wenn man in dem ersten Ausdrucke $\epsilon'$ als constant ansieht, und berücksichtigt, dass gemäss der dritten Gleichung 91 (6): $\varphi = \varphi_0 + nt$ zu setzen ist:

$$\left.\begin{aligned} \sin\epsilon' \cdot \psi' &= + g \frac{n}{m+n} \sin[(m+n)t + H + \varphi_0] \\ \epsilon' &= + g \frac{n}{m+n} \cos[(m+n)t + H + \varphi_0]. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$\psi'$, $\epsilon'$ bestimmen sehr nahe die Lage des Frühlingspunktes und die Neigung des Aequators gegen eine feste Ekliptik. Man sieht aus den Ausdrücken (13), dass aus den Aenderungen der Polhöhe in diesen nur periodische Glieder entstehen, deren Periode

$$\frac{2\pi}{m+n} = \frac{2\pi}{n + \left(\frac{C}{A} - 1\right) n} = \frac{2\pi}{n} \frac{A}{C} = \frac{A}{C} t,$$

daher etwas kleiner als ein Tag ist. Da der Faktor $\frac{n}{m+n} = \frac{A}{C}$ nahe der Einheit ist, so wird die Amplitude der Schwingung in $\psi'$ gleich $g \operatorname{cosec} \epsilon' = 0''\cdot15$, in $\epsilon'$ gleich $g = 0''\cdot06$. In Folge der raschen Veränderlichkeit derselben kann jedoch von diesen Gliedern in den meisten Fällen abgesehen werden.

Um nun noch die Ungleichheiten in $\varphi$ zu bestimmen, die aus der Grösse des Oeffnungswinkels $\eta$ resultiren, hat man

$$\frac{d\varphi}{dt} = n - \cos\epsilon' \frac{d\psi'}{dt} = n - \operatorname{cotang}\epsilon' \cdot g n \cos(mt + \varphi + H)$$

und wenn hier rechts für $\varphi$ wieder die erste Näherung $\varphi = nt$ gesetzt und integrirt wieder:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + nt - g \frac{n}{m+n} \operatorname{cotang}\epsilon' \sin[(m+n)t + \varphi_0 + H] \\ \varphi &= \varphi_0 + nt - 0''\cdot14 \sin[(m+n)t + \varphi_0 + H]. \end{aligned} \tag{13a}$$

**94. Die störenden Kräfte.** Sind die wirkenden Kräfte Anziehungen von Massenpunkten und betrachtet man zunächst einen derselben, dessen Masse $M_1$, dessen Coordinaten $\xi'$, $\eta'$, $\zeta'$ seien, so wird

---

[1]) Bestimmung der Nutation der Erdaxe, Memoiren der Petersburger Academie der Wissenschaften, Bd. 19, No. 2.

$$X' = k^2 M_1 \int \frac{dm}{u^3}(\xi' - x'); \quad Y' = k^2 M_1 \int \frac{dm}{u^3}(\eta' - y'); \quad Z' = k^2 M_1 \int \frac{dm}{u^3}(\zeta' - z')$$

$$u^2 = (\xi' - x')^2 + (\eta' - y')^2 + (\zeta' - z')^2.$$

Hiermit werden die Drehungsmomente:

$$\mathfrak{L} = k^2 M_1 \int \frac{dm}{u^3}(y'\zeta' - z'\eta') = k^2 M_1 \int \frac{dm}{u^3}(y'\zeta' - z'\eta' + \eta'\zeta' - \eta'\zeta')$$

$$= \zeta' \cdot k^2 M_1 \int \frac{dm}{u^3}(y' - \eta') - \eta' \cdot k^2 M_1 \int \frac{dm}{u^3}(z' - \zeta')$$

und ebenso für $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$. Führt man hier weiter das Potential

$$V = k^2 M_1 \int \frac{dm}{u} \tag{1}$$

ein, so wird

$$\frac{\partial V}{\partial \xi'} = + k^2 M_1 \int \frac{dm}{u^3}(x' - \xi') \text{ u. s. w.}$$

daher

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= \zeta' \frac{\partial V}{\partial \eta'} - \eta' \frac{\partial V}{\partial \zeta'} \\ \mathfrak{M} &= \xi' \frac{\partial V}{\partial \zeta'} - \zeta' \frac{\partial V}{\partial \xi'} \\ \mathfrak{N} &= \eta' \frac{\partial V}{\partial \xi'} - \xi' \frac{\partial V}{\partial \eta'} \end{aligned} \tag{2}$$

Die Integration in (1) bezieht sich auf den ganzen Körper, d. h. auf die Coordinaten $x'$, $y'$, $z'$ desselben. In dem Potential $V$ treten aber dann noch die veränderlichen Winkel $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ . . . $\gamma_3$ auf, da die Coordinaten $\xi'$, $\eta'$, $\zeta'$ des anziehenden Körpers, bezogen auf das in dem Körper festen, mit diesem veränderlichen Axensystem variabel sind. Statt dieser wird es besser, die drei unabhängigen Winkel $\varphi$, $\psi$, $\varepsilon$ einzuführen, und auch die Differentialquotienten nach den rechtwinkligen Coordinaten durch diejenigen nach diesen drei Winkeln zu ersetzen. Zu diesem Zwecke hat man zunächst nach 2 (1):

$$\begin{aligned} \xi' &= \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta \\ \eta' &= \beta_1\xi + \beta_2\eta + \beta_3\zeta \\ \zeta' &= \gamma_1\xi + \gamma_2\eta + \gamma_3\zeta. \end{aligned} \tag{3}$$

Hieraus folgt durch Differentiation unter Berücksichtigung der Beziehungen 91 (4):

$$\frac{\partial \xi'}{\partial \psi'} = \xi \frac{\partial \alpha_1}{\partial \psi'} + \eta \frac{\partial \alpha_2}{\partial \psi'} + \zeta \frac{\partial \alpha_3}{\partial \psi'} = -\alpha_2\xi + \alpha_1\eta =$$

$$= (-\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2)\eta' + (-\alpha_2\gamma_1 + \alpha_1\gamma_2)\zeta' = (\gamma_3\eta' - \beta_3\zeta')$$

. . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial \varepsilon'} = -\gamma_3 \sin\psi' \xi + \gamma_3 \cos\psi' \eta - \sin\varepsilon' \zeta = + \frac{\gamma_3}{\sin\varepsilon'}\gamma_1\xi + \frac{\gamma_3}{\sin\varepsilon'}\gamma_2\eta - \sin\varepsilon'\zeta$$

$$= + \frac{\gamma_3}{\sin\varepsilon'}\zeta' - \frac{\gamma_3}{\sin\varepsilon'}\gamma_3\zeta - \sin\varepsilon'\zeta = \frac{\gamma_3}{\sin\varepsilon'}\zeta' - \frac{1}{\sin\varepsilon'}\zeta = \sin\varphi\,\xi' + \cos\varphi\,\eta',$$

daher

$$\frac{\partial\xi'}{\partial\psi'} = \gamma_3\eta' - \beta_3\zeta' \qquad \frac{\partial\xi'}{\partial\varphi} = +\eta' \qquad \frac{\partial\xi'}{\partial\varepsilon'} = -\sin\varphi\,\zeta'$$
$$\frac{\partial\eta'}{\partial\psi'} = \alpha_3\zeta' - \gamma_3\xi' \qquad \frac{\partial\eta'}{\partial\varphi} = -\xi' \qquad \frac{\partial\eta'}{\partial\varepsilon'} = -\cos\varphi\,\zeta' \tag{4}$$
$$\frac{\partial\zeta'}{\partial\psi'} = \beta_3\xi' - \alpha_3\eta' \qquad \frac{\partial\zeta'}{\partial\varphi} = 0 \qquad \frac{\partial\zeta'}{\partial\varepsilon'} = +\sin\varphi\,\xi' + \cos\varphi\,\eta'.$$

Hiermit wird:

$$\frac{\partial V}{\partial\psi'} = \frac{\partial V}{\partial\xi'}\frac{\partial\xi'}{\partial\psi'} + \frac{\partial V}{\partial\eta'}\frac{\partial\eta'}{\partial\psi'} + \frac{\partial V}{\partial\zeta'}\frac{\partial\zeta'}{\partial\psi'}$$

oder

$$\frac{\partial V}{\partial\psi'} = \alpha_3\left(\zeta'\frac{\partial V}{\partial\eta'} - \eta'\frac{\partial V}{\partial\zeta'}\right) + \beta_3\left(\xi'\frac{\partial V}{\partial\zeta'} - \zeta'\frac{\partial V}{\partial\xi'}\right) + \gamma_3\left(\eta'\frac{\partial V}{\partial\xi'} - \xi'\frac{\partial V}{\partial\eta'}\right)$$
$$\frac{\partial V}{\partial\varphi} = \eta'\frac{\partial V}{\partial\xi'} - \xi'\frac{\partial V}{\partial\eta'}$$
$$\frac{\partial V}{\partial\varepsilon'} = \sin\varphi\left(\xi'\frac{\partial V}{\partial\zeta'} - \zeta'\frac{\partial V}{\partial\xi'}\right) + \cos\varphi\left(\eta'\frac{\partial V}{\partial\zeta'} - \zeta'\frac{\partial V}{\partial\eta'}\right).$$

Hier treten die Momente $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, direkt als Faktoren ein, es wird:

$$\frac{\partial V}{\partial\psi'} = -\sin\varphi\sin\varepsilon'\,\mathfrak{L} - \cos\varphi\sin\varepsilon'\,\mathfrak{M} + \cos\varepsilon'\,\mathfrak{N}$$
$$\frac{\partial V}{\partial\varphi} = +\mathfrak{N}$$
$$\frac{\partial V}{\partial\varepsilon'} = +\sin\varphi\,\mathfrak{M} - \cos\varphi\,\mathfrak{L},$$

demnach

$$\mathfrak{L} = -\cos\varphi\frac{\partial V}{\partial\varepsilon'} - \frac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon'}\frac{\partial V}{\partial\psi'} + \frac{\sin\varphi\cos\varepsilon'}{\sin\varepsilon'}\frac{\partial V}{\partial\varphi}$$
$$\mathfrak{M} = +\sin\varphi\frac{\partial V}{\partial\varepsilon'} - \frac{\cos\varphi}{\sin\varepsilon'}\frac{\partial V}{\partial\psi'} + \frac{\cos\varphi\cos\varepsilon'}{\sin\varepsilon'}\frac{\partial V}{\partial\varphi} \tag{5}$$
$$\mathfrak{N} = +\frac{\partial V}{\partial\varphi}.$$

Sind mehrere anziehende Körper, so werden die Momente $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ aus einer Summe von Ausdrücken derselben Art bestehen, und man wird die Ausdrücke (5) unmittelbar verwenden können, wenn man

$$V = \Sigma k^2 M_i \int \frac{dm}{u} \tag{6}$$

setzt[1]).

Die Dimensionen der anziehenden Massen sind gegenüber den Entfernungen derselben stets so klein, dass das Potential $V$ nach fallenden Potenzen der Entfernung $\rho$ nach No. 88 entwickelt werden kann. Ist

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2,$$

so wird nach 88 (5):

$$V = k^2 M_1\left\{\frac{M}{\rho} + \frac{1}{2\rho^3}(A + B + C) - \frac{3}{2\rho^5}(A\xi'^2 + B\eta'^2 + C\zeta'^2)\right\}. \tag{7}$$

Die nur von $\rho$ abhängigen Ausdrücke verschwinden in den Ausdrücken (2), weil

[1]) In (2) ist dieses nicht möglich, da $\xi'$, $\eta'$, $\zeta'$ von dem Orte des anziehenden Körpers abhängen.

$$\zeta' \frac{\partial \rho}{\partial \eta'} - \eta' \frac{\partial \rho}{\partial \zeta'} = \xi' \frac{\partial \rho}{\partial \zeta'} - \zeta' \frac{\partial \rho}{\partial \xi'} = \eta' \frac{\partial \rho}{\partial \xi'} - \xi' \frac{\partial \rho}{\partial \eta'} = 0$$

ist, und können daher in dem Potentiale (7) ganz weggelassen werden. Aus (5) ist dies übrigens sofort ersichtlich, da sie von $\varphi$, $\psi$, $s$, unabhängig sind. Es wird daher, indem nur die nicht verschwindenden Theile beibehalten werden und dies durch Einschliessen in eckige Klammern angedeutet wird:

$$\left[\frac{\partial V}{\partial \xi'}\right] = -\frac{3k^2 M_1}{\rho^5} A\xi'; \quad \left[\frac{\partial V}{\partial \eta'}\right] = -\frac{3k^2 M_1}{\rho^5} B\eta'; \quad \left[\frac{\partial V}{\partial \zeta'}\right] = -\frac{3k^2 M_1}{\rho^5} C\zeta',$$

folglich aus (2):

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= -\frac{3k^2 M_1}{\rho^5}(B - C)\zeta'\eta' \\ \mathfrak{M} &= -\frac{3k^2 M_1}{\rho^5}(C - A)\xi'\zeta' \\ \mathfrak{N} &= -\frac{3k^2 M_1}{\rho^5}(A - B)\xi'\eta', \end{aligned} \tag{8}$$

wo $\xi'$, $\eta'$, $\zeta'$ durch (8) zu ersetzen sind.

Der hier auftretende Coëfficient $\frac{k^2 M_1}{\rho^3}$ kann anders ausgedrückt werden. Man hat für die Anziehung der Sonne nach 12 (10), wenn mit $\odot'$ die mittlere siderische Bewegung der Sonne bezeichnet wird:

$$\frac{k^2(M_\odot + M_♁)}{a^3} = \odot'^2,$$

folglich, wenn

$$\frac{M_♁}{M_\odot} = \nu \tag{9}$$

gesetzt wird:

$$\frac{k^2 M_\odot}{a^3} = \frac{\odot'^2}{1+\nu}. \tag{9a}$$

Wählt man als Einheit den mittleren Sonnentag, so ist $k^2$ die GAUSS'sche Constante, und $\odot'$ die mittlere **tägliche** siderische Bewegung der Erde; wählt man als Einheit $t$ Tage (z. B. das julianische Jahr), so hat man $(kt)$ für $k$ zu setzen, und dann wird $\mu$ die mittlere siderische Bewegung in $t$ Tagen (bezw. im julianischen Jahre).

Für den Mond ist ebenso

$$\frac{k^2(M_♁ + M_☾)}{a_1^3} = L'^2,$$

wenn unter $L'$ die mittlere siderische Bewegung des Mondes verstanden wird. Folglich, wenn

$$\frac{M_♁}{M_☾} = \nu' \tag{10}$$

gesetzt wird:

$$\frac{k^2 M_☾}{a_1^3} = \frac{L'^2}{1+\nu'}. \tag{10a}$$

Da nun

$$\frac{k^2 M'}{\rho^3} = \frac{k^2 M'}{a^3} \frac{1}{\left(\frac{\rho}{a}\right)^3}$$

ist, so wird, wenn man für den ersten Coëfficienten seinen Werth durch die mittlere Bewegung ersetzt, $\rho$ in Einheiten der mittleren Entfernung des anziehenden Körpers von der Erde zu setzen sein.

Wie schon in No. 93 ausgeführt ist, wird die Rotationsaxe in der Natur stets nahe der Hauptträgheitsaxe fallen. Dadurch tritt eine Gruppirung der Differentialgleichungen ein, welche die Integration wesentlich erleichtert. Es werden nämlich $p$, $q$ stets sehr kleine Grössen, und da gleichzeitig $A$ und $B$ nahe gleich werden, so kann wieder das Produkt $(B-A)pq$ vernachlässigt werden, überdies wird, da $r$ der Hauptsache nach die Rotationsgeschwindigkeit um die Rotationsaxe selbst darstellt, der constante Theil $n$ die Ungleichheiten, deren Summe mit $r'$ bezeichnet werden möge, weitaus überwiegen, und es wird:

$$r = n + r'; \qquad \frac{dr'}{dt} = \frac{\mathfrak{N}}{C}. \tag{I}$$

Diese Gleichung führt zur Kenntniss von $r'$ unabhängig von den beiden anderen. Die beiden anderen Gleichungen 90 (2) werden jetzt simultane lineare Differentialgleichungen in $p$ und $q$. Zwar tritt auch $r$ auf; aber hier kann für $r$ stets der constante Theil $n$ mit Vernachlässigung von $r'$ substituirt werden, da die Produkte $(C-B)qr'$, $(C-A)pr'$ unbedingt vernachlässigt werden können. Diese Gleichungen werden daher[1]):

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} + \left(\frac{C-B}{A}n\right)q &= \frac{\mathfrak{L}}{A} \\ \frac{dq}{dt} - \left(\frac{C-A}{B}n\right)p &= \frac{\mathfrak{M}}{B}. \end{aligned} \tag{II}$$

Dieselbe Trennung der Variabeln tritt nun in 91 (6) auf. Die dritte Gleichung kann geschrieben werden:

$$\frac{d\varphi}{dt} = n + r' - \cos\epsilon' \frac{d\psi'}{dt} \tag{IIIa}$$

oder

$$\frac{d\varphi}{dt} = n + r' + \operatorname{cotang}\epsilon'(p\sin\varphi + q\cos\varphi), \tag{IIIb}$$

wobei die Ungleichheiten $r'$ und $\frac{d\psi'}{dt}$ gegenüber $n$ nur äusserst klein sind. Sie dient zur Bestimmung der Ungleichheiten in der Rotationsbewegung. Die zweite Gruppe der Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin\epsilon' \frac{d\psi'}{dt} &= -p\sin\varphi - q\cos\varphi \\ \frac{d\epsilon'}{dt} &= -p\cos\varphi + q\sin\varphi \end{aligned} \tag{IV}$$

bestimmt die Lage (Knoten und Neigung) des Trägheitsäquators.

Bei der Integration sind nun zwei Fälle zu unterscheiden. Bei dem ersten werden $B$ und $A$ einander gleich sein und die Rotationszeit ist von der Umlaufszeit des störenden Körpers wesentlich verschieden. Beim zweiten ist die Rotationsdauer gleich der Umlaufszeit des störenden Körpers; der Unterschied zwischen den Hauptträgheitsmomenten $B$ und $A$ ist nicht zu vernachlässigen. Der erste Fall tritt bei der Rotation der Erde ein (Präcession und Nutation); der zweite Fall beim Monde (Libration).

95. Die Bewegung des Erdkörpers. Setzt man $B = A$, so wird $\mathfrak{N} = 0$, und $r' = 0$, da die Constante bereits in $n$ berücksichtigt ist, d. h. es wird

$$r = n. \tag{1}$$

[1]) Von dieser Trennung der Variabeln wurde bereits in No. 93 Gebrauch gemacht.

Die Ausdrücke 93 (5) erhalten ebenfalls eine wesentliche Vereinfachung. Man kann nämlich an Stelle von $V$ auch $[V]$ schreiben, so dass, in derselben Bedeutung wie früher:

$$[V] = -\frac{3k^2M_1}{2\rho^5}[C\xi'^2 + C\eta'^2 + C\zeta'^2 + (A-C)\xi'^2 + (B-C)\eta'^2]$$
$$= +\frac{3k^2M_1}{2\rho^5}[(C-A)\xi'^2 + (C-B)\eta'^2],$$

daher für diesen Fall

$$[V] = +\frac{3k^2M_1}{2\rho^5}(C-A)(\xi'^2+\eta'^2) = +\frac{3k^2M_1}{2\rho^5}(C-A)(\rho^2-\zeta'^2)$$
$$[V] = -\frac{3k^2M_1}{2\rho^5}(C-A)\zeta'^2. \tag{2}$$

ist. Führt man hier die mittleren Bewegungen ein, so wird

$$[V]_\odot = -\tfrac{3}{2}\frac{\odot'^2}{1+\nu}\frac{1}{\rho_\odot^3}(C-A)\left(\frac{\zeta'}{\rho_\odot}\right)^2$$
$$[V]_☾ = -\tfrac{3}{2}\frac{L'^2}{1+\nu'}\frac{1}{\rho_☾^3}(C-A)\left(\frac{\zeta'}{\rho_☾}\right)^2 \tag{2a}$$

wo $\rho_\odot$ in Einheiten der Erdbahnhalbaxe, $\rho_☾$ in Einheiten der Halbaxe der Mondbahn auszudrücken ist.

Da nun $\frac{\partial\zeta'}{\partial\varphi} = 0$ ist, so wird $\frac{\partial V}{\partial\varphi} = 0$, folglich $\mathfrak{N} = 0$ übereinstimmend mit dem früheren Resultate, und weiter

$$\mathfrak{L} = -\cos\varphi\frac{\partial V}{\partial\varepsilon'} - \frac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon'}\frac{\partial V}{\partial\psi'}$$
$$\mathfrak{M} = +\sin\varphi\frac{\partial V}{\partial\varepsilon'} - \frac{\cos\varphi}{\sin\varepsilon'}\frac{\partial V}{\partial\psi'}. \tag{3}$$

Die Differentialgleichungen II bilden ein System, dessen Integrale, wenn die rechten Seiten Null gesetzt werden:

$$p = \xi\cos\left(\frac{C-A}{A}n\right)t + \eta\sin\left(\frac{C-A}{A}n\right)t$$
$$q = \xi\sin\left(\frac{C-A}{A}n\right)t - \eta\cos\left(\frac{C-A}{A}n\right)t \tag{4}$$

sind, welche aus 93 (9a) hervorgehen, wenn an Stelle der beiden Constanten $h$, $H$ die beiden Constanten $\xi$, $\eta$ durch die Beziehungen

$$gn\sin H = \xi; \qquad gn\cos H = \eta$$

eingeführt werden. Da die Gleichungen II linear sind, so kann man die Methode der Variation der Constanten anwenden; die Werthe (4) werden ebenfalls als Integrale der vollständigen Gleichungen angesehen, wobei aber $\xi$, $\eta$ nicht mehr constant, sondern variabel sind. Differenzirt man die Gleichungen (4) unter dieser Voraussetzung, so folgt, wenn wieder Kürze halber $\frac{C-A}{A}n = m$ beibehalten wird:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{C-A}{A}nq + \cos mt\frac{d\xi}{dt} + \sin mt\frac{d\eta}{dt}$$
$$\frac{dq}{dt} = +\frac{C-A}{A}np + \sin mt\frac{d\xi}{dt} - \cos mt\frac{d\eta}{dt}. \tag{5}$$

Substituirt man (4) und (5) in II, so folgt:

$$\cos mt \frac{d\xi}{dt} + \sin mt \frac{d\eta}{dt} = \frac{\mathfrak{L}}{A}$$
$$\sin mt \frac{d\xi}{dt} - \cos mt \frac{d\eta}{dt} = \frac{\mathfrak{M}}{A}$$

und daraus

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{A} (\mathfrak{L} \cos mt + \mathfrak{M} \sin mt)$$
$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{A} (\mathfrak{L} \sin mt - \mathfrak{M} \cos mt), \tag{6}$$

daher mit den Werthen für $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ aus (3):

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{A}\left[-\cos(mt+\varphi)\frac{\partial V}{\partial \varepsilon'} - \sin(mt+\varphi)\frac{1}{\sin\varepsilon'}\frac{\partial V}{\partial \psi'}\right]$$
$$\frac{\partial\eta}{dt} = \frac{1}{A}\left[-\sin(mt+\varphi)\frac{\partial V}{\partial \varepsilon'} + \cos(mt+\varphi)\frac{1}{\sin\varepsilon'}\frac{\partial V}{\partial \psi'}\right]. \tag{7}$$

Bei der Integration dieser Gleichungen wird für die Integrationsconstante $\xi_0 = gn \sin H$; $\eta_0 = gn \cos H$ zu setzen sein.

Die Integration der Gleichung (IIIa) giebt sodann:

$$\varphi = \varphi_0 + nt - \int \cos\varepsilon' \frac{d\psi'}{dt}\, dt, \tag{8}$$

wobei zur Bestimmung des letzten Gliedes bereits die Kenntniss von $\frac{d\psi'}{dt}$ vorausgesetzt ist. Aus den Gleichungen (IV) folgt aber:

$$\sin\varepsilon' \frac{d\psi'}{dt} = -\xi \sin(mt+\varphi) + \eta\cos(mt+\varphi)$$
$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = -\xi\cos(mt+\varphi) - \eta\sin(mt+\varphi) \tag{9}$$

und hier ist

$$(mt+\varphi) = \frac{C-A}{A}nt + \varphi_0 + nt - \int \cos\varepsilon' \frac{d\psi'}{dt}\, dt$$
$$mt + \varphi = \frac{C}{A}nt + \varphi_0 - \int \cos\varepsilon' \frac{d\psi'}{dt}\, dt. \tag{10}$$

Nachdem $\xi$, $\eta$ durch Integration von (7) erhalten sind, kann man aus (9) $\frac{d\psi'}{dt}$ bestimmen, indem in erster Näherung für $mt+\varphi$ sein Werth $\frac{C}{A}nt + \varphi_0$ substituirt wird. Sodann erhält man aus (8) einen besseren Werth für $mt+\varphi$ und hiermit aus (9) die Aenderungen von $\psi'$ und $\varepsilon'$. Man kann jedoch die Werthe von $\xi$, $\eta$ aus (9) wegschaffen. Differenzirt man diese Gleichungen und setzt Kürze halber:

$$m + \frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{A}n - \cos\varepsilon' \frac{d\psi'}{dt} = m',$$

so folgt

$$\frac{d}{dt}\left(\sin\varepsilon' \frac{d\psi'}{dt}\right) = + m' \frac{d\varepsilon'}{dt} - \sin(mt+\varphi)\frac{d\xi}{dt} + \cos(mt+\varphi)\frac{d\eta}{dt}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right) = - m' \sin\varepsilon' \frac{d\psi'}{dt} - \cos(mt+\varphi)\frac{d\xi}{dt} - \sin(mt+\varphi)\frac{d\eta}{dt}.$$

Substituirt man hier die Werthe aus (6) oder (7) und bestimmt die ersten Glieder rechts, so ergiebt sich

$$
\left.\begin{aligned}
m'\frac{d\varepsilon'}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\sin\varepsilon'\frac{d\psi'}{dt}\right) + \frac{1}{A}(\mathfrak{L}\sin\varphi + \mathfrak{M}\cos\varphi)\\
m'\sin\varepsilon'\frac{d\psi'}{dt} &= -\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right) + \frac{1}{A}(-\mathfrak{L}\cos\varphi + \mathfrak{M}\sin\varphi)
\end{aligned}\right\} \qquad (11\,a)
$$

oder

$$
\left.\begin{aligned}
m'\frac{d\varepsilon'}{dt} &= +\frac{d}{dt}\left(\sin\varepsilon'\frac{d\psi'}{dt}\right) - \frac{1}{A\sin\varepsilon'}\frac{\partial V}{\partial\psi'}\\
m'\sin\varepsilon'\frac{d\psi'}{dt} &= -\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right) + \frac{1}{A}\frac{\partial V}{\partial\varepsilon'}.
\end{aligned}\right\} \qquad (11\,b)
$$

Bei der Integration würden die ersten Glieder rechts ohne Integralzeichen auftreten; während also die Gleichungen (9) Integrale über $\xi$, $\eta$, d. i. doppelte Quadraturen enthalten, werden in (11a) oder (11b) einfache Quadraturen erhalten. Es tritt aber noch $m'$, und in der zweiten Gleichung $\sin\varepsilon'$ als Nenner auf. Es sind aber, wenn man für $m'$ seinen Werth einführt, die linken Seiten von (11b)

$$
\frac{C}{A}n\frac{d\varepsilon'}{dt} - \cos\varepsilon'\frac{d\psi'}{dt}\frac{d\varepsilon'}{dt}; \qquad \frac{C}{A}n\sin\varepsilon'\frac{d\psi'}{dt} - \cos\varepsilon'\frac{d\psi'}{dt}\sin\varepsilon'\frac{d\psi'}{dt};
$$

schafft man die zweiten Glieder, welche von der zweiten Ordnung sind, nach rechts, und multiplicirt mit $\frac{A}{Cn}$, so folgt:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{d\varepsilon'}{dt} &= \frac{A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\sin\varepsilon'\frac{d\psi'}{dt}\right) - \frac{1}{Cn\sin\varepsilon'}\frac{\partial V}{\partial\psi'} + \frac{A}{Cn}\cos\varepsilon'\frac{d\psi'}{dt}\frac{d\varepsilon'}{dt}\\
\sin\varepsilon'\frac{d\psi'}{dt} &= -\frac{A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right) + \frac{1}{Cn}\frac{\partial V}{\partial\varepsilon'} + \frac{A}{Cn}\cos\varepsilon'\sin\varepsilon'\left(\frac{d\psi'}{dt}\right)^2.
\end{aligned}\right\} \qquad (12)
$$

Um die zweite Gleichung zu integriren, muss noch durch $\sin\varepsilon'$ dividirt werden; da aber

$$
\frac{1}{\sin\varepsilon'}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sin\varepsilon'}\frac{d\varepsilon'}{dt}\right) + \frac{\cos\varepsilon'}{\sin^2\varepsilon'}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)^2
$$

ist, so wird

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{d\psi'}{dt} = &-\frac{A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sin\varepsilon'}\frac{d\varepsilon'}{dt}\right) + \frac{1}{Cn\sin\varepsilon'}\frac{\partial V}{\partial\varepsilon'} + \\
&+\frac{A}{Cn}\cos\varepsilon'\left[\left(\frac{d\psi'}{dt}\right)^2 - \frac{1}{\sin^2\varepsilon'}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)^2\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (12\,a)
$$

Durch Integration der ersten Gleichung (12) und der Gleichung (12a) wird endlich erhalten:

$$
\left.\begin{aligned}
\varepsilon' &= \varepsilon_0' - \frac{1}{Cn}\int\frac{1}{\sin\varepsilon'}\frac{\partial V}{\partial\psi'}dt + \frac{A}{Cn}\sin\varepsilon'\frac{d\psi'}{dt} + \frac{A}{Cn}\int\cos\varepsilon'\frac{d\psi'}{dt}\frac{d\varepsilon'}{dt}dt\\
\psi' &= \psi_0' + \frac{1}{Cn}\int\frac{1}{\sin\varepsilon'}\frac{\partial V}{\partial\varepsilon'}dt - \frac{A}{Cn}\frac{1}{\sin\varepsilon'}\frac{d\varepsilon'}{dt} + \frac{A}{Cn}\int\cos\varepsilon'\left[\left(\frac{d\psi'}{dt}\right)^2 - \frac{1}{\sin^2\varepsilon'}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)^2\right]dt.
\end{aligned}\right\} \qquad (13)
$$

Zu den einfachen Integralen, welche in den beiden ersten auf $\varepsilon_0$ und $\psi_0$ folgenden Gliedern enthalten sind, treten hier noch Doppelintegrale auf, welche allerdings von der zweiten Ordnung, aber, wie eine genaue Untersuchung zeigt, nicht ganz unmerklich sind[1]), sondern bis etwa 0''·01 ansteigen, daher für den Fall, dass die äusserste Genauigkeit gefordert wird, noch zu berücksichtigen wären.

---

1) Vergl. OPPOLZER, Lehrbuch zur Bahnbestimmung von Planeten und Kometen, I. Theil, 2. Aufl., pag 153.

**96. Die Bewegungen der Rotationsaxe der Erde.** Führt man in die Formeln von No. 92 die Bedingung $A = B$, $r = n$, $\mathfrak{N} = 0$ ein, so werden dieselben:

$$AW = (w)_1 \mathfrak{L} + (w)_2 \mathfrak{M} \qquad W' = [(w)_1 q - (w)_2 p] \frac{C-A}{A} n$$

$$A\Psi = (\psi)_1 \mathfrak{L} + (\psi)_2 \mathfrak{M} \quad (1) \qquad \Psi' = [(\psi)_1 q - (\psi)_2 p] \frac{C-A}{A} n \quad (2)$$

$$AE = (\epsilon)_1 \mathfrak{L} + (\epsilon)_2 \mathfrak{M} \qquad E' = [(\epsilon)_1 q - (\epsilon)_2 p] \frac{C-A}{A} n.$$

Führt man für $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ die Ausdrücke 94 (5) ein, so erhält man aus (1):

$$AW = \sin\epsilon \sin(\psi'-\psi) \frac{\partial V}{\partial \epsilon'} - [\sin\epsilon \cos\epsilon' \cos(\psi'-\psi) - \sin\epsilon' \cos\epsilon] \frac{1}{\sin\epsilon'} \frac{\partial V}{\partial \psi'}$$

$$A\Psi = \cos(\psi'-\psi) \frac{\partial V}{\partial \epsilon'} - \operatorname{cotang}\epsilon' \sin(\psi'-\psi) \frac{\partial V}{\partial \psi'} \qquad (3)$$

$$AE = -\cos\epsilon \sin(\psi'-\psi) \frac{\partial V}{\partial \epsilon'} - [\cos\epsilon \cos\epsilon' \cos(\psi'-\psi) + \sin\epsilon' \sin\epsilon] \frac{1}{\sin\epsilon'} \frac{\partial V}{\partial \psi'}.$$

Führt man in (2) an Stelle von $p$, $q$ ihre Ausdrücke durch 91 (5) ein, so folgt:

$$W' = \left\{ + [\sin\epsilon \cos\epsilon' \cos(\psi'-\psi) - \sin\epsilon' \cos\epsilon] \frac{d\epsilon'}{dt} - \sin\epsilon \sin(\psi'-\psi) \sin\epsilon' \frac{d\psi'}{dt} \right\} \frac{C-A}{A} n$$

$$\Psi' = \left\{ + \cos\epsilon' \sin(\psi'-\psi) \frac{d\epsilon'}{dt} + \cos(\psi'-\psi) \sin\epsilon' \frac{d\psi'}{dt} \right\} \frac{C-A}{A} n \qquad (4)$$

$$E' = \left\{ + [\cos\epsilon \cos\epsilon' \cos(\psi'-\psi) + \sin\epsilon' \sin\epsilon] \frac{d\epsilon'}{dt} - \cos\epsilon \sin(\psi'-\psi) \sin\epsilon' \frac{d\psi'}{dt} \right\} \frac{C-A}{A} n.$$

Die Ausdrücke (3) enthalten bereits die in den Differentialgleichungen 92 (6) nöthigen drehenden Kräfte, ausgedrückt durch die Differentialquotienten des Potentiales; die Ausdrücke (4) hingegen durch $\sin\epsilon' \frac{d\psi'}{dt}$ und $\frac{d\epsilon'}{dt}$. Diese letzteren können auch durch 93 (12) ausgedrückt werden. Die sämmtlichen Ausdrücke enthalten überdiess bereits die Werthe $\epsilon$ und $\psi$ selbst, welche erst durch Integration der Gleichungen 92 (6) bekannt werden. Wenn der Oeffnungswinkel $\eta$ beträchtlich wäre, so würden $\psi' - \psi$ und $\epsilon' - \epsilon$ auch merkliche Werthe erlangen. Setzt man sie dann in erster Näherung gleich Null, so können bei einer wiederholten Rechnung die bereits erhaltenen Werthe von $\psi$, $\epsilon$ eingeführt werden. Man kann daher die Ausdrücke (3) und (4) so zerfällen, dass ein Theil von $(\psi' - \psi)$, $(\epsilon' - \epsilon)$ unabhängig wird, und der andere eine kleine, von diesen Grössen abhängige Correction darstellt. Setzt man also

$$W = W_0 + \Delta W; \quad \Psi = \Psi_0 + \Delta\Psi; \quad E = E_0 + \Delta E$$
$$W' = W_0' + \Delta W'; \quad \Psi' = \Psi_0' + \Delta\Psi'; \quad E' = E_0' + \Delta E'$$

und lässt bei den mit $(C - A)$ multiplicirten Ausdrücken die Grössen von der zweiten Ordnung von $\psi' - \psi$, $\epsilon' - \epsilon$ weg, und berücksichtigt, dass

$$\frac{1}{\sin\epsilon} = \frac{1}{\sin\epsilon'} - \frac{\cos\epsilon'}{\sin^2\epsilon'} \sin(\epsilon'-\epsilon) + \tfrac{1}{2} \frac{\cos^2\epsilon'}{\sin^3\epsilon'} \sin^2(\epsilon'-\epsilon)$$

ist, so erhält man

$$AW_0 = 0 \qquad W_0' = 0$$

$$\frac{A\Psi_0}{\sin\epsilon} = + \frac{1}{\sin\epsilon'} \frac{\partial V}{\partial \epsilon'} \quad (5) \qquad \frac{\Psi'}{\sin\epsilon} = + \frac{d\psi'}{dt} \cdot \frac{C-A}{A} n \quad (6)$$

$$AE_0 = - \frac{1}{\sin\epsilon'} \frac{\partial V}{\partial \psi'} \qquad E' = + \frac{d\epsilon'}{dt} \cdot \frac{C-A}{A} n$$

und

$$A\Delta W = + \sin\epsilon\,\sin(\psi'-\psi)\frac{\partial V}{\partial\epsilon'} + \sin(\epsilon'-\epsilon)\frac{1}{\sin\epsilon'}\,\frac{\partial V}{\partial\psi'} + 2\cos\epsilon'\sin^2\tfrac{1}{2}(\psi'-\psi)\frac{\partial V}{\partial\psi'}$$

$$\begin{aligned}\frac{A\Delta\Psi}{\sin\epsilon} = &-\frac{\cos\epsilon'}{\sin^2\epsilon'}\left[\sin(\psi'-\psi)\frac{\partial V}{\partial\psi'} + \sin(\epsilon'-\epsilon)\frac{\partial V}{\partial\epsilon'}\right] - 2\sin^2\tfrac{1}{2}(\psi'-\psi)\frac{1}{\sin\epsilon'}\,\frac{\partial V}{\partial\epsilon'} + \\ &+ \frac{\cos^2\epsilon'}{\sin^2\epsilon'}\left[\tfrac{1}{2}\sin^2(\epsilon'-\epsilon)\frac{\partial V}{\partial\epsilon'} + \sin(\psi'-\psi)\sin(\epsilon'-\epsilon)\frac{\partial V}{\partial\psi'}\right]\end{aligned} \qquad (7)$$

$$A\Delta E = -\cos\epsilon\,\sin(\psi'-\psi)\frac{\partial V}{\partial\epsilon'} + 2\left[\sin^2\tfrac{1}{2}(\epsilon'-\epsilon) + \cos^2\epsilon'\sin^2\tfrac{1}{2}(\psi'-\psi)\right]\frac{1}{\sin\epsilon'}\,\frac{\partial V}{\partial\psi'}$$

$$\begin{aligned}\Delta W' &= \left\{-\sin(\epsilon'-\epsilon)\frac{d\epsilon'}{dt} - \sin\epsilon'\sin(\psi'-\psi)\sin\epsilon'\frac{d\psi'}{dt}\right\}\frac{C-A}{A}n \\ \frac{\Delta\Psi'}{\sin\epsilon} &= +\operatorname{cotang}\epsilon'\left\{\sin(\psi'-\psi)\frac{d\epsilon'}{dt} - \sin(\epsilon'-\epsilon)\frac{d\psi'}{dt}\right\}\frac{C-A}{A}n \\ \Delta E' &= \left\{-\cos\epsilon'\sin(\psi'-\psi)\sin\epsilon'\frac{d\psi'}{dt}\right\}\frac{C-A}{A}n.\end{aligned} \qquad (8)$$

Die Ausdrücke würden, selbst wenn $\eta$ bis zu einem Grad gehen würde, vollständig ausreichen. Berücksichtigt man zunächst die von $\psi'-\psi$, $\epsilon'-\epsilon$ unabhängigen Glieder, so wird

$$\frac{dw}{dt} = 0, \qquad (9)$$

daher $w$ constant, also $w = n$; dann wird:

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{dt} &= +\frac{1}{An}\,\frac{1}{\sin\epsilon'}\,\frac{\partial V}{\partial\epsilon'} - \frac{C-A}{A}\,\frac{d\psi'}{dt} \\ \frac{d\epsilon}{dt} &= -\frac{1}{An}\,\frac{1}{\sin\epsilon'}\,\frac{\partial V}{\partial\psi'} - \frac{C-A}{A}\,\frac{d\epsilon'}{dt}.\end{aligned} \qquad (10)$$

Setzt man hier die Ausdrücke 95 (12) ein, so folgt:

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{dt} &= +\frac{1}{An}\,\frac{1}{\sin\epsilon'}\,\frac{\partial V}{\partial\epsilon'} + \frac{C-A}{Cn\sin\epsilon'}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{d\epsilon'}{dt}\right) - \frac{C-A}{ACn\sin\epsilon'}\,\frac{\partial V}{\partial\epsilon'} - \frac{C-A}{Cn}\cos\epsilon'\left(\frac{d\psi'}{dt}\right)^2 \\ \frac{d\epsilon}{dt} &= -\frac{1}{An}\,\frac{1}{\sin\epsilon'}\,\frac{\partial V}{\partial\psi'} - \frac{C-A}{Cn}\,\frac{d}{dt}\left(\sin\epsilon'\frac{d\psi'}{dt}\right) + \frac{C-A}{ACn\sin\epsilon'}\,\frac{\partial V}{\partial\psi'} - \frac{C-A}{Cn}\cos\epsilon'\,\frac{d\psi'}{dt}\,\frac{d\epsilon'}{dt}\end{aligned}$$

daher in ähnlicher Weise reducirt, wie in 95:

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{dt} &= +\frac{1}{Cn}\,\frac{1}{\sin\epsilon'}\,\frac{\partial V}{\partial\epsilon'} + \frac{C-A}{Cn}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sin\epsilon'}\,\frac{d\epsilon'}{dt}\right) - \frac{C-A}{Cn}\cos\epsilon'\left\{\left(\frac{d\psi'}{dt}\right)^2 - \frac{1}{\sin^2\epsilon'}\left(\frac{d\epsilon'}{dt}\right)^2\right\} \\ \frac{d\epsilon}{dt} &= -\frac{1}{Cn}\,\frac{1}{\sin\epsilon'}\,\frac{\partial V}{\partial\psi'} - \frac{C-A}{Cn}\,\frac{d}{dt}\left(\sin\epsilon'\frac{d\psi'}{dt}\right) - \frac{C-A}{Cn}\cos\epsilon'\,\frac{d\psi'}{dt}\,\frac{d\epsilon'}{dt}\end{aligned} \qquad (11)$$

oder integrirt:

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_0 + \frac{1}{Cn}\int\frac{1}{\sin\epsilon'}\,\frac{\partial V}{\partial\epsilon'}\,dt + \frac{C-A}{Cn}\,\frac{1}{\sin\epsilon'}\,\frac{d\epsilon'}{dt} - \\ &\quad - \frac{C-A}{Cn}\int\cos\epsilon'\left\{\left(\frac{d\psi'}{dt}\right)^2 - \frac{1}{\sin^2\epsilon'}\left(\frac{d\epsilon'}{dt}\right)^2\right\}dt \\ \epsilon &= \epsilon_0 - \frac{1}{Cn}\int\frac{1}{\sin\epsilon'}\,\frac{\partial V}{\partial\psi'}\,dt - \frac{C-A}{Cn}\sin\epsilon'\,\frac{d\psi'}{dt} - \\ &\quad - \frac{C-A}{Cn}\int\cos\epsilon'\,\frac{d\psi'}{dt}\,\frac{d\epsilon'}{dt}\,dt.\end{aligned} \qquad (12)$$

Vergleicht man diese Ausdrücke mit den Ausdrücken (18) der vorigen No., so findet man, dass die ersten Glieder in beiden identisch sind, die zweiten und

dritten Glieder in $\psi$ und $\varepsilon$ aber mit dem Coëfficient $\frac{C-A}{A}$ multiplicirt, also wesentlich verkleinert erscheinen. Während also bei der Bestimmung der Lage des Körpers selbst (seiner Trägheitsaxe) die dritten Ausdrücke immerhin noch in gewissen Fällen zu berücksichtigen sind, werden dieselben, wenn man die Bewegung der Rotationsaxe untersucht, völlig belanglos, da sie noch nicht 0''·00008 erreichen. Was die zweiten Glieder in den Ausdrücken (12) anbetrifft, so wird, wenn man sie in erster Näherung vernachlässigt, und mit den erhaltenen Werthen von $\psi'$, $\varepsilon'$ berechnet, ihr Werth in $\varepsilon$: 0''·0008, in $\psi$: 0''·0006 nicht übersteigen; sie sind daher ebenfalls wegen des Faktors $\frac{C-A}{C}$ verschwindend. Man hat daher

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_0 + \frac{1}{Cn}\int\frac{1}{\sin\varepsilon'}\frac{\partial V}{d\varepsilon'}dt\\ \varepsilon &= \varepsilon_0 - \frac{1}{Cn}\int\frac{1}{\sin\varepsilon'}\frac{\partial V}{d\psi'}dt.\end{aligned} \tag{13}$$

Es ist noch nöthig den Antheil zu bestimmen, welchen die Zusatzglieder (7) und (8) erzeugen. Bestimmt man aus 95 (13) und 96 (12) die Werthe von $\psi'-\psi$, $\varepsilon'-\varepsilon$, so findet man:

$$\begin{aligned}(\psi'-\psi) &= (\psi_0'-\psi_0) - \frac{1}{n\sin\varepsilon'}\frac{d\varepsilon'}{dt} + \frac{1}{n}\int\cos\varepsilon'\left\{\left(\frac{d\psi'}{dt}\right)^2 - \frac{1}{\sin^2\varepsilon'}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)^2\right\}dt\\ (\varepsilon'-\varepsilon) &= (\varepsilon_0'-\varepsilon_0) + \frac{1}{n}\sin\varepsilon'\frac{d\psi'}{dt} + \frac{1}{n}\int\cos\varepsilon'\frac{d\psi'}{dt}\frac{d\varepsilon'}{dt}dt.\end{aligned} \tag{14}$$

Nun ist

$$\tang\psi = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2};\qquad \tang\psi' = -\frac{\gamma_1}{\gamma_2};\qquad \cos\varepsilon = \lambda_3;\quad \cos\varepsilon' = \gamma_3$$

und nach 90 (6):

$$\begin{aligned}\lambda_3 &= \left(\gamma_3 + \alpha_3\frac{p}{r} + \beta_3\frac{q}{r}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{p^2+q^2}{r^2}\right)\\ \frac{\lambda_1}{\lambda_2} &= \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\left(1 + \frac{\alpha_1 p}{\gamma_1 r} + \frac{\beta_1 q}{\gamma_1 r}\right)\left(1 - \frac{\alpha_2 p}{\gamma_2 r} - \frac{\beta_2 q}{\gamma_2 r}\right),\end{aligned}$$

folglich

$$\lambda_3 - \gamma_3 = \frac{\alpha_3 p + \beta_3 q}{\gamma_3 r};\qquad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\left[\left(\frac{\alpha_1}{\gamma_1} - \frac{\alpha_2}{\gamma_2}\right)\frac{p}{r} + \left(\frac{\beta_1}{\gamma_1} - \frac{\beta_2}{\gamma_2}\right)\frac{q}{r}\right].$$

Hieraus folgt, dass $\varepsilon'-\varepsilon$ stets von der Ordnung von $p$, $q$ und $\psi'-\psi$ von der Ordnung $\frac{p_1}{\sin\varepsilon'}$, $\frac{q_1}{\sin\varepsilon'}$ ist, daher nach 91 (5): $\varepsilon'-\varepsilon$ von der Ordnung von $\sin\varepsilon'\frac{d\psi'}{dt}$, $\frac{d\varepsilon'}{dt}$; und $\psi'-\psi$ von der Ordnung $\frac{d\psi'}{dt}$, $\frac{1}{\sin\varepsilon'}\frac{d\varepsilon'}{dt}$. Dasselbe gilt daher von $\psi_0'-\psi_0$, $\varepsilon_0'-\varepsilon_0$. Die Ausdrücke (14) treten aber in (7), (8) noch multiplicirt mit den störenden Kräften selbst auf; die Ergänzungsglieder (7), (8) sind daher mindestens von der zweiten Ordnung dieser, und können ebenfalls unbedenklich übergangen werden. Man wird daher für die Bewegung der Erdaxe durch die Integration der Gleichungen (13) die vollständigen Ausdrücke erhalten[1]).

---

[1]) Doch können immerhin kleine Zusatzglieder zu den secularen Veränderungen (Präcession) Berücksichtigung verdienen; es würde aber die Ableitung derselben an dieser Stelle viel zu weit führen.

97. Präcession und Nutation. Die Entwickelung der Ausdrücke für $\psi'$ und $\varepsilon'$ erfordert nun zunächst die Kenntniss des Werthes von $V$ und seiner Differentialquotienten nach $\varepsilon'$ und $\psi'$. Nach 95 (2) ist

$$\frac{\partial V}{\partial \psi'} = -\frac{3k^2 M_1}{\rho^3}(C-A)\zeta'\frac{\partial \zeta}{\partial \psi'}$$
$$\frac{\partial V}{\partial \varepsilon'} = -\frac{3k^2 M_1}{\rho^3}(C-A)\zeta'\frac{\partial \zeta'}{\partial \varepsilon'}, \tag{1}$$

wobei

$$\zeta' = \gamma_1\xi + \gamma_2\eta + \gamma_3\zeta = -\sin\psi'\sin\varepsilon'\xi + \cos\psi'\sin\varepsilon'\eta + \cos\varepsilon'\zeta \tag{2}$$

ist. Sind nun $\lambda_0$, $\beta_0$ die geocentrische Länge und Breite, $\rho$ die geocentrische Distanz des anziehenden Punktes, bezogen auf die feste Ekliptik $XY$ (Fig. 271), so wird

$$\begin{aligned}\xi &= \rho\cos\beta_0\sin\lambda_0\\ \eta &= \rho\cos\beta_0\sin\lambda_0\\ \zeta &= \rho\sin\beta_0.\end{aligned} \tag{3}$$

Wird noch für den Faktor $\frac{k^2 M_1}{\rho^3}$ die mittlere Bewegung eingeführt, so wird zunächst für die Wirkung des Mondes:

$$\frac{1}{nC\sin\varepsilon'}\frac{\partial V}{\partial \varepsilon'} = -\frac{3L'^2}{(1+\nu')\rho^3}\frac{C-A}{nC}(-\sin\psi'\cos\beta_0\cos\lambda_0+\cos\psi'\cos\beta_0\sin\lambda_0+\operatorname{cotang}\varepsilon'\sin\beta_0)\times$$
$$\times(-\sin\psi'\cos\varepsilon'\cos\beta_0\cos\lambda_0+\cos\psi'\cos\varepsilon'\cos\beta_0\sin\lambda_0-\sin\varepsilon'\sin\beta_0)$$
$$\frac{1}{nC\sin\varepsilon'}\frac{\partial V}{\partial \psi'} = -\frac{3L'^2}{(1+\nu')\rho^3}\frac{C-A}{nC}(-\sin\psi'\cos\beta_0\cos\lambda_0+\cos\psi'\cos\beta_0\sin\lambda_0+\operatorname{cotang}\varepsilon'\sin\beta_0)\times$$
$$\times(-\cos\psi'\sin\varepsilon'\cos\beta_0\cos\lambda_0-\sin\psi'\sin\varepsilon'\cos\beta_0\sin\lambda_0)$$

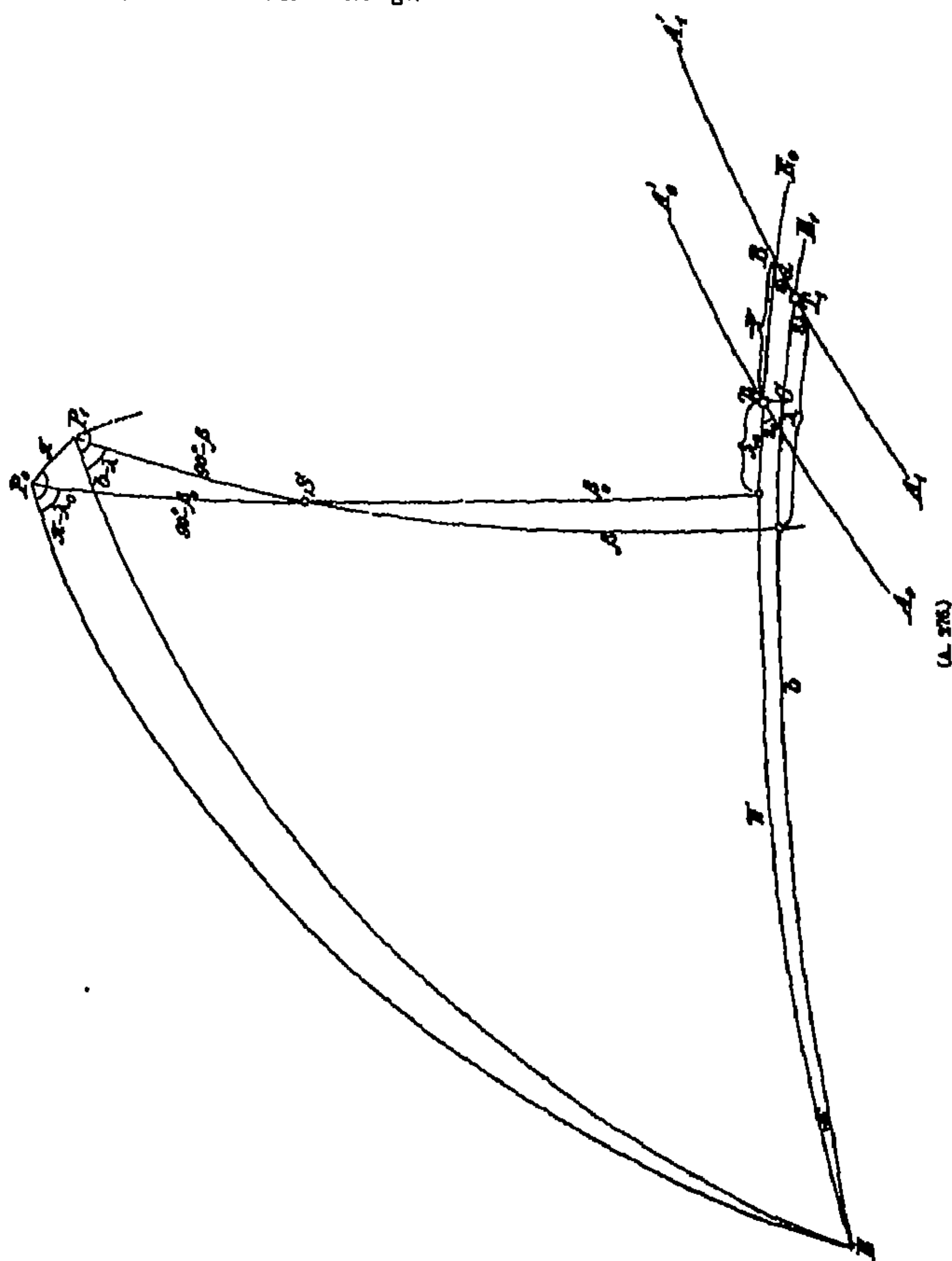
oder

$$\frac{1}{nC\sin\varepsilon'}\frac{\partial V}{\partial \varepsilon'} = -\frac{3L'^2}{(1+\nu')\rho^3}\frac{C-A}{nC}[\cos\beta_0\sin(\lambda_0-\psi')+\operatorname{cotang}\varepsilon'\sin\beta_0]\times$$
$$\times[\cos\varepsilon'\cos\beta_0\sin(\lambda_0-\psi')-\sin\varepsilon'\sin\beta_0]$$
$$\frac{1}{nC\sin\varepsilon'}\frac{\partial V}{\partial \psi'} = +\frac{3L'^2}{(1+\nu')\rho^3}\frac{C-A}{nC}[\cos\beta_0\sin(\lambda_0-\psi')+\operatorname{cotang}\varepsilon'\sin\beta_0]\times \tag{4}$$
$$\times[\sin\varepsilon'\cos\beta_0\cos(\lambda_0-\psi')],$$

wobei man zu beachten hat, dass man als Einheit für $\rho$ die mittlere Entfernung des anziehenden Körpers zu wählen hat, und $\nu'$ durch die Gleichung 94 (10) bestimmt wird.

Die Coordinaten $\beta_0$, $\lambda_0$ des anziehenden Körpers beziehen sich auf eine feste Ekliptik. Die wahre Ekliptik ist aber in Folge der Anziehung der Erde durch die Planeten etwas veränderlich; ihre instantane Lage ist durch die Theorie der Bewegung der Erde gegeben. In der astronomischen Praxis nun bedarf man die Coordinaten $\beta$, $\lambda$, bezogen auf die instantane, wahre Ekliptik, auf welche dieselbe daher auch in den astronomischen Tafeln bezogen werden. Die Werthe von $\beta_0$, $\lambda_0$ sind demnach nicht direkt gegeben, und müssen aus den durch die Störungstheorie gegebenen Werthen $\beta$, $\lambda$ abgeleitet werden. Die Lage der wahren Ekliptik ist bestimmt durch die Länge $\Upsilon_0 E = \Pi$ ihres aufsteigenden Knotens in der festen Ekliptik, gezählt von dem festen Frühlingspunkte $\Upsilon_0$ (Fig. 276) und ihre Neigung $\pi$ gegen diese. Ist dann $A_0 A_0'$ der Aequator für eine gegebene Epoche, $A_1 A_1'$ der Aequator für eine andere Zeit, so ist $\Upsilon_0 B$, gezählt in der Bewegungsrichtung (also über $E$) der bisher mit $\psi'$ bezeichnete Winkel ($X\Omega$ in Fig. 271). Hier ist aber $\psi$ an Stelle von $\psi'$ zu setzen, weil

$AA'$ den Rotationsäquator und nicht den Trägheitsäquator bezeichnet. Daher ist der kleine Bogen $\Upsilon_0 B = 360° - \psi$ oder $-\psi$. Winkel $EBA_1$ ist der Winkel $\epsilon$. Für $\pi$ und $\Pi$ ergiebt die Theorie der Störungen der Erdbahn, wenn man nur die secularen Glieder berücksichtigt:



$$\begin{aligned} \text{tang}\,\pi\,\sin\Pi &= p_1 t + p_2 t^2 \\ \text{tang}\,\pi\,\cos\Pi &= q_1 t + q_2 t^2, \end{aligned} \qquad (4)$$

wo nach LEVERRIER

$$p_1 = +5''{\cdot}84 \qquad p_2 = +0''{\cdot}196$$
$$q_1 = -47{\cdot}59 \qquad q_2 = +0{\cdot}057$$

ist, wenn $t$ in Einheiten des julianischen Jahrhunderts gerechnet wird[1]. In Folge dieser Bewegung der Ekliptik rückt der wahre Frühlingspunkt nach $\Upsilon_1$; die Strecke $B\Upsilon_1 = a$ bezeichnet man, obzwar sie eine Folge der fortschreitenden Bewegung ist, wegen ihres Einflusses auf die Präcessionserscheinungen, also eigentlich mit Unrecht »Präcession durch die Planeten«[2]. Bezeichnet man noch $E\Upsilon_1$ mit $b$, so hat man mit den weiteren aus der Figur ersichtlichen Bezeichnungen aus dem Dreiecke $SP_0P_1$, in welchem $P_0$ und $P_1$ die Pole der festen und instantanen Ekliptik sind[3])

$$\begin{aligned} \sin\beta_0 &= \sin\beta\cos\pi - \cos\beta\sin\pi\sin(b-\lambda) \\ \cos\beta_0\sin(\Pi-\lambda_0) &= \sin\beta\sin\pi + \cos\beta\cos\pi\sin(b-\lambda) \\ \cos\beta_0\cos(\Pi-\lambda_0) &= \cos\beta\cos(b-\lambda). \end{aligned}$$

Multiplicirt man die zweite Gleichung mit $+\sin(\Pi-\psi')$, die dritte mit $+\cos(\Pi-\psi')$ und addirt; sodann die zweite mit $-\cos(\Pi-\psi')$, die dritte mit $+\sin(\Pi-\psi')$ und addirt wieder, so erhält man:

$$\begin{aligned} \cos\beta_0\cos(\lambda_0-\psi') &= +\sin\beta\sin\pi\sin(\Pi-\psi') + \\ &+ \cos\beta\left[\cos(b-\lambda)\cos(\Pi-\psi') + \sin(b-\lambda)\sin(\Pi-\psi')\cos\pi\right] \\ \cos\beta_0\sin(\lambda_0-\psi') &= -\sin\beta\sin\pi\cos(\Pi-\psi') + \\ &+ \cos\beta\left[\cos(b-\lambda)\sin(\Pi-\psi') - \sin(b-\lambda)\cos(\Pi-\psi')\cos\pi\right] \\ \sin\beta_0 &= +\sin\beta\cos\pi - \cos\beta\sin\pi\sin(b-\lambda), \end{aligned} \tag{5}$$

wodurch die erforderliche Zurückführung geleistet ist. In diesen Formeln tritt aber noch die Grösse $b$ auf; diese ist bestimmt durch die Seite $\Pi - \psi$ und die anliegenden Winkel $\pi$ und $\epsilon$ in dem Dreiecke $EB\Upsilon_1$; es ist dabei:

$$\begin{aligned} \tang\tfrac{1}{2}(b+a) &= \frac{\cos\frac{1}{2}(\epsilon-\pi)}{\cos\frac{1}{2}(\epsilon+\pi)}\tang\tfrac{1}{2}(\Pi-\psi); \\ \tang\tfrac{1}{2}(b-a) &= \frac{\sin\frac{1}{2}(\epsilon-\pi)}{\sin\frac{1}{2}(\epsilon+\pi)}\tang\tfrac{1}{2}(\Pi-\psi) \end{aligned}$$

und hieraus durch Reihenentwickelung[4])

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(b+a) &= \tfrac{1}{2}(\Pi-\psi) + \tang\tfrac{1}{2}\epsilon\tang\tfrac{1}{2}\pi\sin(\Pi-\psi) + \tang^2\tfrac{1}{2}\epsilon\tang^2\tfrac{1}{2}\pi\sin 2(\Pi-\psi) + \ldots \\ \tfrac{1}{2}(b-a) &= \tfrac{1}{2}(\Pi-\psi) - \cotang\tfrac{1}{2}\epsilon\tang\tfrac{1}{2}\pi\sin(\Pi-\psi) + \cotang^2\tfrac{1}{2}\epsilon\tang^2\tfrac{1}{2}\pi\sin 2(\Pi-\psi) - \ldots \\ b &= (\Pi-\psi) - 2\cotang\epsilon\tang\tfrac{1}{2}\pi\sin(\Pi-\psi) + 2\frac{1+\cos^2\epsilon}{\sin^2\epsilon}\tang^2\tfrac{1}{2}\pi\sin 2(\Pi-\psi) + \ldots \\ a &= 2\cosec\epsilon\tang\tfrac{1}{2}\pi\sin(\Pi-\psi) - 4\frac{\cos\epsilon}{\sin^2\epsilon}\tang^2\tfrac{1}{2}\pi\sin 2(\Pi-\psi) + \ldots \end{aligned} \tag{6}$$

Hier tritt noch die Grösse $\epsilon$ auf, welche erst zu bestimmen ist; setzt man daher $\epsilon = \epsilon_0 + \Delta\epsilon$, wo $\epsilon_0$ eine Constante, die Schiefe der Ekliptik für die Epoche ist, so werden hierin die noch unbekannten kleinen Grössen $\psi$ und $\Delta\epsilon$

---

[1]) Vergl. v. OPPOLZER l. c., pag. 124. Die folgende Ableitung sowie die numerischen Werthe sind der Hauptsache nach diesem Werke entnommen. Wählt man das julianische Jahr als Einheit, so sind $p_1$, $q_1$ durch 100; $p_2$, $q_2$ durch 10000 zu dividiren.

[2]) Es wäre consequenter, die Strecke $a$ auf dem festen Aequator zu zählen, da auch der Bogen $\Pi$ von dem festen Frühlingspunkt $\Upsilon_0$ gezählt wird. Bemerkt mag schon hier werden, dass der Werth von $\Pi$ beständig abnimmt (vergl. den Artikel »Präcession«).

[3]) Es ist zu erwähnen, dass $180° - \Pi$ und demnach auch $180° - b$ mässige Winkel sind, weshalb man meist auch $180° - b = b'$ in die Rechnung einführt.

[4]) Nach den Formeln:

$$\tang y = n\tang x; \qquad m = \frac{n-1}{n+1}$$

$$y = x + m\sin 2x + \tfrac{1}{2}m^2\sin 4x + \tfrac{1}{3}m^3\sin 6x + \ldots$$

vorhanden sein. Nun ist bis einschliesslich Grössen zweiter Ordnung richtig: $tang\,\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\,tang\,\pi$ und

$$\frac{1}{\sin\varepsilon} = \frac{1}{\sin\varepsilon_0} - \frac{\cos\varepsilon_0}{\sin^2\varepsilon_0}\Delta\varepsilon \qquad \frac{\cos\varepsilon}{\sin^2\varepsilon} = \frac{\cos\varepsilon_0}{\sin^2\varepsilon_0} - \frac{1+\cos^2\varepsilon_0}{\sin^3\varepsilon_0}\Delta\varepsilon$$

$$cotang\,\varepsilon = cotang\,\varepsilon_0 - \frac{1}{\sin^2\varepsilon_0}\Delta\varepsilon \qquad \frac{1+\cos^2\varepsilon}{\sin^2\varepsilon} = \frac{1+\cos^2\varepsilon_0}{\sin^2\varepsilon_0} - 4\,\frac{\cos\varepsilon_0}{\sin^3\varepsilon_0}\Delta\varepsilon.$$

Entwickelt man dann noch $\sin(\Pi-\psi)$, $\sin 2(\Pi-\psi)$ und setzt für $tang\,\pi\sin\Pi$, $tang\,\pi\cos\Pi$ ihre Werthe (4), so erhält man:

$$a = \frac{p_1}{\sin\varepsilon_0}\,t + \left[\frac{p_2}{\sin\varepsilon_0} - \frac{\cos\varepsilon_0}{\sin^2\varepsilon_0}\,p_1\,q_1\right]t^2 - \frac{q_1}{\sin\varepsilon_0}\,\psi\cdot t - \frac{\cos\varepsilon_0}{\sin^2\varepsilon_0}\,p_1\cdot\Delta\varepsilon\,t$$

$$b = \Pi - \psi - cotang\,\varepsilon_0\,p_1\,t - \left[cotang\,\varepsilon_0\,p_2 - \frac{1}{2}\,\frac{1+\cos^2\varepsilon_0}{\sin^2\varepsilon_0}\,p_1\,q_1\right]t^2 + \qquad (7)$$

$$+ cotang\,\varepsilon_0\,q_1\,\psi\cdot t + \frac{p_1}{\sin^2\varepsilon_0}\,\Delta\varepsilon\cdot t.$$

Man erhält weiter, indem man innerhalb der hier beizubehaltenden Genauigkeitsgrenzen $\psi'$ mit $\psi$ identificirt, und die zweiten Potenzen der Zeit weglässt[1])

$$\sin\pi\sin(\Pi-\psi) = tang\,\pi\sin\Pi\cos\psi - tang\,\pi\cos\Pi\sin\psi = p_1\,t; \qquad \sin\pi\cos(\Pi-\psi) = q_1\,t$$

$$\cos(b-\lambda)\cos(\Pi-\psi) + \sin(b-\lambda)\sin(\Pi-\psi)\cos\pi =$$

$$= \cos[b-(\Pi-\psi)-\lambda] + \{\cos[b+(\Pi-\psi)-\lambda] - \cos[b-(\Pi-\psi)-\lambda]\}\sin^2\tfrac{1}{2}\pi$$

$$= \cos\lambda\cos[b-(\Pi-\psi)] + \sin\lambda\sin[b-(\Pi-\psi)]$$

$$= \cos\lambda - \sin\lambda\,cotang\,\varepsilon_0\,p_1\,t + \sin\lambda\,cotang\,\varepsilon_0\,q_1\cdot\psi\cdot t + \sin\lambda\,\frac{p_1}{\sin^2\varepsilon_0}\Delta\varepsilon\cdot t$$

$$\cos(b-\lambda)\sin(\Pi-\psi) - \sin(b-\lambda)\cos(\Pi-\psi)\cos\pi =$$

$$= \sin\lambda + \cos\lambda\,cotang\,\varepsilon_0\,p_1\,t - \cos\lambda\,cotang\,\varepsilon_0\,q_1\,\psi\cdot t - \cos\lambda\,\frac{p_1}{\sin^2\varepsilon_0}\,\Delta\varepsilon\cdot t$$

$$\sin\pi\sin(b-\lambda) = \cos\lambda\cdot p_1\,t - \sin\lambda\cdot q_1\,t,$$

demnach

$$\cos\beta_0\cos(\lambda_0-\psi') = +\sin\beta\,p_1\,t + \cos\beta[\cos\lambda - \sin\lambda\,cotang\,\varepsilon_0\,p_1\,t] +$$

$$+ \cos\beta\left\{\sin\lambda\,cotang\,\varepsilon_0\,q_1\,\psi t + \sin\lambda\,\frac{p_1}{\sin^2\varepsilon_0}\,\Delta\varepsilon t\right\}$$

$$\cos\beta_0\sin(\lambda_0-\psi') = -\sin\beta\,q_1\,t + \cos\beta[\sin\lambda + \cos\lambda\,cotang\,\varepsilon_0\,p_1\,t] -$$

$$- \cos\beta\left\{\cos\lambda\,cotang\,\varepsilon_0\,q_1\,\psi t + \cos\lambda\,\frac{p_1}{\sin^2\varepsilon_0}\,\Delta\varepsilon t\right\}$$

oder

$$\cos\beta_0\cos(\lambda_0-\psi') = \cos\beta\cos\lambda + [\sin\beta\,p_1 - \cos\beta\sin\lambda\,cotang\,\varepsilon_0\,p_1]t +$$

$$+ \sin\lambda\cos\beta\,cotang\,\varepsilon_0\,q_1\,\psi t + \sin\lambda\cos\beta\,\frac{p_1}{\sin^2\varepsilon_0}\,\Delta\varepsilon\cdot t$$

$$\cos\beta_0\sin(\lambda_0-\psi') = \cos\beta\sin\lambda - [\sin\beta\,q_1 - \cos\beta\cos\lambda\,cotang\,\varepsilon_0\,p_1]t - \qquad (8)$$

$$- \cos\lambda\cos\beta\,cotang\,\varepsilon_0\,q_1\,\psi t - \cos\lambda\cos\beta\,\frac{p_1}{\sin^2\varepsilon_0}\,\Delta\varepsilon\cdot t$$

$$\sin\beta_0 = \sin\beta - [\cos\beta\cos\lambda\,p_1 - \cos\beta\sin\lambda\,q_1]t.$$

---

1) Die Glieder mit den Produkten von $p_1$, $q_1$ und $\Delta\varepsilon$, $\psi$ zur zweiten Ordnung werden vorerst noch beibehalten, um den Einfluss von $\psi$, $\Delta\varepsilon$ zu übersehen; für die zweite Potenz von $t$ vergl. OPPOLZER, l. c., pag. 163 ff.

Man erhält überdies für die wahre Schiefe der Ekliptik $\varepsilon_1$:

$$\sin\varepsilon_1 = \frac{\sin(\Pi-\psi)}{\sin b}\sin\varepsilon$$

und hieraus nach einigen leichten Reductionen (vergl. v. OPPOLZER, l. c., pag. 161):

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon + q_1 t + [\tfrac{1}{2}\,cotang\,\varepsilon_0\,p_1^2 + q_2]t^2 + p_1\,\psi t.$$

Es ist hieraus ersichtlich, dass, wenn man nur die Glieder erster Ordnung berücksichtigt, $\psi$ und $\Delta\varepsilon$ in diesen Ausdrücken nicht vorkommen. $\Delta\varepsilon$ tritt allerdings noch in den Ausdrücken (4) auf, wenn $\varepsilon'$ durch $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ ersetzt wird; es wäre dann:

$$\sin\varepsilon' = \sin\varepsilon_0 + \cos\varepsilon_0\Delta\varepsilon; \qquad \cos\varepsilon' = \cos\varepsilon_0 - \sin\varepsilon_0\Delta\varepsilon;$$
$$\mathrm{cotang}\,\varepsilon' = \mathrm{cotang}\,\varepsilon_0 - \mathrm{cosec}^2\varepsilon_0\,\Delta\varepsilon.$$

$\Delta\varepsilon$ ist aber, wie die Durchführung der ersten Näherung zeigt, von der zweiten Ordnung gegen $\psi$; ein seculares Glied, welches von der ersten Potenz der Zeit abhängt, tritt in $\Delta\varepsilon$ überhaupt nicht auf, so dass in der ersten Näherung hier $\varepsilon'$ mit $\varepsilon_0$ identificirt werden kann. Dann wird bis auf Grössen erster Ordnung:

$$\begin{aligned}
&\cos\beta_0\sin(\lambda_0-\psi') + \mathrm{cotang}\,\varepsilon'\sin\beta_0 = \cos\beta\sin\lambda + \mathrm{cotang}\,\varepsilon_0\sin\beta + \\
&\qquad + (\cos\beta\sin\lambda\,\mathrm{cotang}\,\varepsilon_0 - \sin\beta)\,q_1 t \\
&\cos\varepsilon'\cos\beta_0\sin(\lambda_0-\psi') - \sin\varepsilon'\sin\beta_0 = \cos\beta\sin\lambda\cos\varepsilon_0 - \sin\beta\sin\varepsilon_0 - \\
&\qquad - (\cos\beta\sin\lambda\sin\varepsilon_0 + \sin\beta\cos\varepsilon_0)\,q_1 t + \cos\beta\cos\lambda\,\mathrm{cosec}\,\varepsilon_0\,p_1 t \\
&\sin\varepsilon'\cos\beta_0\cos(\lambda_0-\psi') = \cos\beta\cos\lambda\sin\varepsilon_0 + (\sin\varepsilon_0\sin\beta - \cos\beta\sin\lambda\cos\varepsilon_0)\,p_1 t.
\end{aligned} \tag{9}$$

Multiplicirt man diese Ausdrücke in der in (4) angegebenen Weise, so erhält man endlich:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{nC\sin\varepsilon'}\frac{\partial V}{\partial\varepsilon'}\right)_1 = \\
&= -\frac{3L'^2}{(1+\nu')\rho'^3}\frac{C-A}{nC}\left\{+\cos^2\beta\sin^2\lambda\cos\varepsilon_0 + \cos\beta\sin\beta\sin\lambda\frac{\cos 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0} - \sin^2\beta\cos\varepsilon_0\right\} \\
&-\frac{3L'^2}{(1+\nu')\rho'^3}\frac{C-A}{nC}\left\{\left(\cos^2\beta\sin^2\lambda\frac{\cos 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0} - 4\sin\beta\cos\beta\sin\lambda\cos\varepsilon_0 - \sin^2\beta\frac{\cos 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0}\right)q_1 + \right. \\
&\left. + \left(\cos^2\beta\sin\lambda\cos\lambda\,\mathrm{cosec}\,\varepsilon_0 + \sin\beta\cos\beta\cos\lambda\frac{\cos\varepsilon_0}{\sin^2\varepsilon_0}\right)p_1\right\}t \\
&\left(\frac{1}{nC\sin\varepsilon'}\frac{\partial V}{\partial\psi'}\right)_1 = \\
&= +\frac{3L'^2}{(1+\nu')\rho'^3}\frac{C-A}{nC}\left\{+\cos^2\beta\sin\lambda\cos\lambda\sin\varepsilon_0 + \sin\beta\cos\beta\cos\lambda\cos\varepsilon_0\right\} + \\
&+\frac{3L'^2}{(1+\nu')\rho'^3}\frac{C-A}{nC}\left\{(\cos^2\beta\sin\lambda\cos\lambda\cos\varepsilon_0 - \sin\beta\cos\beta\cos\lambda\sin\varepsilon_0)\,q_1 - \right. \\
&\left. - \left(\sin\beta\cos\beta\sin\lambda\frac{\cos 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0} + \cos^2\beta\sin^2\lambda\cos\varepsilon_0 - \sin^2\beta\cos\varepsilon_0\right)p_1\right\}t.
\end{aligned} \tag{10}$$

Für die Wirkung der Sonne ist $\beta = 0$ zu setzen, und es wird:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{nC\sin\varepsilon'}\frac{\partial V}{\partial\varepsilon'}\right)_2 = \\
&= -\frac{3\odot'^2}{(1+\nu)\rho_1^3}\frac{C-A}{nC}\left\{\sin^2\lambda_1\cos\varepsilon_0 + \left(\sin^2\lambda_1\frac{\cos 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0}q_1 + \sin\lambda_1\cos\lambda_1\,\mathrm{cosec}\,\varepsilon_0\,p_1\right)t\right\} \\
&\left(\frac{1}{nC\sin\varepsilon'}\frac{\partial V}{\partial\psi'}\right)_2 = \\
&= \frac{3\odot'^2}{(1+\nu)\rho_1^3}\frac{C-A}{nC}\left\{\sin\lambda_1\cos\lambda_1\sin\varepsilon_0 + (\sin\lambda_1\cos\lambda_1\cos\varepsilon_0\,q_1 - \sin^2\lambda_1\cos\varepsilon_0\,p_1)\,t\right\}.
\end{aligned} \tag{11}$$

98. Numerische Werthe. Für $\beta$, $\lambda$ sind die geocentrischen, auf das wahre Aequinoctium bezogenen Coordinaten des Mondes, für $\lambda_1$ die geocentrische, wahre Länge der Sonne zu setzen; von der Wirkung der Planeten kann man absehen. Ist ☾ die mittlere Anomalie des Mondes, ☉ diejenige der Sonne, ☊ die Länge des aufsteigenden Mondknotens, $\omega$ der Abstand des Mondperigeums

von dem aufsteigenden Mondknoten, $\omega_1$ der Abstand des Sonnenperigeums von demselben, so wird, wenn nur die Hauptglieder berücksichtigt werden:

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \text{☾} + \omega + \text{☊} + 6^\circ\, 17'{\cdot}3 \sin \text{☾} + 1^\circ\, 16'{\cdot}5 \sin(\text{☾} - 2\odot + 2\omega - 2\omega_1) + \\
&\quad + 39'{\cdot}5 \sin(2\text{☾} - 2\odot + 2\omega - 2\omega_1) - 11'{\cdot}2 \sin\odot \\
\sin\lambda &= +0{\cdot}9968 \sin(\text{☾} + \omega + \text{☊}) - 0{\cdot}0550 \sin(\omega + \text{☊}) + 0{\cdot}0546 \sin(2\text{☾} + \omega + \text{☊}) - \\
&\quad - 0{\cdot}0114 \sin(2\odot - \omega + 2\omega_1 + \text{☊}) + 0{\cdot}0108 \sin(2\text{☾} - 2\odot + 3\omega - 2\omega_1 + \text{☊}) \\
\cos\lambda &= +0{\cdot}9968 \cos(\text{☾} + \omega + \text{☊}) - 0{\cdot}0550 \cos(\omega + \text{☊}) + 0{\cdot}0546 \cos(2\text{☾} + \omega + \text{☊}) - \\
&\quad - 0{\cdot}0114 \cos(2\odot - \omega + 2\omega_1 + \text{☊}) + 0{\cdot}0108 \cos(2\text{☾} - 2\odot + 3\omega - 2\omega_1 + \text{☊}) \\
\sin\beta &= +0{\cdot}0894 \sin(\text{☾} + \omega) - 0{\cdot}0048 \sin\omega + 0{\cdot}0049 \sin(2\text{☾} + \omega) + \\
&\quad + 0{\cdot}0030 \sin(\text{☾} - 2\odot + \omega - 2\omega_1) \\
\cos\beta &= +0{\cdot}9980 + 0{\cdot}0020 \cos(2\text{☾} + 2\omega) \\
\rho^{-3} &= 1{\cdot}0047 + 0{\cdot}1644 \cos\text{☾} - 0{\cdot}0134 \cos 2\text{☾} + 0{\cdot}0315 \cos(\text{☾} - 2\odot + 2\omega - 2\omega_1) + \\
&\quad + 0{\cdot}0260 \cos(2\text{☾} - 2\odot + 2\omega - 2\omega_1) \\
\lambda_1 &= \odot + \omega_1 + \text{☊} + 1^\circ\, 55'{\cdot}6 \sin\odot \\
\rho_1^{-3} &= 1{\cdot}0001 - 0{\cdot}0168 \cos\odot.
\end{aligned}
$$

Der Werth von $\varepsilon_0$ ist für 1850·0:

$$\varepsilon_0 = 23^\circ\, 27'\, 31''{\cdot}8, \quad \sin\varepsilon_0 = 0{\cdot}3981, \quad \cos\varepsilon_0 = 0{\cdot}9173, \quad \frac{\cos 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0} = 1{\cdot}7158$$

$$\log\sin\varepsilon_0 = 9{\cdot}59998; \quad \log\cos\varepsilon_0 = 9{\cdot}96253; \quad \log\frac{\cos 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0} = 0{\cdot}23447.$$

Bei der Integration der Ausdrücke 96 (13) treten in den periodischen Gliedern gewisse Integrationsdivisoren auf. Haben die Ausdrücke $L'$, $\text{☾}'$, $\odot'$, $\omega'$, $\omega_1'$, $\text{☊}'$ die bisher gewählte Bedeutung, so wird z. B. $\text{☾} = \text{☾}_0 + \text{☾}' t$ u. s. w., folglich

$$\int A_{\sin}^{\cos}(\alpha\text{☾} + \beta\odot + \gamma\omega + \delta\omega_1 + \varepsilon\text{☊})\,dt = \pm \frac{\overset{\sin}{\cos}\,(\alpha\text{☾} + \beta\odot + \gamma\omega + \delta\omega_1 + \varepsilon\text{☊})}{\alpha\text{☾}' + \beta\odot' + \gamma\omega' + \delta\omega_1' + \varepsilon\text{☊}'}.$$

Es bleibt dabei ganz gleichgültig, welche Zeiteinheit man wählt; da nämlich in dem Coëfficienten der gemeinschaftliche Faktor $\frac{L'^2}{n}$, $\frac{\odot'^2}{n}$ auftritt, so wird $\frac{L'}{n}$, $\frac{\odot'}{n}$ eine Verhältnisszahl sein, und der zweite Faktor $L'$, $\odot'$ im Zähler mit den Ausdrücken $\alpha\text{☾}' + \beta\odot' + \gamma\omega' + \delta\omega_1' + \varepsilon\text{☊}'$ wird wieder nur Verhältnisszahlen geben; zum constanten Gliede der Entwickelung tritt der Faktor $L't$ bezw. $\odot' t$; es werden sich daher $t$ und $L'$, $\odot'$ auf dieselbe Zeiteinheit beziehen. Die periodischen Glieder wird man aber noch durch $arc\,1''$ zu dividiren haben, um die Coëfficienten in Bogensecunden zu erhalten. Es seien also $\odot'$, $\text{☾}'$, $\omega'$, $\omega_1'$, $\text{☊}'$ die mit $arc\,1''$ multiplicirten mittleren Bewegungen in einem Jahre, so wird auch $n$ die mit $arc\,1''$ multiplicirte Rotationsgrösse der Erde in einem Jahre sein; da die Rotation in einem Sterntage 360° ist, so wird in einem julianischen Jahre die Drehung

$$365{\cdot}25 \cdot 1296000 \cdot f,$$

wenn $f$ das Verhältniss des mittleren Sonnentages zum Sterntage, also $\log f = 0{\cdot}0011874$ ist. Hiermit wird:

$$
\begin{aligned}
L' &= +83{\cdot}9971 & \omega' &= +1{\cdot}04776 \\
\text{☾}' &= +83{\cdot}2869 & \omega_1' &= +0{\cdot}33786 \qquad (1) \\
\odot' &= +\ 6{\cdot}2830 & \text{☊}' &= -0{\cdot}33757 \\
& & n &= +2301{\cdot}218.
\end{aligned}
$$

Für den gemeinsamen Faktor vor der Klammer sind die in Bogensecunden ausgedrückten mittleren Bewegungen in derselben Zeit[1]):

$$(L')'' = 17325610''; \qquad (\odot')'' = 1295977'', \tag{2}$$

womit die Coëfficienten sofort in Bogensecunden erhalten werden.

Unter den Integrationsdivisoren können einzelne für specielle Werthe der $\alpha$, $\beta$ ... kleine Werthe erreichen; dann werden die bezüglichen Glieder besonders vergrössert, und speciell zu berücksichtigen. Dies wird der Fall sein, wenn im Nenner einer der drei rechts stehenden Divisoren für sich allein auftritt.

Betrachtet man nun in den Ausdrücken 97 (10) und (11) die von $t$ unabhängigen Glieder, so ist $\cos^2\beta$ nahe constant, genähert 0·998, $\sin^2\beta$ sehr klein, das Hauptglied wird $^1(0{\cdot}0894)^2 \sin^2(☾ + \omega)$, daher in $\sin^2\beta \cos \varepsilon_0$:

$$0{\cdot}0018[1 - \cos 2(☾ + \omega)].$$

Dieses Glied wird bei der Integration nicht vergrössert. In den Ausdrücken $\sin^2\lambda$ und $\sin\lambda \cos\lambda$ erhalten die grössten Glieder, abgesehen von dem in $\sin^2\lambda$ enthaltenen constanten Gliede das Argument $2(☾ + \omega + \Omega)$, welches durch die Integration ebenfalls nicht vergrössert wird. Hingegen entsteht in den Ausdrücken $\sin\beta \sin\lambda$ durch Multiplikation der beiden grossten Glieder ein Ausdruck mit dem Argument $\Omega$. Dieses wird bei der Integration wesentlich vergrössert, und giebt sowohl in $\psi$ als in $\varepsilon$ die grössten periodischen Glieder. Die Entwickelung selbst giebt, wenn man nur die grössten Glieder ansetzt[2]):

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{nC \sin \varepsilon'} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon'} =$$

$$= -\frac{3L'^2}{1+\nu'}\left(\frac{C-A}{nC}\right)\Big\{+0{\cdot}4558 - 0{\cdot}4582 \cos(2☾ + 2\omega + 2\Omega) + 0{\cdot}07699 \cos\Omega$$
$$+0{\cdot}0751 \cos ☾ + 0{\cdot}0144 \cos(☾ - 2\odot + 2\omega - 2\omega_1) + 0{\cdot}0122 \cos(2☾ - 2\odot + 2\omega - 2\omega_1) +$$
$$+0{\cdot}0128 \cos(☾ + 2\omega + 2\Omega) - 0{\cdot}0868 \cos(3☾ + 2\omega + 2\Omega) - 0{\cdot}0115 \cos(4☾ + 2\omega + 2\Omega) -$$
$$-0{\cdot}0165 \cos(3☾ - 2\odot + 4\omega - 2\omega_1 + 2\Omega) - 0{\cdot}0189 \cos(4☾ - 2\odot + 4\omega - 2\omega_1 + 2\Omega) -$$
$$-0{\cdot}0761 \cos(2☾ + 2\omega + \Omega) - 0{\cdot}0145 \cos(3☾ + 2\omega + \Omega) + 0{\cdot}0021 \cos(2\odot + 2\omega_1 + \Omega)\Big\} -$$
$$-\frac{3\odot'^2}{1+\nu}\left(\frac{C-A}{nC}\right)\Big\{+0{\cdot}4588 - 0{\cdot}4584 \cos(2\odot + 2\omega_1 + 2\Omega) +$$
$$+0{\cdot}0281 \cos\odot - 0{\cdot}0269 \cos(3\odot + 2\omega_1 + 2\Omega) + 0{\cdot}0038 \cos(\odot + 2\omega_1 + 2\Omega)\Big\} \tag{3}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{1}{nC \sin \varepsilon'} \frac{\partial V}{\partial \psi'} = -\frac{3L'^2}{1+\nu'}\left(\frac{C-A}{nC}\right)\Big\{+0{\cdot}1966 \sin(2☾ + 2\omega + 2\Omega) - 0{\cdot}04116 \sin\Omega -$$
$$-0{\cdot}0055 \sin(☾ + 2\omega + 2\Omega) + 0{\cdot}0377 \sin(3☾ + 2\omega + 2\Omega) + 0{\cdot}0049 \sin(4☾ + 2\omega + 2\Omega) +$$
$$+0{\cdot}0071 \sin(3☾ - 2\odot + 4\omega - 2\omega_1 + 2\Omega) + 0{\cdot}0059 \sin(4☾ - 2\odot + 4\omega - 2\omega_1 + 2\Omega) +$$
$$+0{\cdot}0407 \sin(2☾ + 2\omega + \Omega)\Big\} -$$
$$-\frac{3\odot'^2}{1+\nu}\left(\frac{C-A}{nC}\right)\Big\{+0{\cdot}1989 \sin(2\odot + 2\omega_1 + 2\Omega) + 0{\cdot}0117 \sin(3\odot + 2\omega_1 + 2\Omega)\Big\},$$

---

[1]) Es ist auch für die Sonne ein Unterschied zwischen der siderischen und anomalistischen Bewegung zu machen; $(\odot')''$ ist die siderische, $\odot'$ die anomalistische Bewegung; der Unterschied ist jedoch für die Sonne sehr gering (0·00029).

[2]) Hierin ist der constante Theil des ersten Gliedes in $\left(\frac{\partial V}{\partial \varepsilon'}\right)_1$ + 0·4590, des dritten Gliedes − 0·0087. In beiden Ausdrücken entstehen die Glieder mit $0\Omega$ oder $2\Omega$ aus dem ersten Gliede, diejenigen mit $1\Omega$ aus dem zweiten Gliede.

Hieraus ist zunächst zu ersehen, dass in $\psi$ ein seculares Glied auftritt, da die Entwickelung mit einer Constante beginnt. Diesen, mit der Zeit $t$ beständig wachsenden Theil nennt man die Präcession; die periodischen Glieder die Nutation in Länge. In $\varepsilon$ tritt in dieser Näherung ein seculares Glied nicht auf, sondern nur periodische Glieder: die Nutation in Schiefe[1]).

Da in den Ausdrücken für $\sin\lambda$ und $\cos\lambda$ die Coefficienten derjenigen Glieder, welche dasselbe Argument haben, dieselben sind, und nur $\sin$ und $\cos$ miteinander vertauscht erscheinen, so werden die Glieder der beiden Produkte $\cos\beta\sin\beta\sin\lambda$ und $\cos\beta\sin\beta\cos\lambda$ dieselbe Eigenschaft besitzen; die Glieder mit $\cos\Omega$, bezw. $\sin\Omega$, welche aus diesen Produkten hervorgehen, müssen daher auch denselben Faktor haben; er ist 0·04487. Das zugehörige Glied

$$\text{in } \frac{d\psi}{dt} \text{ ist } -\frac{3L'^2}{1+\nu'}\,\frac{C-A}{nC}\cdot 0{\cdot}04487\,\frac{\cos 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0}\cos\Omega;$$

$$\text{in } \frac{d\varepsilon}{dt}:\ +\frac{3L'^2}{1+\nu'}\,\frac{C-A}{nC}\cdot 0{\cdot}04487\cos\varepsilon_0\sin\Omega.$$

Hieraus erhält man durch Integration die von der Bewegung der Knoten abhängigen Glieder: $(\psi)\sin\Omega$, bezw.: $(\varepsilon)\cos\Omega$ und zwar ist:

$$(\psi) = -\frac{3L'^2}{1+\nu'}\,\frac{C-A}{nC}\,\frac{0{\cdot}04487}{\Omega'}\,\frac{\cos 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0};\quad (\varepsilon) = +\frac{3L'^2}{1+\nu'}\,\frac{(C-A)}{nC}\,\frac{0{\cdot}04487}{\Omega'}\cos\varepsilon_0.$$

Es ist folglich

$$\frac{(\psi)}{(\varepsilon)} = -\frac{2\cos 2\varepsilon_0}{\sin 2\varepsilon_0} = -2\,\mathrm{cotang}\,2\varepsilon_0 = -1{\cdot}8704. \tag{4}$$

Integrirt man die beiden Gleichungen für $\frac{d\psi}{dt}$ und $\frac{d\varepsilon}{dt}$, so folgt[2]) zunächst für die Hauptglieder:

$$\begin{aligned}
\psi &= \psi_0 - \frac{3}{1+\nu'}\,\frac{C-A}{C}\,\frac{L'}{n}\left\{7888851''t - 8951489''\sin\Omega - 40742''\sin(2\,☾ + 2\omega + 2\Omega)\right\}\\
&\quad - \frac{3}{1+\nu}\,\frac{C-A}{C}\,\frac{\odot'}{n}\left\{594590''t - 47276''\sin(2\odot + 2\omega_1 + 2\Omega)\right\}\\
\varepsilon &= \varepsilon_0 - \frac{3}{1+\nu'}\,\frac{C-A}{C}\,\frac{L'}{n}\left\{-2112499''\cos\Omega - 20277''\cos(2\,☾ + 2\omega + 2\Omega)\right\}\\
&\quad - \frac{3}{1+\nu}\,\frac{C-A}{C}\,\frac{\odot'}{n}\left\{-20583''\cos(2\odot + 2\omega_1 + 2\Omega)\right\}.
\end{aligned} \tag{5}$$

In diesen Ausdrücken ist jedoch ein Coëfficient $\frac{C-A}{A}$, der in Anbetracht der unbekannten Dichtevertheilung in der Erde als völlig unbekannt angesehen werden muss; und ferner eine nicht genügend bekannte Grösse $\nu'$, welche das Verhältniss der Erdmasse zur Mondmasse darstellt. ($1+\nu$ kann dabei gleich der Einheit gesetzt werden, da es von der Einheit nur um $\frac{1}{[illegible]}$ verschieden ist. Der erstere Coëfficient lässt sich, wenn man gewisse Daten der Beobachtung entnimmt, direkt ziemlich sicher bestimmen, und auch $\nu'$, wiewohl mit bedeutend grösserer Unsicherheit. Diese, der Beobachtung zu entnehmenden Daten, sind daher zwei (abgesehen von den Constanten $\psi_0$[3]), $\varepsilon_0$, welche für den vorliegenden

---

[1]) In der zweiten Näherung tritt ein von $t^2$ abhängiges Glied hinzu.

[2]) Es entsteht z. B. aus dem Gliede $+0{\cdot}07699\cos\Omega$ das Integral $+0{\cdot}07699\left(\frac{L'}{\Omega'}\right)\sin\Omega$ u. s. w. Die constanten Anfangsglieder geben die Integrale $+0{\cdot}4553(L')''\,t$ und $+0{\cdot}4558(\odot')''\,t$.

[3]) $\psi_0$ kann gleich Null gesetzt werden, da die Wahl des Anfangspunktes der Zählung für $t$ beliebig ist.

Zweck nicht verwendet werden können): die Constante der allgemeinen Praecession und die Constante der Nutation; erstere ist das jährliche Zurückweichen des Frühlingspunktes, letztere der Coefficient von $\cos \Omega$ bei der Nutation in Schiefe; der Coefficient von $\sin \Omega$ bei der Nutation in Länge ist mit diesem durch die Relation (4) verbunden. Nimmt man für letztere nach Nyrén:

$$(\varepsilon) = 9''{\cdot}2365,$$

für erstere nach Bessel für 1850:

$$l = 50''{\cdot}23572,$$

so folgt zunächst aus dem Werthe von $\varepsilon$:

$$+\frac{3}{1+\nu'}\frac{C-A}{C}\frac{L'}{n}\cdot 2112499'' = 9''{\cdot}2365$$

und damit[1])

$$\frac{3}{1+\nu'}\frac{C-A}{C} = 0{\cdot}00011979. \tag{6}$$

Berechnet man hiermit die durch den Mond bewirkte Praecession, so wird der Coefficient derselben:

$$-\frac{3}{1+\nu'}\frac{C-A}{C}\frac{L'}{n}\cdot 7888851 = -34''{\cdot}4851.$$

Die Grösse der Zurückweichung des Frühlingspunktes wird aber gegeben durch die Strecke $C\Upsilon_1 = b - \Pi = l$, wenn $\Upsilon_1 E = CE$ ist. Es ist aber nach 97 (7) abgesehen von Gliedern höherer Ordnung:

$$l = b - \Pi = -\psi - \mathit{cotang}\,\varepsilon_0 \cdot p_1 t$$

oder

$$\psi = -l - \mathit{cotang}\,\varepsilon_0 p_1 t = -50''{\cdot}3708.$$

Hieraus folgt für den durch die Sonne bewirkten Theil der Praecession der Coefficient:

$$-\frac{3}{1+\nu}\frac{C-A}{C}\frac{\odot'}{n}\cdot 594590'' = -(50''{\cdot}3708 - 34''{\cdot}4851) = -15''{\cdot}8852$$

und hieraus

$$\frac{3}{1+\nu}\frac{C-A}{C} = 0{\cdot}0097851. \tag{7}$$

Da $\nu$ als verschwindend angesehen werden kann, so folgt hieraus

$$\frac{C-A}{C} = 0{\cdot}0032612 \quad \text{und} \quad \frac{C-A}{A} = 0{\cdot}0032710 \tag{8}$$

und hiermit aus (6)

$$1+\nu' = \frac{0{\cdot}0097836}{0{\cdot}00011979} = 81{\cdot}68,$$

folglich $\nu' = 80{\cdot}68$, die Mondmasse $\frac{1}{80{\cdot}7}$ der Erdmasse. Diese Werthe geben für die Coëfficienten:

$$\frac{3L'^2}{n}\frac{C-A}{C}\frac{1}{1+\nu'} = 75''{\cdot}758, \quad \log: 1{\cdot}879400$$

$$\frac{3\odot'^2}{n}\frac{C-A}{C}\frac{1}{1+\nu'} = 34''{\cdot}628, \quad \log: 1{\cdot}539370.$$

---

1) Derselbe Werth müsste natürlich in Folge der Relation (4) aus dem Coëfficienten von $\sin \Omega$ in $\psi$ folgen.

Multiplicirt man die Reihen (3) mit diesen Coëfficienten und integrirt unter Berücksichtigung der in (1) angegebenen Aenderungen der Elemente, so ergiebt sich schliesslich[1]) ($t$ in Einheiten des julianischen Jahres):

$$
\begin{aligned}
\psi = & \; 50''\cdot 3708\, t - 0''.00010888\, t^2 \\
& - 17''\cdot 274 \sin \text{☊} + 0''\cdot 209 \sin 2\text{☊} + 0''\cdot 068 \sin \text{☾} + 0''\cdot 011 \sin (\text{☾} + 2\omega + 2\text{☊}) + \\
& \qquad + 0''\cdot 015 \sin (\text{☾} - 2\odot + 2\omega - 2\omega_1) \\
& - 0''\cdot 204 \sin (2\text{☾} + 2\omega + 2\text{☊}) - 0''\cdot 026 \sin (3\text{☾} + 2\omega + 2\text{☊}) - \\
& \qquad - 0''\cdot 034 \sin (2\text{☾} + 2\omega + \text{☊}) + 0''\cdot 012 \sin (2\odot + 2\omega_1 + \text{☊}) \\
& + 0''\cdot 127 \sin \odot - 1''\cdot 268 \sin (2\odot + 2\omega_1 + 2\text{☊}) - 0''\cdot 049 \sin (3\odot + 2\omega_1 + 2\text{☊}) + \\
& \qquad + 0''\cdot 021 \sin (\odot + 2\omega_1 + 2\text{☊}) \\
\varepsilon = & \; \varepsilon_0 + 0''\cdot 00000718\, t^2 \\
& + 9''\cdot 230 \cos \text{☊} - 0''\cdot 090 \cos 2\text{☊} + 0''\cdot 089 \cos (2\text{☾} + 2\omega + 2\text{☊}) + \\
& \qquad + 0''\cdot 011 \cos (3\text{☾} + 2\omega + 2\text{☊}) + 0''.018 \cos (2\text{☾} + 2\omega + \text{☊}) \\
& + 0''\cdot 548 \cos (2\odot + 2\omega_1 + 2\text{☊}) + 0''\cdot 021 \cos (3\odot + 2\omega_1 + 2\text{☊}).
\end{aligned}
$$

Hierbei bedeutet die erste Zeile die lunisolare Präcession (Mond- und Sonnenwirkung vereinigt), die zweite und dritte Gruppe in $\psi$, und die zweite Gruppe in $\varepsilon$ die Mondnutation, die letzte Gruppe die Sonnennutation[2]).

99. Aenderungen der Hauptträgheitsaxen. Die bisherigen Ableitungen setzen voraus, dass die Hauptträgheitsaxen in dem Körper unveränderlich wären. Bei absolut starren Körpern ist diese Annahme allerdings zutreffend; aber die Erde ist nicht als absolut starr anzusehen. Die auf derselben stattfindenden stetigen Veränderungen, sowie grosse Katastrophen bewirken Massenverschiebungen, in deren Gefolge nothwendig eine geänderte Massenlagerung Platz greift, die mit Verschiebungen der Hauptträgheitsaxen verbunden ist.

Seien für ein rechtwinkliges Axensystem, welches durch den Schwerpunkt eines gegebenen Körpers sonst ganz beliebig gelegt ist, die auf die sämmtlichen Massenelemente ausgedehnten Summen

$$
\begin{aligned}
A &= \int (y^2 + z^2)\, dm & D &= \int yz\, dm \\
B &= \int (x^2 + z^2)\, dm & E &= \int xz\, dm \qquad (1) \\
C &= \int (x^2 + y^2)\, dm & F &= \int xy\, dm
\end{aligned}
$$

berechnet; dann wird das Trägheitsmoment für eine durch den Schwerpunkt, d. i. den Coordinatenursprung gehende Rotationsaxe $G$, welche mit den drei Coordinatenaxen die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ einschliesst:

$$T = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma - 2D\cos\beta\cos\gamma - 2E\cos\alpha\cos\gamma - 2F\cos\alpha\cos\beta. \quad (2)$$

Trägt man auf der Rotationsaxe vom Schwerpunkt aus Strecken auf, welche dem reciproken Werthe der Quadratwurzel aus dem zu dieser Axe gehörigen Trägheitsmomente gleich sind, so wird auf der Rotationsaxe ein Punkt bestimmt, dessen Coordinaten

$$\xi = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{T}}; \qquad \eta = \frac{\cos\beta}{\sqrt{T}}; \qquad \zeta = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{T}} \qquad (3)$$

sind. Die Gesammtheit aller dieser Punkte bestimmt ein dreiaxiges Ellipsoïd, dessen Gleichung

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 - 2D\eta\zeta - 2E\xi\zeta - 2F\xi\eta = 1 \qquad (4)$$

---

[1]) Das Resultat ist dasjenige der zweiten Näherung (wobei auch die Glieder mit $t^2$ aufgenommen sind) aus Oppolzer, l. c., pag. 183, wobei aber alle Glieder, die kleiner als 0''·01 sind, weggelassen wurden.

[2]) Ueber die Anordnung der Formeln zur Reduction der Beobachtungen, s. die Artikel »Präcession«, »Nutation« und »Ort«.

ist. Der Radiusvector eines Punktes dieses Ellipsoides bestimmt das Trägheitsmoment um die in der Richtung dieses Radiusvectors gezogene Rotationsaxe. Die drei Hauptaxen des Ellipsoides bestimmen demnach die Hauptträgheitsaxen. Wird daher das Axensystem in diese hineingelegt, so wird für dieses specielle Axensystem $D=0$, $E=0$, $F=0$ und

$$T = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma. \tag{5}$$

Die Grössen $A$, $B$, $C$ sind die Hauptträgheitsmomente selbst.

Es möge nun in einem Punkte, dessen Coordinaten $x_0$, $y_0$, $z_0$ sind, eine Masse $m$ hinzugefügt werden, und sei

$$\begin{array}{ll} g = m(y_0^2 + z_0^2) & d = m y_0 z_0 \\ h = m(x_0^2 + z_0^2) & e = m x_0 z_0 \\ k = m(x_0^2 + y_0^2) & f = m x_0 y_0, \end{array} \tag{6}$$

so werden die Ausdrücke (1) in $(A+g)$, $(B+h)$, $(C+k)$, $d$, $e$, $f$ übergehen. Aber es werden die drei ersten Summen nicht mehr die Hauptträgheitsmomente darstellen, indem nunmehr, bezogen auf das System der ursprünglichen Hauptträgheitsaxen die Gleichung (5) in

$$\begin{aligned} T_1 = {} & (A+g)\cos^2\alpha + (B+h)\cos^2\beta + (C+k)\cos^2\gamma - \\ & - 2d\cos\beta\cos\gamma - 2e\cos\alpha\cos\gamma - 2f\cos\alpha\cos\beta \end{aligned} \tag{7}$$

übergeht. Die neuen Hauptträgheitsmomente ergeben sich als die Lösungen $s_1$, $s_2$, $s_3$ der Gleichung dritten Grades

$$\begin{vmatrix} s-(A+g) & f & e \\ f & s-(B+h) & d \\ e & d & s-(C+k) \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

und die Richtungswinkel $\lambda$, $\mu$, $\nu$ der zu einer der Lösungen $s$ gehörigen Hauptträgheitsaxe sind bestimmt durch die Gleichungen:

$$\cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu = \frac{1}{d(s-A-g)-ef} : \frac{1}{e(s-B-h)-df} : \frac{1}{f(s-C-k)-de}. \tag{9}$$

Es soll nun vorausgesetzt werden, dass die hinzugefügte Masse $m$ einen sehr kleinen Bruchtheil der ganzen Masse betragen möge. Dann wird die eine Wurzel $s_1$ sehr nahe $A+g$, die zweite $s_2$ sehr nahe $B+h$, die dritte $s_3$ sehr nahe $C+k$ sein; sei also

$$s_1 = A + g + x_1; \qquad s_2 = B + h + x_2; \qquad s_3 = C + k + x_3 \tag{10}$$

und setzt man

$$\begin{array}{lll} (A+g)-(B+h) = \vartheta_{12} & (C+k)-(A+g) = \vartheta_{31} & (B+h)-(C+k) = \vartheta_{23} \\ (B+h)-(A+g) = \vartheta_{21} & (A+g)-(C+k) = \vartheta_{13} & (C+k)-(B+h) = \vartheta_{32} \\ \vartheta_{12} = -\vartheta_{21} & \vartheta_{13} = -\vartheta_{31} & \vartheta_{23} = -\vartheta_{32} \\ & \vartheta_{\alpha\beta} = \vartheta_{\alpha\gamma} + \vartheta_{\gamma\beta}, & \end{array} \tag{11}$$

so ergeben sich die Correctionen $x$ aus den Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} x_1 & f & e \\ f & \vartheta_{12}+x_1 & d \\ e & d & \vartheta_{13}+x_1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} \vartheta_{21}+x_2 & f & e \\ f & x_2 & d \\ e & d & \vartheta_{23}+x_2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} \vartheta_{31}+x_3 & f & e \\ f & \vartheta_{32}+x_3 & d \\ e & d & x_3 \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt:

$$\begin{aligned} & x_1^3 + x_1^2(\vartheta_{12}+\vartheta_{13}) + x_1[\vartheta_{12}\vartheta_{13} - (d^2+e^2+f^2)] - (e^2\vartheta_{12} + f^2\vartheta_{13} - 2def) = 0 \\ & x_2^3 + x_2^2(\vartheta_{21}+\vartheta_{23}) + x_2[\vartheta_{21}\vartheta_{23} - (d^2+e^2+f^2)] - (d^2\vartheta_{21} + f^2\vartheta_{23} - 2def) = 0 \\ & x_3^3 + x_3^2(\vartheta_{31}+\vartheta_{32}) + x_3[\vartheta_{31}\vartheta_{32} - (d^2+e^2+f^2)] - (d^2\vartheta_{31} + e^2\vartheta_{32} - 2def) = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

Jede dieser Gleichungen hat drei Wurzeln; von diesen ist jedoch nur jene zu ermitteln, welche der Verschiebung der betreffenden Hauptträgheitsaxe entspricht, d. h. die numerisch kleinste. Dann ist

$$\begin{aligned} \cos \lambda_1 : \cos \mu_1 : \cos \nu_1 &= \frac{1}{d x_1 - ef} : \frac{1}{e(\vartheta_{12} + x_1) - df} : \frac{1}{f(\vartheta_{13} + x_1) - de} \\ \cos \lambda_2 : \cos \mu_2 : \cos \nu_2 &= \frac{1}{d(\vartheta_{21} + x_2) - ef} : \frac{1}{e x_2 - df} : \frac{1}{f(\vartheta_{23} + x_2) - de} \quad (18) \\ \cos \lambda_3 : \cos \mu_3 : \cos \nu_3 &= \frac{1}{d(\vartheta_{31} + x_3) - ef} : \frac{1}{e(\vartheta_{32} + x_3) - df} : \frac{1}{f x_3 - de}. \end{aligned}$$

Es sind nun drei Fälle zu unterscheiden:

1) Die $\vartheta$ und die $d, e, f$ sind von derselben Ordnung; in diesem Falle werden auch die $x$ von derselben Ordnung sein, und es werden totale Veränderungen der Hauptträgheitsaxen auftreten.

Die Massenmomente eines dreiaxigen Ellipsoïdes mit den drei Axen $a, b, c$ sind aber bei den Drehungen:

$$\begin{aligned} &\text{um die } a\text{-Axe:} \quad A = \tfrac{1}{5} M(b^2 + c^2) \\ &\text{um die } b\text{-Axe:} \quad B = \tfrac{1}{5} M(c^2 + a^2) \\ &\text{um die } c\text{-Axe:} \quad C = \tfrac{1}{5} M(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

Es wird daher

$$B - A = \tfrac{1}{5} M(a^2 - b^2); \quad C - B = \tfrac{1}{5} M(b^2 - c^2); \quad C - A = \tfrac{1}{5} M(a^2 - c^2).$$

Sind die $d, e, f$ von derselben Ordnung wie die $\vartheta$, so muss der Maximalwerth derselben $\frac{1}{4} m a^2$ mit diesen Grössen vergleichbar werden. Für die Rotation der Erde sind nun allerdings zwei der drei Massenmomente einander gleich; sei $a = b$, so wird das Verhältniss

$$\frac{d}{\vartheta} = \frac{\frac{1}{4} m a^2}{\frac{1}{5} M (a^2 - c^2)} = \frac{5}{4} \frac{m}{M} \frac{1}{\frac{a^2 - c^2}{a^2}}.$$

Sollen nun $d$ und $\vartheta$ einander gleich werden, so muss mit dem für die Erde gültigen Werthe $\log \frac{a^2 - c^2}{a^2} = 7{\cdot}824410$: $m = \frac{1}{187} M$ sein. Der Inhalt der Erde ist aber gleich demjenigen einer Kugel von 6370 Kilometern Halbmesser. Für eine quadratische Platte von 500 Kilometern Seitenlänge und 5 Kilometern Dicke von derselben Dichte wie die Erde wird $m = \frac{1}{866000} M$; man wird daher die Massenmomente der hinzugefügten Massen als Grössen zweiter Ordnung anzusehen haben.

2) Die $\vartheta$ sind von der ersten Ordnung, die $g, h, k, d, e, f$ von der zweiten Ordnung. Bei dem dreiaxigen Ellipsoïde wird dies für alle drei Gleichungen gelten, für ein Rotationsellipsoïd für eine derselben, z. B. für die dritte, wenn die Rotationsaxe nahe der $C$-Axe liegt.

Die Annahme, dass $x_1$ von der ersten Ordnung wäre, führt, indem nur die Glieder niedrigster Ordnung beibehalten werden, zur Gleichung

$$x_3(x_3 + \vartheta_{31})(x_3 + \vartheta_{32}) = 0.$$

Die kleinste Wurzel $x_3 = 0$ entspricht nicht der Annahme, dass $x_3$ von der ersten Ordnung wäre. Sei $x_3$ von der zweiten Ordnung. Es ist nur ein Glied $x_3 \vartheta_{31} \vartheta_{32}$ von der vierten Ordnung (die übrigen von höheren); diese gleich Null gesetzt giebt die der Annahme nicht entsprechende Lösung $x_3 = 0$. Sei also $x_3$ von der dritten Ordnung, so erhält man die Gleichung:

$$\vartheta_{21}\vartheta_{22}x_2 - (d^2\vartheta_{21} + e^2\vartheta_{22}) = 0,$$

also:

$$x_2 = \frac{d^2\vartheta_{21} + e^2\vartheta_{22}}{\vartheta_{21}\vartheta_{22}}; \qquad x_2 = \frac{d^2}{\vartheta_{22}} + \frac{e^2}{\vartheta_{21}}. \tag{14}$$

Die Annahme, dass $x$ von der $(3 + n)$ten Ordnung ist, giebt als niedrigstes von $x$ abhängiges Glied ein solches der $(5 + n)$ten Ordnung und als niedrigstes von $x$ freies Glied, ein solches von der 5ten Ordnung, welche nur für $n = 0$ gleich werden können. Mit (14) folgt aus (13), wenn man überall die Glieder höherer Ordnung gegen diejenigen niedrigerer Ordnung vernachlässigt:

$$\cos\lambda_2 : \cos\mu_2 : \cos\nu_2 = \frac{1}{d\vartheta_{21}} : \frac{1}{e\vartheta_{22}} : \frac{1}{-de} = -\frac{e}{\vartheta_{21}} : -\frac{d}{\vartheta_{22}} : 1.$$

Es wird darnach mit Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung:

$$\cos\lambda_2 = -\frac{e}{\vartheta_{21}}; \qquad \cos\mu_2 = -\frac{d}{\vartheta_{22}}; \qquad \cos\nu_2 = 1.$$

$\nu_2$ ist der Winkel der neuen (geänderten) $C$-Axe gegen die ursprüngliche $C_0$-Axe[1]. Nennt man die Länge der Ebene $CC_0$ gegen die $XZ$-Ebene $\eta_2$, so wird

$$\begin{aligned} \cos\lambda_2 &= \sin\nu_2 \cos\eta_2 = -\frac{e}{\vartheta_{21}} \\ \cos\mu_2 &= \sin\nu_2 \sin\eta_2 = -\frac{d}{\vartheta_{22}}. \end{aligned} \tag{15}$$

Die Resultate bleiben dieselben, wenn man annimmt, dass die $d, e, f$ von höherer Ordnung als der zweiten sind. Sei diese Ordnung $\mu \gtreqless 3$ und die sämmtlichen $\vartheta$ von der ersten Ordnung, so wird die Ordnung der einzelnen Glieder in der dritten Gleichung (12), wenn man voraussetzt, dass die Lösung $x_2$ von der Ordnung $\lambda$ ist:

$$3\lambda, \quad 2\lambda + 1, \quad \lambda + 2, \quad 2\mu + 1.$$

Für $\lambda = 1$, $\mu > 1$ giebt dies den bereits erwähnten auszuschliessenden Fall; für $\lambda > 1$ wird nur das dritte mit dem vierten Gliede vergleichbar, und man erhält: $\lambda = 2\mu - 1$; das Resultat ist identisch mit (14).

3) Es sei ein $\vartheta$ von höherer Ordnung, z. B. von der Ordnung $x$[2]. Hier sind eine grosse Anzahl Fälle zu unterscheiden, je nachdem $x \gtreqless \mu$ und je nachdem die $d, e, f$ sämmtlich von derselben Ordnung sind, oder nicht. Hier soll nur derjenige Fall erörtert werden, der neben dem früheren, dem den Gleichungen (12) entsprechenden, in der Natur vorkommt. Es sei $A = B$; dann wird mit Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung

$$\begin{aligned} \vartheta_{21} &= -\vartheta_{11} = \vartheta_{22} = -\vartheta_{21} = C - B \qquad & d &= my_0z_0 \\ \vartheta_{12} &= -\vartheta_{21} = g - h = m(y_0^2 - x_0^2) & e &= mx_0z_0 \\ & & f &= mx_0y_0. \end{aligned} \tag{16}$$

Da von den Aequatorradien keiner ausgezeichnet ist, so kann die $X$-Axe so gelegt werden, dass die in der Breite $\varphi$ aufgelegte Masse die Länge 45° hat, dann wird

$$x_0 = y_0 = \rho\cos\varphi\sqrt{\tfrac{1}{2}}; \quad z_0 = \rho\sin\varphi$$
$$\vartheta_{12} = 0, \quad d = e = m\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{\tfrac{1}{2}}; \quad f = \tfrac{1}{2}m\rho^2\cos^2\varphi.$$

Die ersten beiden Gleichungen (12) werden jetzt (die dritte Gleichung wird gegen den Fall 2) nicht geändert):

---

[1] Daher darf $\cos\nu_2$ nicht gleich $-1$ gesetzt werden.

[2] Zwei $\vartheta$ können wegen der letzten Relation (11) nicht von höherer Ordnung sein.

$$x_1^3 + x_1^2\theta_{12} - x_1(d^2 + e^2 + f^2) - f^2\theta_{12} = 0$$
$$x_2^3 + x_2^2\theta_{21} - x_2(d^2 + e^2 + f^2) - f^2\theta_{21} = 0.$$

Diesen Gleichungen wird nur durch $x_1$ und $x_2$ von der zweiten Ordnung genügt; man erhält:

$$x_1 = \pm f; \quad x_2 = \mp f, \tag{17}$$

wobei Correspondenz der Zeichen stattfindet, nicht aber eine beliebige Combination gewählt werden darf. Man überzeugt sich hiervon, wenn man z. B. den Fall betrachtet, wo $\theta_{12}$, so wie $f$, $g$, $h$ von der $\mu$ten Ordnung wären; dann werden die beizubehaltenden Glieder

$$x_1^2 + \theta_{12}x_1 = f^2; \quad x_2^2 + \theta_{21}x_2 = f^2$$

und hieraus:

$$x_1 = -\tfrac{1}{2}\theta_{12} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\theta_{12}^2 + f^2}; \quad x_2 = -\tfrac{1}{2}\theta_{21} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\theta_{21}^2 + f^2}.$$

Ist nun $\theta_{12}$ positiv, so wird, da man die kleinere Wurzel zu wählen hat:

$$x_1 = +\left(\sqrt{\tfrac{1}{4}\theta_{12}^2 + f^2} - \tfrac{1}{2}\theta_{12}\right); \quad x_2 = -\left(\sqrt{\tfrac{1}{4}\theta_{12}^2 + f^2} - \theta_{12}\right);$$

ist $\theta_{21}$ negativ, so wird ebenso:

$$x_1 = -\left(\sqrt{\tfrac{1}{4}\theta_{21}^2 + f^2} - \tfrac{1}{2}\theta_{21}\right); \quad x_2 = +\left(\sqrt{\tfrac{1}{4}\theta_{21}^2 + f^2} - \theta_{21}\right).$$

Für $\theta_{12} = \theta_{21} = 0$ folgen hieraus die Gleichungen (17). Die ersten beiden der Gleichungen (13) werden hier, wenn man die oberen Zeichen beibehält:

$$\cos\lambda_1 : \cos\mu_1 : \cos\nu_1 = \frac{1}{(d-e)f} : \frac{1}{-(d-e)f} : \frac{1}{f\theta_{12}}$$
$$\cos\lambda_2 : \cos\mu_2 : \cos\nu_2 = \frac{1}{-(d+e)f} : \frac{1}{-(d+e)f} : \frac{1}{f\theta_{22}},$$

daher

$$\begin{aligned}
&\cos\lambda_1 = +\sqrt{\tfrac{1}{2}}; \quad \cos\mu_1 = -\sqrt{\tfrac{1}{2}}; \quad \cos\nu_1 = -\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\frac{d-e}{\theta_{21}} \\
&\cos\lambda_2 = +\sqrt{\tfrac{1}{2}}; \quad \cos\mu_2 = +\sqrt{\tfrac{1}{2}}; \quad \cos\nu_2 = +\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\frac{d+e}{\theta_{21}} \\
&\cos\lambda_3 = -\frac{e}{\theta_{21}}; \quad \cos\mu_3 = -\frac{d}{\theta_{21}}; \quad \cos\nu_3 = +1.
\end{aligned} \tag{18}$$

Hieraus folgt, dass die neuen Hauptträgheitsaxen der $A$ und $B$ gegen die ursprünglichen gleich geneigt sind, d. h. dass sie die Länge 45° haben, also in die Richtung der hinzugefügten Masse und senkrecht zu dieser Richtung fallen, was eigentlich a priori klar ist. Sind die Neigungen dieser beiden Axen gegen die ursprüngliche Aequatorebene $\psi_1$, $\psi_2$, so wird

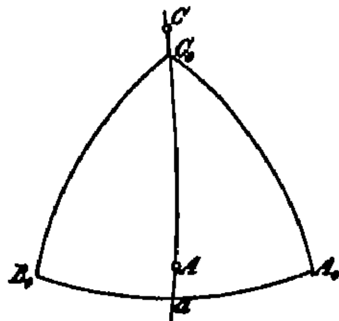
$$\psi_1 = 90^\circ - \nu_1; \quad \psi_2 = 90^\circ - \nu_2,$$

daher

$$\sin\psi_1 = -\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\frac{d-e}{\theta_{21}}; \quad \sin\psi_2 = +\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\frac{d+e}{\theta_{21}},$$

also mit Rücksicht auf die Werthe der $d$ und $e$

$$\sin\psi_1 = 0, \quad \sin\psi_2 = \frac{m\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}{C-B}.$$



(A. 277).

Dies ist aber (nach den Zeichen von $\cos\lambda_2$, $\cos\mu_2$) derjenige Theil der Axe, welcher mit den ursprünglichen Axen die Winkel 45° einschliesst. Sie wird daher an dieser Seite gegen den zugefügten Massenpunkt hin gehoben, d. h. nach $A$ (Fig. 277) gerückt, so dass $aA = \psi_2$ ist. Dass die neue $C$-Axe in die Richtung $AC_0$ von $C_0$ weggerückt erscheint, und zwar um den Bogen $\psi_2$, folgt auch aus den Formeln (15). Hiernach ist nämlich für den vorliegenden Fall:

$$\begin{aligned} \sin\nu_2\cos\eta_2 &= -\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\frac{m\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}{\vartheta_{21}} \\ \sin\nu_2\sin\eta_2 &= -\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\frac{m\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}{\vartheta_{21}}, \end{aligned} \tag{19}$$

demnach $tang\,\eta_2 = 1$; $\eta_2 = 225°$, wenn man $\sin\nu_2$ positiv nimmt; die neue $C$-Axe liegt also in dem Meridiane $aC_0$ über $C_0$ hinaus; der Bogen $CC_0 = \nu_2$ folgt dann aus

$$\sin\nu_2 = \frac{\sin\nu_2\cos\eta_2}{\cos 225°} = \frac{m\rho^2\sin\varphi\cos\varphi}{\vartheta_{21}};\quad \nu_2 = \psi_2$$

Die Werthe $x_1, x_2, x_3$ gestatten auch die Grösse der neuen Hauptträgheitsmomente zu finden. Sie sind bezw.: $A+g+x_1$, $B+h+x_2$, $C+k+x_3$; demnach, da $x_3 = 2\dfrac{d^2}{\vartheta_{31}}$ ist:

$$A+g+f,\quad B+h-f,\quad C+k+2\frac{d^2}{C-A}$$

oder

$$\begin{aligned} A' &= A + \tfrac{1}{2}m\rho^2(\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi) + \tfrac{1}{2}m\rho^2\cos^2\varphi = A + m\rho^2 \\ B' &= B + \tfrac{1}{2}m\rho^2(\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi) - \tfrac{1}{2}m\rho^2\cos^2\varphi = B + m\rho^2\sin^2\varphi \\ C' &= C + m\rho^2\cos^2\varphi + \frac{m^2\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{C-A}. \end{aligned} \tag{20}$$

Hiermit wird die Aenderung von $C-A$:

$$\Delta(C-A) = (C'-A') - (C-A) = \frac{m^2\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{C-A} - m\rho^2\sin^2\varphi.$$

Das Maximum der Verschiebung findet statt für $\varphi = 45°$; die Verschiebung von $C$ beträgt dann

$$\nu_2 = \tfrac{1}{2}\frac{m\rho^2}{C-A} = \frac{\tfrac{1}{2}m\rho^2}{\tfrac{1}{5}M(a^2-c^2)} = \tfrac{5}{2}\frac{m}{M}\left(\frac{\rho}{a}\right)^2\frac{1}{\left(\dfrac{a^2-c^2}{a^2}\right)} = Nm\left(\frac{\rho}{a}\right)^2.$$

Hierfür beträgt die Aenderung von $C-A$:

$$\Delta(C-A) = \frac{\tfrac{1}{4}m^2\rho^4}{C-A} - \tfrac{1}{2}m\rho^2 = \frac{\tfrac{1}{4}m^2\rho^4}{\tfrac{1}{5}M(a^2-c^2)} - \tfrac{1}{2}m\rho^2$$

oder

$$\frac{\Delta(C-A)}{C-A} = \frac{25}{4}\left(\frac{m}{M}\right)^2\left(\frac{\rho}{a}\right)^4\frac{1}{\left(\dfrac{a^2-c^2}{a^2}\right)^2} - \tfrac{5}{2}\frac{m}{M}\left(\frac{\rho}{a}\right)^2\frac{1}{\left(\dfrac{a^2-c^2}{a^2}\right)} =$$

$$= N^2m^2\left(\frac{\rho}{a}\right)^4 - Nm\left(\frac{\rho}{a}\right)^2.$$

Dabei wird die Entfernung $\rho$ in Einheiten des Erdhalbmessers ausgedrückt; dann wird der Faktor $N$:

$$N = \tfrac{5}{2}\frac{1}{M}\frac{1}{\left(\dfrac{a^2-c^2}{a^2}\right)}.$$

Drückt man die Massen durch ihr Volumen in Kubikkilometern und ihre Dichten in Einheiten der mittleren Dichte der Erde aus, so wird

$$\log N = 0{\cdot}5889648-10;\quad \log\frac{N}{arc\,1''} = 5{\cdot}8033899-10.$$

Die Hinzufügung der Masse eines Meteors von 10 *km* Durchmesser in 45° Breite würde danach eine Verschiebung von 0''·80[1]) und eine Veränderung $\Delta(C-A) = -0{\cdot}0000002877\,(A-C)$ bewirken.

Eine Massenverschiebung kommt dem Entfernen einer gegebenen Masse und dem Hinzufügen derselben an einer anderen Stelle gleich. Wird die Masse in dem Punkte weggenommen, dessen geographische Coordinaten (bezogen auf das ursprüngliche Axensystem) $\rho$, $\varphi$, $\lambda$, sind, so wird:

$$x_0 = \rho\cos\varphi\cos\lambda \qquad d = -m\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\lambda$$
$$y_0 = \rho\cos\varphi\sin\lambda \qquad e = -m\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\cos\lambda$$
$$z_0 = \rho\sin\varphi$$

daher, wenn man die eine Axe in die Richtung desjenigen Meridians legt, in welchem sich die entfernte Masse befindet: $\lambda = 0$, $\eta_2 = 0$; die Verschiebung findet gegen den Ort hin statt, wo die Masse entfernt wurde, um das Stück $C_0C_1 = \nu_2$, so dass:

$$\sin\nu_2 = \frac{m\rho^2\sin\varphi\cos\varphi}{C-A}.$$

Legt man nun die Masse $m$ in einem Punkt $m'$ nieder, dessen Länge $mC_0m' = L$ (Fig. 278) ist, so wird der neue Trägheitspol $C_2$ sein, und es ist

$$\sin\nu_2' = \frac{m\rho'^2\sin\varphi'\cos\varphi'}{(C-A)+\Delta(C-A)}.$$

Die stattgefundene Polverschiebung ist nun $C_0\,C_2 = u$ in der Richtung, welche durch den Winkel $w$ gegen den Ort $m$ oder durch $w+L$ gegen $m'$ bestimmt wird. Man sieht sofort, dass die Verschiebung des Pols in der entgegengesetzten Richtung stattfindet, als die Verschiebung der Masse $m$. Finden diese Verschiebungen nicht allzunahe dem Pole statt, so wird man $m'C_1m = L'$ mit $m'C_0m = L$ identificiren und $\Delta(C-A)$ vernachlässigen können und erhält dann aus dem Dreiecke $C_0C_1C_2$, wenn dasselbe als ebenes aufgelöst wird:


(A. 278.)

$$u\sin w = \nu_2'\sin L$$
$$u\cos w = \nu_2 - \nu_2'\cos L,$$

daher

$$u\sin w = \frac{m\rho'^2\sin\varphi'\cos\varphi'}{C-A}\sin L$$
$$u\cos w = \frac{m\rho^2\sin\varphi\cos\varphi}{C-A} - \frac{m\rho'^2\sin\varphi'\cos\varphi'}{C-A}\cos L. \qquad (21)$$

$w$ ist hierbei im entgegengesetzten Sinne von $L$ zu zählen.

a. Findet eine Verschiebung im Radiusvector (Hebung oder Senkung) statt, so wird $L = 0$, $\varphi = \varphi'$, folglich

[1]) Um die hieraus folgende lineare Verschiebung zu erhalten, hat man zu beachten, dass 1'' nahe 30 Meter entspricht.

$$u \sin w = 0$$
$$u \cos w = \tfrac{1}{2} \frac{m \sin 2\varphi}{C - A} (\rho^2 - \rho'^2).$$

Ist $\rho'$ grösser oder kleiner als $\rho$, so wird $w = 180°$ oder 0; bei der Erhebung einer Masse wird sich daher der Trägheitspol in dem Meridiane des Ausbruchs von der Ausbruchstelle entfernen; bei einem Einsturze wird sich der Trägheitspol nahern. Die Hebung oder Senkung einer prismatischen Masse von 100 Kilometern Länge, 100 Kilometern Breite und 1 Kilometer Dicke in der Breite von 45° um 5 Kilometer wird eine Verschiebung der Trägheitsaxe um 0''·0011 zur Folge haben.

b) Findet eine Verschiebung auf der Oberfläche selbst statt, so kann $\rho = \rho'$ gesetzt werden; dann wird

$$u \sin w = mN \sin 2\varphi' \sin L$$
$$u \cos w = mN(\sin 2\varphi - \sin 2\varphi' \cos L).$$

Für eine Verschiebung in der Richtung des Meridians wird $L = 0$,

$$u \sin w = 0$$
$$u \cos w = mN(\sin 2\varphi - \sin 2\varphi'),$$

und es wird die Richtung der Verschiebung von dem Zeichen der Differenz $\sin 2\varphi - \sin 2\varphi'$ abhangen. Wird die Masse von 100 Kilometern Länge und Breite und 1 Kilometer Dicke vom Aequator zu 45° Breite transportirt, so wird $w = 180°$, daher der Pol im selben Sinne verschoben, und zwar um den Betrag von 0''·714; die Verschiebung derselben Masse von 45° Breite zum Pol ergäbe eine Verschiebung im entgegengesetzten Sinne (der Masse entgegen) um denselben Betrag.

c) Findet eine Verschiebung auf dem Parallelkreise statt, so wird $\varphi = \varphi'$, daher

$$u \sin w = mN \sin 2\varphi \sin L \qquad = 2mN \sin 2\varphi \sin \tfrac{1}{2}L \cos \tfrac{1}{2}L$$
$$u \cos w = mN \sin 2\varphi (1 - \cos L) = 2mN \sin 2\varphi \sin \tfrac{1}{2}L \sin \tfrac{1}{2}L,$$

daher wird $w = 90° - \tfrac{1}{2}L$, $u = 2mN \sin 2\varphi \sin \tfrac{1}{2}L$. Für die Transposition der obigen Masse in der Breite 45° um die Länge $L$ wird daher $u = 1''{\cdot}427 \sin \tfrac{1}{2}L$. Die Bewegung findet in einer Curve $C_0 C_2 C_1$ statt. Für $L = 0$ ist $w = 90°$, die Bewegungsrichtung senkrecht zu $C_0 m$, und $u = 0$. Für $L = 90°$ wird $w = 45°$, $u = 1''{\cdot}009$. Für $L = 180°$ wird $w = 0$, $u = 1''{\cdot}427$. Bei einer weiteren Bewegung der Masse von $m_1$ in demselben Sinn, über die zweite Hemisphäre nach $m$ wird der Bogen $C_1 C' C_0$ beschrieben, wie man leicht findet, wenn man nunmehr $C_1$ als den Ausgangspunkt des Trägheitspoles ansieht. Die hierdurch beschriebene Curve ergiebt sich leicht, wenn man $u \sin w = y$, $u \cos w = x$ setzt, und $L$ eliminirt; es folgt:

$$\sin \tfrac{1}{2} L = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2mN \sin 2\varphi}; \quad x = \frac{x^2 + y^2}{2mN \sin 2\varphi}; \quad x^2 + y^2 = 2mN \sin 2\varphi \cdot x.$$

Die beschriebene Curve ist ein Kreis mit dem Halbmesser $mN \sin 2\varphi$.

**100. Einfluss auf die Rotationsaxe.** Stetige Veränderungen der $C$-Axe, zu denen die zuletzt angegebenen gehören, treten ein, wenn z. B. eine Wassermasse in beständiger Rotation um die Erde begriffen ist. Dieses findet nun allerdings bei der Ebbe und Fluth statt, wo sich eine Fluthwelle von mehreren Metern Höhe in nahe 25 Stunden um die Erde bewegen würde, wenn die ganze Erde mit Wasser bedeckt wäre. Man sieht aber leicht, dass die diametral

gegenüberstehenden Wellen ihre Wirkung vernichten. Die Fluthwelle auf der Seite von $m$ bewirkt bei der Bewegung derselben gegen $m'$ hin eine Bewegung von $C_0$ in der Tangente an $C_0$ gegen $C_2$ hin; die Welle auf der Seite von $m_1$ bei der Bewegung der Welle im selben Sinne eine Bewegung von $C_0$ in der Richtung von $C_0$ gegen $C'$ hin. Sind nun die beiden Fluthwellen völlig symmetrisch, so müssen sich die Wirkungen aufheben. Bei der ungleichen Vertheilung der Wassermassen wird nur die Differenz der so bewegten Massen in Rechnung zu ziehen sein; in diesem Falle wird aber die durch den Widerstand des gegenüberstehenden Festlandes erzeugte Rückströmung der Wassermassen eine der früheren entgegengesetzte, diese aufhebende Bewegung des $C$-Poles erzeugen[1].

Dasselbe gilt von den Bewegungen der zur Erde gehörigen Luftmassen.

Nicht unbeträchtliche Wasser- und Schlammmassen werden durch die Flüsse befördert. Die grössten Flüsse in mittleren Breiten haben allerdings einen östlichen Lauf[2]) und dürfte wohl ein Ueberschuss für die Ueberführung von Massen in dieser Richtung verbleiben. Bei einer durchschnittlichen Tiefe von 25 Metern würde aber, da die Dichte des Wassers nur den fünften Theil der mittleren Dichte der Erde beträgt, ein Wasserareal von 1000000 Quadratkilometern nur eine Verschiebung der $C$-Axe um $0''\!\cdot\!07$ bewirken. Doch beträgt der Ueberschuss der in derselben Richtung geführten Wassermassen nur einen sehr geringen Bruchtheil dieses Areals, um so mehr, als auch hier die bewegten Wassermassen, die um 180° von einander abstehen, ihre Wirkung vernichten.

Eine andere mögliche Ursache, die fortgesetzte Vereisung im Winter und das Abschmelzen des Eises im Sommer, kann jedenfalls periodische Veränderungen hervorbringen. Diese Vereisung und nachträgliche Abschmelzung findet vorzugsweise in mittleren Breiten statt, und zwar auf der nördlichen Halbkugel durch das Ueberwiegen des Festlandes in Asien nicht gleichmässig um den Pol vertheilt[3]). Die fortgesetzte Massenablagerung in Asien würde den nächst-

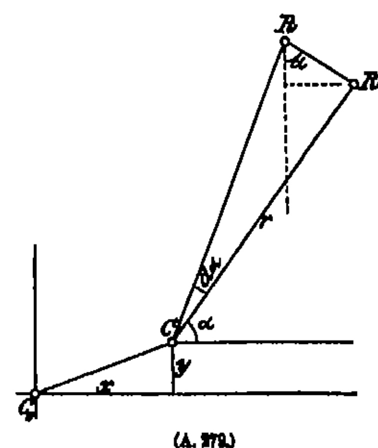
---

[1]) Eine genauere Untersuchung dieser Verhältnisse müsste von der Voraussetzung ausgehen, dass die Erde kein starrer Körper ist, sondern, wie dies der Natur der Sache entspricht, aus einem festen Kerne besteht, der von einer Schicht veränderlicher Massen (Wasser und Luft) umgeben ist. Es ist jedoch durchaus nicht ausgeschlossen, dass neben diesen sichtbar veränderlichen Theilen noch andere im Innern der Erde vorhanden sind, welche stetigen oder auch plötzlichen Lageänderungen unterworfen sind. Entzieht sich schon die Beurtheilung des Verhältnisses der sichtbar veränderlichen Theile zur ganzen Masse unserer Berechnung, selbst unserer Schätzung, so ist dieses noch viel mehr mit dem letzteren Theile der Fall, und kann nur eine unter diesen Voraussetzungen durchgeführte Theorie durch Vergleichen derselben mit den Resultaten einen Schluss auf die Masse des veränderlichen Theiles ziehen lassen. Untersuchungen dieser Art setzen aber eine durchgebildete Theorie der Ebbe und Fluth voraus. Doch sind bisher nur vereinzelte Versuche dieser Art zu nennen. Die letzte, noch jetzt adoptirte Theorie der Ebbe und Fluth rührt von LAPLACE her; sie ist aber kaum als abgeschlossen zu erklären, und könnte ihre Berücksichtigung auf die Rotationserscheinungen schon aus diesem Grunde gegenstandslos sein. Ueber den Einfluss der veränderlichen Oberflächenschicht auf die Erscheinungen der Rotation vergl. u. a. DARWIN in den Philos. transact. für 1879, und GYLDÉN, Astron. Nachrichten, No. 2226 und 3157.

[2]) Die Ueberführung in der dazu senkrechten Richtung hat, wie aus dem früheren erhellt, einen viel geringeren Einfluss; übrigens ist dieser nördliche und südliche Lauf ziemlich gleichmässig vertheilt.

[3]) Auf der südlichen Halbkugel ist die wirksame Ablagerung eine viel geringere, da Südamerika und Afrika nicht zu so hohen Breiten reichen, und die fortgesetzte Eisablagerung am Ocean ziemlich gleichmässig um die Pole herum stattfindet.

gelegenen Pol $C_0$ von $m$ wegbewegen: die Massenablagerung im Antipodenpunkte $(m)$ von $m$ würde den zunächst gelegenen zweiten Pol $(C_0)$ ebenfalls in der Richtung $(m)(C_0)$ von $(m)$ wegbewegen, also die Axe im selben Sinne drehen. Hingegen würde die Eisablagerung in einem um 180° in Länge verschiedenen Punkte auf derselben Halbkugel die Wirkung schwächen. Der Mittelpunkt der Ablagerung auf der südlichen Hemisphäre (zwischen Afrika und Südamerika fallend) fällt nun aber keineswegs in den Antipodenpunkt der viel stärkeren Ablagerung auf der nördlichen Hemisphäre, so dass sich die Wirkungen eher schwächen als verstärken. Beim Abschmelzen des Eises wird der Pol sich wieder $C_0$ nähern, demnach im Laufe eines Jahres eine pendelartige Schwingung in einer geraden Linie (grossten Kreise) ausführen. Nimmt man an, dass sich im Laufe eines Winters nach und nach eine Kruste bis zur Höhe von durchschnittlich 80 *cm* ablagert, so wird sich, mit der Dichte des Eises gleich $\frac{1}{6}$ der Dichte der Erde, ein Areal von 25000000 Quadratkilometern bedecken müssen, um eine Verschiebung von 0''·1 zu bewirken, wenn die Wirkung in allen Breiten gleich vorausgesetzt wird. Mit Rücksicht auf die schwächere Wirkung in grösseren Breiten müsste das Areal noch ganz bedeutend grösser sein; nimmt man den Mittelpunkt der Eisablagerung in 60° nördlicher Breite (er ist eher etwas nördlicher, dabei 100° östlich von Greenwich), so würde der Ueberschuss des wirksamen Areals in Asien gegenüber dem in Amerika und dem auf der südlichen Halbkugel etwa 80000000 Quadratkilometer betragen müssen. Auch hier ist dieser Ueberschuss gewiss nur ein kleiner Bruchtheil; die Verschiebung der Hauptträgheitsmomente beträgt daher nur wenige Hunderttheile der Bogensecunde — vielleicht nicht einmal ein Hundertel Bogensecunde.



(A. 279.)

Um den Einfluss zu bestimmen, welchen eine Veränderung in der Lage der Hauptträgheitsaxen auf die Lage der instantanen Rotationsaxe ausübt, sei $C_0$ (Fig. 279) ein beliebiger fester Punkt der Erdoberfläche (etwa eine mittlere Lage des Trägheitspoles) $C$ der instantane Trägheitspol und $R$ der Rotationspol. Der letztere wird, wenn er mit dem Trägheitspol nicht zusammenfällt, um diesen einen Kreis mit dem Halbmesser $r$ zu beschreiben suchen[1]); in dem unendlich kleinen Zeittheilchen $dt$ wird daher der Kreisbogen

$$RR' = r\,d\alpha = r\,m\,dt$$

beschrieben, wenn $m$ (vergl. No. 98) die Geschwindigkeit im Euler'schen Cyklus ist. Seien $x$, $y$, die Coordinaten des Punktes $C$ in Bezug auf ein festes Axensystem; $\xi$, $\eta$ die Coordinaten von $R$ in Bezug auf dasselbe Axensystem, so wird mit den in Fig. 278 gewählten Bezeichnungen

$$d\xi = -RR'\sin\alpha = -r\,m\,dt\frac{\eta - y}{r} = -(\eta - y)\,m\,dt$$

$$d\eta = +RR'\cos\alpha = +r\,m\,dt\frac{\xi - x}{r} = +(\xi - x)\,m\,dt.$$

---

[1]) Man kann die Punkte als Projectionen der bezüglichen Punkte der Erdoberfläche auf die Tangentialebene in $C_0$ ansehen, oder auch wegen der Kleinheit der Entfernungen als die Punkte auf der Kugeloberfläche selbst.

Die Differentialgleichungen der Bewegung werden daher:

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} + \eta m &= + y m \\ \frac{d\eta}{dt} - \xi m &= - x m.\end{aligned} \tag{1}$$

Sei die Bewegung des Punktes $C$ bestimmt durch die Ausdrücke:

$$\begin{aligned}x &= \Sigma a_1 \sin(\omega_1 t + A_1) \\ y &= \Sigma b_1 \cos(\omega_1 t + A_1),\end{aligned} \tag{2}$$

so sind die rechten Seiten der Gleichungen (1) bekannte Functionen der Zeit und die beiden Gleichungen werden ein System von linearen, simultanen Gleichungen, deren Integrale, wenn die rechten Seiten gleich Null gesetzt werden, die Form haben:

$$\begin{aligned}\xi &= - h \sin(\mu t + H) \\ \eta &= + h' \cos(\mu t + H).\end{aligned}$$

Differenzirt man diese Ausdrücke und setzt in die linken Seiten von (1) ein, so folgt $\mu = m$, $h = h'$; die Integrale der vollständigen Gleichungen (1) werden sodann:

$$\begin{aligned}\xi &= - h \sin(mt + H) + \Sigma f_1 \sin(\omega_1 t + A_1) \\ \eta &= + h \cos(mt + H) + \Sigma g_1 \cos(\omega_1 t + A_1),\end{aligned} \tag{3}$$

wobei jedem Argumente in (2) ein Glied mit demselben Argumente in (3) entspricht. Differenzirt man diesen Ausdruck und setzt in (1) ein, so erhält man die beiden Gleichungen

$$f_1 \omega_1 + g_1 m = b_1 m; \qquad g_1 \omega_1 + f_1 m = a_1 m$$

und daraus:

$$f_1 = m \frac{b_1 \omega_1 - a_1 m}{\omega_1^2 - m^2}; \qquad g_1 = m \frac{a_1 \omega_1 - b_1 m}{\omega_1^2 - m^2}. \tag{4}$$

Die ersten Glieder in $\xi$, $\eta$ stellen die Bewegung im Euler'schen Cyclus dar; die einzelnen Glieder der Summe, die aus der Verschiebung von $C$ resultirende Bewegung von $R$. Da im Nenner der Coëfficienten $f_1$, $g_1$ die Differenz $\omega^2 - m^2$ auftritt, so können, wenn dieser Divisor klein ist, die Coëfficienten in (3) wesentlich vergrössert erscheinen. Da $m$ die Bewegung im Euler'schen Cyclus darstellt, so werden merkliche Glieder nur dann entstehen, wenn auch $\omega$ genähert eine zehnmonatliche Periode hat. Für eine jährliche Periode würde

$$\frac{\omega}{m} = \frac{305}{365} = 0\cdot836, \qquad \left(\frac{\omega}{m}\right)^2 = 0\cdot698; \qquad 1 - \left(\frac{\omega}{m}\right)^2 = 0\cdot302$$

der Vergrösserungsfaktor 3·315.

a) Beschreibt der Punkt $C$ eine gerade Linie im Laufe eines Jahres, wie dies bei der Vereisung und Abschmelzung der Fall wäre, so wird

$$x = a \sin(\omega t + A); \qquad y = 0.$$

Dann ist

$$f = + \frac{a}{1 - \left(\frac{\omega}{m}\right)^2}; \qquad g = - \frac{a \frac{\omega}{m}}{1 - \left(\frac{\omega}{m}\right)^2},$$

daher

$$\begin{aligned}\xi &= - h \sin(mt + H) + 3\cdot31\, a \sin(\omega t + A) \\ \eta &= + h \cos(mt + H) - 2\cdot77\, a \cos(\omega t + A).\end{aligned}$$

b) Beschreibt der Punkt $C$ einen Kreis, so wird

$$x = a \sin(\omega t + A); \qquad y = a \cos(\omega t + A)$$

$$f = g = \frac{am}{\omega + m},$$

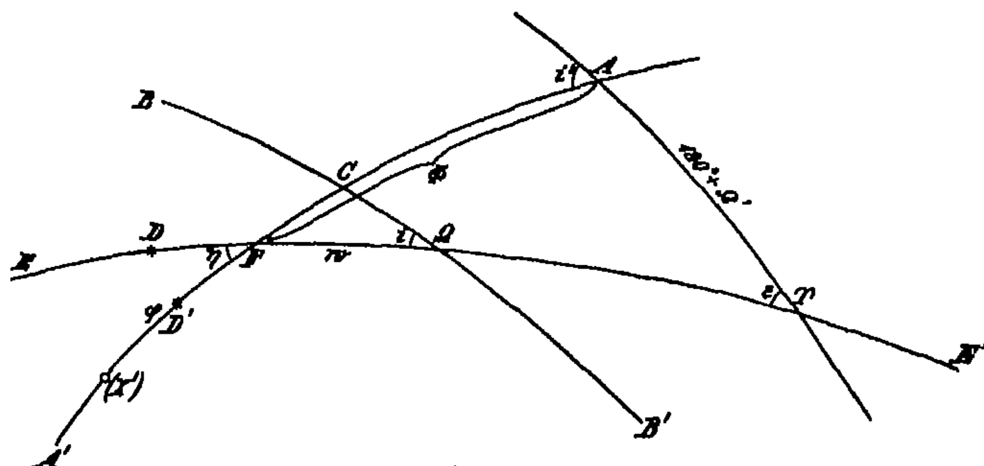
daher, wenn die Periode von $\omega$ ein Jahr ist: $f = g = 0{\cdot}5448\,a$; die Coëfficienten erscheinen auf die Hälfte reducirt.

c) Ist $x = a \sin(\omega t + A)$, $y = -a \cos(\omega t + A)$, so wird die Bewegung wieder kreisförmig, aber der EULER'schen Bewegung entgegengesetzt, dann wird

$$f = -\frac{am}{\omega - m}; \qquad g = +\frac{am}{\omega - m},$$

also wenn $\omega$ wieder eine jährliche Periodicität hat, $f = -g = 6{\cdot}08\,a$. Kreisförmige Bewegungen der $C$-Axe entgegengesetzt der EULER'schen Bewegung sind jedoch schwer anzunehmen. Nimmt man als Amplitude der Bewegung der $C$-Axe bei ihrer Bewegung in gerader Linie $2a = 0''{\cdot}15$[1]), so würde die Rotationsaxe eine schwach gestreckte Ellipse beschreiben, deren Axen $0''{\cdot}25$ und $0''{\cdot}21$ wären, wodurch Polhöhenschwankungen mit der Amplitude $0''{\cdot}5$ erklärt würden, wie sie durch die Beobachtungen der letzten Jahre constatirt wurden. Doch ist nach dem früher gesagten die Amplitude der Schwankung der $C$-Axe mit $0''{\cdot}15$ jedenfalls viel zu hoch gegriffen. Ueberdiess muss bemerkt werden, dass neuerdings CHANDLER die Polhöhenschwankungen in eine solche mit jährlicher Periode und eine mit der Periode von 430 Tagen zerlegt hat; für diese wird aber der Vergrösserungsfaktor nur 2; man müsste daher für eine Polhöhenschwankung von $0''{\cdot}5$ eine Amplitude der geradlinigen Bewegung der $C$-Axe um $0''{\cdot}25$ annehmen[2]).

**101.** Die Libration des Mondes. Als Ausgangspunkt für die Untersuchung der Drehung des Mondes dienen die Formeln I, II, IIIa, IV in No. 94, in denen die Drehungsmomente $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ durch 94 (8) bestimmt sind. Zu beachten ist hierbei, dass der Mittelpunkt des festen und beweglichen Coordinaten-




(A. 280.)

systems im Mondmittelpunkte liegen. Sei also selenocentrisch $EE'$ (Fig. 280) die Ekliptik, $BB'$ die Mondbahn und $AA'$ der Mondäquator. Die Neigungen dieser

[1]) Man findet sehr häufig, wiewohl fälschlich, $0''{\cdot}075$ als ganze Amplitude angegeben.

[2]) Ueber den Einfluss von Refractionsanomalien auf die Bestimmung der Polhöhe, vergl. des Verfassers Bemerkungen in den Astronom. Nachrichten No. 3021.

grössten Kreise am Himmel sind natürlich selenocentrisch dieselben wie geocentrisch, da sie ja durch die gegenseitige Lage der bezüglichen Ebenen bestimmt sind. Die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik sei $i$, diejenige des Mondäquators gegen die Ekliptik sei $\eta$. Geocentrisch ist nun die Lage des aufsteigenden Knotens der Mondbahn auf der Ekliptik durch seine Länge ☊ bestimmt; denkt man sich durch den Mondmittelpunkt eine Parallele zur Schnittlinie der Ekliptik und des Erdäquators, d. h. zur Richtung von der Erde zum Frühlingspunkt gezogen, so wird diese an der Himmelskugel denselben Punkt ♈ treffen. Dieser, obzwar für den Mond selbst ohne Bedeutung, wird jedoch auch für die selenocentrische Ekliptik $EE'$ als Anfangspunkt gewählt, weil sich hierdurch die selenocentrischen Coordinaten der Erde, welche hier den anziehenden Körper darstellt, einfach durch die aus der Theorie der Bewegung des Mondes um die Erde bekannten geocentrischen Coordinaten des Mondes darstellen lassen. Die selenocentrische Richtung nach dem terrestrischen Aequinoctium sei also gegeben durch den Punkt ♈; dann ist der Bogen ♈☊ = ☊ die Länge des aufsteigenden Mondknotens auf der Ekliptik. Derjenige Punkt, welcher für den Mond die Stelle des Frühlingspunktes vertritt, ist der Schnittpunkt $C$ des Mondäquators mit der Mondbahn. Statt desselben wird aber der Schnittpunkt $F$ des Mondäquators mit der Ekliptik eingeführt[1]; seine Lage ist bestimmt durch die Länge desselben auf der Ekliptik, gezählt ebenfalls in der Ekliptik von ♈ aus; sie sei ♈$F$ = ☊ + $w$, d. h. der Bogen ☊$F = w$. Sobald $w$, $i$, $\eta$ bekannt sind, ist die Lage von $C$ ebenfalls bestimmt und man kann die selenocentrischen Richtungen auf das Fundamentalsystem der $AA'$ oder $BB'$ beziehen, wenn man analoge Grössen, wie die für die Erde üblichen einführt.

Seien nun die aus der Theorie der Mondbewegung bekannten geocentrischen Coordinaten des Mondes, bezogen auf eine feste Ekliptik: $\lambda$, $\beta$, und die Entfernung des Mondes von der Erde $\rho$, so sind die selenocentrischen Coordinaten der Erde $\lambda_0 = 180° + \lambda$ und $-\beta$, da die Richtung von der Erde zum Monde und diejenige vom Monde zur Erde die Himmelskugel in zwei diametral entgegengesetzten Punkten treffen. Selenocentrisch wird daher die Erde nicht in der selenocentrischen Ekliptik stehen; diese verschiebt sich eben mit dem Mond parallel zu sich selbst über oder unter die wahre Ekliptik, trifft aber die Himmelskugel immer in demselben grössten Kreise. Hingegen fällt die Richtung nach der Erde bald über bald unter diese Ebene. Die Breite des Mondes ist bestimmt durch

$$\tang \beta = \tang i \sin (\lambda - ☊),$$

die Breite der Erde durch

$$\tang (-\beta) = -\tang i \sin (\lambda - ☊) = \tang i \sin (\lambda_0 - ☊).$$

Die rechtwinkligen Coordinaten der Erde, bezogen auf ein festes Axensystem, dessen $X$-Axe nach ♈ gerichtet ist, und dessen $XY$-Ebene in die Ekliptik fällt, sind daher:

$$(\xi) = \rho \cos \beta \cos \lambda_0 ; \qquad (\eta) = \rho \cos \beta \sin \lambda_0 ;$$
$$(\zeta) = -(\rho \sin \beta + \rho \Delta \zeta) = \rho \cos \beta \tang i \sin (\lambda_0 - ☊) - \rho \Delta \zeta,$$

wobei $\rho\Delta\zeta$ die Störung in der Breite des Mondes bedeutet, und berücksichtigt werden muss, wenn man für ☊, $i$ mittlere Elemente setzt; in $\xi$, $\eta$ wird der Einfluss derselben wegen der Kleinheit von $i$ belanglos. Hieraus erhält man die

[1] Nach den CASSINI'schen Gesetzen fallen übrigens ☊, $C$, $F$ zusammen, was hier vorerst natürlich noch nicht angenommen werden kann.

auf das bewegliche Axensystem der $X'$, $Y'$, $Z'$ bezogenen Coordinaten $\xi'$, $\eta'$, $\zeta'$ aus 94 (8) und 91 (4), wo $\Omega + w$ an Stelle von $\psi'$ zu setzen ist. Für den Mond ist aber $i'$ der nach Fig. 280 mit $\eta$ bezeichnete Winkel etwa $1\frac{1}{2}°$; vernachlässigt man daher die Quadrate von $\eta$, so kann man $\cos\eta = 1$, $\sin\eta = \eta$ setzen und erhält dann:

$$\begin{aligned}
\xi' &= + \cos(\varphi + \Omega + w)(\xi) + \sin(\varphi + \Omega + w)(\eta) - \eta \sin\varphi \cdot (\zeta)\\
\eta' &= - \sin(\varphi + \Omega + w)(\xi) + \cos(\varphi + \Omega + w)(\eta) - \eta \cos\varphi \cdot (\zeta)\\
\zeta' &= - \eta \sin(\Omega + w)(\xi) + \eta \cos(\Omega + w)(\eta) + (\zeta).
\end{aligned}$$

$i$ ist für den Mond etwa 6°; vernachlässigt man daher auch die zweiten Potenzen von $i$ und das Produkt $i\eta$, so wird

$$\begin{aligned}
\xi' &= + \rho \cos\beta \cos(\varphi + \Omega + w - \lambda_0)\\
\eta' &= - \rho \cos\beta \sin(\varphi + \Omega + w - \lambda_0)\\
\zeta' &= - \rho\,\eta \cos\beta \sin(\Omega + w - \lambda_0) + \rho\, i \sin(\lambda_0 - \Omega) - \rho\Delta\zeta.
\end{aligned} \tag{2}$$

Diese Werthe sind in die Ausdrücke 94 (8) zu substituiren, und geben, mit Vernachlässigung des Quadrates der Mondbreite, wenn man Kürze halber

$$\frac{C-B}{A} = \alpha; \qquad \frac{C-A}{B} = \beta; \qquad \frac{B-A}{C} = \gamma \tag{3}$$

$$\lambda_0 - (w + \Omega) = v \tag{4}$$

setzt, so dass $v$ die von $F$ aus gezählte selenocentrische Länge der Erde ist:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{L}}{A} &= + \frac{3k^2 M}{\rho^3}\alpha\,[\eta \sin(v-\varphi)\sin v + i \sin(v-\varphi)\sin(v+w) - \Delta\zeta \sin(v-\varphi)]\\
\frac{\mathfrak{M}}{B} &= - \frac{3k^2 M}{\rho^3}\beta\,[\eta \cos(v-\varphi)\sin v + i \cos(v-\varphi)\sin(v+w) - \Delta\zeta \cos(v-\varphi)]\\
\frac{\mathfrak{N}}{C} &= + \frac{3k^2 M}{2\rho^3}\gamma \sin 2(v-\varphi)
\end{aligned} \tag{5}$$

Die Differentialgleichungen werden, wenn in III wieder $\eta^2$ vernachlässigt wird:

$$r = n + r' \qquad \frac{dr'}{dt} = \frac{\mathfrak{N}}{C} \tag{6}$$

$$\frac{dp}{dt} + \alpha n q = \frac{\mathfrak{L}}{A}; \qquad \frac{dq}{dt} - \beta n p = \frac{\mathfrak{M}}{B} \tag{7}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = n + r' - \frac{d(\Omega + w)}{dt} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\sin\eta \frac{d(\Omega + w)}{dt} &= - p \sin\varphi - q \cos\varphi\\
\frac{d\eta}{dt} &= - p \cos\varphi + q \sin\varphi.
\end{aligned} \tag{9}$$

**102. Die Libration in Länge.** Die wahre Länge des Mondes $\lambda$ setzt sich zusammen aus seiner mittleren Länge $L$ und den Ungleichheiten $\Sigma k_i \sin(\varkappa_i t + K_i)$, welche sowohl die Mittelpunktsgleichung als auch die Störungen umfassen; es wird daher:

$$\lambda = L + \Sigma k_i \sin(\varkappa_i t + K_i) \tag{1}$$

und die selenocentrische Länge der Erde

$$\lambda_0 = 180° + L + \Sigma k_i \sin(\varkappa_i t + K_i), \tag{2}$$

wo $180° + L$ die mittlere selenocentrische Länge der Erde darstellt. Die von $F$ aus gezählte selenocentrische Länge der Erde ist nach 101 (4):

$$v = \lambda_0 - (w + \Omega) = 180° + L - (w + \Omega) + \Sigma k_i \sin(\varkappa_i t + K_i). \tag{3}$$

Man hat für ☊ die mittlere Länge des Mondknotens zu wählen, wenn unter $BB'$ die mittlere Bahnebene des Mondes verstanden wird und die Störungen sich auf diese beziehen. Dann ist auch $w$ der Abstand des Punktes $F$ vom mittleren Mondknoten, und die Grössen

$$\frac{dL}{dt} = L'; \quad \frac{d☊}{dt} = ☊'$$

sind constant. Den Winkel $\varphi$ kann man in zwei andere zerlegen, von denen der eine durch den Punkt $D'$ bestimmt ist, wenn $FD = FD'$ und $♈D$ die mittlere Länge der Erde ist, und der zweite $u = D'(X')$ von diesem Punkte $D'$ aus gerechnet wird. ($D'$ fällt daher nahe in die Richtung des mittleren Erdortes.) Es ist aber $FD = 180° + L - (☊ + w)$, demnach

$$\varphi = 180° + L - (w + ☊) + u \tag{4}$$

$$v - \varphi = \Sigma k_i \sin(\varkappa_i t + K_i) - u \tag{5}$$

und die Differentialgleichung 101 (6) geht über in

$$\frac{dr'}{dt} = +3\frac{k^2 M}{2\rho^3}\gamma \sin 2[\Sigma k_i \sin(\varkappa_i t + K_i) - u]. \tag{6}$$

Die zweimalige Differentiation von (4) liefert:

$$\frac{d\varphi}{dt} = L' - ☊' + \frac{du}{dt} - \frac{dw}{dt}; \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2u}{dt^2} - \frac{d^2w}{dt^2}$$

und die Differentiationen von 101 (8):

$$\frac{dr'}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d^2w}{dt^2}$$

oder mit Berücksichtigung der zuletzt erhaltenen Gleichung und der Gleichung (6):

$$\frac{d^2u}{dt^2} = +\frac{3k^2M}{2\rho^3}\gamma \sin 2[\Sigma k_i \sin(\varkappa_i t + K_i) - u].$$

Da $M$ die Masse der Erde ist, so wird der Coëfficient

$$\frac{3k^2M}{2\rho^3} = \frac{3k^2(M_♁ + M_☾)}{2a^3}\left(\frac{a}{\rho}\right)^3 \frac{M_♁}{M_♁ + M_☾}.$$

Wird daher

$$\frac{M_☾}{M_♁} = \nu''$$

gesetzt, sodass $\nu'' = \frac{1}{\nu'}$ ist, wenn $\nu'$ die in 94 angegebene Bedeutung hat, und drückt man $\rho$ in Einheiten der mittleren Entfernung des Mondes von der Erde aus, so wird

$$\frac{d^2u}{dt^2} = +\frac{3L'^2}{2\rho^3}\frac{1}{1+\nu''}\gamma \sin 2[\Sigma k_i \sin(\varkappa_i t + K_i) - u]. \tag{7}$$

Vernachlässigt man hier zunächst die Ungleichheiten der Mondbewegung, also auch die Abweichung von der Kreisbahn, setzt daher in erster Näherung $\rho = 1$, so wird die zu integrirende Gleichung:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{3}{2}\frac{L'^2}{1+\nu''}\gamma \sin 2u. \tag{8}$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $2\frac{du}{dt}dt$ und integrirt, so erhält man ein erstes Integral

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = c' + \frac{3}{2}\frac{L'^2}{1+\nu''}\gamma \cos 2u = c - 3\frac{L'^2}{1+\nu''}\gamma \sin^2 u = c - \varkappa \sin^2 u,$$

wenn $\frac{3L'^2}{1+\nu''}\gamma = \varkappa$ gesetzt wird. Daher wird

$$dt = \frac{du}{\pm\sqrt{c - \varkappa \sin^2 u}}.$$

Hieraus folgt nun, dass $u$ beständig wächst, wenn $\varkappa$ entweder negativ ist, oder positiv und kleiner als $c$[1]). Da aber der Mond uns stets dieselbe Seite zuwendet, so kann dieses nicht der Fall der Natur sein. Es muss also $\varkappa > c$ sein, in welchem Falle eine oscillirende Bewegung stattfindet (vergl. auch No. 60) und zwar um $u = 0$ oder $180°$; die Beobachtungen zeigen das erstere, womit also zunächst dargethan ist, dass in (4) der Winkel $u$, welcher die Abweichung der selenocentrischen Richtung nach $D$ (gegen die Erde) von derjenigen gegen $(X')$ (die Hauptträgheitsaxe) darstellt, nur um periodisch wachsende und abnehmende Beträge variiren kann. Für diesen Fall lässt sich die Integration ohne Zurückführung auf elliptische Functionen durchführen. Da überdiess in (7) auch die Ungleichheiten der Mondbewegung nur sehr klein sind, so kann in dieser Gleichung statt des Nenners $\rho$ die Einheit und statt des $\sin$ der Bogen gesetzt werden und man erhält

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{8L'^2}{1+\nu''}\gamma u = \frac{8L'^2}{1+\nu''}\gamma \Sigma k_i \sin(\varkappa_i t + K_i). \tag{9}$$

Das Integral dieser Differentialgleichung, wenn die rechte Seite Null ist, ist $u = a \sin(mt + A)$, wobei $a$, $A$ Constante sind, dann folgt

$$m = \frac{L'}{\sqrt{1+\nu''}}\sqrt{8\gamma}.$$

Hieraus folgt, dass $\gamma$ positiv, d. h. $B > A$ sein muss. $A$ ist aber das Trägheitsmoment um die $X$-Axe, d. h. um die gegen die Erde zu gerichtete Hauptträgheitsaxe; diese ist daher Axe des kleinsten Trägheitsmomentes. Setzt man jetzt wieder das Integral der vollständigen Differentialgleichung (9) in der Form voraus

$$u = a \sin\left(\frac{L'}{\sqrt{1+\nu''}}\sqrt{8\gamma}\cdot t + A\right) + \Sigma l_i \sin(\varkappa_i t + K_i), \tag{10}$$

wobei jedem Gliede der rechten Seite in (9) ein Zusatzglied in (10) entspricht, so folgt in der bereits wiederholt erörterten Weise

$$l_i = \frac{\frac{8L'^2}{1+\nu''}\gamma k_i}{\frac{8L'^2}{1+\nu''}\gamma - \varkappa_i^2}. \tag{10a}$$

Der vollständige Ausdruck von $u$ wird daher

$$u = a \sin\left(\frac{L'}{\sqrt{1+\nu''}}\sqrt{8\gamma}\cdot t + A\right) + \sum \frac{\frac{8L'^2}{1+\nu''}\gamma k_i}{\frac{8L'^2}{1+\nu''}\gamma - \varkappa_i^2} \sin(\varkappa_i t + K_i). \tag{11}$$

Der erste Theil enthält die beiden willkürlichen Integrationsconstanten $a$, $A$; er wird aus diesem Grunde auch die »willkürliche Libration« genannt; der zweite Theil hingegen ist eine nothwendige Folge der ungleichmässigen Bewegung

---

[1]) Da $\gamma$ je nach der Wahl der Hauptträgheitsaxen für diesen Fall positiv oder negativ gewählt werden kann, so wird hierdurch das Integral scheinbar geändert; da aber gleichzeitig die Grenzen und der Modul geändert werden, so kann daraus nicht geschlossen werden, dass der Rotationszustand instabil wäre. Doch gehören die weiteren Ausführungen in die Theorie der Transformation der elliptischen Functionen.

des Mondes, die sogen. »nothwendige Libration«; beide zusammen bewirken Schwankungen der Hauptträgheitsaxe des kleinsten Moments um den gegen die Erde zu gerichteten selenocentrischen Strahl; sie bilden die physische Libration des Mondes in Länge[1]).

Der Coëfficient des dem Argumente $\varkappa_i t + K_i$ entsprechenden Gliedes der nothwendigen Libration kann geschrieben werden

$$\frac{k_i}{1 - \left(\frac{\varkappa_i}{L'}\right)^2 \frac{1+\nu''}{8\gamma}}.$$

Er kann beträchtlich werden, wenn $k_i$ selbst sehr gross wird, oder wenn der Nenner sehr klein ist; dieses letztere wird der Fall, wenn $\varkappa_i$ sehr nahe $\frac{L'}{\sqrt{1+\nu''}}\sqrt{8\gamma}$ d. h. für jene Argumente, welche mit dem Argumente der willkürlichen Libration nahe dieselbe Periode haben. Diese ist, wenn $\nu'' = \frac{1}{15}$ gesetzt wird:

$$\tau = \frac{360^\circ}{L'\sqrt{8\gamma}}\sqrt{1+\nu''} = \frac{360 \cdot 60 \cdot 60''}{47485''\sqrt{8}\sqrt{\gamma}}\sqrt{1+\nu''} = \frac{15 \cdot 874}{\sqrt{\gamma}} \text{ Tage} = \frac{0 \cdot 048457}{\sqrt{\gamma}} \text{ Jahre.}$$

$\gamma$ ist nun nahe 0·000846 demnach $\tau = 2 \cdot 386$ Jahre mit dem Werthe $\varkappa = 1518'' \cdot 8$. Je naher die tägliche Bewegung des Argumentes diesem Werthe kommt, desto stärker wird der Coëfficient durch die Integration vergrössert. Von den Störungsgliedern des Mondes werden daher nur zu berücksichtigen sein: diejenigen mit grösseren Coëfficienten, die Mittelpunktsgleichung und Evection und dasjenige Glied, dessen Periode der obigen am nächsten kommt, die jährliche Gleichung. Mit $L' = 47485''$ ist

| | | | |
|---|---|---|---|
| für die Mittelpunktsgleichung | $k_1 = +22648''$, | $\varkappa_1 = 47084''$, | $l_1 = -28'' \cdot 6$ |
| „ „ Evection | $k_2 = +4467''$, | $\varkappa_2 = 40789''$, | $l_2 = -6'' \cdot 2$ |
| „ „ jährliche Gleichung | $k_3 = -667''$, | $\varkappa_3 = 3548''$, | $l_3 = +147'' \cdot 4$, |

somit

$$u = a \sin\left(\frac{L'}{\sqrt{1+\nu''}}\sqrt{8\gamma}\, t + A\right) - 28'' \cdot 6 \sin ☾ - 6'' \cdot 2 \sin(☾ + 2\omega - 2\odot - 2\omega_1) + \\ + 147'' \cdot 4 \sin \odot. \tag{12}$$

Die Grössen $a$, $A$ müssen als Integrationsconstanten aus den Beobachtungen bestimmt werden. Die neuesten Untersuchungen dieser Art rühren von J. Franz her; sie ergeben das Resultat, dass diese physische Libration, wenn nicht ganz verschwindend, so doch für die heutigen Mittel der messenden Astronomie nicht angebbar ist[2]).

**103. Die Libration in Knoten und Neigung.** Wäre das zweite Cassini'sche Gesetz strenge, so würde $w$ gleich Null sein; nimmt man an, dass dieses Gesetz als Näherung anzusehen sei, so wird $w$ jedenfalls sehr klein sein. Setzt man nach Lagrange

$$\sin\eta \sin\varphi = s; \qquad \sin\eta \cos\varphi = s', \tag{1}$$

so wird

$$\frac{ds}{dt} = \cos\eta \sin\varphi \frac{d\eta}{dt} + \sin\eta \cos\varphi \frac{d\varphi}{dt}; \qquad \frac{ds'}{dt} = \cos\eta \cos\varphi \frac{d\eta}{dt} - \sin\eta \sin\varphi \frac{d\varphi}{dt},$$

daher mit Rücksicht auf 101 (8) und (9)

---

[1]) Hierzu tritt noch die optische Libration, vergl. den I. Band, pag. 120.

[2]) J. Franz: »Die Constanten der physischen Libration des Mondes«; Astronomische Beobachtungen an der k. Universitätssternwarte in Königsberg, Bd. 38, pag. 27.

$$\frac{ds}{dt} = \cos\eta \sin\varphi(-p\cos\varphi + q\sin\varphi) + \cos\varphi \sin\eta(n + r') + \cos\varphi(p\sin\varphi + q\cos\varphi)$$

$$\frac{ds'}{dt} = \cos\eta\cos\varphi(-p\cos\varphi + q\sin\varphi) - \sin\varphi\sin\eta(n + r') - \sin\varphi(p\sin\varphi + q\cos\varphi)$$

oder

$$\frac{ds}{dt} = + s'(n + r') + p\sin\varphi\cos\varphi(1 - \cos\eta) + q(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\cos\eta)$$

$$\frac{ds'}{dt} = - s(n + r') - q\sin\varphi\cos\varphi(1 - \cos\eta) - p(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\cos\eta).$$

Vernachlässigt man hier die Grössen dritter Ordnung $p\eta^2$, $q\eta^2$, so wird

$$\frac{ds}{dt} = + s'(n + r') + q$$
$$\frac{ds'}{dt} = - s(n + r') - p. \qquad (2)$$

Um hieraus $p$ und $q$ zu eleminiren, wird nochmals differenzirt; dann wird:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = + \frac{ds'}{dt}(n + r') + s'\frac{dr'}{dt} + \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{d^2 s'}{dt^2} = - \frac{ds}{dt}(n + r') - s\frac{dr'}{dt} - \frac{dp}{dt}.$$

Da die Grössen $s$, $s'$, $\frac{ds}{dt}$, $\frac{ds'}{dt}$ von der Ordnung von $\sin\eta$, $\frac{d\eta}{dt}$ sind, so kann man in denjenigen Ausdrücken, welche diese Faktoren enthalten, $r'$ vernachlässigen. Ersetzt man dann $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$ durch ihre Werthe aus 101 (7) und drückt die hierdurch wieder eingeführten Grössen $p$ und $q$ nach (2) durch $s$, $s'$ aus, so folgt:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = + \frac{ds'}{dt}(n + r' - \beta n) + s'\frac{dr'}{dt} - \beta n s(n + r') + \frac{\mathfrak{M}}{B}$$

$$\frac{d^2 s'}{dt^2} = - \frac{ds}{dt}(n + r' - \alpha n) - s\frac{dr'}{dt} - \alpha n s'(n + r') - \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{A}}.$$

Vernachlässigt man hier die mit $\beta s$, $\alpha s'$ in die sehr kleine periodische Störung $r'$ multiplichten Gliedern, so erhält man

$$\frac{d^2 s}{dt^2} - \frac{A + B - C}{B} n\frac{ds'}{dt} - r'\frac{ds'}{dt} - s'\frac{dr'}{dt} + \beta n^2 s = + \frac{\mathfrak{M}}{B}$$
$$\frac{d^2 s'}{dt^2} + \frac{A + B - C}{A} n\frac{ds}{dt} + r'\frac{ds}{dt} + s\frac{dr'}{dt} + \alpha n^2 s' = - \frac{\mathfrak{L}}{A}. \qquad (3)$$

Beschränkt man sich auf die Grössen zweiter Ordnung, so wird:

$$-\frac{\mathfrak{L}}{A} = -\frac{3Z'^2}{\rho^3(1 + \nu'')}\alpha[\eta(v - \varphi)\sin(v + w) + i(v - \varphi)\sin(v + w) - \Delta\zeta(v - \varphi)],$$

wobei gleich $v + w$ beibehalten ist, weil sich diese Summe nach 102 (8) durch bekannte Grössen ausdrücken lässt. Thut man dies, und berücksichtigt, dass

$$\frac{1}{\rho^3} = 1 + 3e\cos ☾,$$

ist, so wird, mit Ausschluss der Grössen dritter Ordnung, wenn $\eta$, $i$, $e$, und die Coëfficienten $k$ als Grössen erster Ordnung angesehen werden:

$$-\frac{\mathfrak{L}}{A} = +\frac{3L'^2}{1+\nu''}\,a(\eta+i)\Big[\sin(L-\Omega)\,\Sigma k_i \sin(\varkappa_i t + K_i) - u\sin(L-\Omega) + \\ + \frac{\Delta\zeta}{\eta+i}\,\Sigma k_i \sin(\varkappa_i t + K_i) - u\,\frac{\Delta\zeta}{\eta+i}\Big]$$

$$+\frac{\mathfrak{M}}{B} = -\frac{3L'^2}{1+\nu''}\,\beta\,[\eta\sin v + i\sin(v+w) - \Delta\zeta\cos(v-\varphi)]\,[1+3e\cos ☾]$$

$$= +\frac{3L'^2}{1+\nu''}\,\beta\,[\eta\sin[(L-\Omega)+\Sigma k_i\sin(\varkappa_i t+K_i) - w] + i\sin[(L-\Omega) + \\ + \Sigma k_i \sin(\varkappa_i t + K_i)] + \Delta\zeta]\,(1+3e\cos ☾)$$

oder[1])

$$+\frac{\mathfrak{M}}{B} = +\frac{3L'^2}{1+\nu''}\,\beta\,[(\eta+i)\sin(L-\Omega) + (\eta+i)\Sigma k_i\sin(\varkappa_i t+K_i)\cos(L-\Omega) - \\ - \eta w\cos(L-\Omega) + \Delta\zeta + (\eta+i)\,3e\cos ☾\,\sin(L-\Omega) + \Delta\zeta\cdot 3e\cos ☾].$$

Schreibt man die nicht mit $n$ multiplicirten Glieder, welche $\frac{ds}{dt}$, $\frac{ds'}{dt}$ enthalten und die nicht mit $n^2$ multiplichten Glieder, welche $s$, $s'$ enthalten, in welchen übrigens die periodischen Functionen $r'$ und $\frac{dr'}{dt}$ als Faktoren auftreten, nach rechts, so werden die beiden Gleichungen (3) in die folgenden übergehen:

$$\frac{d^2s}{dt^2} - (1-\beta)\,n\,\frac{ds'}{dt} + \beta n^2 s = +\frac{\mathfrak{M}}{B} + \left(r'\frac{ds'}{dt} + s'\frac{dr'}{dt}\right)$$

$$\frac{d^2s'}{dt^2} + (1-\alpha)\,n\,\frac{ds}{dt} + \alpha n^2 s' = -\frac{\mathfrak{L}}{A} - \left(r'\frac{ds}{dt} + s\,\frac{dr'}{dt}\right). \qquad (4)$$

Diese Gleichungen werden, wenn man die rechten Seiten Null setzt, befriedigt durch die Annahme

$$s = h\sin(mt+H):\qquad s' = h'\cos(mt+H).$$

Substituirt man diese Werthe in die reducirten Gleichungen (4), so wird man auf die Gleichungen

$$(m^2 - \beta n^2)\,h = (1-\beta)\,nmh'$$
$$(m^2 - \alpha n^2)\,h' = (1-\alpha)\,nmh$$

geführt, welche für $m$ die Gleichung

$$(m^2-\beta n^2)(m^2-\alpha n^2) = (1-\beta)(1-\alpha)\,m^2 n^2$$

oder entwickelt

$$m^4 - (1+\alpha\beta)\,m^2 n^2 + \alpha\beta n^4 = 0$$

giebt. Die Wurzeln dieser Gleichung sind[2])

$$m_1 = n;\quad m_2 = \sqrt{\alpha\beta}\,n,$$

und da

---

[1]) LAGRANGE schreibt statt des ersten Gliedes in $\frac{\mathfrak{M}}{B}$

$$-\frac{3L'^2}{1+\nu''}\,\beta\sin\eta\sin\varphi - \frac{3L'^2}{1+\nu''}\,\beta\sin\eta\sin(2v-\varphi).$$

Der erste Theil ist mit Vernachlässigung von $\nu''$: $-3L'^2\beta s$, und da die Rotationsdauer des Mondes sehr nahe gleich seiner Umlaufszeit um die Erde also $L' = n$ ist, so vereinigt sich dieses Glied mit dem in (3) links stehenden $n^2\beta s$ zu $4n^2\beta s$. Die linke Seite der ersten Gleichung (3) unterscheidet sich daher von der zweiten durch den Faktor 4 des letzten Gliedes. Die dadurch entstehenden Unterschiede in den Resultaten sind jedoch nur unwesentlich; übrigens finden dadurch die Glieder erster Ordnung in $\mathfrak{M}$ nur theilweise Berücksichtigung.

[2]) Man braucht nur die positiven Lösungen zu berücksichtigen; mit den negativen Werthen folgt $h:h'$ entgegengesetzt bezeichnet, daher (wenn auch das Zeichen der Constante $H$ geändert wird) dieselbe Lösung.

$$\frac{k}{k'} = \frac{(1-\beta)mn}{m^2-\beta n^2} = \frac{m^2-\alpha n^2}{(1-\alpha)mn}, \quad \left(\frac{k}{k'}\right)_1 = 1; \quad \left(\frac{k}{k'}\right)_2 = -\frac{1-\beta}{1-\alpha}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$

ist, so sind die zusammengehörigen Werthe:

1. $m_1 = n$; $k = k' = k_1$

2. $m_2 = \sqrt{\alpha\beta}\,n$; $k = \sqrt{\alpha}(1-\beta)\,k_2$; $k' = -\sqrt{\beta}(1-\alpha)\,k_2$.

Damit nun die Integrale thatsächlich in trigonometrischer Form und nicht als Exponentialfunctionen auftreten, müssen $\alpha$, $\beta$ positiv sein, d. h. es muss $C > B$, $C > A$, also die Rotationsaxe die Trägheitsaxe des grössten Momentes sein.

Die Werthe 1) und 2) bilden particuläre Lösungen, deren Summe in Folge der Willkürlichkeit von $k_1$ und $k_2$ und der zugehörigen $H_1$, $H_2$, das vollständige Integral der reducirten Gleichungen (4) sind. Sei nun[1]):

$$g = \frac{8L'^2}{1+\nu''}$$

$$-\frac{\mathfrak{L}}{A} - \left(r'\frac{ds}{dt} + s\frac{dr'}{dt}\right) = g\alpha\Sigma f\cos(\chi t + F) \qquad (5)$$

$$+\frac{\mathfrak{M}}{B} + \left(r'\frac{ds'}{dt} + s'\frac{dr'}{dt}\right) = g\beta\Sigma f'\sin(\chi t + F),$$

so wird man für das Integral der vollständigen Gleichungen (4) setzen können[2])

$$\begin{aligned} s &= k_1\sin(nt+H_1) + \sqrt{\alpha}(1-\beta)k_2\sin(\sqrt{\alpha\beta}\,nt + H_2) + \Sigma f_1\sin(\chi t + F) \\ s' &= k_1\cos(nt+H_1) - \sqrt{\beta}(1-\alpha)k_2\cos(\sqrt{\alpha\beta}\,nt + H_2) + \Sigma f_1'\cos(\chi t + F) \end{aligned} \qquad (6)$$

mit den Bedingungen:

$$\begin{aligned} -f_1\chi^2 + (1-\beta)nf_1'\chi + \beta n^2 f_1 &= g\beta f' \\ -f_1'\chi^2 + (1-\alpha)nf_1\chi + \alpha n^2 f_1' &= g\alpha f. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$f_1 = \frac{1}{N}g[\beta(\alpha n^2 - \chi^2)f' - \alpha(1-\beta)n\chi f]$$

$$f_1' = \frac{1}{N}g[\alpha(\beta n^2 - \chi^2)f - \beta(1-\alpha)n\chi f'] \qquad (7)$$

$$N = (\beta n^2 - \chi^2)(\alpha n^2 - \chi^2) - (1-\alpha)(1-\beta)n^2\chi^2 = (\alpha\beta n^2 - \chi^2)(n^2 - \chi^2).$$

Nach 102 (4) ist nun $w = 180° + (L - \Omega + u - \varphi)$, daher

$$\begin{aligned} \sin w &= -\sin(L-\Omega+u-\varphi) = -\sin(L-\Omega+u)\cos\varphi + \cos(L-\Omega+u)\sin\varphi \\ \cos w &= -\cos(L-\Omega+u-\varphi) = -\cos(L-\Omega+u)\cos\varphi - \sin(L-\Omega+u)\sin\varphi \\ \sin\eta\sin w &= -\sin(L-\Omega+u)s' + \cos(L-\Omega+u)s \\ \sin\eta\cos w &= -\cos(L-\Omega+u)s' - \sin(L-\Omega+u)s. \end{aligned} \qquad (8)$$

Vernachlässigt man hier wegen der kleinen Faktoren $s$, $s'$ die sehr kleine Grösse $u$, führt für $s$, $s'$ ihre Werthe (6) ein, und schreibt zu diesem Zwecke

---

1) Es ist nicht schwer, diese Form herzustellen, wenn die Produkte der trigonometrischen Functionen in Summen aufgelöst, und Coëfficienten von fehlenden Gliedern Null gesetzt werden. Vergl. die Coëfficienten in 104 (1).

2) Franz findet die Glieder mit dem Argumente $\sqrt{\alpha\beta}\cdot nt + H_2$ in $p$ und $q$ [vergl. seine Formeln (16)] und lässt sie, da sie im Laufe kürzerer Zeiträume nahe constant sind, weg. Da jedoch über ihre Grösse erst aus den Ausdrücken für $\eta$, $w$ ein Schluss möglich wäre, so müssten diese Ausdrücke, wenigstens als Constante, auch bei der Integration seiner Gleichungen (20) noch berücksichtigt werden, was Franz, der von der Kleinheit der Libration sofort ausgeht, unterlässt.

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})(1+\sqrt{\alpha\beta}) = \alpha' \qquad \tfrac{1}{2}(f_1+f_1') = f_2$$
$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})(1-\sqrt{\alpha\beta}) = \beta' \qquad \tfrac{1}{2}(f_1-f_1') = f_2', \tag{9}$$

daher

$$s = h_1 \sin(nt+H_1)+(\alpha'+\beta')h_2 \sin(\sqrt{\alpha\beta}nt+H_2)+\Sigma(f_2+f_2')\sin(\chi t+F)$$
$$s' = h_1 \cos(nt+H_1)+(\alpha'-\beta')h_2 \cos(\sqrt{\alpha\beta}nt+H_2)+\Sigma(f_2-f_2')\cos(\chi t+F), \tag{6a}$$

so wird:

$$\begin{aligned} \sin\eta\sin w &= +h_1\sin(nt+H_1-L+\Omega)+\alpha'h_2\sin(\sqrt{\alpha\beta}nt+H_2-L+\Omega)+ \\ &+\beta'h_2\sin(\sqrt{\alpha\beta}nt+H_2+L-\Omega)-\Sigma f_2\sin(L-\Omega-\chi t-F)+\Sigma f_2'\sin(L-\Omega+\chi t+F) \\ \sin\eta\cos w &= -h_1\cos(nt+H_1-L+\Omega)-\alpha'h_2\cos(\sqrt{\alpha\beta}nt+H_2-L+\Omega)+ \\ &+\beta'h_2\cos(\sqrt{\alpha\beta}nt+H_2+L-\Omega)-\Sigma f_2\cos(L-\Omega-\chi t-F)+\Sigma f_2'\cos(L-\Omega+\chi t+F). \end{aligned} \tag{10}$$

**104. Numerische Werthe.** Für das weitere ist es nun nöthig, die einzelnen Argumente $\chi t+F$ zu betrachten. Die Coëfficienten $f_1, f_1'$ enthalten den Integrationsdivisor $(\alpha\beta n^2-\chi^2)(n^2-\chi^2)$. Dieser kann nur Null werden für $\chi=\sqrt{\alpha\beta}n$ oder für $\chi=n$. $n$ ist sehr nahe gleich $L'$, da die Rotationszeit des Mondes gleich seiner Umlaufszeit um die Erde ist; es sind also zunächst Argumente zu berücksichtigen, für welche $\chi$ nahe gleich $L'$ ist, also in erster Linie in (1) das Argument ☾ $+\omega$. Ferner wären Argumente $\chi t+F$ zu berücksichtigen, wenn $\chi$ sehr nahe $\sqrt{\alpha\beta}L'$ ist; solche Argumente kommen aber nicht vor; ihre Periode wäre

$$\frac{360^\circ}{\sqrt{\alpha\beta}L'} = \frac{360\cdot 60\cdot 60}{\sqrt{\alpha\beta}\cdot 47485}\text{ Tage } = \frac{360\cdot 60\cdot 60}{\sqrt{\alpha\beta}\cdot 47485\cdot 365{\cdot}25}\text{ Jahre.}$$

Da $\alpha = 0{\cdot}000272$, $\beta = 0{\cdot}000618$ ist, so wird $\tau = 182{\cdot}4$ Jahre.

Die Libration in Länge $u$, deren Coefficienten nur sehr klein sind, ebenso wie die in $(\eta+i)$ multiplicirten Produkte der Längen- und Breitenungleichheiten $[\Delta\zeta\Sigma k_i \sin(\varkappa_i t+K_i)]$ und das Produkt $\eta w$ können folglich vernachlässigt (oder eventuell, wenn nöthig in einer zweiten Näherung berücksichtigt) werden, und man erhält, wenn für $\Sigma k_i \sin(\varkappa_i t+K_i)$ nur die Mittelpunktsgleichung $2e\sin$ ☾, für $\Delta\zeta$ die Breitenstörung $+21''{\cdot}75 \sin\omega = k_0 \sin\omega$ gesetzt wird:

$$-\frac{\mathfrak{L}}{A} = +g\alpha(\eta+i)\cdot 2e\sin☾\sin(L-\Omega)$$

$$+\frac{\mathfrak{M}}{B} = +g\beta[(\eta+i)\cdot\sin(L-\Omega)+(\eta+i)\cdot 2e\sin☾\cos(L-\Omega)+k_0\sin\omega+$$
$$+(\eta+i)\cdot 3e\cos☾\sin(L-\Omega)+k_0\sin\omega\cdot 3e\cos☾].$$

Führt man hier die Produkte der trigonometrischen Functionen in Summen über, vernachlässigt die Produkte von $r'$ in $s$ und $s'$ und ihre Differentialquotienten, und überdies wegen der Kleinheit von $k_0$ auch das Produkt $3ek_0$, so erhält man für die Ausdrücke in 103 (6):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Das Argument | $\chi t+F=$ | $\omega$ | $2☾+\omega$ | $☾+\omega$ |
| mit den Coëfficienten: | $f=$ | $+e(\eta+i)$ | $-e(\eta+i)$ | $0$ |
| | $f'=$ | $+\frac{1}{2}e(\eta+i)+k_0$ | $+\frac{1}{2}e(\eta+i)$ | $\eta+i.$ (1) |

Drückt man die Coëfficienten $f_2, f_2'$ direkt durch $f, f'$ aus, so ergiebt sich nach einigen leichten Reductionen:

$$f_2 = \frac{g}{2}\,\frac{(\chi-\beta n)\alpha f+(\chi-\alpha n)\beta f'}{(\chi^2-\alpha\beta n^2)(n-\chi)}$$
$$f_2' = \frac{g}{2}\,\frac{(\chi+\beta n)\alpha f-(\chi+\alpha n)\beta f'}{(\chi^2-\alpha\beta n^2)(n+\chi)}. \tag{2}$$

Mit den Constanten

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\alpha = 0{\cdot}0002717$ | $\eta = 1^\circ\,31'\,22'' = 5482''$ | $\nu'' = \frac{1}{80}$ | $e = 0{\cdot}05488$ |
| $\beta = 0{\cdot}0006175$ | $i = 5^\circ\,8'\,44'' = 18524''$ | | |

erhält man für den Ausdruck 103 (10), da $L - \Omega = \leftmoon + \omega$ ist, die folgenden Argumente mit den daruntergesetzten Coefficienten[1]):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Argument: | $L - \Omega - \chi t - F =$ | $\leftmoon$ | $-\leftmoon$ | $0$ |
| Coëfficient: | $-f_2 =$ | $-90''{\cdot}46$ | $+1''{\cdot}25$ | $5440''{\cdot}7$ |
| Argument: | $L - \Omega + \chi t + F =$ | $\leftmoon + 2\omega$ | $3\leftmoon + 2\omega$ | $2(\leftmoon + \omega)$ |
| Coefficient: | $+f_2' =$ | $-6''{\cdot}30$ | $-0''{\cdot}50$ | $-10''{\cdot}92$ |

In den Formeln 103 (10) ist überdiess $nt + H_1 = L't + H_1 = L + C$; das erste und zweite Glied mit dem Argumente $\pm\leftmoon$ lassen sich zusammenziehen und man erhält, wenn man die Glieder weglässt, deren Coefficienten kleiner als 1'' sind, und $\sin\eta$ mit $\eta$ vertauscht:

$$\begin{aligned}
\eta \sin\varpi = E = &+ h_1 \sin(\Omega + C) + \alpha' h_2 \sin(\sqrt{\alpha\beta}\, nt - L + \Omega + H_2) + \\
&+ \beta' h_2 \sin(\sqrt{\alpha\beta}\, nt + L - \Omega + H_2) - 90'' \sin\leftmoon - 11'' \sin 2(\leftmoon + \omega) - 6'' \sin(\leftmoon + 2\omega) \\
\eta \cos\varpi = E' = &- h_1 \cos(\Omega + C) - \alpha' h_2 \cos(\sqrt{\alpha\beta}\, nt - L + \Omega + H_2) + \\
&+ \beta' h_2 \cos(\sqrt{\alpha\beta}\, nt + L - \Omega + H_2) + 5440''{\cdot}7 - 90'' \cos\leftmoon - 11'' \cos 2(\leftmoon + \omega) - \\
&- 6'' \cos(\leftmoon + 2\omega).
\end{aligned} \tag{3}$$

Der Coëfficient $-f_2$, welcher aus dem Argumente $F = \omega + \leftmoon$ in $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ hervorgeht, giebt hier in $\eta\cos\varpi$ die Constante

$$E_0 = 5440''{\cdot}7.$$

Nun erhält man aus (3)

$$\operatorname{tang}\varpi = \frac{E}{E'}; \quad \eta^2 = E^2 + E'^2. \tag{4}$$

Die Beobachtungen zeigen, dass $\varpi$ ein kleiner Bogen ist, und $\eta$ nur mässigen Schwankungen unterliegt; hieraus folgt, dass die Summe aller periodischen Glieder in den Gleichungen (3) immer viel kleiner bleiben muss als die Constante $E_0$. Man erhält aber:

$$\begin{aligned}
E^2 + E'^2 &= (5440{\cdot}7)^2 + (90)^2 + (11)^2 + \ldots + h_1^2 + (\alpha' h_2)^2 + (\beta' h_2)^2 + \ldots + \\
&\quad + \text{periodische Glieder} \\
&= (5440{\cdot}7)^2 \left(1 + \frac{90^2 + 11^2 + \ldots}{5440{\cdot}7^2}\right)
\end{aligned}$$

$$\eta = 5440{\cdot}7\left(1 + \tfrac{1}{2}\,\frac{90^2 + 11^2 + \ldots}{5440{\cdot}7^2}\right) = 5440''{\cdot}7 \times 1{\cdot}0001395 = 5441''{\cdot}3. \tag{5}$$

Wären die angewandten Elemente vollkommen richtig, und $h_1 = h_2 = 0$, so müsste der resultirende Werth von $\eta$ identisch sein mit dem Ausgangswerthe. Der Unterschied vertheilt sich nun aber auf Fehler der angenommenen Constanten $\sin i$, $\alpha$, $\beta$, $\nu''$ u. s. w., und auf die unbekannten Constanten der willkürlichen

---

1) Es ist z. B. für das Argument $\leftmoon + \omega$:

$$f = 0; \quad f' = i + \eta; \quad f_2 = \frac{g}{2}\,\frac{\beta f'(\chi - \alpha n)}{(\chi^2 - \alpha\beta n^2)(n - \chi)}; \quad f_2' = -\frac{g}{2}\,\frac{\beta f'(\chi + \alpha n)}{(\chi^2 - \alpha\beta n^2)(n + \chi)}.$$

und es ist:

| | | |
|---|---|---|
| $\chi = +34{\cdot}3347$ | $\log(n - \chi) = 9_n{\cdot}528402$ | $\log(\chi - \alpha n)\beta f' = 8{\cdot}096845$ |
| $n = +33{\cdot}9971$ | $\log(\chi^2 - \alpha\beta n^2) = 3{\cdot}852012$ | $\log \tfrac{1}{2} g = 4{\cdot}019222$ |
| $\alpha n = +0{\cdot}0228$ | $\log(n + \chi) = 2{\cdot}226166$ | $\log(\chi + \alpha n)\beta f' = 8{\cdot}097080$ |
| $\beta n = +0{\cdot}0519$ | $\log f' = 4{\cdot}380820$ | $\log f_2 = 8_n{\cdot}755658$ |
| $\alpha\beta n^2 = +0{\cdot}0012$ | | $\log f_2' = 1_n{\cdot}088124.$ |

Libration in Knoten und Neigung. Die nothwendige Libration ist, wie man sieht, auch in Knoten und Neigung sehr klein; sie überschreitet selenocentrisch nicht $1\frac{1}{4}'$. Die Gleichungen (4) zeigen aber, dass auch die Constanten $k_1$, $\alpha' k_2$, $\beta' k_3$ der willkürlichen Libration sehr klein sein müssen und weiter, dass sehr kleinen Werthen von $w$ auch sehr kleine Schwankungen in $\eta$ entsprechen werden und umgekehrt, d. h. dass das nahe Zusammenfallen der Knoten der Mondbahn und des Mondäquators auf der Ekliptik und die nahe Constanz der Neigung des Mondäquators auf der Ekliptik mit einander untrennbar verbunden sind.

Nimmt man an, dass $k_1 = k_2 = 0$ wäre, und dass ebenso in dem Ausdrucke für $u$ die willkürliche Libration verschwindet, also $a = 0$ wäre, so liesse sich aus den Coëfficienten $l_i$ der Werth von $\gamma$ und aus der Beobachtung des Werthes von $\eta_0$ der Werth von $\beta$ bestimmen. Nimmt man für den Coëfficienten von $\eta$ in (5): 1·0001895, so wäre

$$5482'' = -1{\cdot}0001895 f_2 = 1{\cdot}0001895 \frac{g}{2} \frac{(\chi - \alpha n) f'}{(\chi^2 - \alpha\beta n^2)(n - \chi)} \beta.$$

Für das Argument $\chi t + F = ☾ + \omega$ ist $\chi = ☾' + \omega' = L' - ☊'$ und $f' = i + \eta = 24006''$. Es wird demnach

$$\beta = \frac{2(1 + \nu'')}{3L'^2} \frac{5482}{24006} \frac{☊'}{1{\cdot}0001895} \frac{\chi^2 - \alpha\beta n^2}{\chi - \alpha n}. \tag{6}$$

Rechnet man den letzten Coëfficienten mit einem genäherten Werthe von $\alpha$, so erhält man $\beta$. Sind $\beta$ und $\gamma$ bekannt, so erhält man aus der Relation

$$\gamma = \frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha\beta}$$

also ausreichend genau

$$\alpha = \beta - \gamma \tag{7}$$

den Werth von $\alpha$.

Die vollständige Gleichheit der Rotationszeit des Mondes mit seiner Umlaufszeit um die Erde wäre eine Erscheinung, die an und für sich zu den grössten Merkwürdigkeiten der Natur gehören würde. Sobald aber die Libration hinzutritt, verliert die Erscheinung ihre Auffälligkeit, und erscheint ganz natürlich. Das erklärende Element ist hierbei die willkürliche Libration, durch welche der Mond um seine Ruhelage, als welche diejenige angesehen werden muss, wenn die Trägheitsaxe des kleinsten Momentes gegen die Erde gerichtet ist, pendelartige Schwingungen macht. Diese ist allerdings durch die Beobachtungen als äusserst klein constatirt worden. Doch ist es nicht ausgeschlossen, dass, wenn die Himmelskörper sich in einem sehr dünnen Medium bewegen, dieses indem es gerade die pendelartigen Schwingungen viel stärker beeinflusst, als die Translationsbewegung, eine ursprünglich vielleicht sehr grosse Libration im Laufe der Zeiten vernichtet hat, ja sogar, dass eine ursprüngliche Rotation durch fortwährende Verlangsamung in einem Medium schliesslich in eine Libration überging; eine Ansicht, die bereits von D'ALEMBERT ausgesprochen, seither jedoch in Vergessenheit gerathen und nicht wieder aufgenommen worden ist.

**105. Berechnung der geocentrischen Coordinaten eines Mondkraters.** Man hat [vergl. N. 64 (2)] zunächst aus den selenographischen Coordinaten $b$, $U$ in Verbindung mit den Elementen $☊'$, $i'$, **bezogen auf den Aequator** die Grössen $d$ und $a$ zu berechnen:

$$\begin{aligned} \sin d &= \sin b \cos i' + \cos b \sin i' \sin U, \\ \cos d \cos(a - ☊') &= \cos b \cos U \\ \cos d \sin(a - ☊') &= -\sin b \sin i' + \cos b \cos i' \sin U \end{aligned} \tag{1}$$

und sodann die Formeln 64 (4) in diesen haben aber die Coëfficienten von $r$ eine einfache geometrische Bedeutung. Ist $\Delta$ der selenocentrische Winkel zwischen dem beobachteten Mondkrater und dem selenocentrischen Erdorte, also zwischen den Richtungen $HP$ und $HE$ (Fig. 278), so hat man, wenn $\alpha$, $\delta$ die geocentrischen Coordinaten des Mondmittelpunktes, daher $180° + \alpha$, $-\delta$ die selenocentrischen Coordinaten des Erdmittelpunktes sind, in dem Dreiecke $APO$:

die Seiten: $AP = 90° - d$, $PO = \Delta$, $AO = 90° + \delta$

und die den beiden ersten Seiten gegenüberliegenden Winkel $POA$ und $OAP$. Dabei ist $POA$ der Winkel zwischen der durch $EH$ auf den Aequator senkrechten Ebene $AHOEA$ und der Ebene $PHOE$, also identisch mit dem Winkel $P_0O_0A_0 = p$ (selenocentrisch in entgegengesetztem Sinne gezählt wie geocentrisch); der zweite Winkel ist $PAO = arc\, mq = 180° + \alpha - a = 180° - (a - \alpha)$, demnach

$$\begin{aligned} \cos\Delta &= -\sin d \sin\delta - \cos d \cos\delta \cos(a - \alpha) \\ \sin\Delta \sin p &= + \cos d \sin(a - \alpha) \\ \sin\Delta \cos p &= + \sin d \cos\delta - \cos d \sin\delta \cos(a - \alpha). \end{aligned} \tag{2}$$

Setzt man dieses in die Formeln 64 (4) ein, so werden die beiden letzten identisch, und aus den drei Gleichungen erhält man

$$\begin{aligned} \rho' \cos s &= \rho - r\cos\Delta \\ \rho' \sin s &= r \sin\Delta, \end{aligned} \tag{3}$$

welche Gleichungen übrigens unmittelbar aus dem ebenenen Dreiecke $HPE$ hervorgehen, in welchem die Seiten $HP = r$, $HE = \rho$, $EP = \rho'$ und die Winkel $PHE = \Delta$, $PEH = s$ sind. Setzt man nun

$$\frac{r}{\rho} = \sin h,$$

so ist $h$ der scheinbare Mondhalbmesser, und dann wird

$$tang\, s = \frac{\sin h \sin\Delta}{1 - \sin h \cos\Delta}. \tag{4}$$

Will man statt Positionswinkel und Distanzen die Rectascensions- und Deklinationsdifferenz haben, so kann man einfach die Formeln 64 (3 a) und die dritte Formel 64 (3):

$$\begin{aligned} \rho' \cos\delta' \cos(\alpha' - \alpha) &= \rho\cos\delta + r\cos d \cos(a - \alpha) \\ \rho' \cos\delta' \sin(\alpha' - \alpha) &= r\cos d \sin(a - \alpha) \\ \rho' \sin\delta' &= \rho \sin\delta + r \sin d \end{aligned}$$

verwenden. Hierbei ist jedoch nur die zweite praktisch, welche sofort $\alpha' - \alpha$ giebt, welche Differenz von der Ordnung $\frac{r}{\rho'} = \frac{\rho}{\rho'} \sin h$ ist, wobei man den Faktor $\frac{\rho}{\rho'} = 1$ setzen kann. Die dritte Formel giebt aber $\delta' - \delta$ nicht direkt, sondern es tritt noch die Differenz $\rho' - \rho$ auf, indem die Gleichung:

$$\rho'(\sin\delta' - \sin\delta) + (\rho' - \rho)\sin\delta = r \sin d$$

geschrieben werden kann. Quadrirt und addirt man aber die ersten beiden Gleichungen, erhebt zur $-\frac{1}{2}$ten Potenz und behält nur die erste Potenz von $\frac{r}{\rho'}$ bei, so erhält man

$$\frac{1}{\rho' \cos\delta'} = \frac{1}{\rho\cos\delta}\left[1 - \sin h\,\frac{\cos d}{\cos\delta}\cos(a-\alpha)\right]$$
$$\rho'\sin\delta' = \rho\sin\delta\left[1 + \sin h\,\frac{\sin d}{\sin\delta}\right]$$

demnach

$$\tang\delta' = \tang\delta\left[1 + \sin h\,\frac{\sin d}{\sin\delta} - \sin h\,\frac{\cos d}{\cos\delta}\cos(a-\alpha)\right] = \tang\delta + \frac{\sin h}{\cos^2\delta}\sin\Delta\cos p$$

und damit:

$$\sin(\delta'-\delta) = \sin s\cos p.$$

Einfacher erhält man diese Formeln aus der Betrachtung des Dreiecks $A_0O_0P_0$ (Fig. 273); man hat in diesem:

$$\sin\delta' = \cos s\sin\delta + \sin s\cos\delta\cos p$$
$$\cos\delta'\sin(\alpha'-\alpha) = \sin s\sin p$$
$$\cos\delta'\cos(\alpha'-\alpha) = \cos s\cos\delta - \sin s\sin\delta\cos p,$$

daher mit Rücksicht auf die Kleinheit von $s$ hinreichend genau

$$\alpha'-\alpha = s\sin p\sec\delta'$$
$$\delta'-\delta = s\cos p. \qquad (5)$$

Hier handelt es sich noch um die Bestimmung von $i'$, ☊$'$, $U$. Vergleicht man die Fig. 278 mit Fig. 279, so sieht man, dass $U$ die um 180° vergrösserte Entfernung $AD'$ ist, weil in Fig. 279 $A$ der niedersteigende Knoten des Mondäquators auf dem Erdäquator ist. Bezeichnet man daher den Abstand $FA$ mit $\Phi$, und ist (in beiden Figuren gleich bezeichnet) $(X')D' = l$, so wie bei den terrestrischen Längen positiv vom ersten Mondmeridian in der Richtung der Drehung, also geocentrisch vom Mondmittelpunkte nach rechts (von Süden gegen Westen; in der Figur ist daher $(X')D' = -l$), so ist

$$U = AD' = \varphi + l + \Phi.$$

In dem Dreiecke $A$♈$F$ ist nun $A$♈ $= 180° +$ ☊$'$; ♈$F =$ ☊ $+ w$ (wobei ☊ der aufsteigende Knoten der Mondbahn auf der Ekliptik ist), $AF = \Phi$; und die Winkel $AF$♈ $= \eta$, ♈$AF = 180° - i'$, $A$♈$F = \varepsilon$ (die Schiefe der Ekliptik); man hat daher:

$$\cos\tfrac{1}{2}i'\cos\tfrac{1}{2}(\Phi + ☊') = +\sin\tfrac{1}{2}(☊ + w)\cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon - \eta)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}i'\sin\tfrac{1}{2}(\Phi + ☊') = -\cos\tfrac{1}{2}(☊ + w)\cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon + \eta)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}i'\cos\tfrac{1}{2}(\Phi - ☊') = -\sin\tfrac{1}{2}(☊ + w)\sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon - \eta) \qquad (6)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}i'\sin\tfrac{1}{2}(\Phi - ☊') = +\cos\tfrac{1}{2}(☊ + w)\sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon + \eta)$$
$$U = 180° + L - (☊ + w) + u + l + \Phi. \qquad (7)$$

Würde man in den Formeln (5) und (6) für $\eta$ den mittleren Werth der Neigung des Mondäquators auf der Ekliptik, und $u = w = 0$ setzen, so würde man die physische Libration vernachlässigen[1]); und wenn man in den Formeln (3) bis (6) für $\alpha$ die mittlere geocentrische Länge des Mondes $L$, und $\delta = 0$ setzen würde, so würde man die optische Libration in Länge und Breite weglassen. Die Berücksichtigung von $\eta$, $w$, $u$ in den Formeln (1), (2) nach den

[1]) Für die Sonne ist $w = u = 0$, $\eta$ constant; ☊ constant gleich der Länge des absteigenden Knotens des Sonnenäquators auf der Ekliptik, demnach auch $i'$, ☊$'$, $\Phi$ constant; und es ist

$$U = L_0' + \lambda t + l; \quad L_0' = L_0 + 180° + \Phi,$$

wenn $L_0$ die Länge des ersten Meridians gezählt vom aufsteigenden Knoten des Sonnenäquators auf der Ekliptik, daher $L_0'$ die Länge des ersten Meridians gezählt vom aufsteigenden Knoten des Sonnenäquators auf dem Erdäquator und $\lambda$ die Rotation der Sonne in der Zeiteinheit ist.

Formeln 102 (12) und 104 (8) giebt den Einfluss der physischen Libration, und die Berücksichtigung der wahren Coordinaten des Mondes in den Formeln (1) und (2) giebt den Einfluss der optischen Libration.

Für den dem scheinbaren Mondmittelpunkte naheliegenden Krater, MOESTING A hat man nach J. FRANZ:

$$l = -5^{\circ}\,10'\,19''; \quad b = 3^{\circ}\,11'\,24'',$$

wobei als erster Meridian der Meridian des kleinsten Hauptträgheitsmomentes gewählt ist.

N. HERZ.

## Mechanische Quadratur.

I. Die Aufgabe der mechanischen Quadratur ist, aus den numerisch gegebenen Werthen einer Function für eine Reihe von Werthen des Argumentes, die Integrale der Function zwischen gegebenen Grenzen zu bestimmen. Strenge genommen würden daher auch die verschiedenen Methoden der näherungsweisen Integration hierher gehören: Mittelwerthsatz, SIMPSON'sche Regel, geometrische Quadraturen mit den verschiedenen Formen der Integratoren (Verzeichnen von Curven nach den gegebenen Functionalwerthen und Bestimmung des Flacheninhaltes durch Planimeter), endlich die von HUMBOLDT in sehr treffender Weise bezeichnete Methode der »Integration mit der Scheere« (Verzeichnen von Curven auf dickem Carton, Ausschneiden derselben und Bestimmen der Fläche nach dem Gewichte). In der praktischen Anwendung in der Astronomie wird jedoch nur eine Methode verwendet, welche an Genauigkeit alle diese angeführten Methoden weit übertrifft, aber an gewisse spezielle, übrigens leicht zu erfüllende Bedingungen geknüpft ist: aus gegebenen äquidistanten Functionalwerthen die Integrale von ganz bestimmten unteren Grenzen an zu ermitteln. Diese Methode, namentlich seit ENCKE's Darlegungen in den »Berliner Astronomischen Jahrbüchern« für 1837 und 1838 besonders handsam gemacht, von v. OPPOLZER in seinem »Lehrbuch zur Bahnbestimmung von Planeten und Kometen« II. Bd. weiter ausgeführt, und durch ausgedehnte Tafeln für den praktischen Gebrauch zweckmässig eingerichtet, soll im Folgenden allein auseinandergesetzt werden. Wegen der Einrichtung der Tafeln wird es dabei zweckmässig, auch diejenigen für die mechanische Differentiation in Kürze zu behandeln.

In dem Artikel »Interpolation« wurden die beiden Formeln abgeleitet[1]):

$$f(a+n\omega) = f(a) + nf'(a) + \tfrac{1}{2!}n^2 f''(a) + \tfrac{1}{3!}n(n^2-1^2)f'''(a) + \tfrac{1}{4!}n^2(n^2-1^2)f''''(a) + \ldots$$

$$f(a+(n+\tfrac{1}{2})\omega) = f(a+\tfrac{1}{2}) + nf'(a+\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2!}(n^2-(\tfrac{1}{2})^2)f''(a+\tfrac{1}{2}) + \\ + \tfrac{1}{3!}\,n(n^2-(\tfrac{1}{2})^2)f'''(a+\tfrac{1}{2}) + \ldots,$$

welche folgendermaassen geschrieben werden sollen:

$$f(a+n\omega) = f(a) + N_1(n)f'(a) + N_2(n)f''(a) + N_3(n)f'''(a) + N_4(n)f''''(a) + \ldots \quad (1)$$

$$f(a+(n+\tfrac{1}{2})\omega) = f(a+\tfrac{1}{2}) + M_1(n)f'(a+\tfrac{1}{2}) + M_2(n)f''(a+\tfrac{1}{2}) + M_3(n)f'''(a+\tfrac{1}{2}) + \ldots, \quad (2)$$

in welchen

$$\begin{array}{ll}
N_1(n) = n & M\,(n) = n \\
N_2(n) = \tfrac{1}{2!}\,n^2 & M_2(n) = \tfrac{1}{2!}\,[n^2-(\tfrac{1}{2})^2] \\
N_3(n) = \tfrac{1}{3!}\,n(n^2-1^2) & M_3(n) = \tfrac{1}{3!}\,n[n^2-(\tfrac{1}{2})^2] \\
N_4(n) = \tfrac{1}{4!}\,n^2(n^2-1^2) & M_4(n) = \tfrac{1}{4!}\,[n^2-(\tfrac{1}{2})^2][n^2-(\tfrac{3}{2})^2] \\
N_5(n) = \tfrac{1}{5!}\,n(n^2-1^2)(n^2-2^2) & M_5(n) = \tfrac{1}{5!}\,n[n^2-(\tfrac{1}{2})^2][n^2-(\tfrac{3}{2})^2] \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array} \quad (3)$$

[1]) Dieses Handwörterbuch, II. Bd., Formel 5, pag 43 und die erste Formel auf pag. 47.

wobei man sich zu erinnern hat, dass $f(a)$, $f'(a+\frac{1}{2})$, $f''(a)$, $f'''(a+\frac{1}{2})$ die durch Differenzenbildung erhaltenen Werthe des Schemas auf pag. 42 sind, während $f(a+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}[f(a)+f(a+1)]$, $f'(a) = \frac{1}{2}[f'(a-\frac{1}{2})+f'(a+\frac{1}{2})]$ u. s. w. arithmetische Mittel der im Schema enthaltenen Werthe darstellen.

Zu beachten ist, dass, wie die Ausführung der Multiplikation in (3) lehrt, die $N(n)$ und $M(n)$ sämmtlich Functionen von $n$ sind, u. z. diejenigen mit geradem Index ganze Functionen von $n^2$, diejenigen mit ungeradem Index ganze Functionen von $n^2$, multiplicirt mit $n$, also

$$\begin{aligned}N_{2x}(n) &= \alpha_{0,x} + \alpha_{1,x}n^2 + \alpha_{2,x}n^4 + \ldots\ldots + \alpha_{x,x}n^{2x}\\ N_{2x+1}(n) &= n[\beta_{0,x} + \beta_{1,x}n^2 + \beta_{2,x}n^4 + \ldots\ldots + \beta_{x,x}n^{2x}]\\ M_{2x}(n) &= \alpha'_{0,x} + \alpha'_{1,x}n^2 + \alpha'_{2,x}n^4 + \ldots\ldots + \alpha'_{x,x}n^{2x}\\ M_{2x+1}(n) &= n[\beta'_{0,x} + \beta'_{1,x}n^2 + \beta'_{2,x}n^4 + \ldots\ldots + \beta'_{x,x}n^{2x}].\end{aligned} \tag{3a}$$

Ertheilt man nun dem Argument $x = a + n\omega$ ein Increment $\nu\omega = dx$, so wird

$$f(x+dx) = f(a+n\omega+\nu\omega) = \Sigma N_x(n+\nu)f^{(x)}(a),$$

folglich

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} = \Sigma\,\frac{N_x(n+\nu)-N_x(n)}{\nu\omega}f^{(x)}(a)$$
$$= \frac{1}{\omega}\,\Sigma\,\frac{dN_x(n)}{dn}f^{x}(a)$$

und ebenso für die zweite Formel und für die zweiten Differentialquotienten. Nun hat man aber zu beachten, dass gemäss den Formeln (3a) die Differentialquotienten der $N_x(n)$ wieder genau dieselbe Form haben, nämlich

$$\begin{aligned}\frac{dN_{2x}(n)}{dn} &= n[2\alpha_{1,x} + 4\alpha_{2,x}n^2 + \ldots\ldots + 2x\alpha_{x,x}n^{2x-2}]\\ \frac{dN_{2x+1}(n)}{dn} &= \beta_{0,x} + 3\beta_{1,x}n^2 + \ldots\ldots + (2x+1)\beta_{x,x}n^{2x}\\ \frac{d^2N_{2x}(n)}{dn^2} &= 2\alpha_{1,x} + 4\cdot 3\alpha_{2x}n^2 + \ldots\ldots + 2x(2x-1)\alpha_{x,x}n^{2x-2}\\ \frac{d^2N_{2x+1}(n)}{dn^2} &= n[3\cdot 2\beta_{1,x} + \ldots\ldots + (2x+1)2x\beta_{x,x}n^{2x-2}]\end{aligned} \tag{4}$$

und ebenso für die $M_x(n)$. Setzt man daher

$$\begin{aligned}\frac{dN_{2x}(n)}{dn} &= nN'_{2x}(n); & \frac{dN_{2x+1}(n)}{dn} &= N'_{2x+1}(n)\\ \frac{dM_{2x}(n)}{dn} &= nM'_{2x}(n); & \frac{dM_{2x+1}(n)}{dn} &= M'_{2x+1}(n)\\ \frac{d^2N_{2x}(n)}{dn^2} &= N''_{2x}(n); & \frac{d^2N_{2x+1}(n)}{dn^2} &= nN''_{2x+1}(n)\\ \frac{d^2M_{2x}(n)}{dn^2} &= M''_{2x}(n); & \frac{d^2M_{2x+1}(n)}{dn^2} &= nM''_{2x+1}(n),\end{aligned} \tag{5}$$

wo also z. B. $N_1'(n) = 1$; $M_1'(n) = 1$; $N_2'(n) = 1$; $M_2'(n) = 1$; $N_1''(n) = 0$; $M_1''(n) = 0$; $N_2''(n) = 1$; $M_2''(n) = 1$ ist, so wird

$$\begin{aligned}\omega\frac{df(x)}{dx} &= f'(a) + N_3'(n)f'''(a) + N_5'(n)f^{(5)}(a) + \ldots\\ &\quad + n[f''(a) + N_4'(n)f^{(4)}(a) + \ldots\end{aligned} \tag{Ia}$$

$$\begin{aligned}\omega^2\frac{d^2f(x)}{dx^2} &= f''(a) + N_4''(n)f^{(4)}(a) + N_6''(n)f^{(6)}(a) + \ldots]\\ &\quad + n[f'''(a) + N_5''(n)f^{(5)}(a) + \ldots]\\ x &= a + n\omega\end{aligned} \tag{IIa}$$

$$\left.\begin{aligned}\omega\frac{df(x)}{dx} &= f'(a+\tfrac{1}{2}) + M_3'(n)f'''(a+\tfrac{1}{2}) + M_5'(n)f^{(5)}(a+\tfrac{1}{2}) + \ldots\\ &\quad + n[f''(a+\tfrac{1}{2}) + M_4'(n)f'''(a+\tfrac{1}{2}) + \ldots]\end{aligned}\right\}\quad\text{(Ib)}$$

$$\left.\begin{aligned}\omega^2\frac{d^2f(x)}{dx^2} &= f''(a+\tfrac{1}{2}) + M_4''(n)f^{(4)}(a+\tfrac{1}{2}) + M_6''(n)f^{(6)}(a+\tfrac{1}{2}) + \ldots\\ &\quad + n[f'''(a+\tfrac{1}{2}) + M_5''(n)f^{(5)}(a+\tfrac{1}{2}) + \ldots]\end{aligned}\right\}\quad\text{(IIb)}$$

$$x = a + (n + \tfrac{1}{2})\omega.$$

Die Ausführung der Differentiationen bietet numerisch keine Schwierigkeiten, sobald die Reihen (8a) durch die Ausführung der in (8) angezeigten Multiplikationen erhalten sind. Man findet so z. B. die bereits auf anderem Wege auf pag. 46 erhaltenen Formeln (8a). In extenso sind diese Reihen abgeleitet in v. OPPOLZER's »Lehrbuch zur Bahnbestimmung von Planeten und Kometen«, II. Bd., pag. 17, 18 und 19, wo die Coëfficienten $\alpha_{\nu,\lambda}$, $\beta_{\kappa,\lambda}$, $\alpha'_{\lambda,\lambda}$, $\beta'_{\kappa,\lambda}$ durch die Combinationssummen der Quadrate der natürlichen Zahlen (wie dies unmittelbar aus dem Anblick der Formeln (8) hervorgeht) dargestellt sind. Für die Praxis wird es bequem, für diese Functionen Tafeln zu haben. Bedient man sich dabei der Formeln (Ia) und (IIa), wenn das Argument zwischen $a \pm \frac{1}{2}\omega$, hingegen der Formeln (Ib) und (IIb), wenn das Argument zwischen $a + \frac{1}{2}\omega \pm \frac{1}{2}\omega$ liegt, so wird man das Argument der Tafeln nicht über $n = \pm\frac{1}{2}$ auszudehnen brauchen. Für die Anwendung hat man dabei zu merken, dass man die Differentialquotienten der Function für Argumente, die in der Nähe der in dem Schema pag. 42 eingetragenen Functionalwerthe liegen (um $\frac{1}{4}$ Intervall abstehen) nach den Formeln (Ia) und (IIa) zu berechnen hat, wobei die in der betreffenden Zeile stehenden Functionalwerthe und geraden Differenzwerthe, sowie die zu dieser Zeile gehörigen arithmetischen Mittel der ungeraden Differenzwerthe zu benutzen sind, und dass man die Differentialquotienten der Function für diejenigen Argumente, welche näher der Mitte des Intervalles liegen, nach (Ib) und (IIb) zu berechnen hat, wobei die dieser Intervallmitte entsprechenden arithmetischen Mittel der Function und der geraden Differenzwerthe und die zugehörigen ungeraden Differenzwerthe verwendet werden. Eine Tafel der $N$- und $M$-Functionen findet sich auf pag. 632[1]. Für $n = 0$ erhält man die Differentialquotienten der Function für ein volles Argument bezw. für die Mitte zweier Argumente; da die mit $n$ multiplicirten Reihen verschwinden, und die $N'_{2\kappa+1}(n)$, $M'_{2\kappa+1}(n)$, $N''_{2\nu}(n)$, $M''_{2\kappa}(n)$ sich auf ihre Anfangsglieder reduciren, so findet man bis einschliesslich der zehnten Differenzen die Reihen

$$\left.\begin{aligned}\omega\frac{df(a)}{da} &= f'(a) - \tfrac{1}{6}f'''(a) + \tfrac{1}{30}f^{(5)}(a) - \tfrac{1}{140}f^{(7)}(a) + \tfrac{1}{630}f^{(9)}(a)\ldots\ldots\\ \omega^2\frac{d^2f(a)}{da^2} &= f''(a) - \tfrac{1}{12}f^{(4)}(a) + \tfrac{1}{90}f^{(6)}(a) - \tfrac{1}{560}f^{(8)}(a) + \tfrac{1}{3150}f^{(10)}(a)\ldots\\ \omega\frac{df(a+\frac{1}{2})}{d(a+\frac{1}{2})} &= f'(a+\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{24}f'''(a+\tfrac{1}{2}) + \tfrac{3}{640}f^{(5)}(a+\tfrac{1}{2}) - \tfrac{5}{7168}f^{(7)}(a+\tfrac{1}{2}) +\\ &\quad + \tfrac{35}{294912}f^{(9)}(a+\tfrac{1}{2})\ldots\\ \omega^2\frac{d^2f(a+\frac{1}{2})}{d(a+\frac{1}{2})^2} &= f''(a+\tfrac{1}{2}) - \tfrac{5}{24}f^{(4)}(a+\tfrac{1}{2}) + \tfrac{259}{5760}f^{(6)}(a+\tfrac{1}{2}) -\\ &\quad - \tfrac{3229}{322560}f^{(8)}(a+\tfrac{1}{2}) + \tfrac{117469}{51609600}f^{(10)}(a+\tfrac{1}{2})\ldots\end{aligned}\right\}\quad\text{(III)}$$

Zur Bestimmung der Integrale hat man die Formel (1) mit $dx = d(a + n\omega) = \omega\, dn$ zu multipliciren und zu integriren, und ebenso die Formel (2)

[1]) Abgekürzt aus v. OPPOLZER's Tafeln, l. c., pag. 515 bis 545.

mit $dy = d\,[a + (n + \frac{1}{2})\,\omega] = \omega\, dn$[1]). Man erhält durch unbestimmte Integration:

$$\frac{1}{\omega}\int f(x)dx = A_1 + n f(a) + f'(a)\int N_1(n)\,dn + f''(a)\int N_2(n)\,dn + \dots \tag{6}$$

$$\frac{1}{\omega}\int f(y)dy = B_1 + n f(a+\tfrac{1}{2}) + f'(a+\tfrac{1}{2})\int M_1(n)\,dn + f''(a+\tfrac{1}{2})\int M_2(n)\,dn + \dots \tag{7}$$

Integrirt man nun zunächst in (6) zwischen den Grenzen $a + n\omega = \xi$ und $\xi + \omega$, und in (7) zwischen den Grenzen $a + \frac{1}{2}\omega + n\omega = \eta$ und $\eta + \omega$, d. h. durch ein ganzes Intervall, also rechts zwischen den Grenzen $n$ und $n + 1$, so folgt

$$\frac{1}{\omega}\int_{\xi}^{\xi+\omega} f(x)dx = f(a) + f'(a)\int_n^{n+1} N_1(n)\,dn + f''(a)\int_n^{n+1} N_2(n)\,dn + f'''(a)\int_n^{n+1} N_3(n)\,dn + \dots \tag{6a}$$

$$\frac{1}{\omega}\int_{\eta}^{\eta+\omega} f(y)dy = f(a+\tfrac{1}{2}) + f'(a+\tfrac{1}{2})\int_n^{n+1} M_1(n)\,dn + f''(a+\tfrac{1}{2})\int_n^{n+1} M_2(n)\,dn + \dots \tag{7a}$$

Will man nun für ein zweites Intervall integriren, so erhält man durch die Substitution $x = x' + \omega$, $dx = dx'$ und $y = y' + \omega$, $dy = dy'$:

$$\frac{1}{\omega}\int_{\xi+\omega}^{\xi+2\omega} f(x)dx = \frac{1}{\omega}\int_{\xi}^{\xi+\omega} f(x'+\omega)\,dx' = f(a+1) + f'(a+1)\int_n^{n+1} N_1(n)\,dn + \dots$$

$$\frac{1}{\omega}\int_{\eta+\omega}^{\eta+2\omega} f(y)dy = \frac{1}{\omega}\int_{\eta}^{\eta+\omega} f(y'+\omega)\,dy' = f(a+\tfrac{3}{2}) + f'(a+\tfrac{3}{2})\int_n^{n+1} M_1(n)\,dn + \dots$$

demnach, wenn Kürze halber das Argument $n$ in den Functionen $N$ und $M$ weggelassen wird:

$$\frac{1}{\omega}\int_{\xi}^{\xi+\omega} f(x)dx = f(a) + f'(a)\int_n^{n+1} N_1\,dn + f''(a)\int_n^{n+1} N_2\,dn + \dots$$

$$\frac{1}{\omega}\int_{\xi+\omega}^{\xi+2\omega} f(x)dx = f(a+1) + f'(a+1)\int_n^{n+1} N_1\,dn + f''(a+1)\int_n^{n+1} N_2\,dn + \dots$$

$$\frac{1}{\omega}\int_{\xi+2\omega}^{\xi+3\omega} f(x)dx = f(a+2) + f'(a+2)\int_n^{n+1} N_1\,dn + f''(a+2)\int_n^{n+1} N_2\,dn + \dots \tag{8}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{\omega}\int_{\xi+(l-1)\omega}^{\xi+l\omega} f(x)dx = f(a+l-1) + f'(a+l-1)\int_n^{n+1} N_1\,dn + f''(a+l-1)\int_n^{n+1} N_2\,dn + \dots$$

und ebenso

---

[1]) Die Bezeichnung der Variabeln ist natürlich gleichgültig, und ist nur der Kürze und Deutlichkeit halber in einem Falle $x$, im andern $y$ gesetzt; das bestimmte Integral ist natürlich nur eine Function der Grenzen.

$$\frac{1}{\omega}\int_{\eta}^{\eta+\omega} f(y)dy = f(a+\tfrac{1}{2}) + f'(a+\tfrac{1}{2})\int_{n}^{n+1} M_1 dn + f''(a+\tfrac{1}{2})\int_{n}^{n+1} M_2 dn + \ldots$$

$$\frac{1}{\omega}\int_{\eta+\omega}^{\eta+2\omega} f(y)dy = f(a+\tfrac{3}{2}) + f'(a+\tfrac{3}{2})\int_{n}^{n+1} M_1 dn + f''(a+\tfrac{3}{2})\int_{n}^{n+1} M_2 dn + \ldots \qquad (9)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{\omega}\int_{\eta+(i-1)\omega}^{\eta+i\omega} f(y)dy = f(a+i-\tfrac{1}{2}) + f'(a+i-\tfrac{1}{2})\int_{n}^{n+1} M_1 dn + f''(a+i-\tfrac{1}{2})\int_{n}^{n+1} M_2 dn + \ldots$$

Addirt man die Ausdrücke in (8), sowie die in (9), so erhält man für die Integrale durch $i$ ganze Intervalle:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega}\int_{\xi}^{\xi+i\omega} f(x)dx = {} & f(a)+f(a+1)+f(a+2)+\ldots f(a+i-1)+ \\ & +[f'(a)+f'(a+1)+f'(a+2)+\ldots f'(a+i-1)]\int_{n}^{n+1} N_1 dn \\ & +[f''(a)+f''(a+1)+f''(a+2)+\ldots f''(a+i-1)]\int_{n}^{n+1} N_2 dn \\ & +\ldots\ldots\end{aligned} \qquad (10)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega}\int_{\eta}^{\eta+i\omega} f(y)dy = {} & f(a+\tfrac{1}{2})+f(a+\tfrac{3}{2})+f(a+\tfrac{5}{2})+\ldots+f(a+i-\tfrac{1}{2}) \\ & +[f'(a+\tfrac{1}{2})+f'(a+\tfrac{3}{2})+f'(a+\tfrac{5}{2})\ldots f'(a+i-\tfrac{1}{2})]\int_{n}^{n+1} M_1 dn \\ & +[f''(a+\tfrac{1}{2})+f''(a+\tfrac{3}{2})+f''(a+\tfrac{5}{2})+\ldots f''(a+i-\tfrac{1}{2})]\int_{n}^{n+1} M_2 dn \\ & +\ldots\ldots\end{aligned} \qquad (11)$$

Setzt man nun das auf pag. 42 gegebene Schema auch nach links fort, d. h. bildet man von einem vorläufig beliebig anzunehmenden Werthe die »erste summirte Reihe« und ebenso (für die zweiten Integrale) die »zweite summirte Reihe« so erhält man die folgende Uebersicht:

| | zweite summirte Reihe | erste summirte Reihe | Hauptfunction | erste Differenz | zweite Differenz |
|---|---|---|---|---|---|
| $a-3\omega$ | ${}^{II}f(a-3)$ | | | | |
| | | ${}^{I}f(a-\tfrac{5}{2})$ | | | |
| $a-2\omega$ | ${}^{II}f(a-2)$ | | $f(a-2)$ | | |
| | | ${}^{I}f(a-\tfrac{3}{2})$ | | $f'(a-\tfrac{3}{2})$ | |
| $a-\omega$ | ${}^{II}f(a-1)$ | | $f(a-1)$ | | $f''(a-1)$ |
| | | ${}^{I}f(a-\tfrac{1}{2})$ | | $f'(a-\tfrac{1}{2})$ | |
| $a$ | ${}^{II}f(a)$ | | $f(a)$ | | $f''(a)$ |
| | | ${}^{I}f(a+\tfrac{1}{2})$ | | $f'(a+\tfrac{1}{2})$ | |
| $a+\omega$ | ${}^{II}f(a+1)$ | | $f(a+1)$ | | $f''(a+1)$ |
| | | ${}^{I}f(a+\tfrac{3}{2})$ | | $f'(a+\tfrac{3}{2})$ | |
| $a+2\omega$ | ${}^{II}f(a+2)$ | | $f(a+2)$ | | |
| | | ${}^{I}f(a+\tfrac{5}{2})$ | | | |
| $a+3\omega$ | ${}^{II}f(a+3)$ | | | | |

wobei also

$$\begin{aligned}{}^{I}f(a+\tfrac{1}{2}) - {}^{I}f(a-\tfrac{1}{2}) &= f(a) \\ {}^{I}f(a+\tfrac{3}{2}) - {}^{I}f(a+\tfrac{1}{2}) &= f(a+1) \\ {}^{I}f(a+\tfrac{5}{2}) - {}^{I}f(a+\tfrac{3}{2}) &= f(a+2) \\ \cdots\cdots \\ {}^{I}f(a+i-\tfrac{1}{2}) - {}^{I}f(a+i-\tfrac{3}{2}) &= f(a+i-1),\end{aligned} \qquad (12)$$

ist. Dabei bleibt zunächst ein Anfangswerth, z. B. ${}^{I}f(a-\tfrac{1}{2})$ beliebig, und man kann nach Maassgabe der Umstände darüber noch weiter verfügen.

Durch Addition von (12) folgt

$$f(a)+f(a+1)+f(a+2)+\ldots+f(a+i-1)={}^{I}f(a+i-\tfrac{1}{2})-{}^{I}f(a-\tfrac{1}{2}).$$

Ebenso erhält man aus den bezüglichen Formeln auf pag. 41:

$$f''(a)+f''(a+1)+f''(a+2)+\ldots f''(a+i-1)=f'(a+i-\tfrac{1}{2})-f'(a-\tfrac{1}{2})$$

u. s. w., welche Summen aber gerade in der ersten, dritten, fünften . . . Zeile der Formel (10) enthalten sind. Die zweite, vierte, sechste . . . Zeile aber verschwindet, wenn man $n=-\frac{1}{2}$ setzt; denn da die $N_{2x+1}(n)$ ungerade Functionen sind, so ist

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} N_{2x+1}(n)\,dn = 0$$

und man findet:

$$\frac{1}{\omega}\int_{a-\frac{1}{2}\omega}^{a+(i-\frac{1}{2})\omega} f(x)\,dx = {}^{I}f(a+i-\tfrac{1}{2})-{}^{I}f(a-\tfrac{1}{2})+[f'(a+i-\tfrac{1}{2})-f'(a-\tfrac{1}{2})]\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} N_2(n)\,dn +$$

$$+[f'''(a+i-\tfrac{1}{2})-f'''(a-\tfrac{1}{2})]\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} N_4(n)\,dn+\ldots$$

Führt man für die bestimmten Integrale der $N$, welche sich numerisch leicht ausrechnen lassen, kurze Bezeichnungen ein, so dass

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} N_2(n)\,dn = P_1' = +\tfrac{1}{24} \qquad \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} N_6(n)\,dn = P_5' = +\tfrac{367}{967680}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} N_4(n)\,dn = P_3' = -\tfrac{17}{5760} \qquad \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} N_8(n)\,dn = P_7' = -\tfrac{27859}{464486400}$$

. . . . . . . .

$$P'_{2x-1}=\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} N_{2x}(n)\,dn = 2\int_{0}^{\frac{1}{2}} N_{2x}(n)\,dn = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{0} N_{2x}(n)\,dn$$

ist, so wird

$$\frac{1}{\omega}\int_{a-\frac{1}{2}\omega}^{a+(i-\frac{1}{2})\omega} f(x)\,dx = {}^{I}f(a+i-\tfrac{1}{2})+P_1'f'(a+i-\tfrac{1}{2})+P_3'f'''(a+i-\tfrac{1}{2})+\ldots$$

$$-[{}^{I}f(a-\tfrac{1}{2})+P_1'f'(a-\tfrac{1}{2})+P_3'f'''(a-\tfrac{1}{2})+\ldots]. \tag{18}$$

Hier ist die erste Zeile von Fall zu Fall zu berechnen, während die zweite Zeile eine von jedem so berechneten Integral abzuziehende Constante ist. Die Berechnung wird vereinfacht, wenn man diese Constante, welche je nach der Wahl von ${}^{I}f(a-\frac{1}{2})$ verschieden ausfällt, zum Verschwinden bringt. Wählt man daher für die Bestimmung des Integrales von der unteren Grenze $x_0=a-\frac{1}{2}\omega$ angefangen:

$${}^{I}f(a-\tfrac{1}{2})=-\tfrac{1}{24}f'(a-\tfrac{1}{2})+\tfrac{17}{5760}f'''(a-\tfrac{1}{2})-\tfrac{367}{967680}f^{(5)}(a-\tfrac{1}{2})\ldots \quad (\text{IV}: a-\tfrac{1}{2})$$

so wird das Integral

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{a\omega}^{a+(i-\frac{1}{2})\omega} f(x)\,dx = {}^{1}f(a+i-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{24}f'(a+i-\tfrac{1}{2}) - \tfrac{17}{5760}f'''(a+i-\tfrac{1}{2}) +$$
$$+ \tfrac{367}{967680}f^{(5)}(a+i-\tfrac{1}{2}) \ldots \quad (\mathrm{V}: i-1).$$

Es ist zu beachten, dass in der ersten Zeile von (13) als Argument die obere Grenze, in der zweiten Zeile die untere Grenze des Integrales auftritt; man pflegt dieses, wiewohl nicht ganz correct, so auszudrücken, dass man sagt, die erste Zeile ist der Werth des Integrales für die obere Grenze, die zweite Zeile der Werth des Integrales für die untere Grenze, und bezeichnet dann die Bedingung (IV: $a-\frac{1}{2}$) dadurch, dass man sagt, ${}^{1}f(a-\frac{1}{2})$ wird so gewählt, dass das Integral für die untere Grenze verschwindet[1]).

In (11) verschwinden die zweite, vierte, sechste Zeile ebenfalls und die Summen in der ersten, dritten, fünften Zeile lassen sich auch wieder zusammenziehen. Es ist nämlich

$$f(a+\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}[f(a+1)+f(a)] = \tfrac{1}{2}\,{}^{1}f(a+\tfrac{3}{2}) - \tfrac{1}{2}\,{}^{1}f(a-\tfrac{1}{2})$$
$$f(a+\tfrac{3}{2}) = \tfrac{1}{2}\,{}^{1}f(a+\tfrac{5}{2}) - \tfrac{1}{2}\,{}^{1}f(a+\tfrac{1}{2})$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$f(a+i-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\,{}^{1}f(a+i+\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2}\,{}^{1}f(a+i-\tfrac{3}{2}),$$

demnach

$$f(a+\tfrac{1}{2})+f(a+\tfrac{3}{2})+\ldots+f(a+i-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}[{}^{1}f(a+i+\tfrac{1}{2})+{}^{1}f(a+i-\tfrac{1}{2})] -$$
$$-\tfrac{1}{2}[{}^{1}f(a+\tfrac{1}{2})+{}^{1}f(a-\tfrac{1}{2})]$$
$$= {}^{1}f(a+1) - {}^{1}f(a),$$

wobei wieder die arithmetischen Mittel der ersten summirten Reihe eingeführt sind. Setzt man daher analog dem früheren

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} M_2(n)\,dn = Q_1' = -\tfrac{1}{12} \qquad \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} M_6(n)\,dn = Q_5' = -\tfrac{191}{60480}$$
$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} M_4(n)\,dn = Q_3' = +\tfrac{11}{720} \qquad \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} M_8(n)\,dn = Q_7' = +\tfrac{2497}{3628800}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$Q'_{2x-1} = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} M_{2x}(n)\,dn = 2\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} M_{2x}(n)\,dn = 2\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} M_{2x}(n)\,dn,$$

so wird

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{a}^{a+i\omega} f(y)\,dy = {}^{1}f(a+i) + Q_1'f'(a+i) + Q_3'f'''(a+i) + \ldots$$
$$-[{}^{1}f(a) + Q_1'f'(a) + Q_3'f'''(a) + \ldots]. \qquad (14)$$

Die Berechnung wird am einfachsten, wenn man die zweite Zeile zum Verschwinden bringt. Dazu ist

$${}^{1}f(a) = -Q_1'f'(a) - Q_3'f'''(a) \ldots\ldots$$

Man hat aber nicht das arithmetische Mittel ${}^{1}f(a)$, sondern ${}^{1}f(a\pm\frac{1}{2})$ als Constante zu bestimmen; da aber

[1]) Thatsächlich zeigt Formel (13), dass das Integral, wie immer auch ${}^{1}f(a-\frac{1}{2})$ gewählt wird, für die untere Grenze verschwindet, wenn nur die additive Constante, welche durch die zweite Zeile ausgedrückt ist, entsprechend berücksichtigt wird.

$$ {}^{I}f(a) = \tfrac12\,{}^{I}f(a+\tfrac12) + \tfrac12\,{}^{I}f(a-\tfrac12) $$
$$ \tfrac12 f(a) = \tfrac12\,{}^{I}f(a+\tfrac12) - \tfrac12\,{}^{I}f(a-\tfrac12) $$

ist, so folgt

$$ {}^{I}f(a+\tfrac12) = {}^{I}f(a) + \tfrac12 f(a); \qquad {}^{I}f(a-\tfrac12) = {}^{I}f(a) - \tfrac12 f(a), \tag{15} $$

demnach zur Constantenbestimmung für die Berechnung des Integrales von der unteren Grenze $a$ angefangen eine der beiden Formeln:

$$ \begin{aligned} {}^{I}f(a+\tfrac12) &= +\tfrac12 f(a) + \tfrac{1}{12}f'(a) - \tfrac{11}{720}f'''(a) + \tfrac{191}{60480}f^{(5)}(a)\ldots \\ {}^{I}f(a-\tfrac12) &= -\tfrac12 f(a) + \tfrac{1}{12}f'(a) - \tfrac{11}{720}f'''(a) + \tfrac{191}{60480}f^{(5)}(a)\ldots \end{aligned} \tag{IV: a} $$

und dann wird der Werth des Integrales, wenn jetzt wieder $x$ als Integrationsvariable gesetzt wird

$$ \frac{1}{\omega}\int_{a_0}^{a+i\omega} f(x)\,dx = {}^{I}f(a+i) - \tfrac{1}{12}f'(a+i) + \tfrac{11}{720}f'''(a+i) - \tfrac{191}{60480}f^{(5)}(a+i)\ldots \tag{V: i} $$

Aus Gleichung (6) erhält man durch Integration zwischen den Grenzen $a-\frac12\omega$ und $a$, d. h. rechts zwischen den Grenzen $n = -\frac12$ und 0:

$$ \frac{1}{\omega}\int_{a-\frac12\omega}^{a} f(x)\,dx = \tfrac12 f(a) + f'(a)\int_{-\frac12}^{0} N_1(n)\,dn + f''(a)\int_{-\frac12}^{0} N_2(n)\,dn + \ldots $$

oder

$$ \begin{aligned} \frac{1}{\omega}\int_{a-\frac12\omega}^{a} f(x)\,dx = \tfrac12 f(a) + f'(a)\int_{-\frac12}^{0} N_1(n)\,dn + \tfrac12 P_1' f''(a) + f'''(a)\int_{-\frac12}^{0} N_3(n)\,dn +& \\ + \tfrac12 P_2' f^{(4)}(a) + \ldots& \end{aligned} \tag{16} $$

Subtrahirt man diese Gleichung von (13), so folgt:

$$ \begin{aligned} \frac{1}{\omega}\int_{a}^{a+(i-\frac12)\omega} f(x)\,dx = {}^{I}f(a+i-\tfrac12) + P_1' f'(a+i-\tfrac12) + P_2' f'''(a+i-\tfrac12) + \ldots \\ - \big[{}^{I}f(a-\tfrac12) + P_1' f'(a-\tfrac12) + P_2' f'''(a-\tfrac12) + \ldots \\ + \tfrac12 f(a) + \tfrac12 P_1' f''(a) + \tfrac12 P_2' f^{(4)}(a) + \ldots \\ + f'(a)\int_{-\frac12}^{0} N_1(n)\,dn + f'''(a)\int_{-\frac12}^{0} N_3(n)\,dn + \ldots\big]. \end{aligned} $$

Mit Rücksicht auf (15) reducirt sich der Ausdruck in der eckigen Klammer auf:

$$ \begin{aligned} {}^{I}f(a) + P_1' f'(a) + P_2' f'''(a) + \ldots + f'(a)\int_{-\frac12}^{0} N_1(n)\,dn + f'''(a)\int_{-\frac12}^{0} N_3(n)\,dn + \ldots \\ = {}^{I}f(a) + f'(a)\int_{-\frac12}^{0}(2N_2 + N_1)\,dn + f'''(a)\int_{-\frac12}^{0}(2N_4 + N_3)\,dn + \ldots \end{aligned} $$

Es ist aber

$$ \begin{aligned} 2N_2(n) + N_1(n) &= \tfrac{2}{2!}(n+1)n \\ 2N_4(n) + N_3(n) &= \tfrac{2}{4!}(n+2)(n+1)n(n-1) \\ 2N_6(n) + N_5(n) &= \tfrac{2}{6!}(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2). \end{aligned} $$

Durch die Substitution $n = n_1 - \frac12$ erhält man allgemein $2N_{2x}(n) + N_{2x-1}(n) = 2M_{2x}(n_1)$; demnach, da den Grenzen $-\frac12$ und 0 für $n$ die Grenzen 0 und $+\frac12$ für $n_1$ entsprechen, die Coëfficienten von $f'(a)$, $f'''(a)$ nichts anderes als $Q_1'$, $Q_2'$, folglich

$$ \begin{aligned} \frac{1}{\omega}\int_{a}^{a+(i-\frac12)\omega} f(x)\,dx = {}^{I}f(a+i-\tfrac12) + P_1' f'(a+i-\tfrac12) + P_2' f'''(a+i-\tfrac12) + \ldots \\ - \big[{}^{I}f(a) + Q_1' f'(a) + Q_2' f'''(a)\ldots\big]. \end{aligned} $$

Hieraus folgt, dass das Integral zwischen den Grenzen $a$ und $a+(i-\frac{1}{2})\omega$ durch dieselbe Formel (V: $i-\frac{1}{2}$) bestimmt ist, wenn die zweite Zeile wegfällt, d. h. die Anfangsconstante der ersten summirten Reihe nach (IV: $a$) bestimmt wird.

Die Gleichung (14) kann geschrieben werden:

$$\frac{1}{\omega}\int_{a}^{a+i\omega} f(x)\,dx = \Sigma f(a+i) + Q_1' f'(a+i) + Q_3' f'''(a+i) + \dots$$
$$- \left[\Sigma f(a) + f'(a)\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(2N_2+N_1)\,dn + f'''(a)\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(2N_4+N_3)\,dn + \dots\right]$$

Addirt man zu dieser Gleichung die Gleichung (16), so folgt

$$\frac{1}{\omega}\int_{a-\frac{1}{2}\omega}^{a+i\omega} f(x)\,dx = \Sigma f(a+i) + Q_1' f'(a+i) + Q_3' f'''(a+i) + \dots$$
$$- [\Sigma f(a) + f'(a)\int_{-\frac{1}{2}}^{0} 2N_2\,dn + f'''(a)\int_{-\frac{1}{2}}^{0} 2N_4\,dn + \dots$$
$$- \tfrac{1}{2}f(a) - \tfrac{1}{2}P_1' f''(a) - \tfrac{1}{2}P_3' f^{(4)}(a) - \dots].$$

Der Ausdruck in den Klammern wird gleich

$$\Sigma f(a) - \tfrac{1}{2}f(a) + P_1'[f'(a) - \tfrac{1}{2}f''(a)] + P_3'[f'''(a) - \tfrac{1}{2}f^{(4)}(a)] \dots$$

und es wird daher mit Rücksicht auf (15):

$$\frac{1}{\omega}\int_{a-\frac{1}{2}\omega}^{a+i\omega} f(x)\,dx = \Sigma f(a+i) + Q_1' f'(a+i) + Q_3' f'''(a+i) + \dots$$
$$- [\Sigma f(a-\tfrac{1}{2}) + P_1' f'(a-\tfrac{1}{2}) + P_3' f'''(a-\tfrac{1}{2}) + \dots],$$

woraus folgt, dass das Integral zwischen den Grenzen $a-\frac{1}{2}\omega$ und $a+i\omega$ durch die Formel (V: $i$) bestimmt ist, wenn die Constante der ersten Summenreihe durch (IV: $a-\frac{1}{2}$) bestimmt wird.

Um die Integrale für beliebige obere Grenzen zu erhalten, genügt es die Integrale zwischen $(a+i\omega)$ und $a+(i+n)\omega$, bezw. zwischen $a+(i-\frac{1}{2})\omega$ und $a+(i-\frac{1}{2}+n)\omega$ zu den Integralen (V: $i$), (V: $i-\frac{1}{2}$) zu addiren, wobei man sich wieder auf Werthe von $n$ zwischen $\pm\frac{1}{2}$ beschränken kann.

Schreibt man die Formeln (6) und (7) für $x = a+(i+n)\omega$ bezw. $y = a+(i-\frac{1}{2}+n)\omega$ an, was darauf hinauskommt, überall $a+i\omega$ an Stelle von $a$ zu setzen, und integrirt dann nach $n$ zwischen 0 und $n$, so erhält man

$$\frac{1}{\omega}\int_{a+i\omega}^{a+i\omega+n\omega} f(x)\,dx = nf(a+i) + f'(a+i)\int_0^n N_1(n)\,dn + f''(a+i)\int_0^n N_2(n)\,dn + \dots \quad (17)$$

$$\frac{1}{\omega}\int_{a+(i-\frac{1}{2})\omega}^{a+(i-\frac{1}{2}+n)\omega} f(x)\,dx = nf(a+i-\tfrac{1}{2}) + f'(a+i-\tfrac{1}{2})\int_0^n M_1(n)\,dn +$$
$$+ f''(a+i-\tfrac{1}{2})\int_0^n M_2(n)\,dn + \dots \quad (18)$$

Durch Addition von (17) zu (V: $i$) und (18) zu (V: $i-\frac{1}{2}$) erhält man, wenn man für die untere Grenze $x_0$ gleich $a$ oder $a-\frac{1}{2}\omega$ die Constantenbestimmung gemäss (IV: $a$) bezw. (IV: $a-\frac{1}{2}$), so bestimmt, dass die Integrale stets in den Formen (V: $i$) bezw. (V: $i-\frac{1}{2}$) ausgedrückt erscheinen:

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{x_0}^{a+i\omega+n\omega}(x)\,dx = {}^{\mathrm{I}}f(a+i)+nf(a+i)+\Big(Q_1'+\int\limits_0^n N_1(n)\,dn\Big)f'(a+i)+\Big(\int\limits_0^n N_2(n)\,dn\Big)f''(a+i)$$
$$+\Big(Q_3'+\int\limits_0^n N_3(n)\,dn\Big)f'''(a+i)+\Big(\int\limits_0^n N_4(n)\,dn\Big)f^{(4)}(a+i)$$
$$+\;\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{x_0}^{a+(i-\frac{1}{2})\omega+n\omega}f(x)\,dx = {}^{\mathrm{I}}f(a+i-\tfrac{1}{2})+nf(a+i-\tfrac{1}{2})+\Big(P_1'+\int\limits_0^n M_1(n)\,dn\Big)f'(a+i-\tfrac{1}{2})+$$
$$+\Big(\int\limits_0^n M_2(n)\,dn\Big)f''(a+i-\tfrac{1}{2})$$
$$+\Big(P_3'+\int\limits_0^n M_3(n)\,dn\Big)f'''(a+i-\tfrac{1}{2})+\Big(\int\limits_0^n M_4(n)\,dn\Big)f^{(4)}(a+i-\tfrac{1}{2})$$
$$+\;\ldots\ldots$$

Berücksichtigt man nun die Formeln (8), so wird man sofort sehen, dass die Integrale der Functionen $N_2(n)$, $N_4(n)$ . . . . den gemeinschaftlichen Faktor $n^2$ haben, dass hingegen die Integrale von $M_2(n)$, $M_4(n)$ . . . . den gemeinschaftlichen Faktor $n$ enthalten, und kann daher setzen:

$$\begin{array}{ll}
Q_1'+\int\limits_0^n N_1(n)\,dn = Q_1'(n) & \int\limits_0^n N_2(n)\,dn = n^2 Q_2'(n) \\
Q_3'+\int\limits_0^n N_3(n)\,dn = Q_3'(n) & \int\limits_0^n N_4(n)\,dn = n^2 Q_4'(n) \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
P_1'+\int\limits_0^n M_1(n)\,dn = P_1'(n) & \int\limits_0^n M_2(n)\,dn = n P_2'(n) \\
P_3'+\int\limits_0^n M_3(n)\,dn = P_3'(n) & \int\limits_0^n M_4(n)\,dn = n P_4'(n) \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array} \qquad (19)$$

Dabei sind die $Q_x'(n)$ und $P_x'(n)$ sämmtlich Functionen von $n^2$, und man erhält, da $Q_2'(n)$ constant gleich $\frac{1}{2}$ ist:

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{x_0}^{a+i\omega+n\omega}f(x)\,dx = {}^{\mathrm{I}}f(a+i)+nf(a+i)+Q_1'(n)f'(a+i)+Q_3'(n)f'''(a+i)+\ldots\ldots$$
$$+n^2\big[\tfrac{1}{2}f''(a+i)+Q_4'(n)f^{(4)}(a+i)+\ldots\big] \qquad (\mathrm{VI}:i)$$

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{x_0}^{a+(i-\frac{1}{2})\omega+n\omega}f(x)\,dx = {}^{\mathrm{I}}f(a+i-\tfrac{1}{2})+P_1'(n)f'(a+i-\tfrac{1}{2})+P_3'(n)f'''(a+i-\tfrac{1}{2})+\ldots\ldots$$
$$+n\big[f(a+i-\tfrac{1}{2})+P_2'(n)f''(a+i-\tfrac{1}{2})+P_4'(n)f^{(4)}(a+i-\tfrac{1}{2})+\ldots\ldots\big]. \qquad (\mathrm{VI}:i-\tfrac{1}{2})$$

Durch Ausführung der Integrationen lassen sich die Reihen für die $Q_x'(n)$ und $P_x'(n)$ ermitteln; es wird z. B.[1])

$$Q_1'(n) = -\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{2}n^2; \qquad Q_3'(n) = \frac{1}{n^3}\int\limits_0^n \frac{1}{2!}n^2\,dn = \frac{1}{3!} \quad \text{u. s. w.}$$

Für die Praxis wird es wieder am bequemsten, Tafeln dieser Functionen zu haben, welche in Folgendem auszugsweise aus den v. Oppolzer'schen (l. c., pag. 546—564) unter Berücksichtigung aller Differenzreihen bis einschliesslich zur siebenten mitgetheilt sind.

---

[1]) Ueber eine andere Form der Darstellung, s. v. Oppolzer, l. c., pag. 40 und 42.

Betrachtet man in VI das Integral als eine Function der oberen Grenze, so kann man neuerdings integriren. In diesem zweiten Integrale erlangen zwischen den bezüglichen Integrationsgrenzen die einzelnen Functionswerthe die durch die obere Grenze des ersten Integrales bestimmten Werthe; es wird demnach die obere Grenze für die zweite Integration derjenigen für die erste identisch sein; und für das Verschwinden des Integrales für die untere Grenze wird erforderlich, dass auch die unteren Grenzen zusammenfallen.

Bezeichnet man das Integral in VI mit $J(x)$, so folgt durch Multiplikation mit $dx = n\,d\omega$ und Integration, wenn zunächst wieder nur innerhalb eines Intervalles integrirt wird, wofür $i = 0$ bezw. 1 angenommen werden darf:

$$\frac{1}{\omega}\int J(x)\,dx = A_2 + {}^{I}f(a)\int dn + f'(a)\int Q_1'(n)\,dn + f'''(a)\int Q_3'(n)\,dn + \dots \qquad (20)$$
$$+ f(a)\int n\,dn + f''(a)\int n^2 Q_2'(n)\,dn + f^{(4)}(a)\int n^2 Q_4'(n)\,dn + \dots$$

$$\frac{1}{\omega}\int J(x)\,dx = B_2 + {}^{I}f(a+\tfrac{1}{2})\int dn + f'(a+\tfrac{1}{2})\int P_1'(n)\,dn + f'''(a+\tfrac{1}{2})\int P_3'(n)\,dn + \dots \qquad (21)$$
$$+ f(a+\tfrac{1}{2})\int n\,dn + f''(a+\tfrac{1}{2})\int n P_2'(n)\,dn + f^{(4)}(a+\tfrac{1}{2})\int n P_4'(n)\,dn + \dots$$

wobei zu beachten ist, dass die sämmtlichen $P_x'(n)$ und $Q_x'(n)$ gerade Functionen von $n$ sind. Integrirt man zunächst (20) zwischen den Grenzen $\xi$ und $\xi + \omega$ und (21) zwischen den Grenzen $\eta$ und $\eta + \omega$, nimmt also die Integrale rechter Hand zwischen $n$ und $n + 1$, sodann zwischen den Grenzen $\xi + \omega$ und $\xi + 2\omega$, bezw. $\eta + \omega$ und $\eta + 2\omega$, wobei wieder, genau wie auf pag. 621 die Function unter dem Integralzeichen durch die Substitution $x = x' + \omega$ in $f(x + \omega)$ übergeführt wird, und die Grenzen der Integrale rechts sämmtlich $n$ und $n + 1$ werden, und addirt, so folgt

$$\frac{1}{\omega}\int_{\xi}^{\xi+i\omega} J(x)\,dx = [{}^{I}f(a) + {}^{I}f(a+1) + {}^{I}f(a+2) + \dots + {}^{I}f(a+i-1)]\int_n^{n+1} dn$$
$$+ [f'(a) + f'(a+1) + f'(a+2) + \dots + f'(a+i-1)]\int_n^{n+1} Q_1'(n)\,dn$$
$$+ \dots$$
$$+ [f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \dots + f(a+i-1)]\int_n^{n+1} n\,dn$$
$$+ [f''(a) + f''(a+1) + f''(a+2) + \dots + f''(a+i-1)]\int_n^{n+1} n^2 Q_2'(n)\,dn$$
$$+ \dots$$

$$\frac{1}{\omega}\int_{\eta}^{\eta+i\omega} J(x)\,dx = [{}^{I}f(a+\tfrac{1}{2}) + {}^{I}f(a+\tfrac{3}{2}) + \dots + {}^{I}f(a+i-\tfrac{1}{2})]\int_n^{n+1} dn$$
$$+ [f'(a+\tfrac{1}{2}) + f'(a+\tfrac{3}{2}) + \dots + f'(a+i-\tfrac{1}{2})]\int_n^{n+1} P_1'(n)\,dn$$
$$+ \dots$$
$$+ [f(a+\tfrac{1}{2}) + f(a+\tfrac{3}{2}) + \dots + f(a+i-\tfrac{1}{2})]\int_n^{n+1} n\,dn$$
$$+ [f''(a+\tfrac{1}{2}) + f''(a+\tfrac{3}{2}) + \dots + f''(a+i-\tfrac{1}{2})]\int_n^{n+1} n P_2'(n)\,dn$$
$$+ \dots$$

Integrirt man nach $n$ von $-\frac{1}{2}$ bis $+\frac{1}{2}$, so fallen die Integrale der ungeraden Functionen $n^2 Q_{2x}'(n)$ und $n P_{2x}'(n)$ weg, und es bleibt

$$\frac{1}{\omega}\int_{a-\frac{1}{2}\omega}^{a+(i-\frac{1}{2})\omega} f(x)\,dx = [{}^{\mathrm{I}}f(a) + {}^{\mathrm{I}}f(a+1) + \dots + {}^{\mathrm{I}}f(a+i-1)] +$$

$$+ [f'(a) + f'(a+1) + \dots + f'(a+i-1)]\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} Q_1'(n)\,dn$$

$$+ [f'''(a) + f'''(a+1) + \dots + f'''(a+i-1)]\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} Q_3'(n)\,dn + \dots$$

$$\frac{1}{\omega}\int_{a}^{a+i\omega} f(x)\,dx = [{}^{\mathrm{I}}f(a+\tfrac{1}{2}) + {}^{\mathrm{I}}f(a+\tfrac{3}{2}) + \dots + {}^{\mathrm{I}}f(a+i-\tfrac{1}{2})] +$$

$$+ [f'(a+\tfrac{1}{2}) + f'(a+\tfrac{3}{2}) + \dots + f'(a+i-\tfrac{1}{2})]\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} P_1'(n)\,dn$$

$$+ [f'''(a+\tfrac{1}{2}) + f'''(a+\tfrac{3}{2}) + \dots + f'''(a+i-\tfrac{1}{2})]\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} P_3'(n)\,dn + \dots$$

Führt man hier die zweiten Summen ein, so hat man

$${}^{\mathrm{I}}f(a) = \tfrac{1}{2}\,{}^{\mathrm{I}}f(a+\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}\,{}^{\mathrm{I}}f(a-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\,{}^{\mathrm{II}}f(a+1) - \tfrac{1}{2}\,{}^{\mathrm{II}}f(a-1)$$
$${}^{\mathrm{I}}f(a+1) = \tfrac{1}{2}\,{}^{\mathrm{II}}f(a+2) - \tfrac{1}{2}\,{}^{\mathrm{II}}f(a)$$
$$\dots\dots$$
$${}^{\mathrm{I}}f(a+i-1) = \tfrac{1}{2}\,{}^{\mathrm{II}}f(a+i) - \tfrac{1}{2}\,{}^{\mathrm{II}}f(a+i-2)$$
$${}^{\mathrm{I}}f(a+\tfrac{1}{2}) = {}^{\mathrm{II}}f(a+1) - {}^{\mathrm{II}}f(a)$$
$${}^{\mathrm{I}}f(a+\tfrac{3}{2}) = {}^{\mathrm{II}}f(a+2) - {}^{\mathrm{II}}f(a+1)$$
$$\dots\dots$$
$${}^{\mathrm{I}}f(a+i-\tfrac{1}{2}) = {}^{\mathrm{II}}f(a+i) - {}^{\mathrm{II}}f(a+i-1)$$

folglich

$${}^{\mathrm{I}}f(a) + {}^{\mathrm{I}}f(a+1) + \dots + {}^{\mathrm{I}}f(a+i-1) = \tfrac{1}{2}\,{}^{\mathrm{II}}f(a+i) + \tfrac{1}{2}\,{}^{\mathrm{II}}f(a+i-1) - \tfrac{1}{2}\,{}^{\mathrm{II}}f(a) - \tfrac{1}{2}\,{}^{\mathrm{II}}f(a-1)$$
$$= {}^{\mathrm{II}}f(a+i-\tfrac{1}{2}) - {}^{\mathrm{II}}f(a-\tfrac{1}{2})$$
$${}^{\mathrm{I}}f(a+\tfrac{1}{2}) + {}^{\mathrm{I}}f(a+\tfrac{3}{2}) + \dots + {}^{\mathrm{I}}f(a+i-\tfrac{1}{2}) = {}^{\mathrm{II}}f(a+i) - {}^{\mathrm{II}}f(a),$$

und da sich die ersten, dritten, fünften Differenzen in derselben Weise durch die Functionalwerthe selbst, die zweiten, vierten Differenzen ausdrücken:

$$\frac{1}{\omega}\int_{a-\frac{1}{2}\omega}^{a+(i-\frac{1}{2})\omega} f(x)\,dx = {}^{\mathrm{II}}f(a+i-\tfrac{1}{2}) + f(a+i-\tfrac{1}{2})\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} Q_1'(n)\,dn + f''(a+i-\tfrac{1}{2})\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} Q_3'(n)\,dn + \dots$$
$$- [{}^{\mathrm{II}}f(a-\tfrac{1}{2}) + f(a-\tfrac{1}{2})\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} Q_1'(n)\,dn + f''(a-\tfrac{1}{2})\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} Q_3'(n)\,dn + \dots] \tag{22}$$
$$\frac{1}{\omega}\int_{a}^{a+i\omega} f(x)\,dx = {}^{\mathrm{II}}f(a+i) + f(a+i)\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} P_1'(n)\,dn + f''(a+i)\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} P_3'(n)\,dn + \dots$$
$$- [{}^{\mathrm{II}}f(a) + f(a)\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} P_1'(n)\,dn + f''(a)\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} P_3'(n)\,dn + \dots].$$

Die bestimmten Integrale der $Q$ und $P$ sind Constanten, deren Berechnung keinen Schwierigkeiten unterliegt; führt man diese Integrationen aus, und setzt wieder Kürze halber

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} Q_1'(n)\,dn = P_0^3 = -\tfrac{1}{24} \qquad \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} P_1'(n)\,dn = Q_0^3 = +\tfrac{1}{12}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} Q_3'(n)\,dn = P_2^3 = +\tfrac{17}{1920} \qquad \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} P_3'(n)\,dn = Q_2^3 = -\tfrac{1}{240} \qquad (23)$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} Q_5'(n)\,dn = P_4^3 = -\tfrac{367}{193536} \qquad \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} P_5'(n)\,dn = Q_4^3 = +\tfrac{31}{60480}$$

. . . . . . . . . . .

und bestimmt wieder die sonst willkürlichen Anfangsconstanten für die zweite Summenreihe, so dass die zu dem Integrale hinzuzufügende Constante (die zweite Zeile) verschwindet, so wird wegen

$${}^{II}f(a-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\,{}^{II}f(a) + \tfrac{1}{2}\,{}^{II}f(a-1); \quad \tfrac{1}{2}\,{}^{I}f(a-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\,{}^{II}f(a) - \tfrac{1}{2}\,{}^{II}f(a-1),$$

also

$${}^{II}f(a) = {}^{II}f(a-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}\,{}^{I}f(a-\tfrac{1}{2}); \quad {}^{II}f(a-1) = {}^{II}f(a-\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2}\,{}^{I}f(a-\tfrac{1}{2}),$$

für die untere Grenze $a - \frac{1}{2}\omega$:

$${}^{II}f(a) = +\tfrac{1}{2}\,{}^{I}f(a-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{24}f(a-\tfrac{1}{2}) - \tfrac{17}{1920}f''(a-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{367}{193536}f^{(4)}(a-\tfrac{1}{2})\ldots$$
$${}^{II}f(a-1) = -\tfrac{1}{2}\,{}^{I}f(a-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{24}f(a-\tfrac{1}{2}) - \tfrac{17}{1920}f''(a-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{367}{193536}f^{(4)}(a-\tfrac{1}{2})\ldots \qquad (\text{VII}: a-\tfrac{1}{2})$$

und für die untere Grenze $a$:

$${}^{II}f(a) = -\tfrac{1}{12}f(a) + \tfrac{1}{240}f''(a) - \tfrac{31}{60480}f^{(4)}(a)\ \ldots \qquad (\text{VII}: a)$$

und dann werden die Integrale:

$$\frac{1}{\omega^2}\int\int_{x_0}^{a+(i-\frac{1}{2})\omega} f(x)dx = {}^{II}f(a+i-\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{24}f(a+i-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{17}{1920}f''(a+i-\tfrac{1}{2}) -$$
$$- \tfrac{367}{193536}f^{(4)}(a+i-\tfrac{1}{2}) + \ldots \qquad (\text{VIII}: i-\tfrac{1}{2})$$

$$\frac{1}{\omega^2}\int\int_{x_0}^{a+i\omega} f(x)dx = {}^{II}f(a+i) + \tfrac{1}{12}f(a+i) - \tfrac{1}{240}f''(a+i) + \tfrac{31}{60480}f^{(4)}(a+i) + \ldots \quad (\text{VIII}: i)$$

Auch hier dienen die Formeln VII zur Bestimmung der Anfangsconstanten der zweiten summirten Reihe unabhängig von der oberen Grenze und nur abhängig von der unteren Grenze, wenn die zum Integrale hinzuzufügende Constante gleich Null werden soll. (Vergl. pag. 625, doch ist die Ableitung hier etwas weitläufiger).

Um auch für beliebige obere Grenzen das Integral zu erhalten, hat man aus (21) für das Intervall $a + i - \frac{1}{2}$, wobei die Integrationsgrenzen links $a + (i-\frac{1}{2})\omega$ und $a + (i - \frac{1}{2} + n)\omega$, also rechts $n = 0$ und $n$ sind:

$$\frac{1}{\omega}\int_{a+(i-\frac{1}{2})\omega}^{a+(i-\frac{1}{2}+n)\omega} f(x)dx = {}^{I}f(a+i-\tfrac{1}{2})\int_0^n dn + f'(a+i-\tfrac{1}{2})\int_0^n P_1'(n)dn +$$
$$+ f'''(a+i-\tfrac{1}{2})\int_0^n P_3'(n)dn + \ldots \qquad (24)$$
$$+ f(a+i-\tfrac{1}{2})\int_0^n n\,dn + f''(a+i-\tfrac{1}{2})\int_0^n nP_2'(n)\,dn + \ldots$$

und ebenso aus (20) in dem Intervalle $a + i$, wobei die Integrationsgrenzen links $a + i\omega$ und $a + (i + n)\omega$ und rechts wieder $n = 0$ und $n$ sind:

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{a+i\omega}^{a+(i+n)\omega} f(x)dx = {}^{\mathrm{I}}f(a+i)\int\limits_0^n dn + f'(a+i)\int\limits_0^n Q_1'(n)dn + f'''(a+i)\int\limits_0^n Q_3'(n)dn + \dots$$
$$+ f(a+i)\int\limits_0^n n\,dn + f''(a+i)\int\limits_0^n n\,Q_2'(n)dn + \dots \qquad (25)$$

Addirt man die Formel (24) zur Formel (VIII: $i - \frac{1}{2}$) und ebenso (25) zu (VIII: $i$) und berücksichtigt, dass die Integrale $\int\limits_0^n P'_{2x+1}(n)dn$, $\int\limits_0^n Q'_{2x+1}(n)dn$ den Faktor $n$ erhalten, so folgt:

$$\frac{1}{\omega^2}\int\int\limits_{x_0}^{a+(i-\frac{1}{2}+n)\omega} f(x)dx = {}^{\mathrm{II}}f(a+i-\tfrac{1}{2}) + P_0^2(n)f(a+i-\tfrac{1}{2}) + P_2^2(n)f''(a+i-\tfrac{1}{2}) +$$
$$+ P_4^2(n)f^{(4)}(a+i-\tfrac{1}{2}) + \dots \qquad (\mathrm{IX}: i-\tfrac{1}{2})$$
$$+ n[{}^{\mathrm{I}}f(a+i-\tfrac{1}{2}) + P_1^2(n)f'(a+i-\tfrac{1}{2}) + P_3^2(n)f'''(a+i-\tfrac{1}{2}) + \dots]$$

$$\frac{1}{\omega^2}\int\int\limits_{x_0}^{a+(i+n)\omega} f(x)dx = {}^{\mathrm{II}}f(a+i) + Q_0^2(n)f(a+i) + Q_2^2(n)f''(a+i) +$$
$$+ Q_4^2(n)f^{(4)}(a+i) + \dots \qquad (\mathrm{IX}: i)$$
$$+ n[{}^{\mathrm{I}}f(a+i) + Q_1^2(n)f'(a+i) + Q_3^2(n)f'''(a+i) + \dots],$$

wobei

$$P_0^2(n) = P_0^2 + \int\limits_0^n n\,dn \qquad\qquad Q_0^2(n) = Q_0^2 + \int\limits_0^n n\,dn$$
$$P_2^2(n) = P_2^2 + \int\limits_0^n n\,P_2'(n)dn \qquad\qquad Q_2^2(n) = Q_2^2 + \int\limits_0^n n\,Q_2'(n)dn$$
$$P_4^2(n) = P_4^2 + \int\limits_0^n n\,P_4'(n)dn \qquad\qquad Q_4^2(n) = Q_4^2 + \int\limits_0^n n\,Q_4'(n)dn$$
$$\dots\dots \qquad\qquad \dots\dots$$
$$n\,P_1^2(n) = \int\limits_0^n P_1'(n)dn \qquad\qquad n\,Q_1^2(n) = \int\limits_0^n Q_1'(n)dn$$
$$n\,P_3^2(n) = \int\limits_0^n P_3'(n)dn \qquad\qquad n\,Q_3^2(n) = \int\limits_0^n Q_3'(n)dn$$
$$\dots \qquad\qquad \dots$$

ist. Die $P_x^2(n)$, $Q_x^2(n)$ sind Functionen von $n^2$, deren Berechnung keine Schwierigkeiten hat; beispielsweise ist $Q_0^2(n) = Q_0^2 + \frac{1}{2}n^2$; $Q_1^2(n) = Q_1^1 + \frac{1}{6}n^2$; $Q_2^2(n) = Q_2^2 + \frac{1}{24}n^4$; ... $P_0^2(n) = P_0^2 + \frac{1}{2}n^2$ u. s. w. Für die praktische Anwendung wird es wieder am bequemsten Tafeln zu geben, bei denen man sich auf die Werthe von $n$ zwischen $\pm\frac{1}{2}$ beschränken kann; im Folgenden sind auch hierfür auszugsweise die v. OPPOLZER'schen Tafeln (l. c., pag. 565 bis 586) mitgetheilt.

| ±n | log $N_3'(n)$ | | log $N_5'(n)$ | | log $N_7'(n)$ | | log $N_4'(n)$ | | log $N_6'(n)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0·00 | 9n22185 | 13 | 8·5229 | 2 | 7n8539 | 2 | 8n9208 | 1 | 8·0458 | 2 |
| 0·01 | 9n22172 | 39 | 8·5227 | 5 | 7n8537 | 5 | 8n9207 | 2 | 8·0456 | 3 |
| 0·02 | 9n22133 | 66 | 8·5222 | 8 | 7n8532 | 9 | 8n9205 | 5 | 8·0453 | 5 |
| 0·03 | 9n22067 | 91 | 8·5214 | 11 | 7n8523 | 13 | 8n9200 | 6 | 8·0448 | 8 |
| 0·04 | 9n21976 | 118 | 8·5203 | 15 | 7n8510 | 16 | 8n9194 | 8 | 8·0440 | 10 |
| 0·05 | 9n21858 | 145 | 8·5188 | 18 | 7n8494 | 19 | 8n9186 | 9 | 8·0430 | 12 |
| 0·06 | 9n21713 | 171 | 8·5170 | 22 | 7n8475 | 24 | 8n9177 | 12 | 8·0418 | 14 |
| 0·07 | 9n21542 | 199 | 8·5148 | 24 | 7n8451 | 27 | 8n9165 | 13 | 8·0404 | 16 |
| 0·08 | 9n21343 | 227 | 8·5124 | 29 | 7n8424 | 33 | 8n9152 | 15 | 8·0388 | 19 |
| 0·09 | 9n21116 | 254 | 8·5095 | 32 | 7n8393 | 35 | 8n9137 | 17 | 8·0369 | 21 |
| 0·10 | 9n20862 | 283 | 8·5063 | 35 | 7n8358 | 38 | 8n9120 | 18 | 8·0348 | 23 |
| 0·11 | 9n20579 | 312 | 8·5028 | 39 | 7n8320 | 43 | 8n9102 | 21 | 8·0325 | 26 |
| 0·12 | 9n20267 | 342 | 8·4989 | 43 | 7n8277 | 46 | 8n9081 | 22 | 8·0299 | 28 |
| 0·13 | 9n19925 | 372 | 8·4916 | 47 | 7n8231 | 51 | 8n9059 | 24 | 8·0271 | 30 |
| 0·14 | 9n19553 | 403 | 8·4899 | 50 | 7n8180 | 55 | 8n9035 | 27 | 8·0241 | 33 |
| 0·15 | 9n19150 | 436 | 8·4849 | 55 | 7n8125 | 60 | 8n9008 | 28 | 8·0208 | 35 |
| 0·16 | 9n18714 | 468 | 8·4794 | 58 | 7n8065 | 64 | 8n8980 | 30 | 8·0173 | 38 |
| 0·17 | 9n18246 | 502 | 8·4736 | 63 | 7n8001 | 68 | 8n8950 | 33 | 8·0135 | 41 |
| 0·18 | 9n17744 | 537 | 8·4673 | 68 | 7n7933 | 74 | 8n8917 | 34 | 8·0094 | 43 |
| 0·19 | 9n17207 | 574 | 8·4605 | 72 | 7n7859 | 79 | 8n8883 | 37 | 8·0051 | 45 |
| 0·20 | 9n16633 | 611 | 8·4533 | 77 | 7n7780 | 84 | 8n8846 | 39 | 8·0006 | 49 |
| 0·21 | 9n16022 | 651 | 8·4456 | 82 | 7n7696 | 89 | 8n8807 | 41 | 7·9957 | 51 |
| 0·22 | 9n15371 | 691 | 8·4374 | 87 | 7n7607 | 95 | 8n8766 | 43 | 7·9906 | 54 |
| 0·23 | 9n14680 | 734 | 8·4287 | 92 | 7n7512 | 102 | 8n8723 | 46 | 7·9852 | 57 |
| 0·24 | 9n13946 | 779 | 8·4195 | 98 | 7n7410 | 107 | 8n8677 | 49 | 7·9795 | 60 |
| 0·25 | 9n13167 | | 8·4097 | | 7n7303 | | 8n8628 | | 7·9735 | |

| ±n | log $M_3'(n)$ | | log $M_5'(n)$ | | log $M_7'(n)$ | | log $M_4'(n)$ | | log $M_6'(n)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0·00 | 8n61978 | 51 | 7·6709 | 5 | 6n844 | 1 | 9n81876 | 4 | 8·6529 | 1 |
| 0·01 | 8n61927 | 157 | 7·6704 | 18 | 6n843 | 2 | 9n81872 | 10 | 8·6528 | 1 |
| 0·02 | 8n61770 | 263 | 7·6686 | 29 | 6n841 | 3 | 9n81862 | 17 | 8·6527 | 2 |
| 0·03 | 8n61507 | 370 | 7·6657 | 41 | 6n838 | 4 | 9n81845 | 25 | 8·6525 | 4 |
| 0·04 | 8n61137 | 481 | 7·6616 | 54 | 6n834 | 6 | 9n81820 | 31 | 8·6521 | 4 |
| 0·05 | 8n60656 | 595 | 7·6562 | 66 | 6n828 | 7 | 9n81789 | 38 | 8·6517 | 5 |
| 0·06 | 8n60061 | 714 | 7·6496 | 79 | 6n821 | 8 | 9n81751 | 46 | 8·6512 | 6 |
| 0·07 | 8n59347 | 839 | 7·6417 | 93 | 6n813 | 9 | 9n81705 | 52 | 8·6506 | 7 |
| 0·08 | 8n58508 | 970 | 7·6324 | 108 | 6n804 | 12 | 9n81653 | 60 | 8·6499 | 8 |
| 0·09 | 8n57538 | 1111 | 7·6216 | 124 | 6n792 | 12 | 9n81593 | 66 | 8·6491 | 9 |
| 0·10 | 8n56427 | 1262 | 7·6092 | 140 | 6n780 | 15 | 9n81527 | 74 | 8·6482 | 10 |
| 0·11 | 8n55165 | 1425 | 7·5952 | 159 | 6n765 | 16 | 9n81453 | 80 | 8·6472 | 11 |
| 0·12 | 8n53740 | 1604 | 7·5793 | 178 | 6n749 | 19 | 9n81373 | 88 | 8·6461 | 12 |
| 0·13 | 8n52136 | 1802 | 7·5615 | 201 | 6n730 | 21 | 9n81285 | 96 | 8·6449 | 13 |
| 0·14 | 8n50334 | 2023 | 7·5414 | 226 | 6n709 | 23 | 9n81189 | 102 | 8·6436 | 14 |
| 0·15 | 8n48311 | 2271 | 7·5188 | 254 | 6n686 | 27 | 9n81087 | 110 | 8·6422 | 15 |
| 0·16 | 8n46040 | 2557 | 7·4934 | 286 | 6n659 | 29 | 9n80977 | 117 | 8·6407 | 15 |
| 0·17 | 8n43483 | 2886 | 7·4648 | 324 | 6n630 | 34 | 9n80860 | 125 | 8·6392 | 17 |
| 0·18 | 8n40597 | 3275 | 7·4324 | 370 | 6n596 | 39 | 9n80735 | 132 | 8·6375 | 18 |
| 0·19 | 8n37322 | 3743 | 7·3954 | 424 | 6n557 | 44 | 9n80603 | 140 | 8·6357 | 19 |
| 0·20 | 8n33579 | 4317 | 7·3530 | 493 | 6n513 | 52 | 9n80463 | 147 | 8·6338 | 20 |
| 0·21 | 8n29262 | 5041 | 7·3037 | 582 | 6n461 | 61 | 9n80316 | 155 | 8·6318 | 21 |
| 0·22 | 8n24221 | 5989 | 7·2455 | 700 | 6n400 | 74 | 9n80161 | 163 | 8·6297 | 22 |
| 0·23 | 8n18232 | 7285 | 7·1755 | 871 | 6n326 | 93 | 9n79998 | 171 | 8·6275 | 23 |
| 0·24 | 8n10947 | 9174 | 7·0884 | 1134 | 6n233 | 123 | 9n79827 | 179 | 8·6252 | 24 |
| 0·25 | 8n01773 | | 6·9750 | | 6n110 | | 9n79648 | | 8·6228 | |

| ± n | log $N_4''(n)$ | | log $N_5''(n)$ | | log $N_6''(n)$ | | log $N_7''(n)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0·00 | $8_n92082$ | 26 | 8·0458 | 4 | $9_n89794$ | 3 | 8·7659 | 0 |
| 0·01 | $8_n92056$ | 79 | 8·0454 | 9 | $9_n89791$ | 9 | 8·7659 | 1 |
| 0·02 | $8_n91977$ | 130 | 8·0445 | 17 | $9_n89782$ | 14 | 8·7658 | 3 |
| 0·03 | $8_n91847$ | 184 | 8·0428 | 23 | $9_n89768$ | 20 | 8·7655 | 2 |
| 0·04 | $8_n91663$ | 238 | 8·0405 | 30 | $9_n89748$ | 26 | 8·7653 | 4 |
| 0·05 | $8_n91425$ | 292 | 8·0375 | 36 | $9_n89722$ | 32 | 8·7649 | 5 |
| 0·06 | $8_n91133$ | 347 | 8·0339 | 44 | $9_n89690$ | 38 | 8·7644 | 5 |
| 0·07 | $8_n90786$ | 405 | 8·0295 | 50 | $9_n89652$ | 44 | 8·7639 | 6 |
| 0·08 | $8_n90381$ | 463 | 8·0245 | 58 | $9_n89608$ | 49 | 8·7633 | 7 |
| 0·09 | $8_n89918$ | 523 | 8·0187 | 66 | $9_n89559$ | 56 | 8·7626 | 8 |
| 0·10 | $8_n89395$ | 586 | 8·0121 | 74 | $9_n89503$ | 61 | 8·7618 | 9 |
| 0·11 | $8_n88809$ | 652 | 8·0047 | 82 | $9_n89442$ | 67 | 8·7609 | 10 |
| 0·12 | $8_n88157$ | 719 | 7·9965 | 91 | $9_n89375$ | 73 | 8·7599 | 10 |
| 0·13 | $8_n87438$ | 790 | 7·9874 | 100 | $9_n89302$ | 79 | 8·7589 | 11 |
| 0·14 | $8_n86648$ | 865 | 7·9774 | 109 | $9_n89223$ | 85 | 8·7578 | 13 |
| 0·15 | $8_n85783$ | 944 | 7·9665 | 120 | $9_n89138$ | 92 | 8·7565 | 13 |
| 0·16 | $8_n84839$ | 1028 | 7·9545 | 131 | $9_n89046$ | 97 | 8·7552 | 14 |
| 0·17 | $8_n83811$ | 1117 | 7·9414 | 143 | $9_n88949$ | 103 | 8·7538 | 14 |
| 0·18 | $8_n82694$ | 1214 | 7·9271 | 156 | $9_n88846$ | 110 | 8·7524 | 16 |
| 0·19 | $8_n81480$ | 1317 | 7·9115 | 169 | $9_n88736$ | 116 | 8·7508 | 16 |
| 0·20 | $8_n80163$ | 1429 | 7·8946 | 185 | $9_n88620$ | 122 | 8·7492 | 18 |
| 0·21 | $8_n78734$ | 1551 | 7·8761 | 203 | $9_n88498$ | 128 | 8·7474 | 18 |
| 0·22 | $8_n77183$ | 1685 | 7·8558 | 221 | $9_n88370$ | 135 | 8·7456 | 20 |
| 0·23 | $8_n75498$ | 1832 | 7·8337 | 242 | $9_n88235$ | 142 | 8·7436 | 20 |
| 0·24 | $8_n73666$ | 1996 | 7·8095 | 266 | $9_n88093$ | 147 | 8·7416 | 21 |
| 0·25 | $8_n71670$ | | 7·7829 | | $9_n87946$ | | 8·7395 | |

| ± n | log $M_4''(n)$ | | log $M_5''(n)$ | | log $M_6''(n)$ | | log $M_7''(n)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0·00 | $9_n31876$ | 11 | 8·6529 | 2 | $9_n09691$ | 6 | 8·2849 | 1 |
| 0·01 | $9_n31865$ | 31 | 8·6527 | 4 | $9_n09685$ | 17 | 8·2848 | 2 |
| 0·02 | $9_n31834$ | 52 | 8·6523 | 7 | $9_n09668$ | 29 | 8·2846 | 4 |
| 0·03 | $9_n31782$ | 73 | 8·6516 | 10 | $9_n09639$ | 41 | 8·2842 | 6 |
| 0·04 | $9_n31709$ | 95 | 8·6506 | 13 | $9_n09598$ | 52 | 8·2836 | 7 |
| 0·05 | $9_n31614$ | 115 | 8·6493 | 15 | $9_n09546$ | 64 | 8·2829 | 8 |
| 0·06 | $9_n31499$ | 137 | 8·6478 | 19 | $9_n09482$ | 76 | 8·2821 | 10 |
| 0·07 | $9_n31362$ | 158 | 8·6459 | 21 | $9_n09406$ | 87 | 8·2811 | 12 |
| 0·08 | $9_n31204$ | 181 | 8·6438 | 25 | $9_n09319$ | 100 | 8·2799 | 14 |
| 0·09 | $9_n31023$ | 202 | 8·6413 | 27 | $9_n09219$ | 111 | 8·2785 | 15 |
| 0·10 | $9_n30821$ | 225 | 8·6386 | 30 | $9_n09108$ | 123 | 8·2770 | 16 |
| 0·11 | $9_n30596$ | 248 | 8·6356 | 34 | $9_n08985$ | 136 | 8·2754 | 19 |
| 0·12 | $9_n30348$ | 270 | 8·6322 | 37 | $9_n08849$ | 148 | 8·2735 | 20 |
| 0·13 | $9_n30078$ | 295 | 8·6285 | 40 | $9_n08701$ | 160 | 8·2715 | 21 |
| 0·14 | $9_n29783$ | 318 | 8·6245 | 43 | $9_n08541$ | 173 | 8·2694 | 24 |
| 0·15 | $9_n29465$ | 343 | 8·6202 | 47 | $9_n08368$ | 185 | 8·2670 | 25 |
| 0·16 | $9_n29122$ | 368 | 8·6155 | 50 | $9_n08183$ | 199 | 8·2645 | 27 |
| 0·17 | $9_n28754$ | 394 | 8·6105 | 54 | $9_n07984$ | 211 | 8·2618 | 28 |
| 0·18 | $9_n28360$ | 420 | 8·6051 | 57 | $9_n07773$ | 224 | 8·2590 | 30 |
| 0·19 | $9_n27940$ | 447 | 8·5994 | 61 | $9_n07549$ | 238 | 8·2560 | 33 |
| 0·20 | $9_n27493$ | 476 | 8·5933 | 65 | $9_n07311$ | 252 | 8·2527 | 34 |
| 0·21 | $9_n27017$ | 504 | 8·5868 | 70 | $9_n07059$ | 265 | 8·2493 | 35 |
| 0·22 | $9_n26513$ | 534 | 8·5798 | 73 | $9_n06794$ | 280 | 8·2458 | 38 |
| 0·23 | $9_n25979$ | 565 | 8·5725 | 78 | $9_n06514$ | 293 | 8·2420 | 40 |
| 0·24 | $9_n25414$ | 596 | 8·5647 | 82 | $9_n06221$ | 309 | 8·2380 | 42 |
| 0·25 | $9_n24818$ | | 8·5565 | | $9_n05912$ | | 8·2338 | |

| ± n | log $Q_1'(n)$ | | log $Q_3'(n)$ | | log $Q_5'(n)$ | | log $Q_7'(n)$ | | log $Q_4'(n)$ | | log $Q_6'(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0·00 | $8_n92082$ | 26 | 8·1841 | 3 | $7_n499$ | 0 | 6·838 | 1 | $8_n1427$ | 1 | 7·268 |
| 0·01 | $8_n92056$ | 79 | 8·1838 | 7 | $7_n499$ | 0 | 6·837 | 0 | $8_n1426$ | 0 | 7·268 |
| 0·02 | $8_n91977$ | 130 | 8·1831 | 12 | $7_n499$ | 2 | 6·837 | 1 | $8_n1426$ | 2 | 7·267 |
| 0·03 | $8_n91847$ | 184 | 8·1819 | 16 | $7_n497$ | 1 | 6·836 | 2 | $8_n1424$ | 2 | 7·267 |
| 0·04 | $8_n91663$ | 238 | 8·1803 | 22 | $7_n496$ | 2 | 6·834 | 2 | $8_n1422$ | 2 | 7·267 |
| 0·05 | $8_n91425$ | 292 | 8·1781 | 26 | $7_n494$ | 3 | 6·832 | 3 | $8_n1420$ | 3 | 7·267 |
| 0·06 | $8_n91133$ | 347 | 8·1755 | 32 | $7_n491$ | 3 | 6·829 | 2 | $8_n1417$ | 3 | 7·266 |
| 0·07 | $8_n90786$ | 405 | 8·1723 | 36 | $7_n488$ | 3 | 6·827 | 4 | $8_n1414$ | 4 | 7·266 |
| 0·08 | $8_n90381$ | 463 | 8·1687 | 42 | $7_n485$ | 4 | 6·823 | 4 | $8_n1410$ | 4 | 7·266 |
| 0·09 | $8_n89918$ | 523 | 8·1645 | 47 | $7_n481$ | 5 | 6·819 | 4 | $8_n1406$ | 5 | 7·265 |
| 0·10 | $8_n89395$ | 586 | 8·1598 | 52 | $7_n476$ | 5 | 6·815 | 5 | $8_n1401$ | 6 | 7·264 |
| 0·11 | $8_n88809$ | 652 | 8·1546 | 58 | $7_n471$ | 6 | 6·810 | 6 | $8_n1395$ | 6 | 7·264 |
| 0·12 | $8_n88157$ | 719 | 8·1488 | 64 | $7_n465$ | 6 | 6·804 | 6 | $8_n1389$ | 7 | 7·263 |
| 0·13 | $8_n87438$ | 790 | 8·1424 | 69 | $7_n459$ | 6 | 6·798 | 6 | $8_n1382$ | 7 | 7·262 |
| 0·14 | $8_n86648$ | 865 | 8·1355 | 76 | $7_n453$ | 8 | 6·792 | 7 | $8_n1375$ | 7 | 7·261 |
| 0·15 | $8_n85783$ | 944 | 8·1279 | 83 | $7_n445$ | 8 | 6·785 | 8 | $8_n1368$ | 9 | 7·260 |
| 0·16 | $8_n84839$ | 1028 | 8·1196 | 89 | $7_n437$ | 8 | 6·777 | 8 | $8_n1359$ | 8 | 7·259 |
| 0·17 | $8_n83811$ | 1117 | 8·1107 | 96 | $7_n429$ | 9 | 6·769 | 9 | $8_n1351$ | 10 | 7·258 |
| 0·18 | $8_n82694$ | 1214 | 8·1011 | 104 | $7_n420$ | 10 | 6·760 | 10 | $8_n1341$ | 9 | 7·257 |
| 0·19 | $8_n81480$ | 1317 | 8·0907 | 111 | $7_n410$ | 11 | 6·750 | 10 | $8_n1332$ | 11 | 7·256 |
| 0·20 | $8_n80163$ | 1429 | 8·0796 | 120 | $7_n399$ | 11 | 6·740 | 11 | $8_n1321$ | 11 | 7·254 |
| 0·21 | $8_n78734$ | 1551 | 8·0676 | 129 | $7_n388$ | 12 | 6·729 | 12 | $8_n1310$ | 11 | 7·253 |
| 0·22 | $8_n77183$ | 1685 | 8·0547 | 139 | $7_n376$ | 13 | 6·717 | 13 | $8_n1299$ | 12 | 7·252 |
| 0·23 | $8_n75498$ | 1832 | 8·0408 | 148 | $7_n363$ | 14 | 6·704 | 13 | $8_n1287$ | 13 | 7·250 |
| 0·24 | $8_n73666$ | 1996 | 8·0260 | 160 | $7_n349$ | 15 | 6·691 | 15 | $8_n1274$ | 13 | 7·249 |
| 0·25 | $8_n71670$ | | 8·0100 | | $7_n334$ | | 6·776 | | $8_n1261$ | | 7·247 |

| ± n | log $P_1'(n)$ | | log $P_3'(n)$ | | log $P_5'(n)$ | | log $P_7'(n)$ | log $P_2'(n)$ | | log $P_4'(n)$ | | log $P_6'(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0·00 | 8·61979 | 52 | $7_n4700$ | 8 | 6·579 | 0 | $5_n778$ | $9_n09691$ | 6 | 8·3699 | 1 | $7_n689$ |
| 0·01 | 8·62031 | 156 | $7_n4708$ | 9 | 6·579 | 1 | $5_n778$ | $9_n09685$ | 17 | 8·3698 | 1 | $7_n689$ |
| 0·02 | 8·62187 | 258 | $7_n4712$ | 16 | 6·580 | 1 | $5_n779$ | $9_n09668$ | 29 | 8·3697 | 4 | $7_n688$ |
| 0·03 | 8·62445 | 360 | $7_n4728$ | 21 | 6·581 | 2 | $5_n780$ | $9_n09639$ | 41 | 8·3693 | 4 | $7_n688$ |
| 0·04 | 8·62805 | 458 | $7_n4749$ | 27 | 6·583 | 3 | $5_n782$ | $9_n09598$ | 52 | 8·3689 | 6 | $7_n688$ |
| 0·05 | 8·63263 | 553 | $7_n4776$ | 32 | 6·586 | 2 | $5_n784$ | $9_n09546$ | 64 | 8·3683 | 7 | $7_n687$ |
| 0·06 | 8·63816 | 644 | $7_n4808$ | 39 | 6·588 | 4 | $5_n787$ | $9_n09482$ | 76 | 8·3676 | 8 | $7_n686$ |
| 0·07 | 8·64460 | 732 | $7_n4847$ | 43 | 6·592 | 4 | $5_n790$ | $9_n09406$ | 87 | 8·3668 | 10 | $7_n685$ |
| 0·08 | 8·65192 | 815 | $7_n4890$ | 48 | 6·596 | 4 | $5_n794$ | $9_n09319$ | 100 | 8·3658 | 11 | $7_n684$ |
| 0·09 | 8·66007 | 894 | $7_n4938$ | 53 | 6·600 | 4 | $5_n798$ | $9_n09219$ | 111 | 8·3647 | 13 | $7_n683$ |
| 0·10 | 8·66901 | 966 | $7_n4991$ | 57 | 6·604 | 5 | $5_n802$ | $9_n09108$ | 123 | 8·3634 | 13 | $7_n682$ |
| 0·11 | 8·67867 | 1034 | $7_n5048$ | 61 | 6·609 | 6 | $5_n807$ | $9_n08985$ | 136 | 8·3621 | 15 | $7_n681$ |
| 0·12 | 8·68901 | 1097 | $7_n5109$ | 65 | 6·615 | 6 | $5_n812$ | $9_n08849$ | 148 | 8·3606 | 17 | $7_n679$ |
| 0·13 | 8·69998 | 1155 | $7_n5174$ | 68 | 6·621 | 6 | $5_n817$ | $9_n08701$ | 160 | 8·3589 | 17 | $7_n677$ |
| 0·14 | 8·71153 | 1206 | $7_n5242$ | 72 | 6·627 | 6 | $5_n823$ | $9_n08541$ | 173 | 8·3572 | 19 | $7_n676$ |
| 0·15 | 8·72359 | 1254 | $7_n5314$ | 74 | 6·633 | 6 | $5_n829$ | $9_n08368$ | 185 | 8·3553 | 21 | $7_n674$ |
| 0·16 | 8·73613 | 1296 | $7_n5388$ | 76 | 6·639 | 7 | $5_n835$ | $9_n08183$ | 199 | 8·3532 | 22 | $7_n671$ |
| 0·17 | 8·74909 | 1334 | $7_n5464$ | 78 | 6·646 | 7 | $5_n841$ | $9_n07984$ | 211 | 8·3510 | 23 | $7_n669$ |
| 0·18 | 8·76243 | 1367 | $7_n5542$ | 80 | 6·653 | 7 | $5_n848$ | $9_n07773$ | 224 | 8·3487 | 24 | $7_n667$ |
| 0·19 | 8·77610 | 1395 | $7_n5622$ | 81 | 6·660 | 7 | $5_n855$ | $9_n07549$ | 238 | 8·3463 | 27 | $7_n664$ |
| 0·20 | 8·79005 | 1420 | $7_n5703$ | 82 | 6·667 | 7 | $5_n861$ | $9_n07311$ | 252 | 8·3436 | 27 | $7_n662$ |
| 0·21 | 8·80425 | 1442 | $7_n5785$ | 83 | 6·674 | 8 | $5_n868$ | $9_n07059$ | 265 | 8·3409 | 29 | $7_n659$ |
| 0·22 | 8·81867 | 1458 | $7_n5868$ | 84 | 6·682 | 7 | $5_n875$ | $9_n06794$ | 280 | 8·3380 | 31 | $7_n656$ |
| 0·23 | 8·83325 | 1473 | $7_n5952$ | 83 | 6·689 | 8 | $5_n882$ | $9_n06514$ | 293 | 8·3349 | 32 | $7_n653$ |
| 0·24 | 8·84798 | 1485 | $7_n6035$ | 83 | 6·697 | 7 | $5_n889$ | $9_n06221$ | 309 | 8·3317 | 33 | $7_n649$ |
| 0·25 | 8·86283 | | $7_n6118$ | | 6·704 | | $5_n896$ | $9_n05912$ | | 8·3284 | | $7_n646$ |

| ±n | log $Q_0^3(n)$ | | log $Q_2^3(n)$ | | log $Q_4^3(n)$ | log $Q_6^3(n)$ | log $Q_1^3(n)$ | | log $Q_3^3(n)$ | | log $Q_5^3(n)$ | | log $Q_7^3(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0·00 | 8·92082 | 26 | 7n6198 | 0 | 6·710 | 5n901 | 8n92082 | 9 | 8·1841 | 1 | 7n4994 | 1 | 6·838 |
| 0·01 | 8·92108 | 78 | 7n6198 | 0 | 6·710 | 5n901 | 8n92073 | 26 | 8·1840 | 3 | 7n4993 | 2 | 6·838 |
| 0·02 | 8·92186 | 130 | 7n6198 | 0 | 6·710 | 5n901 | 8n92047 | 43 | 8·1837 | 4 | 7n4991 | 4 | 6·837 |
| 0·03 | 8·92316 | 181 | 7n6198 | 0 | 6·710 | 5n901 | 8n92004 | 61 | 8·1833 | 5 | 7n4987 | 5 | 6·837 |
| 0·04 | 8·92497 | 231 | 7n6198 | 0 | 6·710 | 5n901 | 8n91943 | 79 | 8·1828 | 7 | 7n4982 | 7 | 6·836 |
| 0·05 | 8·92728 | 282 | 7n6198 | 1 | 6·710 | 5n901 | 8n91864 | 96 | 8·1821 | 9 | 7n4975 | 8 | 6·836 |
| 0·06 | 8·93010 | 330 | 7n6197 | 0 | 6·710 | 5n901 | 8n91768 | 114 | 8·1812 | 10 | 7n4967 | 10 | 6·835 |
| 0·07 | 8·93340 | 378 | 7n6197 | 1 | 6·710 | 5n901 | 8n91654 | 132 | 8·1802 | 12 | 7n4957 | 12 | 6·834 |
| 0·08 | 8·93718 | 425 | 7n6196 | 1 | 6·710 | 5n901 | 8n91522 | 149 | 8·1790 | 14 | 7n4945 | 13 | 6·833 |
| 0·09 | 8·94143 | 469 | 7n6195 | 1 | 6·710 | 5n901 | 8n91373 | 169 | 8·1776 | 15 | 7n4932 | 15 | 6·832 |
| 0·10 | 8·94612 | 514 | 7n6194 | 2 | 6·709 | 5n901 | 8n91204 | 186 | 8·1761 | 17 | 7n4917 | 16 | 6·830 |
| 0·11 | 8·95126 | 555 | 7n6192 | 3 | 6·709 | 5n901 | 8n91018 | 205 | 8·1744 | 18 | 7n4901 | 18 | 6·829 |
| 0·12 | 8·95681 | 595 | 7n6189 | 4 | 6·709 | 5n901 | 8n90813 | 224 | 8·1726 | 20 | 7n4883 | 19 | 6·827 |
| 0·13 | 8·96276 | 634 | 7n6185 | 4 | 6·709 | 5n900 | 8n90589 | 244 | 8·1706 | 22 | 7n4864 | 21 | 6·825 |
| 0·14 | 8·96910 | 671 | 7n6181 | 5 | 6·709 | 5n900 | 8n90345 | 263 | 8·1684 | 24 | 7n4843 | 23 | 6·823 |
| 0·15 | 8·97581 | 706 | 7n6176 | 7 | 6·708 | 5n900 | 8n90082 | 283 | 8·1660 | 25 | 7n4820 | 24 | 6·821 |
| 0·16 | 8·98287 | 739 | 7n6169 | 8 | 6·708 | 5n899 | 8n89799 | 303 | 8·1635 | 27 | 7n4796 | 26 | 6·818 |
| 0·17 | 8·99026 | 771 | 7n6161 | 9 | 6·707 | 5n899 | 8n89496 | 324 | 8·1608 | 28 | 7n4770 | 27 | 6·816 |
| 0·18 | 8·99797 | 800 | 7n6152 | 11 | 6·707 | 5n899 | 8n89172 | 345 | 8·1580 | 31 | 7n4743 | 30 | 6·813 |
| 0·19 | 9·00597 | 827 | 7n6141 | 13 | 6·706 | 5n898 | 8n88827 | 366 | 8·1549 | 32 | 7n4713 | 31 | 6·810 |
| 0·20 | 9·01424 | 853 | 7n6128 | 15 | 6·705 | 5n897 | 8n88461 | 389 | 8·1517 | 34 | 7n4682 | 32 | 6·807 |
| 0·21 | 9·02277 | 877 | 7n6113 | 18 | 6·704 | 5n896 | 8n88072 | 412 | 8·1483 | 36 | 7n4650 | 35 | 6·804 |
| 0·22 | 9·03154 | 900 | 7n6095 | 20 | 6·703 | 5n895 | 8n87660 | 435 | 8·1447 | 38 | 7n4615 | 36 | 6·800 |
| 0·23 | 9·04054 | 919 | 7n6075 | 24 | 6·702 | 5n894 | 8n87225 | 459 | 8·1409 | 40 | 7n4579 | 38 | 6·797 |
| 0·24 | 9·04973 | 939 | 7n6051 | 26 | 6·700 | 5n893 | 8n86766 | 483 | 8·1369 | 42 | 7n4541 | 40 | 6·793 |
| 0·25 | 9·05912 | | 7n6025 | | 6·698 | 5n891 | 8n86283 | | 8·1327 | | 7n4501 | | 6·789 |

| ±n | log $P_0^3(n)$ | | log $P_2^3(n)$ | | log $P_4^3(n)$ | | log $P_6^3(n)$ | | log $P_1^3(n)$ | | log $P_3^3(n)$ | | log $P_5^3(n)$ | log $P_7^3(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0·00 | 8n61979 | 52 | 7·9471 | 3 | 7n2779 | 3 | 6·623 | 0 | 8·61979 | 17 | 7n4700 | 1 | 6·579 | 5n778 |
| 0·01 | 8n61927 | 157 | 7·9468 | 9 | 7n2776 | 8 | 6·623 | 1 | 8·61996 | 52 | 7n4701 | 3 | 6·579 | 5n778 |
| 0·02 | 8n61770 | 263 | 7·9459 | 15 | 7n2768 | 13 | 6·622 | 1 | 8·62048 | 87 | 7n4704 | 5 | 6·579 | 5n778 |
| 0·03 | 8n61507 | 370 | 7·9444 | 22 | 7n2755 | 19 | 6·621 | 2 | 8·62135 | 121 | 7n4709 | 8 | 6·580 | 5n779 |
| 0·04 | 8n61137 | 481 | 7·9422 | 28 | 7n2736 | 24 | 6·619 | 2 | 8·62256 | 155 | 7n4717 | 9 | 6·580 | 5n779 |
| 0·05 | 8n60656 | 595 | 7·9394 | 34 | 7n2712 | 30 | 6·617 | 3 | 8·62411 | 189 | 7n4726 | 11 | 6·581 | 5n780 |
| 0·06 | 8n60061 | 714 | 7·9360 | 41 | 7n2682 | 36 | 6·614 | 3 | 8·62600 | 222 | 7n4737 | 13 | 6·582 | 5n781 |
| 0·07 | 8n59347 | 839 | 7·9319 | 47 | 7n2646 | 41 | 6·611 | 4 | 8·62822 | 255 | 7n4750 | 15 | 6·583 | 5n782 |
| 0·08 | 8n58508 | 970 | 7·9272 | 55 | 7n2605 | 48 | 6·607 | 5 | 8·63077 | 287 | 7n4765 | 16 | 6·585 | 5n783 |
| 0·09 | 8n57538 | 1111 | 7·9217 | 61 | 7n2557 | 53 | 6·602 | 5 | 8·63364 | 318 | 7n4781 | 19 | 6·586 | 5n785 |
| 0·10 | 8n56427 | 1262 | 7·9156 | 69 | 7n2504 | 59 | 6·597 | 5 | 8·63682 | 350 | 7n4800 | 20 | 6·588 | 5n786 |
| 0·11 | 8n55165 | 1425 | 7·9087 | 76 | 7n2445 | 66 | 6·592 | 6 | 8·64032 | 379 | 7n4820 | 23 | 6·590 | 5n788 |
| 0·12 | 8n53740 | 1604 | 7·9011 | 85 | 7n2379 | 73 | 6·586 | 7 | 8·64411 | 409 | 7n4843 | 23 | 6·591 | 5n790 |
| 0·13 | 8n52136 | 1802 | 7·8926 | 92 | 7n2306 | 79 | 6·579 | 8 | 8·64820 | 437 | 7n4866 | 26 | 6·593 | 5n792 |
| 0·14 | 8n50334 | 2023 | 7·8834 | 101 | 7n2227 | 87 | 6·571 | 8 | 8·65257 | 464 | 7n4892 | 26 | 6·596 | 5n794 |
| 0·15 | 8n48311 | 2271 | 7·8733 | 111 | 7n2140 | 94 | 6·563 | 8 | 8·65721 | 492 | 7n4918 | 29 | 6·598 | 5n796 |
| 0·16 | 8n46040 | 2557 | 7·8622 | 120 | 7n2046 | 101 | 6·555 | 10 | 8·66213 | 517 | 7n4947 | 29 | 6·601 | 5n798 |
| 0·17 | 8n43483 | 2886 | 7·8502 | 131 | 7n1945 | 110 | 6·545 | 10 | 8·66730 | 541 | 7n4976 | 31 | 6·603 | 5n801 |
| 0·18 | 8n40597 | 3275 | 7·8371 | 141 | 7n1835 | 119 | 6·535 | 11 | 8·67271 | 566 | 7n5007 | 33 | 6·606 | 5n803 |
| 0·19 | 8n37322 | 3743 | 7·8230 | 154 | 7n1716 | 128 | 6·524 | 12 | 8·67837 | 588 | 7n5040 | 33 | 6·609 | 5n806 |
| 0·20 | 8n33579 | 4317 | 7·8076 | 167 | 7n1588 | 138 | 6·512 | 13 | 8·68425 | 609 | 7n5073 | 34 | 6·612 | 5n809 |
| 0·21 | 8n29262 | 5041 | 7·7909 | 181 | 7n1450 | 149 | 6·499 | 13 | 8·69034 | 631 | 7n5107 | 36 | 6·615 | 5n812 |
| 0·22 | 8n24221 | 5989 | 7·7728 | 196 | 7n1301 | 160 | 6·486 | 15 | 8·69665 | 650 | 7n5143 | 36 | 6·618 | 5n814 |
| 0·23 | 8n18232 | 7285 | 7·7532 | 214 | 7n1141 | 173 | 6·471 | 16 | 8·70315 | 668 | 7n5179 | 37 | 6·621 | 5n817 |
| 0·24 | 8n10947 | 9174 | 7·7318 | 233 | 7n0968 | 185 | 6·455 | 16 | 8·70983 | 687 | 7n5216 | 38 | 6·624 | 5n821 |
| 0·25 | 8n01773 | | 7·7085 | | 7n0783 | | 6·439 | | 8·71670 | | 7n5254 | | 6·627 | 5n824 |

**Beispiele.** Für die Berechnung der Störungen ist die untere Grenze der Integrale stets die Osculationsepoche. Wird diese zwischen zwei Störungsdaten gelegt (in dem hier gewählten Beispiele für den Kometen 1889 V für 1889 October 8·0), so sind für die Bestimmung der Constanten der ersten und zweiten summirten Reihen die Formeln (IV: $a-\frac{1}{2}$) und (VII: $a-\frac{1}{2}$) zu verwenden. Für die erste summirte Reihe ist beispielsweise für $\frac{d\Delta\varphi}{dt}$ (bei den Elementenstörungen pag. 365) als Hauptfunction:

$$\begin{array}{ll}
f'(a-\frac{1}{2}) = +5{\cdot}655 & -\frac{1}{24}f'(a-\frac{1}{2}) = -0{\cdot}1528 \\
f'''(a-\frac{1}{2}) = -0{\cdot}298 & +\frac{17}{5760}f'''(a-\frac{1}{2}) = -0{\cdot}0009 \\
f^{(5)}(a-\frac{1}{2}) = +0{\cdot}480 \text{ (extrapolirt)} & -\frac{367}{967680}f^{(5)}(a-\frac{1}{2}) = -0{\cdot}0001 \\
 & \text{demnach } {}^{I}f(a-\frac{1}{2}) = -0{\cdot}1538.
\end{array}$$

Da durch ein Versehen (indem der zweite Ausdruck $-0{\cdot}00009$ angenommen wurde) ${}^{I}f(a-\frac{1}{2}) = -0{\cdot}152$ angesetzt wurde, so wäre zu jedem Integrale die Constante $-0''{\cdot}001$ hinzuzufügen.

Für die Anfangsconstante der zweiten summirten Reihe für die Störungen in den $x$ (rechtwinklige Coordinaten, pag. 341), wird

$$\begin{array}{ll}
{}^{I}f(a-\frac{1}{2}) = -0{\cdot}03 & +\frac{1}{2}\,{}^{I}f(a-\frac{1}{2}) = -0{\cdot}015 \\
f(a-\frac{1}{2}) = -5{\cdot}945 & +\frac{1}{24}f(a-\frac{1}{2}) = -0{\cdot}248 \\
f''(a-\frac{1}{2}) = -0{\cdot}805 & -\frac{17}{1920}f''(a-\frac{1}{2}) = +0{\cdot}007 \\
 & \text{demnach } {}^{II}f(a) = -0{\cdot}256
\end{array}$$

Als Beispiel für die Berechnung der Integrale sollen das erste und zweite Integral von $\frac{d\Delta\mu}{dt}$ und das erste Integral von $\frac{d\Delta L}{dt}$ (Elementenstörungen, pag. 365) für die neue Osculationsepoche 1887 Juni 1·0 bestimmt werden. Da diese auf ein Störungsdatum fällt, so hat man die Formeln (V $i$) und (VIII $i$) anzuwenden. Es ist

$$\begin{array}{lrr}
 & \text{für } \Delta L_1 & \text{für } 40\Delta\mu \\
{}^{I}f(a+i) & +\ 72'\,52''{\cdot}01 & +18''{\cdot}760 \\
-\frac{1}{12}f'(a+i) & -\ 10{\cdot}46 & -\ 1{\cdot}176 \\
+\frac{11}{720}f'''(a+i) & +\ 0{\cdot}16 & +\ 0{\cdot}001 \\
\text{demnach} & \Delta L_1 = +1^\circ\,12'\,41''{\cdot}71 & 40\Delta\mu = +17''{\cdot}585 \\
 & & \Delta\mu = +\ 0''{\cdot}43962
\end{array}$$

Für das zweite Integral von $\Delta\mu$ ist

$$\begin{array}{lr}
{}^{II}f(a+i) & +16'\,46''{\cdot}007 \\
+\frac{1}{12}f(a+i) & = -\ 3{\cdot}847 \\
-\frac{1}{240}f''(a+i) & = +\ 0{\cdot}012 \\
\text{demnach} & \Delta L_2 = +16'\,42''{\cdot}172
\end{array}$$

Bildet man $\Delta L_1 + \Delta L_2 = +1^\circ\,29'\,23''{\cdot}88$, so erhält man die Störung in der mittleren Länge für die neue Osculationsepoche. Als Beispiel für Integrale bei beliebigen oberen Grenzen sollen das erste und zweite Integral von $\frac{d^2 x}{dt^2}$ (Störungen des Kometen 1889 V in Polarcoordinaten, pag. 355) für 1887 Febr. 7·0 und Febr. 18·0 gerechnet werden. Das erste Datum liegt näher einem Störungsdatum selbst, das zweite dem Mittel zweier Störungsdaten; im ersten Falle werden daher die Formeln (VI: $i$) und (IX: $i$), im zweiten die Formeln (VI: $i-\frac{1}{2}$) und (IX: $i-\frac{1}{2}$) zur Anwendung kommen. Es ist:

für Febr. 7·0: $n = +\frac{6}{40} = +0{\cdot}15$; $\log n^3 = 7{\cdot}52827$

| | | |
|---|---|---|
| — | — | $\log Q_4'(n) = 8_n1868$ |
| $\log f(a+i) = 2{\cdot}78692$ | $\log f''(a+i) = 1{\cdot}0805$ | $\log f^{(4)}(a+i) = 1{\cdot}8709$ |
| $\log Q_0^2(n) = 8{\cdot}97581$ | $\log Q_2^2(n) = 7_n6176$ | $\log Q_4^2(n) = 6{\cdot}708$ |
| $\log Q_1'(n) = 8_n85788$ | $\log Q_3'(n) = 8{\cdot}1279$ | $\log Q_5'(n) = 7_n445$ |
| $\log f'(a+i) = 2_n81967$ | $\log f'''(a+i) = 1_n7118$ | $\log f^{(5)}(a+i) = 0_n908$ |
| $\log Q_1^2(n) = 8_n90082$ | $\log Q_3^2(n) = 8{\cdot}1660$ | $\log Q_5^2(n) = 7_n482$ |

| | |
|---|---|
| $\frac{1}{2}f''(a+i) = +15{\cdot}987$ | $^{I}f(a+i) = -2581{\cdot}085$ |
| $Q_4'(n)f^{(4)}(a+i) = -\ 0{\cdot}822$ | $nf(a+i) = +\ 91{\cdot}887$ |
| $\Sigma_1 = +15{\cdot}615$ | $Q_1'(n)f'(a+i) = +\ 15{\cdot}048$ |
| $\log \Sigma_1 = \ 1{\cdot}19854$ | $Q_3'(n)f'''(a+i) = -\ 0{\cdot}691$ |
| | $Q_5'(n)f^{(5)}(a+i) = +\ 0{\cdot}022$ |
| | $n^2\Sigma_1 = +\ 0{\cdot}058$ |
| | $\dfrac{dz}{dt} = -2474{\cdot}77$ |

| | |
|---|---|
| $^{I}f(a+i) = -2581{\cdot}085$ | $^{II}f(a+i) = +11428{\cdot}660$ |
| $Q_1^2(n)f'(a+i) = +\ 16{\cdot}615$ | $Q_0^2(n)f(a+i) = +\ 57{\cdot}907$ |
| $Q_3^2(n)f'''(a+i) = -\ 0{\cdot}754$ | $Q_2^2(n)f''(a+i) = -\ 0{\cdot}896$ |
| $Q_5^2(n)f^{(5)}(a+i) = +\ 0{\cdot}024$ | $Q_4^2(n)f^{(4)}(a+i) = +\ 0{\cdot}012$ |
| $\Sigma_2 = -2565{\cdot}15$ | $n\Sigma_2 = -\ 884{\cdot}772$ |
| | $z = +11096{\cdot}41$ |

für Febr. 18·0 ist $n = -\frac{4}{20} = -0{\cdot}20$

| | | |
|---|---|---|
| — | $\log P_2'(n) = 0_n07311$ | $\log P_4'(n) = 8{\cdot}8486$ |
| $\log f(a+i-\frac{1}{2}) = 2{\cdot}72578$ | $\log f''(a+i-\frac{1}{2}) = 1{\cdot}87952$ | $\log f^{(4)}(a+i-\frac{1}{2}) = 1{\cdot}8008$ |
| $\log P_0^{(2)}(n) = 8_n88570$ | $\log P_2^2(n) = 7{\cdot}8076$ | $\log P_4^{(2)}(n) = 7_n1588$ |
| $\log P_1'(n) = 8{\cdot}70005$ | $\log P_3'(n) = 7_n5708$ | $\log P_5'(n) = 6{\cdot}607$ |
| $\log f'(a+i-\frac{1}{2}) = 2_n20672$ | $\log f'''(a+i-\frac{1}{2}) = 1_n5987$ | $\log f^{(5)}(a+i-\frac{1}{2}) = 0_n845$ |
| $\log P_1^2(n) = 8{\cdot}08425$ | $\log P_3^2(n) = 7_n5078$ | $\log P_5^2(n) = 6{\cdot}612$ |

| | |
|---|---|
| $f(a+i-\frac{1}{2}) = +581{\cdot}770$ | $^{I}f(a+i-\frac{1}{2}) = -2274{\cdot}910$ |
| $P_2'(n)f''(a+i-\frac{1}{2}) = -\ 0{\cdot}897$ | $P_1'(n)f'(a+i-\frac{1}{2}) = -\ 9{\cdot}926$ |
| $P_4'(n)f^{(4)}(a+i-\frac{1}{2}) = +\ 0{\cdot}441$ | $P_3'(n)f'''(a+i-\frac{1}{2}) = +\ 0{\cdot}148$ |
| $\Sigma_1 = +581{\cdot}314$ | $P_5'(n)f^{(5)}(a+i-\frac{1}{2}) = -\ 0{\cdot}008$ |
| | $n\Sigma_1 = -\ 106{\cdot}268$ |
| | $\dfrac{dz}{dt} = -2390{\cdot}95$ |

| | |
|---|---|
| $^{I}f(a+i-\frac{1}{2}) = -2274{\cdot}010$ | $^{II}f(a+i-\frac{1}{2}) = +10286{\cdot}205$ |
| $P_1^2(n)f'(a+i-\frac{1}{2}) = -\ 7{\cdot}780$ | $P_0^2(n)f(a+i-\frac{1}{2}) = -\ 11{\cdot}522$ |
| $P_3^2(n)f'''(a+i-\frac{1}{2}) = +\ 0{\cdot}128$ | $P_2^2(n)f''(a+i-\frac{1}{2}) = +\ 0{\cdot}487$ |
| $P_5^2(n)f^{(5)}(a+i-\frac{1}{2}) = -\ 0{\cdot}008$ | $P_4^2(n)f^{(4)}(a+i-\frac{1}{2}) = -\ 0{\cdot}020$ |
| $\Sigma_2 = -2282{\cdot}565$ | $n\Sigma_2 = +\ 456{\cdot}518$ |
| | $z = +10781{\cdot}65.$ |

II. Bekanntlich lässt sich jede periodische Function $f(x)$ in eine Fourier-sche Reihe

$$f(x) = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1\cos x + A_2\cos 2x + A_3\cos 3x + \ldots \\ + B_1\sin x + B_2\sin 2x + B_3\sin 3x + \qquad (1)$$

entwickeln, deren Coëfficienten durch bestimmte Integrale

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx; \qquad B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx$$

gegeben sind. In vielen Fällen werden einzelne Werthe der Function $f(x)$ gegeben sein, oder es wird leicht sein, sich solche zu verschaffen, so dass sie ausreichen, die Coëfficienten $A_n$, $B_n$ zu ermitteln. In diesem Falle wird daher der analytisch durch bestimmte Integrale gegebene Ausdruck derselben auf numerischem Wege ermittelt, weshalb HANSEN diese Methode ebenfalls als die Methode der Bestimmung der Coëfficienten von Reihen durch mechanische Quadratur bezeichnete.

Auch hier wird man sich auf den Fall beschränken können, dass die Argumente, für welche die Function als gegeben angesehen wird, eine äquidistante Reihe bilden, und zwar derart, dass das Intervall ein aliquoter Theil des Kreisumfanges sei. In diesem Falle aber wird man zur Bestimmung der Integrale nicht nöthig haben, auf die im vorigen Abschnitte gegebenen Methoden zurückzugreifen, indem ein einfacherer Weg zum Ziele führt.

Betrachtet man zunächst die beiden Summen:

$$\begin{aligned}\Gamma_n &= 1 + \alpha\cos Q + \alpha^2\cos 2Q + \ldots + \alpha^{n-1}\cos(n-1)Q \\ \Sigma_n &= \alpha\sin Q + \alpha^2\sin 2Q + \ldots + \alpha^{n-1}\sin(n-1)Q.\end{aligned} \tag{2}$$

Multiplicirt man behufs Bestimmung der Werthe derselben die zweite mit $i = \sqrt{-1}$ und addirt sie zur ersten; so folgt:

$$\Gamma_n + i\Sigma_n = 1 + \alpha e^{iQ} + \alpha^2 e^{2iQ} + \ldots + \alpha^{n-1}e^{(n-1)iQ} = \frac{1-\alpha^n e^{niQ}}{1-\alpha e^{iQ}}$$

$$= \frac{1-\alpha^n\cos nQ - i\alpha^n\sin nQ}{1-\alpha\cos Q - i\alpha\sin Q}.$$

Durch Trennung des reellen vom imaginären folgt hieraus[1]):

$$\Gamma_n = \frac{1-\alpha\cos Q - \alpha^n\cos nQ + \alpha^{n+1}\cos(n-1)Q}{1-2\alpha\cos Q + \alpha^2}$$

$$\Sigma_n = \frac{\alpha\sin Q - \alpha^n\sin nQ + \alpha^{n+1}\sin(n-1)Q}{1-2\alpha\cos Q+\alpha^2}.$$

Für $\alpha = 1$ erhält man nach einer leichten Reduction:

$$\begin{aligned}\Gamma_n &= \sum_{r=0}^{n-1}\cos rQ = \frac{\sin\frac{1}{2}nQ\cos\frac{1}{2}(n-1)Q}{\sin\frac{1}{2}Q} \\ \Sigma_n &= \sum_{r=0}^{n-1}\sin rQ = \frac{\sin\frac{1}{2}nQ\sin\frac{1}{2}(n-1)Q}{\sin\frac{1}{2}Q}\end{aligned} \tag{3}$$

Setzt man $2Q$ an Stelle von $Q$ und beachtet die Ausdrücke für $\sin 2rQ$, $\cos 2rQ$, so folgt aus (3):

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{n-1}\sin rQ\cos rQ &= \frac{1}{2}\frac{\sin nQ\sin(n-1)Q}{\sin Q} \\ \sum_{r=0}^{n-1}\cos^2 rQ &= \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin nQ\cos(n-1)Q}{\sin Q} \\ \sum_{r=0}^{n-1}\sin^2 rQ &= \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sin nQ\cos(n-1)Q}{\sin Q}.\end{aligned} \tag{4}$$

---

[1]) Für $n = \infty$ erhält man unter der Voraussetzung $-1 < \alpha < +1$, wenn $p$, $q$ durch die Gleichungen

$$p\sin q = \alpha\sin Q; \quad p\cos q = 1 - \alpha\cos Q$$

bestimmt sind (vergl. den Artikel »Mechanik des Himmels«, pag. 308):

$$\Gamma_n = \frac{\cos q}{p}; \quad \Sigma_n = \frac{\sin q}{p}.$$

Setzt man $Q = \frac{2\mu\pi}{n}$, so wird

$$\frac{\sin\frac{1}{2}nQ}{\sin\frac{1}{2}Q} = \frac{\sin\mu\pi}{\sin\frac{\mu\pi}{n}}; \qquad \frac{\sin nQ}{\sin Q} = \frac{\sin 2\mu\pi}{\sin\frac{2\mu\pi}{n}}.$$

Diese Ausdrücke verschwinden im allgemeinen, wenn $\mu$ eine ganze Zahl ist; sie werden aber gleich $n$, wenn $\mu$ ein Vielfaches von $n$, also $\mu = in$ ist; dann giebt die erste Formel (3) sowie die zweite Formel (4) $n$, die drei übrigen geben Null. Der zweite Ausdruck giebt übrigens ebenfalls $n$, wenn $n$ eine gerade Zahl, und $\mu = i\frac{n}{2}$ ($i$ ungerade; für gerade $i$ reducirt es sich auf den ersten Ausnahmefall); dann giebt die zweite Formel (4) $n$, die übrigen vier Null. In diesen Fällen sind übrigens die linken Seiten direkt die Summen von lauter Einheiten oder Nullen. Es ist daher

Wenn $\mu$ eine ganze Zahl und kein Vielfaches von $n$ ist

$$\sum_{r=0}^{n-1}\cos r\frac{2\mu\pi}{n} = 0$$
$$\sum_{r=0}^{n-1}\sin r\frac{2\mu\pi}{n} = 0 \qquad (5)$$

Wenn $\mu$ eine ganze Zahl und kein Vielfaches von $n$ ist, und für gerade $n$, wenn $\mu$ kein Vielfaches von $\frac{1}{2}n$ ist:

$$\sum_{r=0}^{n-1}\sin r\frac{2\mu\pi}{n}\cos r\frac{2\mu\pi}{n} = 0$$
$$\sum_{r=0}^{n-1}\sin^2 r\frac{2\mu\pi}{n} = \frac{1}{2}n \qquad (6)$$
$$\sum_{r=0}^{n-1}\cos^2 r\frac{2\mu\pi}{n} = \frac{1}{2}n.$$

Für $\mu = in$ wird

$$\sum_{r=0}^{n-1}\cos r\frac{2\mu\pi}{n} = n; \quad \sum_{r=0}^{n-1}\sin r\frac{2\mu\pi}{n} = 0. \qquad (5a)$$

Für $\mu = in$ und für $\mu = i\frac{n}{2}$ ($n$ eine gerade Zahl) wird

$$\sum_{r=0}^{n-1}\sin r\frac{2\mu\pi}{n}\cos r\frac{2\mu\pi}{n} = 0$$
$$\sum_{r=0}^{n-1}\cos^2 r\frac{2\mu\pi}{n} = n; \quad \sum_{r=0}^{n-1}\sin^2 r\frac{2\mu\pi}{n} = 0. \qquad (6a)$$

Da nun

$$\cos r\frac{2\mu\pi}{n}\cos r\frac{2\nu\pi}{n} = \frac{1}{2}\cos r\frac{2(\mu-\nu)\pi}{n} + \frac{1}{2}\cos r\frac{2(\mu+\nu)\pi}{n}$$
$$\sin r\frac{2\mu\pi}{n}\sin r\frac{2\nu\pi}{n} = \frac{1}{2}\cos r\frac{2(\mu-\nu)\pi}{n} - \frac{1}{2}\cos r\frac{2(\mu+\nu)\pi}{n}$$
$$\sin r\frac{2\mu\pi}{n}\cos r\frac{2\nu\pi}{n} = \frac{1}{2}\sin r\frac{2(\mu-\nu)\pi}{n} + \frac{1}{2}\sin r\frac{2(\mu+\nu)\pi}{n}$$

ist, so erhält man die Resultate in den Columnen:

I), wenn $\mu$ von $\nu$ verschieden, und weder $\mu-\nu$ noch $\mu+\nu$ ein Vielfaches von $n$ ist

II), wenn $\mu$ von $\nu$ verschieden, und entweder $\mu-\nu$ oder $\mu+\nu$ ein Vielfaches von $n$, also

$$\mu = in \pm \nu$$

ist.

III) Wenn $\mu$ und $\nu$ gleich und keine Vielfachen von $n$ sind

IV) Wenn $\mu$ und $\nu$ gleich oder auch verschieden, und beide Vielfache von $n$ sind;

| | I | II | III | IV | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sum_{r=0}^{n-1} \cos r\frac{2\mu\pi}{n}\cos r\frac{2\nu\pi}{n} =$ | 0 | $\frac{1}{2}n$ | $\frac{1}{2}n$ | $n$ | |
| $\sum_{r=0}^{n-1} \sin r\frac{2\mu\pi}{n}\sin r\frac{2\nu\pi}{n} =$ | 0 | $\pm\frac{1}{2}n$ | $\frac{1}{2}n$ | 0 | (7) |
| $\sum_{r=0}^{n-1} \sin r\frac{2\mu\pi}{n}\cos r\frac{2\nu\pi}{n} =$ | 0 | 0 | 0 | 0 | |

Sind jetzt die Werthe von $f(x)$ für $n$ Argumente $x$ bekannt, so erhält man aus den Gleichungen (1) $n$ Gleichungen, aus denen sich $n$ Coëfficienten bestimmen lassen, und zwar als Functionen der übrigen. Die Auflösung dieser Gleichungen wird sehr einfach, wenn die Werthe des Argumentes gleichmässig über die Peripherie vertheilt sind. Seien für $x = 0, \frac{2\pi}{n}, 2\frac{2\pi}{n} \ldots (n-1)\frac{2\pi}{n}$ die Functionswerthe:

$$f(0) = X_0,\ f\left(\frac{2\pi}{n}\right) = X_1,\ f\left(2\frac{2\pi}{n}\right) = X_2 \ldots f\left(i\frac{2\pi}{n}\right) = X_i \ldots f\left((n-1)\frac{2\pi}{n}\right) = X_{n-1}, \quad (8)$$

so ist ganz allgemein:

$$\begin{aligned} X_r = \tfrac{1}{2}A_0 &+ A_1\cos r\frac{2\pi}{n} + A_2\cos 2r\frac{2\pi}{n} + A_3\cos 3r\frac{2\pi}{n} + \ldots \\ &+ B_1\sin r\frac{2\pi}{n} + B_2\sin 2r\frac{2\pi}{n} + B_3\sin 3r\frac{2\pi}{n} + \ldots \end{aligned} \quad (9)$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit

$$\cos r\nu\cdot\frac{2\pi}{n} \quad \text{bezw. mit} \quad \sin r\nu\frac{2\pi}{n},$$

so wird der Coëfficient von

$$\begin{aligned} A_\mu &: \cos\mu r\frac{2\pi}{n}\cos\nu r\frac{2\pi}{n} \qquad \cos\mu r\frac{2\pi}{n}\sin\nu r\frac{2\pi}{n} \\ B_\mu &: \sin\mu r\frac{2\pi}{n}\cos\nu r\frac{2\pi}{n} \qquad \sin\mu r\frac{2\pi}{n}\sin\nu r\frac{2\pi}{n}. \end{aligned}$$

Es genügt offenbar für $\nu$ alle Werthe zwischen 0 und $n-1$ zu setzen, denn für $\nu = in + \nu'$ wird

$$\cos r\nu\frac{2\pi}{n} = \cos r\nu'\frac{2\pi}{n}; \qquad \sin r\nu\frac{2\pi}{n} = \sin r\nu'\frac{2\pi}{n}.$$

Addirt man die sämmtlichen mit den erwähnten Faktoren multiplicirten Gleichungen (9), so erhält man mit Berücksichtigung von (7), da $\nu$ der letzten Bemerkung zu Folge kein Vielfaches von $n$ ist:

$$\begin{aligned} \sum X_r\cos r\nu\frac{2\pi}{n} &= \frac{n}{2}(A_\nu + A_{n-\nu} + A_{n+\nu} + A_{2n-\nu} + A_{2n+\nu} + \ldots) \\ \sum X_r\sin r\nu\frac{2\pi}{n} &= \frac{n}{2}(B_\nu - B_{n-\nu} + B_{n+\nu} - B_{2n-\nu} + B_{2n+\nu} - \ldots). \end{aligned} \quad (10a)$$

Und für $\nu = 0$ folgt:

$$\sum X_r = \frac{n}{2}(A_0 + 2A_n + 2A_{2n} + \ldots). \quad (10b)$$

Ist $n$ eine gerade Zahl, und $\nu = \frac{n}{2}$, so tritt $A_{i\frac{n}{2}}$ in der ersten Formel (10a) zweimal auf, nämlich mit $A_{(i-1)n+\nu}$ und $A_{in-\nu}$ und es wird demnach

$$\sum X_r\cos r\pi = n(A_{\frac{n}{2}} + A_{3\frac{n}{2}} + A_{5\frac{n}{2}} + \ldots), \quad (10c)$$

während sich für die zweite Zeile in (10a) Null ergiebt.

Die $n$ Functionswerthe liefern demnach die Coëfficienten

$$A_0,\, A_1 \ldots A_{\frac{n}{2}};\qquad B_1,\, B_2 \ldots B_{\frac{n}{2}-1} \quad \text{für gerade } n$$
$$A_0,\, A_1 \ldots A_{\frac{n-1}{2}};\; B_1,\, B_2 \ldots B_{\frac{n-1}{2}} \quad \text{für ungerade } n$$

als Functionen der übrigen. Sind aber die Reihen hinreichend convergent, so dass man die höheren Coëfficienten vernachlässigen kann, so wird man die linken Seiten als die Ausdrücke der gesuchten Coefficienten selbst ansehen können, wobei aber $A_\nu$, $B_\nu$ um die Beträge $A_{n-\nu} + \ldots$, $B_{n-\nu} + \ldots$ fehlerhaft sind, woraus folgt, dass die Coëfficienten um so genauer erhalten werden, je grösser $n$ gewählt wird, dass aber unter allen Umständen die späteren Coefficienten immer ungenauer werden. Mit dieser Beschränkung hat man:

$$\left.\begin{aligned} A_\nu &= \frac{2}{n}\sum_{r=0}^{n-1} X_r \cos r\nu\frac{2\pi}{n}; \qquad A_{\frac{n}{2}} = \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r X_r \\ B_\nu &= \frac{2}{n}\sum_{r=0}^{n-1} X_r \sin r\nu\frac{2\pi}{n}. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Man wird stets $n$ als gerade Zahl ansehen können; überdies von der Form $4m$, da man hierbei in jedem Quadranten gleich viele Theile hat, wodurch die Formeln für die Anwendung etwas bequemer werden. Berücksichtigt man zunächst jeden Quadranten für sich, so wird:

| | | |
|---|---|---|
| in dem Quadranten für | $r = 0 \ldots\ldots m-1$ <br> $r' = r$ | $r = m \ldots\ldots 2m-1$ <br> $r = m + r'$ |
| der Coëfficient von $X_r$ | $\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(r\nu\frac{\pi}{2m}\right)$ | $\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(\nu\frac{\pi}{2} + r'\nu\frac{\pi}{2m}\right)$ |
| daher für gerade $\nu$ | $\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(\nu r\frac{\pi}{2m}\right)$ | $(-1)^{\frac{\nu}{2}}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(r'\nu\frac{\pi}{2m}\right)$ |
| und für ungerade $\nu$ | $\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(r\nu\frac{\pi}{2m}\right)$ | $\begin{matrix}-(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\sin\\ +(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\cos\end{matrix}\left(r'\nu\frac{\pi}{2m}\right)$ |
| in dem Quadranten für | $r = 2m \ldots\ldots 3m-1$ <br> $r = 2m + r''$ | $r = 3m \ldots\ldots 4m-1$ <br> $r = 3m + r'''$ |
| der Coëfficient von $X_r$ | $\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(\nu\pi + r''\nu\frac{\pi}{2m}\right)$ | $\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(3\nu\frac{\pi}{2} + r'''\nu\frac{\pi}{2m}\right)$ |
| daher für gerade $\nu$ | $\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(r''\nu\frac{\pi}{2m}\right)$ | $(-1)^{\frac{\nu}{2}}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(r'''\nu\frac{\pi}{2m}\right)$ |
| und für ungerade $\nu$ | $-\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(r''\nu\frac{\pi}{2m}\right)$ | $\begin{matrix}+(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\sin\\ -(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\cos\end{matrix}\left(r'''\nu\frac{\pi}{2m}\right).$ |

Es folgt daher für die Eintheilung des Umkreises in $4m$ Theile:

für gerade $\nu$:

$$\left\{\begin{aligned} A_\nu &= \frac{1}{2m}\sum_{r=0}^{m-1}\left[(X_r + X_{2m+r}) + (-1)^{\frac{\nu}{2}}(X_{m+r} + X_{3m+r})\right]\cos r\nu\frac{\pi}{2m} \\ B_\nu &= \frac{1}{2m}\sum_{r=0}^{m-1}\left[(X_r + X_{2m+r}) + (-1)^{\frac{\nu}{2}}(X_{m+r} + X_{3m+r})\right]\sin r\nu\frac{\pi}{2m} \end{aligned}\right. \quad (12a)$$

$A_{2m}$ nur mit dem halben Betrage zu nehmen;

für ungerade $\nu$:

$$\left\{\begin{aligned} A_\nu &= \frac{1}{2m}\sum_{r=0}^{m-1}\left[(X_r - X_{2m+r})\cos r\nu\frac{\pi}{2m} - (-1)^{\frac{\nu-1}{2}}(X_{m+r} - X_{3m+r})\sin r\nu\frac{\pi}{2m}\right] \\ B_\nu &= \frac{1}{2m}\sum_{r=0}^{m-1}\left[(X_r - X_{2m+r})\sin r\nu\frac{\pi}{2m} + (-1)^{\frac{\nu-1}{2}}(X_{m+r} - X_{3m+r})\cos r\nu\frac{\pi}{2m}\right]. \end{aligned}\right. \tag{12b}$$

Setzt man daher für die Summe und Differenz der Functionswerthe, deren Argumente um 180° verschieden sind:

$$\begin{aligned} X_r + X_{2m+r} &= (r) = f\left(r\frac{2\pi}{n}\right) + f\left(\pi + r\frac{2\pi}{n}\right) \\ X_r - X_{2m+r} &= [r] = f\left(r\frac{2\pi}{n}\right) - f\left(\pi + r\frac{2\pi}{n}\right) \end{aligned} \tag{13}$$

ein, so wird:

für gerade $\nu$

$$\left\{\begin{aligned} A_\nu &= \frac{1}{2m}\sum_{r=0}^{m-1}\{(r) + (-1)^{\frac{\nu}{2}}(m+r)\}\cos r\nu\frac{\pi}{2m} \\ B_\nu &= \frac{1}{2m}\sum_{r=0}^{m-1}\{(r) + (-1)^{\frac{\nu}{2}}(m+r)\}\sin r\nu\frac{\pi}{2m} \end{aligned}\right. \tag{14a}$$

$$A_{2m} = \frac{1}{4m}\sum_{r=0}^{m-1}\{(-1)^r(r) + (-1)^{m+r}(m+r)\}$$

für ungerade $\nu$

$$\left\{\begin{aligned} A_\nu &= \frac{1}{2m}\sum_{r=0}^{m-1}\left\{[r]\cos r\nu\frac{\pi}{2m} - (-1)^{\frac{\nu-1}{2}}[m+r]\sin r\nu\frac{\pi}{2m}\right\} \\ B_\nu &= \frac{1}{2m}\sum_{r=0}^{m-1}\left\{[r]\sin r\nu\frac{\pi}{2m} + (-1)^{\frac{\nu-1}{2}}[m+r]\cos r\nu\frac{\pi}{2m}\right\}. \end{aligned}\right. \tag{14b}$$

Ist eine Function $F(x, y)$ durch ihre analytischen Ausdrücke oder eine Reihe von Functionswerthen gegeben, so wird diese, in eine FOURIER'sche Reihe entwickelt:

$$F(x, y) = \sum_{\iota,\varkappa}[A_{\iota,\varkappa}\cos(\iota x + \varkappa y) + B_{\iota,\varkappa}\sin(\iota x + \varkappa y)] \tag{15}$$

sein, wobei die Coëfficienten durch FOURIER'sche Doppelintegrale ausgedrückt werden. In vielen Fällen, ist es aber möglich, zunächst eine **analytische** Entwickelung nach einer Variabeln einzuführen. Sei also

$$\begin{aligned} F(x, y) = Z_0 &+ Z_1\cos y + Z_2\cos 2y + Z_3\cos 3y + \ldots \\ &+ Z_1'\sin y + Z_2'\sin 2y + Z_3'\sin 3y + \ldots \end{aligned} \tag{16}$$

gefunden, so werden $Z_0, Z_1, Z_2 \ldots Z_1', Z_2' \ldots$ Functionen von $x$ sein, deren analytische Form

$$Z_\iota = f_\iota(x); \quad Z_\iota' = f_\iota'(x)$$

bekannt ist. Auf diese lassen sich daher die Methoden der mechanischen Quadraturen anwenden, und man erhält durch dieselbe:

$$\begin{aligned} Z_\iota &= \tfrac{1}{2}A_0^{(\iota)} + A_1^{(\iota)}\cos x + A_2^{(\iota)}\cos 2x + \ldots B_1^{(\iota)}\sin x + B_2^{(\iota)}\sin 2x + \ldots \\ Z_\iota' &= \tfrac{1}{2}C_0^{(\iota)} + C_1^{(\iota)}\cos x + C_2^{(\iota)}\cos 2x + \ldots D_1^{(\iota)}\sin x + D_2^{(\iota)}\sin 2x + \ldots \end{aligned} \tag{17}$$

Setzt man diese Reihen in (16) ein[1]), und multiplicirt mit $\cos iy$, $\sin iy$ aus, so erhält man die gesuchte Form (15). Auf diese Lösung lässt sich leicht der Fall reduciren, dass die Entwickelung von $F(x, y)$ die Form hat:

$$F(x, y) = X_0 + X_1 \cos(y - X) + X_2 \cos 2(y - X) + X_3 \cos 3(y - X) + \ldots \\ + X_1' \sin(y - X) + X_2' \sin 2(y - X) + X_3' \sin 3(y - X) + \ldots, \quad (18)$$

wobei $X$, $X_0$, $X_1$, $X_2 \ldots X_1'$, $X_2' \ldots$ Functionen von $x$ sind, deren analytischer Ausdruck bekannt ist. Es lässt sich nämlich schreiben:

$$F(x,y) = X_0 + (X_1 \cos X - X_1' \sin X)\cos y + (X_2 \cos 2X - X_2' \sin 2X)\cos 2y + \ldots \\ + (X_1 \sin X + X_1' \cos X)\sin y + (X_2 \sin 2X + X_2' \cos 2X)\sin 2y + \ldots, \quad (18a)$$

wodurch wieder die Form (16) hergestellt ist. N. Herz.

1) Diese Methode verwendet Hansen z. B., indem die unendlichen Reihen nach den mittleren Anomalien des störenden Himmelskörpers analytisch entwickelt werden, wogegen er für die Coëfficienten, welche Functionen der Anomalie des gestörten Körpers sind, die mechanische Quadratur anwendet. Vergl. den Artikel »Mechanik des Himmels«, No. 58.

# Berichtigungen.

## a) Zum ersten Band.

pag. 43, Zeile 10 v. o. statt »$OD$« lies »$O'D$«.
" 57, " 6 v. u. nach »Februar« ist einzuschalten »1473«.
" 63, " 16 v. o. statt »$CC_1M = y$« lies »$C_1CM = y$«.
" 65, " 20 v. o. und 12 v. u. statt »$- R_4$« lies »$+ R_3$«.
" 82, " 19 v. u. statt »$-\frac{ee_1'}{a^3}\sin M_1 \cos(M_1 + \pi)$« lies »$+\frac{ee_1}{a^3}\sin M_1 \cos(M_1 + \pi)$«.
" 114, " 17 v. u. ist der Doppelpunkt vor $\mu$ zu streichen und nach $\frac{1}{30}$ ein Komma zu setzen.
" 154, " 17 v. u. statt »$m_2$« lies »$m_3$«.
" 164, " 12 v. u. statt »$\log\cos A$« lies »$\log dA$«.
" 167, " 2 u. 3 v. u. fehlt dreimal »∂«.
" 168, " 8 v. o. statt »$\mu$« lies »$-\mu$«.
" 170, " 18 v. o. statt »0·00187« lies »0·001187«.
" 174, " 17 v. u. statt »$- =$« lies »$= -$«.
" " " 6 v. u. statt »$- h$« lies »$+ h$«.
" " " 5 v. u. statt »$+ h'$« lies »$- h$«.
" 182, " 16 v. o. statt »$P_1ZQ$« lies »$P_1QZ$«.
" " " 18 v. o. statt »$P_{11}Q$« lies »$P_1Q_1$«.
" " " 14 v. u. fehlt »$=$«.
" 183, " 13 v. u. statt »$P$« lies »$P_1$«.
" 184, " 16 v. o. statt »$\varphi$« lies »$90^0 - \varphi$«.
" " " 17 v. o. statt des zweiten »$t$« lies »$t_1$«.
" 185, " 21 v. u. statt »$\delta$« lies »$\vartheta$«.
" " " 20 v. u. statt »$+ f\cos t$« lies »$- f\cos t$«.
" " " 15 v. u. statt »$+ f$« lies »$- f$«.
" 196, " 4 v. u. statt »$\alpha$« lies »$\alpha_0$«.
" 197, " 3 v. o. statt »$\sin\delta$« lies »$\sin\zeta$«.
" 199, " 7 v. o. statt des zweiten »$\nu_1$« lies »$\nu_2$«.
" " " 19 v. o. statt »$\alpha$« lies »$\alpha_0$«.
" 208, " 10 v. o. statt »$\log p$« lies »$\log\tan p$«.
" 253, " 19 v. u. statt »6« lies »$\gamma$«.
" 486, " 2 v. u. statt »$n$« lies »$n_1$«.
" 489, " 6 u. 7 v. o. statt »$\tan\varphi$« lies »$\cot\varphi$«.
" 507, " 10 v. o. statt »$s^2$« lies »$s_0^2$«.

pag. 511, Zeile 10 v. u. statt »$\rho_1 h$« lies »$\rho h$«.
" 514, " 6 v. o. statt »$(R_1 + R_2)^2$« lies »$(R_1 + R_2)^3$«.
" 515, " 13 v. o. statt »$g \sin^2\varphi$« lies »$g^2 \sin^2\varphi$«.
" 520, " 12 v. u. statt »1« lies »0«.
" 521, " 12 v. u. statt »$\sin(_2 + \psi_2)$« lies »$\sin(s_2 + \psi_2)$«.
" 522, " 11 v. o. statt »$\sin$« lies »$\cos$«.
" 539, " 11 v. o. statt »(I) — (II)« lies »(I) — (III)«.
" " " 12 v. o. statt »$\gamma$« lies »$\log \gamma$«.
" 545, " 3 u. 4 v. o. statt »$G$« lies »$Q$«.
" 550, " 3 v. o. statt »7·9459961« lies »7·9544961«.
" 551, " 17 v. o. statt »9·8950788« lies »0·8950788«.
" 552, " 18 u. 20 v. u. statt »$y'''$ und $y'$« lies »$\log y'''$ und $\log y'$«.
" 556, " 14 v. u. statt »$\cos \psi_2$« lies »$\sin \psi_2$«.
" 557, " 3 v. o. statt »9·424841« lies »9·824841«.
" 558, " 16 v. o. statt »0·286616« lies »0·282616«.
" 561, " 5 v. u. statt »226°« lies »326°«.
" 562, " 8 v. o. statt »$\zeta$« lies »$\xi$«.
" " " 14 v. u. statt »$s$« lies »$s_2$«.
" 566, " 6 v. o. statt »6·898817« lies »6·894817«.
" " " 11 v. o. statt »0·281082« lies »0·271082«.
" 567, " 4 v. o. statt »$+ \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} \operatorname{cotang}^4 \frac{v}{2}$« lies »$- 3 \operatorname{cotang}^4 \frac{v}{2}$«.
" 619, " 15 v. u. statt »2099« lies »1999«.
" 663, " 22 v. u. statt »$P'$« lies »$P$«.
" " " 21 v. u. statt »$90° - \alpha$« lies »$90° + \alpha$«.
" " " 14 v. u. statt »$\sin \varepsilon \sin b$« lies »$- \sin \varepsilon \sin b$«.
" " " 6 v. u. statt »$\cos N' \cos \varepsilon \sin \alpha$« lies »$\cos N' \cos \delta \sin \alpha$«.
" 668, " 16 v. o. statt »84« lies »659«.
" " " In dem Beispiel fehlt die Angabe $\varphi = 49° 0' 30''$.
" 681, " 1 v. u. statt »(8) und (9)« lies »(9) und (10)«.
" 682, " 4 v. o. statt »$- \varepsilon\zeta \cos 2 \Omega$« lies »$+ \varepsilon\zeta \cos 2 \Omega$«.
" " " 6 v. o. statt »$+ 2\delta \cos 2 \Omega$« lies »$- 2\delta \cos 2 \Omega$«.
" 683, " 5 v. o. statt »(15)« lies »(14)«.
" 697, " 14 v. u. statt »$\frac{1}{2} \frac{s}{r}$« lies »$\frac{1}{2} \frac{s^2}{r^2}$«.
" 729, " 9 v. u. statt des zweiten »$f$« lies »$f_2$«.
" 735, " 15 u. 16 v. o. statt »Brechungscoëfficienten« lies »Ausdehnungscoëfficienten«.
" 744, in der Figur (220) ist $Q$ und $Q_1$ verwechselt.

## b) Zum zweiten Band.

pag. 23, Zeile 4 v. o. statt »Neuhaven« lies »Newhaven«.
" 49, Zeile 12 v. u. fehlt hinter »Haar« die Schlussklammer.
" 51, " 6 v. u. statt »denen« lies »dem«.
" 67, " 6 v. o. statt »$a$« lies »$\frac{1}{a}$«
" 72, " 6 v. u. statt »wurden« lies »wurde«.
" 89, " 11 v. o. ist »sich« zu streichen.
" " " 14 v. o. statt »auftreten« lies »bewirkt«.
" " " 21 v. o. statt »in anderen« lies »andere«.
" 92, in der Anmerkung statt »Astronomical« lies »Astronomical«.
" 283, statt »Figur 272« lies »Figur 271«.
" 304, Zeile 12 v. u. statt »beobachten« lies »beachten«.
" 319, " 7 v. u. statt »$X, Y, Z$« lies »$X_1, Y_1, Z_1$«.
" 350, " 4 v. u. ist $\frac{d\Delta N}{dt} = \frac{1}{r^2}\int Q\,dt$ hinzuzusetzen.
" 351, letzte Zeile statt »dienen« lies »erhalten wurden«.
" 383, fehlt in Formel (20) bei $\Omega'$ rechts der Faktor $k^2m'$.
" 439, Zeile 17 v. u. die eckige Klammer ] am Schluss der Zeile ist von hier an den Schluss der 15. Zeile v. u. zu setzen.

---

Breslau, Eduard Trewendt's Buchdruckerei (Setzerinnenschule).